

1899 — Numa urna há n bolas brancas e pretas. Qual a composição da urna, sabendo-se que o número de bolas brancas é igual ao valor médio do n.º de extracções necessárias para se obter uma bola branca, su-

pondo que se vai extraindo, sucessivamente, ao acaso uma bola da urna, com reposição ao fim de cada extracção. Discutir.

Problema proposto por Laureano Barros (do Pôrto).

ALGUMAS DAS SOLUÇÕES RECEBIDAS

1193 — Qual a fórmula da trigonometria plana análoga à fórmula fundamental da trigonometria esférica? Passar desta para aquela. R: *As fórmulas análogas fundamentais da trigonometria rectilínea e esférica, são $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ e $\cos a = -\cos b \cdot \cos c + \sin b \sin c \cos A$. Se considerarmos os comprimentos dos lados a, b, c dum triângulo esférico, bastante pequenos em relação ao raio R , podemos tomar o triângulo considerado como plano. Se fizermos depois:*

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2R^2}, \quad \cos b = 1 - \frac{b^2}{2R^2}, \quad \cos c = 1 - \frac{c^2}{2R^2},$$

$$\sin b = \frac{b}{R} \text{ e } \sin c = \frac{c}{R}, \text{ e substituírmos estes valores na}$$

fórmula fundamental da trigonometria esférica, vem:

$$1 - \frac{a^2}{2R^2} = \left(1 - \frac{b^2}{2R^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{c^2}{2R^2}\right) + \frac{bc}{R^2} \cdot \cos A, \text{ donde}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A - \frac{bc}{R^2} \cdot \text{Mas como } R \text{ é muito}$$

grande em relação aos lados, $\frac{bc}{R^2}$ despreza-se, e temos

então, como pretendíamos $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$.

Solução de T. Ferreira Rato (de S. Tiago — Cabo Verde).

1508 — Por lapso, ao ser publicada uma solução d'este problema no n.º 18 da «Gazeta de Matemática», omitiu-se o terem sido recebidas soluções correctas do mesmo problema de Alberto Pais (de Lisboa) e de J. S. Faria de Abreu (de Penafiel).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de criticas apparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas criticas de livros e outras publicações de matemática de que os autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

35 — Memorandum On Official Statistics — Publicação da Royal Statistical Society, enviada pelos Serviços Culturais do British Council.

Em Outubro de 1942 a Royal Statistical Society nomeou uma comissão que foi encarregada de elaborar um relatório sobre a organização dos Serviços Officiais de Estatística antes, durante e depois da guerra, focando os seguintes pontos:

- a) Preenchimento dos quadros das Repartições.
- b) Relações entre as Repartições.
- c) Vantagens e desvantagens de alguns esquemas de organização para o após-guerra.

É dos resultados d'este inquérito — a que na nossa modesta opinião devia ser dada a mais larga publicidade — que trata a publicação acima referida.

Dada a relativa extensão do trabalho não é possível, como seria nosso desejo, fazer uma apreciação cuidadosa e pormenorizada do seu conteúdo mas, desde já, dada a importância do assunto e a sua manifesta oportunidade, tomamos a liberdade de chamar para o mesmo a atenção dos nossos dirigentes, particularmente daqueles que se encontram à frente dos Serviços Estatísticos das organizações officiais.

O índice, que fornece já uma idéia aproximada do carácter do trabalho realizado, dos problemas examinados, das criticas formuladas e das soluções previstas, é o seguinte:

1. — *Introdução*: — Observações preliminares. — Classificação das Repartições. — Definição de «estatístico» e «estatística».

2. — *Posição antes da guerra*: — A colheita dos dados. — A análise do material estatístico nas Repartições. — Preenchimento dos quadros das Repartições. — Ligação entre as Repartições. — Sumário.

3. — *Desenvolvimentos durante a guerra*: — Falta de estatísticos quando se declarou a guerra. — «The Central Statistical Office». — Coordenação dos trabalhos de estatística matemática. — Mecanização. — Mudança da attitude pública em relação à Estatística. — Sumário.

4. — *Necessidades do periodo do post-guerra*: — Suposição fundamental. — A criação de unidades estatísticas. — Preenchimento dos quadros destas unidades. — Coordenação. — Posição especial de certas Repartições.

Sumário.

Parece-nos útil acentuar a importância de certas apreciações mormente daquelas que dizem respeito ao período de antes da guerra por envolverem uma crítica cerrada à organização então existente.

Assim é posta em relêvo a orgânica defeituosa dos Serviços Estatísticos, a falta de coordenação dos mesmos, a colheita desordenada de dados sem fim determinado, a repugnância do público em fornecer informações, o preenchimento dos quadros por pessoal sem qualificações profissionais, a ideia generalizada a quasi todo o funcionalismo de que a estatística não conta como habilitação profissional e não passa dum conhecimento transitório sem importância para a carreira administrativa, a não qualificação profissional do Estatístico, etc., etc.

