Porque é que certas funções elementares não são racionais*

Gabriela Chaves e José Carlos Santos
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Um exercício clássico que se costuma propor a alunos de cursos de introdução à Análise Real consiste em pedir para provar que a função seno não é uma função polinomial nem, mais geralmente, uma função racional. Que assim é resulta de nenhuma função racional ter uma infinidade de zeros, a menos que se trate da função nula. No entanto, isto não elimina a possibilidade de a restrição da função seno a um intervalo aberto ser uma função racional. Uma maneira de se provar que uma função definida num intervalo aberto não é uma função polinomial consiste em ir calculando as sucessivas derivadas; se a função fosse polinomial então, uma vez que o grau da derivada de uma função polinomial não constante é menor que o grau da função de que se partiu, ao fim de algumas derivações acaba-se por obter uma função constante. No entanto, esta abordagem não funciona para funções racionais.

Ou funciona?

Será demonstrado neste artigo, por métodos elementares, que as restrições a intervalos abertos de certas funções elementares não são racionais e isso será feito recorrendo ao conceito de grau de uma função racional.

No que se segue, o domínio de qualquer função será um intervalo aberto da recta real. Quando se mencionar a função exponencial, a função seno, etc., será de facto às restrições daquelas funções ao intervalo que se estará a fazer referência.

Definição: Se R for uma função racional não nula, então chama-se grau de R (que será representado por gr(R)) à diferença entre os graus do numerador e do denominador. Mais precisamente, se P_1 e P_2 forem funções polinomiais tais que $R=P_1/P_2$, então $gr(R)=gr(P_1)-gr(P_2)$.

Vê-se facilmente que esta definição faz sentido, ou seja, que o grau de R não depende das escolhas de P_1 e de P_2 ([**1**, cap. 4, §3.1]).

Teorema: Sejam f e g funções racionais, nenhuma das quais é a função nula.

1. Se $f+g \not\equiv 0$, então $\mathrm{gr}(f+g)\leq\max\{\mathrm{gr}(f),\mathrm{gr}(g)\}$.
2. O grau do produto satisfaz a relação $\mathrm{gr}(f.g)=\mathrm{gr}(f)+\mathrm{gr}(g)$.
3. Se $f' \not\equiv 0$, então $\mathrm{gr}(f')<\mathrm{gr}(f)$. Mais geralmente, se $n\in IN$ e se $f^{(n)}\not\equiv 0$, então $\mathrm{gr}(f^{(n)})\leq\mathrm{gr}(f)-n$.

Demonstração. Como afirma Bourbaki [**1**, cap. 4, §3.1], as demonstrações das duas primeiras alíneas resultam das fórmulas análogas para funções polinomiais. Sejam P_1, P_2, Q_1 e Q_2 funções polinomiais tais que $f=P_1/P_2$ e que $g=Q_1/Q_2$. Se $f+g$ não for a função nula, então

$$\begin{aligned} gr(f+g) &= \mathrm{gr}(P_1Q_2+P_2Q_1)-\mathrm{gr}(Q_1Q_2) \\ &\leq \max\{\mathrm{gr}(P_1)+\mathrm{gr}(Q_2),\mathrm{gr}(P_2)+\mathrm{gr}(Q_1)\}-\mathrm{gr}(Q_1)-\mathrm{gr}(Q_2) \\ &= \max\{\mathrm{gr}(P_1)-\mathrm{gr}(Q_1),\mathrm{gr}(P_2)-\mathrm{gr}(Q_2)\} \\ &= \max\{\mathrm{gr}(f),\mathrm{gr}(g)\}. \end{aligned}$$

* Tradução de *Why Some Elementary Functions Are Not Rational*, publicado originalmente em *Mathematics Magazine*, vol. **77(3)**, 2004, pp. 225-226.

A Gazeta de Matemática agradece à The Mathematical Association a gentileza de ter permitido esta publicação.

