

1977 — Estudar a convergência do integral impróprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{(1-2 \operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)^{1-a}}$$

R: Fazendo  $\operatorname{sen} x = u$ , tem-se:  $I = \int \frac{du}{(1-2u)u^{1-a}}$ ,

integral impróprio de Cauchy nos pontos  $u=0$  (com  $a < 1$ ) e  $u=1/2$ . Por ser:

$$\lim_{u \rightarrow 1/2} (u-1/2)^k \cdot \frac{1}{(1-2u)u^{1-a}} = \frac{-1}{2^a} \neq 0 \text{ com } k=1,$$

o integral diverge.

Soluções dos n.ºs 1975 a 1977 de O. Morbey Rodrigues.

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

43 — KENDALL, M. G. — *The Advanced Theory Of Statistics* — vol. I, pp. XII + 457 — Charles Griffin and Co., London, 1943. 42 s.

Será um verdadeiro prazer para qualquer estatístico matemático possuir um volume tão bem acabado como este. Deve realmente felicitar-se o Sr. Kendall pela energia e firme perseverança necessárias à realização da sua pesada tarefa e insuflar-lhe ainda a inflexível energia que será necessária para escrever o segundo volume. Até à altura em que levou a cabo o seu trabalho, fez certamente qualquer coisa para manter o crédito da Inglaterra no campo do ensino da matemática.

No prefácio o autor explica que a intenção original era escrever o livro em cooperação com outros quatro distintos estatísticos. Felicitemo-nos entretanto pelo afortunado facto de que a intervenção da guerra o obrigou a realizar o trabalho segundo o seu próprio plano e sem a ajuda e complicações resultantes de tal colaboração.

Nas muitas ocasiões em que tenho sido consultado sobre a possibilidade e conveniência de publicar um trabalho em grande escala sobre estatística matemática tenho frizado a circunstância desalentadora de que os progressos das recentes décadas têm sido tão revolucionários, não sómente em relação aos métodos, mas também em relação aos pontos de vista sob os quais são encarados os problemas estatísticos, que qualquer exposição, contendo material esperado e aceitado pelos orientadores de uma geração anterior, corre o risco de em breve ser considerada obsoleta e sem finalidade. O Sr. Kendall rodeia esta dificuldade habilidosamente sem todavia a resolver completamente. Assim à primeira vista presta pelo menos respeito formal à velha convenção de expor os métodos estatísticos subordinando-os aos títulos: medidas de posição, medidas de dispersão e finalmente, coroadando o arco, medidas de correlação. Os últimos quatro dos dezasseis capítulos deste volume são destinados a vários coeficientes de correlação, não totalmente, é verdade, no velho estilo

porque os assuntos são tratados como uma competência matemática, baseada numa larga familiariedade com a literatura, muito para além de tudo previamente tentado, mas, é-se tentado a dizer, também para além do interesse intrínseco ou utilidade prática dos métodos discutidos. Porque razão desejaria hoje qualquer pessoa calcular uma correlação ordenada ou um coeficiente de contingência?

O leitor moderno, por outro lado, gostaria de ver o Capítulo 10 sobre as distribuições exactas em amostras casuais mais completamente desenvolvido e uma exposição mais extensa e variada dos usos da distribuição de  $\chi^2$ , do que a dada no Capítulo 12. Em ambos os capítulos, cujos assuntos são da maior importância para o leitor especializado em estatística, o estudo é dificultado por uma introdução algébrica de complexidade completamente desnecessária. O tratamento negligente do  $\chi^2$  sugere que o Sr. Kendall não é imune à fraqueza dos autores sobrecarregados de trabalho, de desprezar as partes da matéria em que não estão particularmente interessados.

A mesma atitude perfunctória emerge a páginas 59 numa curta secção destinada ao cálculo dos momentos factoriais por adição sucessiva. O autor diz: «O uso do método na prática reside no facto de que para certas máquinas de calcular a adição progressiva é mais fácil de efectuar do que os processos envolvidos no método do Exemplo 3.1».

