iguais: 2.º) *o plano que contém dois eixos do octaedro determina neste um losango;* 3.º) *a altura dum dos triângulos isósceles forma com o segmento que une o centro do octaedro ao meio do lado base do triângulo, e com a metade do terceiro eixo, um triângulo rectângulo de que essa altura é a hipotenusa;* 4.º) *que o segmento que une o centro do octaedro com o meio da base do triângulo face do octaedro, é igual a metade dessa base, a qual é o lado do losango a que já nos referimos. Assim se os dois eixos que definirem o plano forem os que têm por medida* a *e* b *terá o lado do losango por medida* $(\sqrt{a^2+b^2}):2$ *e o segmento que une o centro do octaedro com o meio do lado* $(\sqrt{a^2+b^2}):4$. *Se fôr* c *o terceiro eixo, terá a altura do triângulo por medida* $\sqrt{(a^2+b^2):16+c^2:4}=1/4\cdot\sqrt{a^2+b^2+4c^2}$ *e a área de cada face será* $A=1/4\cdot(\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{a^2+b^2+4c^2})$, *donde* $A'=2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2+4c^2}$ *a área do octaedro.*

Soluções dos n.ºˢ 47 a 52 de J. da Silva Paulo.

PROBLEMAS

Para êste número, especialmente dedicado aos candidatos dos Exames de Aptidão às Escolas Superiores, decidiu a Redacção juntar aos pontos de exames uma colecção de outros problemas. A maioria dêstes é acompanhada ou pela resolução completa redigida porém duma forma propositadamente concisa, ou por simples sugestões, suficientes para a resolução, ou ainda só dos resultados. No final são indicadas as respectivas fontes.

53 — Considere-se dois números inteiros a e b, tais que a^2+2b seja um quadrado perfeito: $a^2+2b=c^2$. 1.º) Demonstrar que $2b$ é o produto de dois números pares. 2.º) Pôr a^2+b sob a forma duma soma de dois quadrados. R: 1.º) *De* $2b=c^2-a^2$, *tira-se que* c^2 *e* a^2 *são ambos pares ou ambos ímpares; o mesmo se pode concluir para* c *e* a, *e, portanto* $c+a$ *e* $c-a$ *são pares; a igualdade* $2b=(c+a)(c-a)$ *demonstra o que se pretende.* 2.º) *Se juntarmos* a^2 *aos dois membros da igualdade dada, teremos* $2(a^2+b)=c^2+a^2$; *mas* $c^2+a^2=1/2\,[(c+a)^2+(c-a)^2]$, *logo* $a^2+b=\left(\frac{c+a}{2}\right)^2+\left(\frac{c-a}{2}\right)^2$; *sendo* $c+a$ *e* $c-a$ *números pares,* $\frac{c+a}{2}$ *e* $\frac{c-a}{2}$ *são números inteiros e* a^2+b *fica sob a forma duma soma de quadrados.*

54 — Mostrar que um número da forma:

$$y=(1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n)^2-a^n$$

não é nunca primo para $n>1$. R: *Como* $1+a+a^2+\cdots+a^n=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ *então o número precedente pode escrever-se:* $y=\left(\frac{a^{n+1}-1}{a-1}\right)^2-a^n$. *Desenvolvendo e reduzindo ao mesmo denominador vem:*

$$y=\frac{a^{2(n+1)}-a^{n+2}+1-a^n}{(a-1)^2}=\frac{a^{n+2}(a^n-1)-(a^n-1)}{(a-1)^2}=$$

$$=\frac{(a^n-1)(a^{n+2}-1)}{(a-1)^2}=\frac{(a^n-1)}{(a-1)}\times\frac{(a^{n+2}-1)}{(a-1)}.$$

Efectuando a divisão de cada um dos factores por $(a-1)$, *obtém-se:*

$$y=(a^{n-1}+a^{n-2}+\cdots+a+1)\,(a^{n+1}+a^n+\cdots+a+1)$$

que é um produto de dois factores e o número y *só pode ser primo se o primeiro, que é de menor valor, fôr igual a* 1. *Mas não se pode dar êsse caso pois ter-se-ia* $a^{n-1}=1$ *donde* $n=1$ *o que é contra a hipótese. Se* $n=1$ *então* $y=a^2+a+1$ *e pode ser primo ou não como é fácil de verificar com alguns exemplos.*