A segunda alínea decorre imediatamente da definição. Finalmente, caso f' não seja a função nula, então

$$
\begin{aligned}
gr(f') &= \mathrm{gr}\left(\frac{P_1'P_2 - P_1P_2'}{P_2^2}\right) \\
&= \mathrm{gr}(P_1'P_2 - P_1P_2') - 2\mathrm{gr}(P_2) \\
&\leq \max\{\mathrm{gr}(P_1') + \mathrm{gr}(P_2), \mathrm{gr}(P_1) + \mathrm{gr}(P_2')\} - 2\mathrm{gr}(P_2) \\
&= \max\{\mathrm{gr}(P_1) - 1 + \mathrm{gr}(P_2), \mathrm{gr}(P_1) + \mathrm{gr}(P_2) - 1\} - 2\mathrm{gr}(P_2) \\
&= \mathrm{gr}(P_1) - \mathrm{gr}(P_2) - 1 \\
&= \mathrm{gr}(f) - 1.
\end{aligned}
$$

Resulta, por indução, que se $n \in IN$ é tal que $f(n) \not\equiv 0$, então $\mathrm{gr}(f^{(n)}) \leq \mathrm{gr}(f) - n$.

Este teorema já nos permite demonstrar que certas funções não são racionais. Considere-se, por exemplo, a função f definida por $f(x) = \sqrt[3]{1 + x^2}$. Se fosse racional, resultaria da segunda alínea do teorema que $2 = \mathrm{gr}(f^3) = 3\mathrm{gr}(f)$, o que é impossível, visto que o grau de f é um número inteiro. Por outro lado, visto que exp'=exp, a terceira alínea garante que a função exponencial não é uma função racional.

Embora seja verdade que, para funções polinomiais não constantes, se tem $\mathrm{gr}(P') = \mathrm{gr}(P) - 1$, isto não é verdade em geral para funções racionais: se $n \in IN$ e se $f(x) = (x^n - 1)/(x^n + 1)$, então $\mathrm{gr}(f) = 0$, mas $\mathrm{gr}(f') = -n - 1$.

Como consequência do teorema temos o seguinte

Corolário: Se f for uma função racional não nula, se $k \in IR$ e se $n \in IN$, então $f^{(n)} \neq k \cdot f$, a menos que f seja polinomial, que $k=0$ e que $n > \mathrm{gr}(f)$.

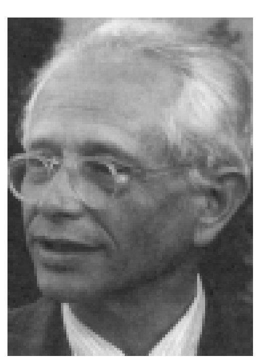
Este corolário pode ser usado (com $k=1$ e $n=1$) para mostrar novamente que a função exponencial não é racional e também (com $k=-1$ e $n=2$) para mostrar que nem a função seno nem a função co-seno é racional. Com um pequeno esforço adicional, poder-se-ia deduzir do corolário que nem a função tangente nem a função co-tangente são racionais, mas é mais simples observar que, uma vez que $\tan' = \sec^2$, se a função tangente fosse racional então $\cos^2$ também o seria, pois seria o recíproco de uma função racional. Mas

$$\cos^2(x) = \frac{\cos(2x) + 1}{2}$$

e, portanto, a função $x \to \cos(2x)$ seria racional. Que isto é impossível pode ser deduzido do corolário (com $k=-4$ e $n=2$) ou do facto de o co-seno não ser racional.

Bibliografia

[1] N. Bourbaki, *Algèbre, chapitres 4 à 7*, Masson, Paris, 1981. Tradução inglesa: *Algebra II*, Springer-Verlag, Berlim, 1980.



Retrato de Max Dehn

Estamos no semestre de Verão
do ano sereno de 1899
em Göttingen.
Por trás há um rio
ou um cenário que o cria.

Só nós ainda
sabemos que o jovem Max Dehn[1]
terá à pressa
de abandonar a fotografia
e ir-se desfazendo do casaco
colarinhos altos camisa e vida
para tentar chegar e descobrir-se
na margem estranha.

(*F. J. Craveiro de Carvalho*)

[1] Como outros, M. D. Foi forçado a abandonar a Alemanha em 1939. No seu caso, ao encontro de uma vida que o seu talento matemático não merecia.