A guerra teve a virtude de pôr a nú tôdas estas deficiências, obrigando a uma reorganização apressada mas substancial dos serviços.

A rápida expansão de certos serviços, particularmente daqueles que estão ligados aos Ministérios das Subsistências, Fornecimentos, Guerra Económica e Produção Aeronáutica, os transportes, e o reconhecimento de que a complexidade técnica da guerra moderna exige profissionais competentes e especializados, foram as determinantes desta reorganização.

Criou-se um organismo central — The Central Statistical Office — com funções coordenadoras e directivas, promoveu-se a mecanização de várias repartições dotando-as de máquinas de calcular adequadas e iniciaram-se na London School of Economics, actualmente em Cambridge, cursos de preparação estatística com a duração de oito semanas para os funcionários civis.

Sobre a preparação matemática necessária ao estatístico para o estudo e interpretação de grande número de problemas criados pela guerra, vem a propósito transcrever o seguinte (pág. 10, § 32):

... «As complexidades da guerra moderna levaram ao reconhecimento bemvindo, embora lento, da importância do ponto de vista científico nos campos da produção, do desenvolvimento e da investigação. Quando a qualidade, no sentido lato de distinta da quantidade, se transforma num assunto de investigação científica, em breve se verifica que os métodos de ataque devem ser os da Estatística Matemática, porque só estes permitem abarcar compreensivamente as ilações que resultam da variação inerente entre unidades individuais. Isto é verdade, quer a unidade seja um membro das Fôrças Armadas e o problema trate da selecção e treino do potencial humano, ou uma parte componente da estrutura da asa de um avião ou o mecanismo de uma espoleta de uma granada ou seja

mesmo uma unidade mais complexa consistindo de um canhão com a sua guarnição e um complicado sistema mecânico de «control» de fogo. Para satisfazer estas exigências não existia ao tempo número suficiente de estatísticos com treino matemático satisfatório, e a falta teve de ser preenchida na maioria dos casos pelos cientistas que trabalhavam nestes assuntos — matemáticos, físicos, fisiologistas — que foram obrigados a aprender por si próprios os elementos da teoria das probabilidades e da teoria dos erros».

A última parte do relatório, sob certos aspectos a mais interessante dado o seu carácter eminentemente construtivo, trata da reorganização dos Serviços Estatísticos para o período do após-guerra, recomenda a manutenção dum organismo central coordenador, propõe a criação de unidades estatísticas libertas por completo das tarefas administrativas, estabelece as normas para o preenchimento dos quadros, vencimentos e promoções, foca em pormenor as futuras relações entre os vários serviços e advoga enfaticamente a necessidade de dar uma boa preparação matemática a todos os estatísticos.

Merecia sem sombra de dúvida este relatório uma apreciação cuidadosa que infelizmente o espaço restrito de que dispõe a «Gazeta» não permite, mas no entanto mais uma vez lembramos a necessidade de uma larga divulgação do mesmo, não para ser lido negligentemente como uma curiosidade, antes para ser estudado, analisado e meditado por quem de direito.

F. Carvalho Araújo

36 — GALLEGÓ-DÍAZ, J. — *Curso de Matemática em forma de problemas* — Prólogo de António Flores de Lemus — Editorial Dossat, Madrid, 1944.

Esta nova obra de Gallego-Díaz é uma bela colecção dos mais variados problemas de Álgebra, Geometria Analítica, Análise Infinitesimal e Cálculo das Probabilidades. Alguns dos problemas foram já publicados pelo Autor em revistas espanholas ou de outros países, outros são problemas saídos nos exames de entrada de Escolas Especiais de Engenharia (Minas, Agronomia, Silvicultura, etc.). Quasi todos são acompanhados das respectivas resoluções, elegantemente apresentadas, e alguns dão indicações bastante úteis que levarão o estudioso ao conhecimento de boas obras didácticas e de revistas de matemática.

Do prólogo, escrito pelo matemático contemporâneo espanhol António Flores, traduzimos parcialmente, para uma melhor e justa apresentação da obra, as considerações seguintes:

«Dos problemas incluídos muitos são originais; outros, clássicos, aparecem resolvidos com extraordi-

nárias brevidade e elegância, graças, por exemplo, ao hábil emprêgo de métodos cinemáticos.

...Gallego-Díaz não é um repetidor, nas aulas, de uma ciência adquirida, pelo contrário, a sua verdadeira vocação exerceu-se e exerce-se constantemente em problemas científicos que ultrapassam a reduzida esfera dos cursos. Não é outra a causa que dá a esta coleção de problemas uma marca típica que demonstra a existência de um cientista deslocado num campo de actividade de nível inferior».