55 — São dadas as sucessões de têrmos gerais $A_n=a^n-1$ e $B_n=a^{-n}+1$. *a)* Verifique que $(A_n-B_n)^2-(A_n+B_n)^2+4=0$. *b)* ¿Que valor deve ter a para que o têrmo de ordem p da primeira sucessão seja igual ao têrmo de ordem p da segunda? *c)* Prove que a sucessão de têrmo geral $C_n=A_{n+s}-A_n$ é uma progressão geométrica. R: *a)* $(A_n-B_n)^2-(A_n+B_n)^2=[(a^n-1)-(a^{-n}+1)]^2-[(a^n-1)+(a^{-n}+1)]^2=(a^n-a^{-n})^2-(a^n+a^{-n})^2=(a^{2n}-2+a^{-2n})-(a^{2n}+2+a^{-2n})=-4$. *Assim fica verificado o que pretendiamos.* *b) Será* $a^p-1=a^{-p}+1$, *ou* $a^p-2-a^{-p}=0$, *isto é,* $(a^p)^2-2a^p-1=0$, *donde* $a^p=1\pm\sqrt{2}$. *Logo* $a=\sqrt[p]{1\pm\sqrt{2}}$. *c)* $c_n=A_{n+s}-A_n=(a^{n+s}-1)-(a^n-1)=a^{n+s}-a^n=a^{n-1}(a^{s+1}-a)$. *Como se sabe o n-ésimo têrmo duma progressão geométrica é igual a* $u_1\,r^{n-1}$ *sendo* u_1 *o primeiro têrmo e* r *a razão. Se fizermos* $u_1=(a^{s+1}-a)$ *e* $r=a$, *fica provado o que se deseja.*

56 — Sabendo-se que $x+y+z=a$; $x^2+y^2+z^2=b^2$; $x^3+y^3+z^3=c^3$, calcular o produto xyz. R: $(x+y+z)^3=x^3+y^3+z^3+3x(y^2+z^2)+3y(z^2+x^2)+3z(x^2+y^2)+6xyz$; *mas* $3x(y^2+z^2)+3y(z^2+x^2)+3z(x^2+y^2)=3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-3(x^3+y^3+z^3)$. *Logo,* $(x+y+z)^3=3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)-2(x^3+y^3+z^3)+6xyz$. *Tendo em conta as igualdades dadas, vem*

$$a^3=3a\,b^2-2c^3+6xyz \quad \textit{ou} \quad xyz=\frac{a^3-3a\,b^2+2c^3}{6}.$$

57 — Achar os valores de λ para os quais o trinómio $(\lambda+1)\,x^2+(5\lambda-3)\,x+2\lambda+3$ é um quadrado perfeito. Escrever em cada caso as raízes do trinómio igualado a zero. R: *O trinómio será um quadrado perfeito se* $(5\lambda-3)^2-4(\lambda+1)(2\lambda+3)=0$, *isto é,* $17\lambda^2-50\lambda-3=0$. *Esta equação é satisfeita no caso de*

$\lambda_1=-1/17$, $\lambda_2=3$. *No primeiro caso o trinómio será* $1/17\cdot(16x^2-56x+49)=(4x-7)^2/17$ *e as raízes são* $x'_1=x'_2=7/4$. *No caso de* $\lambda_3=3$, *o trinómio será* $4x^2+12x+9=(2x+3)^2$ *e as raízes são* $x''_1=x''_2=-3/2$.

58 — Determine o parâmetro k de modo que o sistema $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y+5=kx \end{cases}$ tenha uma solução única.

R: $k=\pm 3/4$.