Entre estatísticos perfeitamente equipados com a maquinaria necessária, isto pode ser um tanto verdadeiro, embora seja com certeza depreciativo para um método que substitui um grande número de multiplicações por igual número de adições. O trabalho poupado é evidentemente muito importante quando não se dispõe de máquina alguma, condição em que, mesmo o mais bem equipado de entre nós, é ocasionalmente obrigado a trabalhar. O método de abreviar ainda mais o processo somando a partir das extremidades para uma origem escolhida não é dado de modo que o leitor, a menos que possua informação independente, não está em posição de julgar da valia real do método.

A apresentação da parte puramente matemática é, falando de modo geral, cuidadosa, embora, como já foi sugerido, se use às vezes demonstrações complicadas justamente onde, tendo em vista a utilidade geral do livro, deviam ser evitadas. Dois pontos de somenos importância e um de grande importância são talvez dignos da atenção do autor com vista às edições subsequentes.

Dizer, como a páginas 53, que «O momento de ordem  $2r$  em relação à média, se existe, é dado por» uma certa expressão, não é logicamente o mesmo que dizer que é definido pela expressão e portanto existe se esta tem um significado. A forma da afirmação de Kendall sugere, contrariamente suponho eu às suas intenções, que há uma outra condição necessária para a existência do momento.

Nos exemplos 3.7 (p. 59) e 3.8 (p. 66) os símbolos  $\mu$  e  $\tau$  apropriados à população são aplicados a estimativas derivadas de uma amostra. É verdade que a amostra é grande, visto dar as alturas de mais de 8000 homens, e portanto os erros de amostragem casual serão diminutos, mas é apesar de tudo uma pena lançar o estudante na confusão, nesta altura do livro, confundindo uma distinção que mais tarde requererá toda a sua atenção. Os outros exemplos 3.9—3.11 são convenientemente aplicados a distribuições.

O Sr. Kendall revela muito interesse pela álgebra um tanto formidável das funções simétricas usadas em estatística matemática. Assim as fórmulas para transformar os momentos em cumulantes e vice-versa são dadas completas até à décima ordem a páginas 61-64 e, noutras partes do livro, atribui-se uma boa parte do espaço a demonstrações que estabelecem relações semelhantes. Na minha opinião a introdução a todo o trabalho desta espécie é grandemente facilitada para a maioria dos estatísticos por uma consideração preliminar da natureza das partições e da notação e terminologia apropriadas. Enquanto no Capítulo 3, sobre momentos e cumulantes, parece evitar-se cuidadosamente mencionar o que se entende por partições, o leitor no Cap. 11, no qual se desenvolvem métodos de análise mais compreensivos, é confrontado sem aviso ou preparação com as noções de (a) partições (b) partições de números multipartidos (c) separações de partições, como idéias essenciais a cada uma das difíceis etapas do raciocínio. O facto é que alguns estatísticos pensam em partições e em termos da notação correspondente enquanto outros não procedem assim. Estes não serão auxiliados mas apenas intrigados pela maneira como se introduzem aqui as idéias.

Cada capítulo é seguido por uma série de exercícios alguns dos quais excepcionalmente bons. Certos exemplos no texto são igualmente difíceis para o leitor ansioso de compreender a solução. Assim no exem-

plo 7.2 emprega-se o raciocínio seguinte para demonstrar a fórmula recorrente que dá muito elegantemente as séries de sub-factoriais desenvolvida por Euler no problema do jogo do *Rencontre*: «Suponhamos que  $u_n$  é o número de maneiras em que tôdas as letras vão mal. Consideremos duas letras quaisquer. Se cada uma destas ocupar o envelope da outra o número de maneiras em que as restantes  $n-2$  letras podem ir mal é  $u_{n-2}$ ; e há  $n-1$  maneiras segundo as quais duas letras podem ser trocadas. Mas se uma letra ocupa o lugar de uma outra e não vice-versa, o que pode acontecer de  $n-1$  maneiras, há  $u_{n-1}$  maneiras segundo as quais as outras podem ir mal». Não tenho feito a experiência em larga escala, mas julgo que muito poucos matemáticos, não familiarizados com este tipo particular de raciocínio, seriam capazes de ver, a partir desta forma de expôr, donde vêm na realidade os dois factores  $(n-1)$ .

