

resolventes as equações $t^2 - 10t + 21 = 0$ e $t^2 + 11t + 42 = 0$, respectivamente. Achá-se $x_1 = 7$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 7$ e $x_3 = -11/2 + \sqrt{47}i/2$, $y_3 = -11/2 - \sqrt{47}i/2$, $x_4 = -11/2 - \sqrt{47}i/2$, $y_4 = -11/2 + \sqrt{47}i/2$.

Solução de Alberto Pais (de Lisboa).

Enviaram também soluções correctas: Angel Chain (de Gijón-Espanha), Carlos A. Gonçalves Gomes (do Pórtico), Paul Richard (de Portalegre) e T. Ferreira Rato (S. Tiago-Cabo Verde).

1508 — Sobre as três arestas de um triedro tri-rectângulo marquem-se três comprimentos $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$ e trace-se o triângulo $[ABC]$. Determinar: 1.º — a expressão da área deste triângulo; 2.º — a distância $\overline{OD} = d$ do ponto O ao plano ABC ; 3.º — o que devem ser b e c , quando sendo dados a e d , para que o triângulo ABC tenha uma superfície dada. R: 1.º — Seja $\overline{BC} = \alpha$, $\overline{AB} = \gamma$, $\overline{CA} = \beta$ e $p = (\alpha + \beta + \gamma)/2$. Será $\alpha = \sqrt{b^2 + c^2}$, $\beta = \sqrt{a^2 + c^2}$, $\gamma = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ora, a área S do triângulo é dada pela expressão conhecida da Geometria elementar com o nome de fórmula de Herão: $S = \sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$ donde, substituindo p , α , β e γ pelos valores atrás achados e efectuando as operações e necessárias simplificações, se tira $S = \sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}/2$. 2.º — O volume do tetraedro $[COAB]$ é dado pela expressão

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} ab \right) c = \frac{1}{6} abc$$
. A distância d é a altura do tetraedro referida ao vértice O . Portanto $V = Sd/3 = abc/6$. Logo $d = \frac{abc}{2S} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + a^2 c^2 + b^2 c^2}}$.

3.º — De $d = \frac{abc}{2S}$ conclui-se que $bc = 2Sd/a$, isto é, b e c são inversamente proporcionais.

Solução resumida baseada na solução de Paul Richard (de Portalegre).

1509 — Mostrar que

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) \dots (i+p) = \frac{n(n+1) \dots (n+p+1)}{p+2}$$

R: Da identidade $\sum_{i=1}^n i(i+1)(i+2) \dots (i+p+1) -$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) \dots (i+p+1) = n(n+1)(n+2) \dots (n+p+1)$$

deduz-se

$$\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) \dots (i+p+1) = \sum_{i=1}^{n-1} (i-1)i(i+1) \dots (i+p)$$

Substituindo na 1.ª identidade $\sum_{i=1}^{n-1} i(i+1) \dots (i+p+1)$

por $\sum_{i=1}^{n-1} (i-1)i \dots (i+p)$ vem $\sum_{i=1}^n i(i+1) \dots$

$$\dots (i+p) [i+p+1 - (i-1)] = n(n+1) \dots (n+p+1)$$

$$\text{ou } (p+2) \sum_{i=1}^n i(i+1) \dots (i+p) = n(n+1) \dots (n+p+1)$$

Dividindo por $(p+2)$ ambos os membros da última identidade:

$$\sum_{i=1}^n i(i+1) \dots (i+p) = \frac{n(n+1)(n+2) \dots (n+p+1)}{p+2} \quad \text{q. e. d.}$$

Solução de Paul Richard (de Portalegre).

Enviou também solução correcta J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

1510 — Pelo ponto médio do lado AB dum triângulo $[ABC]$ trace-se uma recta arbitrária; designando por N e P os pontos de encontro dessa recta com BC e AC respectivamente, mostrar que têm

$$\text{lugar as relações: } \frac{\overline{BN}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{CP}} \text{ e } \frac{\overline{MN}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}$$

R: Pelos vértices do triângulo dado abaxem-se perpendiculares $(\overline{AQ}, \overline{BR}, \overline{CS})$ sobre a recta arbitrária e do vértice A , trace-se \overline{AT} paralela ao lado oposto $\overline{BC} = a$; resulta: $[AMT] = [BMN]$. $\therefore \overline{AT} = \overline{NB}$, $\overline{MT} = \overline{MN}$, $\overline{BR} = \overline{AQ}$ donde $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{CS}}$; $\frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{BR}}$; multi-

plícando membro a membro, vem $\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} \times \frac{\overline{CN}}{\overline{NB}} = 1$ donde

$$\frac{\overline{CN}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{BN}}{\overline{AP}} \text{ e } \frac{\overline{PN}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{TN}}{\overline{AC}} = \frac{2\overline{MN}}{\overline{AC}} \therefore \frac{\overline{MN}}{\overline{AC}} = \frac{1}{2} \frac{\overline{PN}}{\overline{PC}}$$

Solução de J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

Enviaram também soluções correctas: Alberto Pais (de Lisboa) e Paul Richard (de Portalegre).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

29 — ILIOVICI, G. ET ROBERT, P. — *Géométrie* — Librairie de L'enseignement Technique — Léon Eyrolles, Editeur — Paris, 1937. VII + 380 págs.