59 — Se os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=0$ estão em progressão aritmética, é condição necessária e suficiente para que as raízes sejam reais, que o valor da razão não esteja compreendido entre $a(3+2\sqrt{3})$ e $a(3-2\sqrt{3})$. R: *A razão da progressão será* $r=a-b=b-c$. *Será então* $b=a-r$ *e* $c=b-r=a-2r$. *Para que as raízes da equação proposta sejam reais é necessário e suficiente que* $b^2-4ac\geq 0$, *isto é,* $(a-r)^2-4a(a-2r)\geq 0$ *ou* $r^2+6ar-3a^2\geq 0$. *Os valores de* r *que satisfazem esta desigualdade são*

$$a(3+2\sqrt{3})\leq r\leq a(3-2\sqrt{3}).$$

60 — Determinar y de modo que os valores de x e y que satisfazem ao seguinte sistema, sejam simultâneamente positivos: $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=1$, $127<x-y<217$. R: *Fazendo* $\sqrt[3]{x}=u$ *e* $\sqrt[3]{y}=v$, *tem-se* $u-v=1$, $u^3-v^3<217$, $u^3-v^3>127$ *ou* $u=1+v$, $v^2+v-72<0$, $v^2+v-42>0$; *logo* $u=1+v$, $-9<v<8$ *e* $v<-7$ *ou* $v>6$. *Portanto os valores de* v *que nos interessam são* $6<v<8$, *donde se conclui que* $216<y<512$.

61 — São dadas duas circunferências iguais e tangentes, e uma recta tangente comum às duas circunferências. Pretende-se calcular o raio duma circunferência tangente às duas primeiras e à recta dada.

R: *Sejam* O, *e* O' *os centros das duas circunferências com o mesmo raio* R, *e tangentes num ponto* A. *Tracemos uma tangente comum* TT' *e proponhamo-nos calcular o raio* x *duma circunferência tangente às precedentes e à recta* TT'. *Sabemos que o lugar geométrico dos centros das circunferências tangentes a* (O) *e a* (O') *é a tangente comum em* A. *Seja* w *o centro da circunferência cujo raio procuramos. Do triângulo rectângulo* [OAw] *tiramos:* $\overline{Ow}^2=\overline{OA}^2+\overline{Aw}^2$, *mas* $\overline{Ow}=R+x$, $\overline{OA}=R$, $\overline{Aw}=R-x$, *portanto:* $(R+x)^2=R^2+(R-x)^2$. *Logo* $x=R/4$.

62 — Construir um triângulo $[ABC]$ conhecendo $\overline{BC}=a$, $\hat{B}$ e a soma $\overline{AB}+\overline{AC}=l$. R: *Considerando o problema resolvido, sôbre o prolongamento de* $\overline{AB}$, *para o lado de* A, *determina-se o ponto* D *que se obtém pela rotação de* C *em tôrno de* A. *Teremos então* $\overline{BD}=l$. *Ora o triângulo* [BCD] *pode ser construido conhecendo o ângulo* B *e os dois lados adjacentes e, visto que* $\overline{AC}=\overline{AD}$, *levantar-se-á em seguida ao meio de* $\overline{CD}$ *a perpendicular* z *que cortará* BD *no ponto* A *procurado.*

63 — São dadas três rectas AB, $A'B'$ e AA'; as duas primeiras são paralelas entre si e a terceira é perpendicular às outras e encontra-as nos pontos A e A'. Sôbre as rectas AB e $A'B'$ marcam-se dum mesmo lado de AA' os comprimentos $\overline{AO}=x$, $\overline{A'O'}=y$, variáveis mas ligados pela relação $xy=a^2/4$, designando por a o comprimento $\overline{AA'}$. Tomando O e O' como centros, descrevem-se duas circunferências cujos raios são respectivamente x e y.

1.º) Mostrar que estas circunferências são tangentes entre si.

2.º) Achar o ponto de contacto.