(de R. A. Fisher em «Nature», vol. CLI, 1945  
— Trad. de F. A. C. Araújo)

#### 44 — MATHER, DR. K. — *Statistical Analysis in Biology* — Methuen and Co., London, 1943.

O livro do Dr. Mather abre com a afirmação, digna de notar-se, que «a estatística é a matemática da experimentação». Ora, de facto, a estatística teve a sua origem no domínio da demografia e da economia, onde a experimentação é difícil, perigosa, e raramente científica; e entre os domínios em que a sua aplicação logrou êxito encontra-se a astronomia onde a experimentação é completamente impossível. Talvez seja esta a razão por que o Dr. Mather esquece completamente as tábuas da mortalidade, e estas não são só fundamentais para a biologia humana mas estão também tomando uma importância crescente na biologia animal. Não há ali qualquer sugestão para o tratamento da estatística da fertilidade, como é feito na obra de Salisbury «A capacidade reprodutiva das plantas». Todavia, qualquer teoria da evolução deve basear-se em dados como estes.

Na sua análise matemática, «O conceito fundamental de estatística» — afirma o Dr. Mather — «é o de população hipotética infinitamente grande, da qual constitui uma amostra o conjunto dos dados observados». Decerto que a estatística teórica deve construir-se sobre este conceito. Mas também o pode ser sobre o de variável casual ou o de probabilidade de acôrdo com axiomas como os de Jeffreys. Muitos escritores, consideram uma, ou ambas, destas últimas aproximações logicamente sólidas, quanto mais não seja por não necessitarem do conceito de verosimilhança, que não é derivável do de população infinita.

O campo abrangido pelo Dr. Mather, é o, já em

grande parte, considerado pelo Prof. R. A. Fisher em «Statistical Methods for Biologists» e «The Design of Experiments» e o que se deve a Fisher é óbvia e completamente reconhecido. Comparado com estes livros o do Dr. Mather dá um apanhado mais completo de alguns métodos aritméticos. A sua discussão das interrelações da variável normal,  $\chi^2$ , distribuição de Student, e a de  $z$ , é esclarecedora, bem como a sua detalhada partição dos graus de liberdade.

Mas, como se poderia talvez esperar dos primeiros parágrafos, os métodos seguidos pelo Autor são, algumas vezes, logicamente incorrectos. Assim, depois de calcular para  $\chi^2$  o valor 1,17 numa tabela de contingência  $2 \times 2$ , a págs. 193, acrescenta que tal mostra «não existir interacção entre as classificações, isto é, que o tipo de água não afecta a germinação». Ora tal não prova nada disto. O que simplesmente mostra é que se a água lodosa provoca melhor germinação, ou inversamente, um ensaio com uma centena de sementes é inadequado para comprovar o facto. É, porém, inteiramente possível que um ensaio com alguns milhares de sementes mostrasse 15% mais de germinação com água lodosa do que com água das chuvas. Talvez que se o Autor estivesse acostumado a pensar em termos de probabilidade de preferência aos de população infinita não tivesse cometido este elementar erro de interpretação. É muitas vezes tão importante compreender o que a estatística não prova como o que prova.

No todo, o desenvolvimento de Fisher é não só mais lógico nos livros indicados do que no do Dr. Mather, mas é também provavelmente mais inteligível para um principiante. No entanto, Mather esclareceu um grande número de pontos que Fisher tratava bastante rapidamente, quando os tratava.