Esta obra que faz parte da colecção «Les mathé-

matiques pour l'Enseignement Secondaire» destina-se aos alunos da classe de matemáticas, aos candidatos às grandes Escolas (Saint-Cyr, Institut Agronomique, etc.) e aos alunos das Escolas Normais superiores e de ensino primário.

Em França, como em Portugal, onde os programas têm sido como que um reflexo dos programas franceses, a geometria é a parte das matemáticas que no ensino secundário tem um tratamento quasi definitivo. Mas ao passo que em França na classe das matemáticas são ministradas noções complementares de geometria, em Portugal, pode dizer-se, que o seu estudo termina no 2.º ciclo. O programa de métodos de geometria, que constitui a matéria do 7.º ano de ciências não é mais do que um capítulo de introdução que se encontra em qualquer F. G. M. Porque se é certo que a matéria comporta grande desenvolvimento, não é menos certo que a formação do aluno do 7.º ano o não permite, e teremos de ficar no seu ensino pelas noções gerais, pelas «receitas» que permitam ao aluno responder mais ou menos bem às *preguntinhas* das provas escritas.

Os autores da obra, reconhecendo que a geometria é a parte das matemáticas que mais contribui para a formação do raciocínio, além de que é um exemplo frisante do modo como a ciência se constitui, a partir do concreto, do qual ela guarda os vestígios na forma das proposições que permite enunciar, saindo um pouco fora do programa, dão, além dos conhecimentos suficientes para a preparação para os exames, uma idéia dos métodos cujo emprêgo se encontra em tôdas as questões de matemática. Sob este aspecto o livro é útil especialmente aos professores do nosso ensino secundário. Além disso termina o livro por cerca de 400 exercícios e problemas que vão da simples aplicação do curso a questões que exigem uma investigação cuidada, indicando-se, além disso, a ordem de dificuldade dos problemas. Um resumo do índice dará idéia dos assuntos tratados:

Livro I — Transformações — Noções preliminares; deslocamentos e simetrias; teoria dos vectores livres; homotetia e semelhança; perspectiva; potência; eixos radicais; polos e polares; inversão.

Livro II — Cônicas — Propriedades elementares e pontuais das cônicas; Intersecção duma cônica com uma recta; tangentes, propriedades tangenciais e focais das cônicas; elipse, hipérbole e parábola; secções planas de cones de revolução; generalidades sobre as operações circulares do plano.

J. da Silva Paulo

30 — OTERO, E. y MATA, R. — Problemas de Técnica-Física — Colección Científica «Koel», Madrid, 20 pesetas.

É um pequeno manual de problemas de Física e de Química-Física de nível correspondente ao dos exames de aptidão às escolas superiores e mesmo dos primeiros anos destas escolas.

Alguns problemas reduzem-se à simples aplicação de fórmulas e apresentam, por isso, um carácter pouco formativo; noutros problemas as unidades em que deveriam estar expressos os dados ou os resultados, não são indicadas ou são-no de maneira insuficiente.

Afora estes defeitos, julgamos que será útil aos estudantes a sua consulta.

A. M. da Silva

31 — CAMPO, José Luiz F. del — Prontuario Matemático — Colección Científica «KOEL» — Madrid — 1.ª edição. 1941. Preço 6 Pts.

O Prontuário Matemático, com o sub-título de conjunto de tábuas muito prático, é um livrinho de formato reduzido, que cabe na algibeira do colete o que o torna bastante prático. Com 136 páginas contém tabelas de diversa natureza como logaritmos decimais e naturais, funções trigonométricas, potências, números primos, etc. Tais tabelas são sempre úteis, em especial aos estudantes, pelo seu baixo preço, se bem que sejam substituídas com vantagem pela máquina de calcular ou até mesmo pela régua de cálculo. Merece-nos, no entanto, alguns reparos o Prontuário. O primeiro diz respeito à duplicação desnecessária de tabelas de logaritmos das págs. 63 e 98 e das págs. 129 e 132. Esta última duplicação provém do facto de se julgarem diferentes os logaritmos naturais dos hiperbólicos. Acresce ainda usar-se a designação de logaritmos naturais para os decimais. Mais graves são os erros que se notam na tabela da pág. 31, intervalos de tempo, que está na sua quasi totalidade errada; assim, na 3.ª linha aparece 8.766 por 8.764 e 3.156 por 3.160; na 4.ª linha 169 por 168, 1.068 por 1.008 e 8.848 por 6.048; na 5.ª linha 10^1 por 10^4 ; na 7.ª linha $4,167 \times 10^2$ por $4,166 \times 10^{-2}$; na 8.ª linha 10^1 por 10^{-2} ; e na 9.ª linha 15^3 por 10^{-4} e 10^2 por 10^{-2} . Ainda nesta tabela se emprega indistintamente o . para separar as casas decimais ou as dos milhares, o que se presta a confusões.

