O Teorema de Euler sôbre os poliedros convexos e o número de poliedros convexos regulares

por **José da Silva Paulo**

Consideremos uma superfície poliédrica convexa obtida a partir dum poliedro convexo pela supressão de uma ou mais faces consecutivas. Esta superfície é aberta e termina por uma linha poligonal fechada plana ou enviezada. Demonstremos para uma tal superfície o seguinte:

Lema — *Numa superfície poliédrica convexa aberta, terminada por uma linha poligonal fechada plana ou enviezada, a soma do número de vértices é igual ao número de arestas aumentado de* 1.

Se designarmos por A, F e V o número de arestas faces e vértices da superfície o teorema traduz a seguinte igualdade: $A+1=F+V$. Demonstraremos o teorema por indução completa em F.

Verifiquemos, então, que êle é verdadeiro para o caso da superfície ter uma única face. Neste caso a superfície reduz-se a um polígono convexo para o qual é $F=1$ e $A=V$, logo

$$A+1=1+V.$$

Consideremos, agora, o teorema válido para o caso da superfície ter F faces e demonstremos, que nesse caso, o teorema verifica-se para uma superfície convexa aberta com $F+1$ faces. Acrescentemos para isso à primeira superfície uma face com n lados. Se a superfície continua aberta o perímetro da nova face não poderá coincidir inteiramente com a linha poligonal que termina a primeira superfície. Seja p o número de arestas comuns à face e à superfície poliédrica, será $p+1$ o número de vértices comuns. É então evidente que, se forem A', F', e V' o número de arestas, faces e vértices da superfície de $F+1$ faces, tem-se: $A'=A+(n-p)$, $F'=F+1$ e $V'=V+n-(p+1)$ donde $F'+V'=F+1+V+n-p-1=F+V+(n-p)$ e como $A'+1=A+1+(n-p)=F+V+(n-p)$ vem $F'+V'=A'+1$, c. q. d.

Êste lema permite-nos demonstrar o:

Teorema de Euler — *Em todo o poliedro convexo, o número de arestas aumentado de* 2 *é igual à soma do número de faces com o número de vértices.*

Sejam ainda A, F e V o número de arestas, faces e vértices do poliedro. Tiremos ao poliedro convexo uma face. Ficaremos com uma superfície poliédrica convexa aberta para a qual é $A+1=F+V$ e para o poliedro convexo que tem o mesmo número de arestas e vértices e mais uma face que a superfície poliédrica será

$$A+2=F+V \qquad \text{c. q. d.}$$

Nota — **Esta demonstração é devida a Cauchy.**

Consideremos finalmente o seguinte:

Teorema — *Não podem existir mais do que cinco espécies de poliedros convexos nos quais tôdas as faces tenham o mesmo número de lados e cujos ângulos sólidos tenham o mesmo número de arestas.*

Suponhamos, então, que no poliedro cada face tem n lados e cada ângulo sólido m arestas. Se considerarmos o número total de arestas faces e vértices, será:

$$mV=2A \quad \text{e também} \quad nF=2A.$$

Da fórmula de Euler tira-se

$$F=\frac{4m}{2(m+n)-mn}.$$

Ora F é um número inteiro positivo bem como m e n, o mesmo deverá suceder ao denominador da fracção anterior ou seja

$$2m+2n>mn$$

ou

$$m<\frac{2n}{n-2}.$$

Além disso m e n são superiores a 2 donde: $2n>3(n-2)$ ou $n<6$ e assim n só pode ter os valores 3, 4 e 5; teremos como soluções possíveis daquela desigualdade

$$n_1=3,\ m_1=3;\quad n_2=3,\ m_2=4;\quad n_3=3,\ m_3=5;$$
$$n_4=4,\ m_4=3;\quad n_5=5,\ m_5=3;$$

e pode formar-se o seguinte quadro:

n	m	F	V	A	
3	3	4	4	6	tetraedro
3	4	8	6	12	octaedro
3	5	20	12	30	icosaedro
4	3	6	8	12	hexaedro
5	3	12	20	30	dodecaedro

Se notarmos que num poliedro convexo regular tôdas as faces têm o mesmo número de lados e todos os vértices o mesmo número de arestas conclui-se que só existem 5 poliedros convexos regulares.

Nota — **A demonstração dêste último teorema é de E. Lucas, Théorie des Nombres.**