O livro ideal sobre métodos estatísticos para os biólogos ainda não foi escrito e talvez nunca o seja. Mas vale a pena especular sobre o seu conteúdo. Incluiria a prova matemática de todos os métodos usados. É perfeitamente verdade que a maioria dos estudantes de biologia deseja possuir métodos estatísticos para os utilizar como faz com os microscópios. Mas os que possuem espírito científico em mais larga escala insistirão, certamente, na compreensão da aberração cromática, por um lado, e na das distribuições de frequência assimétricas, por outro. Na realidade, a matemática necessária pode ser condensada num espaço mais reduzido do que poderíamos supor.

Em segundo lugar trataria da história da biometria que tem algumas relações com a sua presente situação. Há quarenta anos um espectador da controvérsia entre Bateson e Pearson poderia ter dito: «Eu não sei quem tem razão, mas o que é certo é que

ambos não a podem ter». Na realidade, ambos tinham, em grande parte, razão. Hoje os pontos de vista de certos estatísticos parecem ser completamente irreconciliáveis. Uma retrospectiva histórica mostra que todos podem ter interesse. Assim, Neymann e Pearson, Fisher e Jeffreys, usam diferentes critérios de significância, cada um defendendo o seu próprio ponto de vista com considerável força. Têm principalmente tratado de problemas que dizem respeito a produtos industriais, organismos vivos e tremores de terra, e cada um escolheu o melhor método no seu campo; estes métodos, porém, podem ter algum valor fora daqueles campos.

Em 3.º lugar, trataria de todas as importantes aplicações da estatística à biologia. Um rápido apanhado mostraria como a estatística tem sido aplicada por forma desigual. Assim, por óbvias razões de economia, a preparação das tábuas de vida baseia-se numa técnica muito complexa e meticulosa enquanto que a das curvas de crescimento está numa fase embrionária.

O livro que analisamos não satisfaz a nenhuma destas condições nem se vê manifesta tal pretensão. São dadas as fórmulas das principais distribuições teóricas de maneira alguma mais compreensivas pelo facto de conterem factoriais de fracções, cujo significado em parte alguma é explicado; e a afirmação a págs. 35 de que «os momentos de ordem maior do que 2 não são frequentemente utilizados» ainda que verdadeira, sugere apenas que a biometria está numa fase um tanto decadente. A suposição de que qualquer distribuição pode ser tratada como normal conduziu, recentemente, a sérios erros, em especial na comparação das taxas de mutação e na descoberta do ligamento.

O Dr. Mather procura estar a par das mais recentes idéias. O coeficiente de correlação — afirma ele — ocupou um lugar muito importante em estatística mas o seu emprêgo está em gradual declínio, visto o método de regressão conduzir sempre a uma solução ou igualmente boa ou frequentemente melhor. Não há dúvida que em casos individuais os coeficientes de regressão nos dizem um pouco mais do que os coeficientes de correlação, mas não nos permitem comparar as relações das diferentes variáveis casuais; por exemplo não nos permitem decidir qual dos casos é melhor, se predizer o peso do cérebro a partir do peso do corpo, se a partir do perímetro craniano. Também são essenciais ao estudo da hereditariedade, não só de acordo com os métodos de Pearson, mas também com os de Sewall Wright, que são inteiramente aplicáveis aos casos mendelianos. Quanto mais extensa for a generalização mais marcada é a superioridade da correlação em relação à regressão. Estas opiniões podem explicar-se pelo limitado campo de que o Dr. Mather

tira os exemplos. Encontra-se por exemplo forte variação assimétrica nas distribuições de pesos, tolerância às drogas, esperança de vida, e fertilidades, mas estas não são consideradas.

Feitos todos estes reparos, o livro — podemos afirmá-lo — será de valor para grande número de biólogos. As tabelas do fim são muito sucintas e suficientes em muitos casos. O tratamento é muitas vezes mais detalhado do que em outro livro semelhante. Há

finalmente uma grande probabilidade de que um investigador encontre aqui, e em mais nenhuma outra parte, uma pormenorizada descrição do método apropriado ao respectivo problema particular. Mas justamente porque «Statistical Analysis in Biology» preenche uma lacuna é essencial apontar as suas limitações reais.