A reprodução por fotogravura de tabelas de confiança, como se faz nas páginas 63, 85 e 98 é de aconselhar para evitar erros da espécie dos apontados.

J. da Silva Paulo

PUBLICAÇÕES MATEMÁTICAS RECEBIDAS POR PERMUTA

NACIONAIS :

Portugaliae Mathematica — Vol. 4 (1943), Fascículos 1 e 2 — Gaetano Fichera. *Intorno al passaggio al limite sotto il segno d'integrale* — Hugo Ribeiro. *Sur les espaces à métrique faible* — A. de Mira Fernandes. *Pseudo-extensori* — J. Vicente Gonçalves. *Sur la formule de Rodrigues* — Hugo Ribeiro. *Corrections à la note «Sur les espaces à métrique faible»* — A. de Mira Fernandes. *Funzioni continue sopra una superficie sferica* — Henry Schärf. *Ueber links- und rechtsseitige Stieltjesintegrale und deren Anwendungen*.

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise Geral :

Caderno n.º 1 — *Topologia Geral — Espaços de Sierpinski* — por António Aniceto Monteiro.

Caderno n.º 2 — *Teoria Geral da Medida — Introdução* — por Laureano Barros.

ESTRANGEIRAS :

Argentina

Boletín Matemático — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matemática — Ano XVI, n.ºs 3 a 11.

Cuba

Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas — Universidad de La Habana — Vol. I, n.º 3, 1943.

Espanha

Euclides — (Madrid) — Revista mensal de Ciências Exactas, Físicas, Químicas y Naturales — Tomo III, n.ºs 32, 33 e 34.

Matemática Elemental — (Madrid) — Revista publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª série, tomo III, n.º 47, 1943.

OUTRAS PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XXVI, n.º 3, Maio-Junho de 1943.

Revista Polytechnica — (São Paulo) — Ano XXXIX, n.º 142.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.ºs 141 e 142.

Jean Perrin — *A comemoração em Lisboa do primeiro aniversário da sua morte* — (conferências proferidas, no Instituto Francês em Portugal, pelos Profs. Manuel Valadares e A. Celestino da Costa) — Livraria Francesa — Lisboa, 1943.

Seguros — Ano V, n.º 29.

Prontuario Matemático — Colección Científica «Koel» — Madrid, 6 ptas.

Problemas de Técnica-Física — por E. Otero y R. Mata — Colección Científica «Koel» — Madrid, 20 ptas.

O Plano Beveridge Criticado — Por F. Ramos da Costa — Cadernos da «Seara Nova» — Lisboa, 1943.

Publicações da Embaixada Britânica em Lisboa.
Publicações da Legação dos Estados Unidos da América do Norte.

AOS «AMIGOS DA GAZETA»

As contas sistematicamente publicadas durante dois anos não são, parece, suficientemente esclarecedoras da situação financeira da revista. Num dos próximos números, a Administração pensa poder apresentar aos nossos leitores e assinantes um quadro tão claro quanto possível desta situação, que, neste momento, não é, infelizmente, o que seria para desejar. O número dos assinantes não tem aumentado no ritmo que esperavamos e até no início deste ano se deu uma redução sensível (mais de uma centena!) acusada na altura da renovação da assinatura, cuja causa não sabemos, completamente, explicar.

Há, evidentemente, erros e pontos fracos que procuraremos eliminar ou reduzir. Nem todas as dificuldades poderão ser vencidas — sabemos-lo antecipadamente — e algumas persistirão.

Tentar-se-á uma maior propaganda da revista e, para isso, contamos, como sempre com os nossos lei-

tores esperando estes contribuam largamente para a tornar mais conhecida.

Há, porém, também algo de agradável a assinalar. Assim, notaremos o aumento de colaboradores e a expansão crescente da revista, fora da metrópole. A «Gazeta de Matemática» começa a ser lida em Espanha e esperamos o seja em breve, nas repúblicas Ibero-Americanas! Até de Angola nos chega por mãos amigas o pedido de uma dezena de assinaturas!

Não queremos também, para terminar, deixar de assinalar um facto que sensibiliza bastante. O de um certo número de Amigos da Gazeta, conhecedores da crise financeira que esta atravessa, terem espontaneamente enviado o montante das assinaturas para 1944! Trata-se de alguns dos nossos colaboradores que desde o início recebiam gratuitamente os números saídos e até de alguns componentes da Redacção.

M. Z.