3.º) Designando por M êste ponto, trace-se: o segmento $\overline{AM}$, que se prolonga até C', ponto de intersecção com $A'B'$ e o segmento $\overline{A'M}$ que se prolonga até C, ponto de intersecção com AB. Determinar x e y de maneira tal que o trapézio $[AA'CC']$ tenha uma área dada m^2. R: 1.º) *Calculemos* $\overline{OO'}$; *tem-se:* $\overline{OO'}^2=\overline{OP}^2+\overline{O'P}^2=(y-x)^2+a^2$, $\overline{OO'}^2=(y-x)^2+4xy=(y+x)^2$, $\overline{OO'}=x+y$. *Visto a distância dos centros ser igual à soma dos raios, as duas circunferências são tangentes exteriormente.* 2.º) *Seja* M *o ponto de contacto. Os triângulos* [AOM], [A'O'M] *são isósceles, porque* $\overline{OA}=\overline{OM}$, $\overline{O'A'}=\overline{O'M}$. *Logo, tem-se* $2O\hat{M}A=180^\circ-A\hat{O}M$, $2O'\hat{M}A'=180^\circ-A'\hat{O}'M$, $O\hat{M}A+O'\hat{M}A'=180^\circ-\frac{(A\hat{O}M+A'\hat{O}'M)}{2}=90^\circ$. *Como a soma dêstes dois ângulos é igual a um recto, o ângulo* AMA' *é um ângulo recto, e o lugar geométrico do ponto* M *é a circunferência que tem* $\overline{AA'}$ *como diâmetro. Esta circunferência é tangente à recta* OO', *visto* OA *ser uma tangente e* $\overline{OM}=\overline{OA}$. 3.º) *O triângulo* [MO'C'] *é isósceles logo* $\overline{O'C'}=\overline{O'M}=y$. *Do mesmo modo* $\overline{OC}=x$. *As bases do trapézio são então* 2x, 2y; *a sua área é igual a* $(x+y)a=m^2$. *Como, por outro lado, se tem* $xy=a^2/4$, x *e* y *são raízes da equação* $z^2-m^2/a\cdot z+a^2/4=0$. *O problema só será possível se* $m^2\geq a^2$. $m^2=a^2$ *corresponde ao caso do quadrado;* OO' *é então paralela a* AA'.

64 — Considere-se uma circunferência invariável e sôbre ela dois pontos fixos A, B e um ponto móvel M. Seja D o ponto médio da corda $\overline{AB}$. Prolongue-se $\overline{BM}$ de $\overline{MC}=\overline{BM}$. Determinar o lugar geométrico do ponto P, intersecção de AM e CD. R: *O ponto* P *é o ponto de encontro das medianas do triângulo* [ABC], *portanto* $\overline{AP}=2/3\cdot\overline{AM}$. *Daqui resulta que o lugar geométrico dos pontos* P *é a circunferência* (c') *homotética* *da circunferência dada* (c), *quando se toma* A *para centro de homotetia e* 2/3 *para razão de homotetia.*

65 — Determinar o lugar geométrico dos pontos tais que as duas tangentes a uma circunferência dada, tiradas por êsses pontos, e a corda dos pontos de contacto, formem um triângulo equilátero. Calcular o lado e a área do triângulo em função do raio do círculo dado. R: *Como o triângulo é equilátero, o ângulo formado pelas duas tangentes é* 60°, *e o ângulo ao centro definido pelos raios tirados para os pontos de contacto é o suplemento e portanto* 120°. *A corda que une os pontos de contacto subtende um arco de* 120° *e é igual ao lado do triângulo equilátero inscrito. Então, a distância do centro aos pontos do lugar geométrico procurado, é a hipotenusa dum triângulo rectângulo cujos catetos têm por medida* $R\sqrt{3}$ *e* R, *concluindo-se, portanto, que o seu valor é* 2R. *Logo, o lugar geométrico procurado é uma circunferência concêntrica de raio duplo do da circunferência dada. O lado e a área do triângulo pedido serão os do triângulo equilátero inscrito, isto é, respectivamente* $R\sqrt{3}$ *e* $3R^2\sqrt{3}/4$.

66 — Considere um triângulo isósceles $[ABC]$ com $\overline{AB}=\overline{AC}$. Construa as bissectrizes $\overline{BR}$ e $\overline{CS}$ dos ângulos B e C, respectivamente. Demonstre que: 1) As bissectrizes são iguais. 2) É isósceles o triângulo definido pelos pontos B e C e pelo ponto de intersecção das bissectrizes. R: *Demonstre que são iguais os triângulos* [BRC] *e* [CSB].

67 — Um triângulo rectângulo de perímetro $x+y+z=36$ m, sendo z a medida da hipotenusa, é semelhante a outro triângulo cujos lados medem, respectivamente, 3 m, 4 m e 5 m. Determine o volume do sólido gerado pela rotação do triângulo de lados x, y, z em tôrno da hipotenusa. R: $V=814\ m^3$.