(De J. B. S. Haldane em «Nature», Vol. CLI, n.º 3841 — 1945, Junho 2 — Trad. de M. Zaluar)

## PERIÓDICOS CIENTÍFICOS RECEBIDOS

### NACIONAIS

**Portugaliae Physica** — Vol. 1, Fasc. 3 — J. Palacios et L. Lozano Calvo — *L'aimantation du nickel par compression unilatérale*. — Guido Beck — *Remarque sur la notion du champ électromagnétique dans la théorie de Dirac*. — G. Dedebant et Ph. Wehrle — *Mécanique aléatoire* — 1<sup>re</sup> partie: *Le calcul aléatoire*. — Marieta da Silveira — *Sur l'absorption du rayonnement  $\gamma$  émis par l'uranium I et leur descendants immédiats*. — Carlos A. C. Braga — *Étude de la transmutation Ra D  $\rightarrow$  Ra E par spectrographie magnétique du rayonnement  $\beta$  de conversion interne*.

**Publicações da Junta de Investigação Matemática** — Cadernos de Análise Geral:

Caderno n.º 12 — *Topologia Geral* — *Conjuntos Compactos* — por A. Pereira Gomes.

### ESTRANGEIROS

#### Argentina

**Boletín Matemático** — (Buenos Aires) — Revista argentina de Matemática — Ano XVII, n.ºs 6 e 7 — 1944.

#### Espanha

**Euclides** — (Madrid) — Revista mensual de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones Tomo IV, n.º 46, Dezembro de 1944 e Tomo V, n.ºs 47 e 48, Janeiro e Fevereiro de 1945.

#### Inglaterra

*The Quarterly Journal of Mathematics* — Oxford Series — Vol. 15, n.ºs 59-60, Setembro-Dezembro, 1944.

Oferta do «British Council» por intermédio do «Instituto Britânico em Portugal».

## OUTRAS PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

**Afinidades** — (Lisboa) — Revista de Cultura Luso-Francesa — n.ºs 9/10, 1944.

**Agros** — (Lisboa) — Boletim dos Estudantes de Agronomia — Ano XVII, n.ºs 1 e 2, 1944.

**Técnica** — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.ºs 151, Dezembro de 1944, 152 e 153, Janeiro e Fevereiro de 1945.

**Álgebra Prática (Exercícios)** 6.º ano — Américo Areal — Editora Educação Nacional, Lda — Pôrto, 1945.

**Círculos que se perspectivam em círculos** — Augusto Queiroz e Jayme Rios de Souza — Separata dos «Anais da Faculdade de Ciências do Pôrto» — Pôrto, 1944.

**Conceitos Fundamentais de Matemática** — Bento de Jesus Caraça — Biblioteca Cosmos, n.ºs 2 e 18 — Lisboa, 1942.

**Multiplicações vectoriais, associativas e modulares — Representações geométricas** — (Dissertação para o doutoramento em Ciências Matemáticas, na Faculdade de Ciências da Universidade do Pôrto) — Manuel Gonçalves Miranda — Pôrto, 1944.

*Obras oferecidas pelo «British Council»:*

**Craftsmanship in the Teaching of Elementary Mathematics** — F. W. Westaway — Blackie & Son, Ltd. — London, 1943.

**Studies in Arithmetic** — Vols. I e II — (The Scottish Council for Research in Education n.ºs 13 e 18) — University of London Press, Ltd — London, 1939; 1941.

**Teaching the Essentials of Arithmetic** — P. B. Ballard — University of London Press, Ltd — London, 1941.

**The Essentials of Arithmetic** — A manual for teachers — Robert Walker — George G. Harrap & Co., Ltd. — London, 1933.

**The Teaching of Mathematics in the Elementary and the Secondary School** — American Teachers Series — J. W. A. Young — Longmans, Green and Co. — New-York — London, 1937.

**The Teaching of Geometry in Schools** — A report prepared for the Mathematical Association — London, 1944.

**Senior School Mathematics** — Board of Education, Educational Pamphlets, N.º 101 — London, 1935.