Termino indicando o livro aos professores, que o consultarão com agrado e encontrarão nêle matéria útil para exercícios dos cursos, e aos alunos a quem servirá para o seu desenvolvimento e formação, travando assim contacto com métodos, por ventura, desconhecidos e com sugestões interessantes.

Manuel Zaluar Nunes

37 — PASSOS DA SILVA, LUÍS MARIA DE — Elementos de Geometria, para os IV, V e VI anos dos liceus (programa de 1936) — 1939 — Livraria Sá da Costa, Editora — Lisboa.

Pode considerar-se que o desenvolvimento da matemática, passou por 3 períodos: o discursivo, o sinopado e o simbólico. É característica a transformação do sinal da operação de diferença, correspondente a cada um daqueles períodos: primeiro se escreveu a palavra *minus*, depois \bar{m} na forma sinopada, o m sobre-carregado de um traço, e finalmente o simples traço —.⁽¹⁾ A geometria elementar, pela sua natureza experimental, e porque nos descreve as propriedades das figuras, não sentiu tão fortemente, para o seu desenvolvimento, a necessidade do simbolismo e por isso se conserva por assim dizer no primeiro estágio. Mas as vantagens que advêm para o seu estudo da adopção de um simbolismo racional, são incontestáveis. Por isso o uso sistemático dum simbolismo, que é sua criação, pelo Dr. Luiz Passos, nos seus livros de geometria e nas suas lições, é uma obra que já tem marcados os seus traços no ensino, pois grande parte dos nossos professores do ensino liceal, a vai usando. É possível que as notações se possam modificar e simplificar, especialmente dando a cada símbolo um único significado, mas de início era de aconselhar não alargar muito o número de símbolos usado. O livro «Elementos de Geometria» para os 4.º, 5.º e 6.º anos, tem por isso essa grande vantagem. Como livro destinado ao ensino, e aprovado oficialmente, segue os programas. Quanto ao aspecto gráfico pode considerar-se duma maneira geral bom, conquanto algumas páginas, pelo

uso de tipo muito grosso a substituir o itálico, fiquem muito carregadas. As demonstrações são correctas, com excepção da referente ao teorema de geometria no espaço: duas rectas paralelas a uma terceira são paralelas entre si. Pequeno senão, fácil de corrigir em futura edição. Termina o livro por uma boa coleção de exercícios que completam ou esclarecem as matérias tratadas no texto.

J. da Silva Paulo

38 — SIRK, DR. HUGO — Matemáticas Superiores aplicadas a la Química y a la Física — Tradução espanhola por Prof. Dr. T. Batuecas — Manuel Marín, ed. Barcelona, 1943.

As crescentes exigências de ordem matemática que se impõem mesmo aos experimentadores no campo da Química e da Física e os obrigam a possuir conhecimentos que ultrapassam largamente o domínio das Matemáticas Elementares, levaram o Autor, professor durante longos anos na Universidade de Viena, a redigir este livro que é dedicado aos estudantes dos primeiros anos de Ciências Experimentais.

Os conceitos fundamentais são introduzidos a partir de exemplos de problemas e questões que se põem em Química, Física ou Cinética Química. Seguidamente, abstraindo dos atributos físicos ou químicos, apresentam-se sob forma matemática.

Numerosos gráficos acompanham a exposição esclarecendo-a.

A matéria distribui-se por três partes a saber:

1.ª parte — Funções de uma variável (cálculo diferencial, cálculo integral e noções sobre séries); 2.ª parte — Funções de mais de uma variável (focam-se entre outras, sobretudo as aplicações à Termodinâmica); 3.ª parte — Equações diferenciais (apresentam-se as noções fundamentais indispensáveis através de algumas das muitas equações diferenciais ordinárias e às derivadas parciais que se encontram, a cada passo, no estudo de Física).

Finalmente termina por um apêndice onde se compilaram algumas régras de cálculo de Álgebra e Geometria.

Trata-se pois de uma obra que certamente agrada e será entre nós, em especial, útil para os estudantes do 1.º ano de Ciências Físico-Químicas.

Manuel Zaluar Nunes

39 — PALMA FERNANDES, ANTÓNIO DO NASCIMENTO — Elementos de Geometria, para o 1.º, 2.º e 3.º anos dos Liceus. 1943 — Livraria Cruz. Braga.