68 — Num cubo dividem-se as três arestas concorrentes num vértice em n partes iguais e tiram-se pelos pontos de divisão planos perpendiculares às referidas arestas. Demonstre que a soma dos volumes das esferas inscritas nos cubos parciais é igual ao volume da esfera inscrita no cubo global. R: *Seja* A *a aresta do cubo dado,* a *a aresta dos cubos obtidos,* V *o volume da esfera dada,* v *o das esferas obtidas e* N *o número de cubos contidos no cubo dado.. Teremos* $V=\pi A^3/6$, $a=A/n$, $v=\pi A^3/6n^3$, $N=n^3$. *Portanto* $V=\pi A^3/6=vn^3$.

69 — A uma esfera de raio R é circunscrito um cilindro cujo eixo corta a esfera nos pontos A e B. Além do plano da circunferência de contacto das duas superfícies, existe um outro plano perpendicular ao eixo AB que corta a esfera e o cilindro segundo 2 circunferências tais que os dois cones tendo um por base o primeiro círculo e por vértice o ponto A, e o outro o segundo e por vértice o ponto B, tenham áreas laterais equivalentes? R: *Supondo que o plano em vista existe entre o ponto* A *e a circunferência de contacto e está a uma distância* x *do centro da esfera, tem-se para área lateral do cone de base sôbre o cilindro:* $\pi R\sqrt{R^2+(R-x)^2}$. *Para o cone de base sôbre a esfera a área lateral é, notando que o seu raio é* $\sqrt{R^2-x^2}$ *e a sua geratriz* $\sqrt{2R(R+x)}$: $\pi\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{2R(R+x)}$. *Igualando obtém-se uma equação em* x: $2x^3+3x^2-4R^2x=0$. *A solução* $x=0$ *é o plano diametral e constitui o caso da circunferência de contacto. As outras duas soluções são dadas pela equação:* $2x^2+3Rx-4R^2=0$. *Uma é positiva e menor que o raio, enquanto a outra é negativa e deve ser regeitada, porque conduz a uma solução para o outro lado do plano diametral, mas a uma distância inferior ao raio da esfera. Há portanto uma solução única entre o ponto* A *e o centro da esfera a uma distância:*

$$x=R/4\cdot(-3+\sqrt{41}).$$

70 — Cortar um cubo por um plano tal que a secção seja um hexágono regular. R: *Seja o cubo* [ABCDEFGH]; *consideremos os pontos* M, N, P, Q, R, S *meios respectivamente de arestas* $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CG}$, $\overline{GH}$, $\overline{HE}$, $\overline{EA}$; *vamos mostrar que êles estão num mesmo plano. Com efeito, os segmentos* $\overline{SP}$, $\overline{QM}$, $\overline{RN}$ *intersectam-se no centro* O *do cubo, portanto os quatro pontos* M, N, Q, R *estão num mesmo plano que contém a recta* SP, *visto ela conter o ponto* O *do plano e ser paralela a* MN. *Pode verificar-se que o plano do hexágono* [MNPQRS] *é perpendicular à diagonal* DF *do cubo, visto os lados do hexágono serem perpendiculares a esta diagonal. O ponto* O *é um centro de simetria do hexágono e os triângulos tais que* [OMN] *são todos equiláteros, portanto o hexágono é regular. Conclusão: obtém-se um hexágono regular cortando um cubo por um plano passando pelo centro e perpendicular a uma diagonal. Há quatro soluções que dão hexágonos iguais.*

71 — Quantos valores distintos de $\operatorname{sen} a/3$ existem, sendo dado $\operatorname{tg} a$? R: *Se fôr* α *um dos valores de* a, *todos os valores de* a *que têm a mesma tangente serão* $a=\alpha+k\pi$. *Portanto* $a/3=\alpha/3+k\pi/3$. *Logo os valores distintos de* $\operatorname{sen}\alpha/3$ *obtêm-se fazendo* $k=0,1,2,3,4,5$ *na expressão* $\operatorname{sen}(\alpha/3+k\pi/3)$.