O livro do Dr. Palma Fernandes, seguindo o programa, parece-nos no entanto, não se conformar inteiramente

⁽¹⁾ Tobias Dantzig — Le nombre.

ramente com o seu espírito, porquanto, dizendo-se nas observações do programa, que o ensino da geometria nas primeiras classes deve ser intuitivo e experimental, logo no capítulo II da II Parte começa fazendo demonstrações rigorosas de que se dão as justificações lógicas em passos, fugindo assim à verificação experimental. É certo que nas mesmas observações se diz, que no ensino do terceiro ano se pode e deve fazer-se demonstrações dedutivas, mas só no 3.º ano.

O tratamento das demonstrações por passos justificados, como usam americanos e ingleses, parece-nos muito aconselhável, e esta seria uma boa inovação introduzida em livros portugueses pelo Dr. Palma Fernandes, em especial porque se serve de um simbolismo que facilita o raciocínio; o que não nos parece aconselhável é que essas demonstrações com esse carácter comecem a fazer-se logo aos primeiros passos do aluno do 1.º ano quando as suas possibilidades lógicas são pequenas. A definição de teorema a páginas 16, não é certamente correcta, e parecia-nos preferível não a ter dado; não havia prejuízo em guardá-la para mais tarde, para o 3.º ano, quando se pudesse dar uma melhor definição. Também não nos parece bem que chame à *hipótese: dados* e à *tese: pedidos*. À parte estes inconvenientes o livro, que tem boa apresentação gráfica, factor importante em livros de ensino, está recheado de problemas bem graduados e que permitem boa preparação dos alunos, sendo as demonstrações correctas e bem apresentadas. Note-se que apesar de tudo algumas vezes o autor faz apêlo à intuição dos alunos, pena sendo que o não faça mais frequentemente.

J. da Silva Paulo

40 — PALMA FERNANDES, ANTÓNIO DO NASCIMENTO. Exercícios de Geometria e Álgebra para o 5.º Ano dos Liceus. Livraria Cruz, Braga, 1943. Preço 8\$50.

A preparação dos alunos para os exames actuais de matemática nos liceus, requiere, mais do que nunca, a execução de longa série de exercícios sobre as matérias dos programas, dado que as provas são exclusivamente escritas. Os livros da natureza d'este são por isso de grande utilidade quer para mestres quer para alunos, facultando a uns e outros larga cópia de exercícios. Têm por vezes o inconveniente de se repetirem, dando-nos, por assim dizer, os mesmos exercícios, com uma simples mudança de dados. Não é o caso dos livros de exercícios do Dr. Palma Fernandes, em que se nota exactamente a preocupação, louvável, de

apresentar exercícios que não sejam, tanto quanto possível, a reprodução dos que se encontram com facilidade em qualquer manual. Como introdução a cada capítulo dá o autor muito brevemente e sem demonstrações as noções teóricas de que se necessita para a resolução dos problemas ou demonstrações dos teoremas, que uns e outros existem, quer resolvidos ou demonstrados como exemplos, quer depois, e em muito maior número questões propostas de que se dá simplesmente o resultado.

Com boa apresentação gráfica e com os assuntos bem arrumados e graduados é este livro de aconselhar a todos aquêles que necessitam de preparação para os exames liceais.

J. da Silva Paulo

41 — PALMA FERNANDES, ANTÓNIO DO NASCIMENTO. Exercícios de Aritmética Racional, Álgebra e Métodos Geométricos — Livraria Cruz, 1944. Braga. Preço 17\$50.

Neste livro a parte mais volumosa corresponde à aritmética, conquanto contenha o livro mais exercícios de álgebra e geometria do que de aritmética. O facto provém de que na 1.ª parte cada capítulo é precedido das noções teóricas julgadas necessárias para a resolução das questões postas, ao passo que, quer na parte da álgebra, quer na dos métodos da geometria, somente são dados os enunciados dos problemas e as suas soluções. Apresenta o livro além de exercícios mais ou menos originais do autor, algumas das questões saídas em exames do liceu e de aptidão às Universidades. É por isso um bom repositório de exercícios do tipo dos saídos nos exames, como se require para a preparação dos alunos, e contém bom número deles, para cima de mil. As matérias estão arrumadas na ordem estabelecida no programa e a apresentação gráfica é razoável, boa na 1.ª parte. Alguns reparos temos no entanto a fazer. Assim a definição de grandeza não nos parece boa, além do mais por tratar-se de noção a dar a alunos do último ano do curso liceal.

A noção de medida de grandezas, a de número inteiro, a definição de unidade e de zero não são de certo correctas. Fala também o autor em *ordens* e *classes* e a maneira por que o faz estabelece confusão entre uma e outra. Ainda as definições de adição e multiplicação nos não parecem as melhores. São fáceis de remediar tais inconvenientes, e estamos certos que em nova edição, o autor os eliminará.

J. da Silva Paulo