72 — Considerando todos os arcos x que verificam a equação $m\operatorname{sen}x+(2-m)\cos x=1$, formar a equação que admite por raízes os valores de $\operatorname{tg}x/2$. Discutir. R: *Fazendo* $\operatorname{tg}x/2=t$, *teremos* $\operatorname{sen}x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$. *A equação pedida é então* $2mt+(2-m)(1-t^2)=1+t^2$, *ou seja* $(3-m)t^2-2mt+m-1=0$. *Para que a equação proposta tenha soluções é necessário e suficiente que a equação em* t *tenha as suas* *raizes reais, isto é,* $m^2+(m-3)(m-1)=2m^2-4m+$ $+3\geq 0$. *Êste trinómio não tem raizes reais, é pois sempre positivo, e a equação* $(3-m)t^2-2mt+m-1=0$ *tem duas raizes* t_1 *e* t_2. *Existem dois arcos compreendidos no intervalo* $(-\pi/2,\pi/2)$ *tais que* $\operatorname{tg} x_1=t_1$ *e* $\operatorname{tg} x_2=t_2$; *as raízes da equação proposta são então dadas pelas fórmulas* $x/2=k\pi+x_1$, *e* $x/2=k\pi+x_2$ *ou* $x=2k\pi+2x_1$ *e* $x=2k\pi+2x_2$, *sendo* k *um inteiro qualquer.*

73 — Demonstre que a área de um quadrilátero convexo qualquer é igual a metade do produto das diagonais pelo seno do ângulo por elas formado.
R: *No quadrilátero* [ABCD], *trace as diagonais* AC *e* DB; *considere a área pedida como soma das áreas dos triângulos* [ABC] *e* [CDA]; *determine as alturas dêste triângulo em função do seno do ângulo* α *das diagonais e de um segmento* $\overline{DB}$.

Os problemas n.os 58, 66, 67 e 73 são propostos por António A. Lopes, os n.os 55, 59 e 68 por José Morgado, o n.º 60 por R. Quaresma Rosa, e finalmente os restantes (53, 54, 56, 57, 61 a 65 e 69 a 72) são extraídos ou adaptados por R. Quaresma Rosa de problemas que figuram nas seguintes obras: *Problemi di Matematica dati agli esami di licenza d'Instituto Tecnico*, por Sebastiano Catania, Raffaelo Giusti, Edt., Livorno; *Problèmes de Baccalauréat*, por G. Morel, Vuibert Edt., Paris; *Méthodes de Résolution et de Discussion des Problèmes de Géométrie*, por G. Lemaire, Vuibert, Paris; *Compositions données depuis 1872 aux examens de Saint-Cyr* por A. Grèvy, Gauthier-Villars, Paris; e *Journal de Mathématiques Élémentaires*, Vuibert, Paris.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Álgebra e Trigonometria — Para os 4.º, 5.º e 6.º anos dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Aritmética e Álgebra — Para os 1.º, 2.º e 3.º anos dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Elementos de Aritmética Racional — Para o 7.º ano dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Elementos de Geometria — Para os 4.º, 5.º e 6.º anos dos Liceus, por Luiz Passos. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Estudo das propriedades do trinómio ax^2+bx+c pelo processo das ortogonais — Por António Palma Fernandes. Lisboa.

Exercícios de Aritmética Racional, Álgebra e Métodos Geométricos — Para o 7.º ano dos Liceus, por António do Nascimento Palma Fernandes. Livraria Cruz. Braga.

* **Exercícios de Geometria** — Para o 1.º ciclo dos Liceus e exame de admissão às Escolas do Magistério Primário, por António do Nascimento Palma Fernandes. Livraria Cruz. Braga.

* **Geometria** — Para os 1.º, 2.º e 3.º anos dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

Geometria — Para os 4.º, 5.º e 6.º anos dos Liceus, por Francisco Ferreira Neves. Livraria Sá da Costa, Edt. Lisboa.

A crítica das obras indicadas com * aparecerá no Boletim Bibliográfico do número 19 da «Gazeta de Matemática».

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO

Quadro da sua distribuïção por escolas e pelos números 1 a 18 da «Gazeta de Matemática»

Universidades de Coimbra, Lisboa e Pôrto				Universidade Técnica		
Faculdades de Ciências		Faculdades de Letras e Ciências	Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto	I. S. A.	I. S. C. E. F.	I. S. T.
Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e de engenheiro geógrafo	Curso de Prof. desenho	Licenciatura em ciências geográficas				
1–2–3–4–6–7–8–9–10 12–13–15–16–17	1–3–8–9 12–15 18	3	1–2–3–5–7–8 10–11–12–14 15–16–17	1–8–10–13 14–15–16–17	1–2–3–4–5–6 7–8–9–10–11 12–13–14 15–18	1–3–5–7–8 10–13–14 15–16–18