ANO VI-N.º 24 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO-1945

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

ÁLGEBRAS EM INVOLUÇÃO *

por *A. de Mira Fernandes*

1. — Tôda a involução duma álgebra com elemento unidade, cujo corpo fundamental é o dos números reais, gosa da seguinte propriedade:

Todo o elemento a *admite a decomposição* $a = a' + a''$, *sendo* $a' = \frac{a + J(a)}{2}$ simétrico *e* $a'' = \frac{a - J(a)}{2}$ anti-simétrico.

Com efeito,

$J(a') = 1/2. \{ J(a) + J[J(a)] \} = 1/2. [J(a) + a] = a'$
$J(a'') = 1/2. \{ J(a) - J[J(a)] \} = 1/2. [J(a) - a] = = 1/2. (-2a'') = -a''$.

Se a álgebra é de ordem n e $(u, e'_2, e'_3 \cdots e'_n)$ uma base, seja $e'_i = \bar{e}_i + e_i$, onde $\bar{e}_i$ é a parte simétrica e e_i a parte antisimétrica de e'_i. Para qualquer elemento a, será $a = \alpha_1 u + \alpha_2 e'_2 + \cdots + \alpha_n e'_n = (\alpha_1 u + \alpha_2 \bar{e}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{e}_n) + + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$.

Se os únicos elementos simétricos são os do corpo (λu), será $\bar{a} = \alpha_1 u + \alpha_2 \bar{e}_2 + \cdots \alpha_n \bar{e}_n = \alpha_0 u$ a parte simétrica de a; e

$$(1) \qquad a = \alpha_0 u + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

sendo $e_2 \cdots e_n$ antisimétricos.

Como se trata duma álgebra de ordem n e (1) se verifica para *qualquer* a, nenhum dos elementos e_i será nulo. Isto é, nenhum dos elementos e_i da base inicial será simétrico (o que era evidente à *priori*).

Como $J(a) = \alpha_0 u - \alpha_2 e_2 - \cdots - \alpha_n e_n$ seguem-se tôdas as considerações geométricas da Nota anterior do Prof. Ruy Luís Gomes.

No caso geral, $a = \bar{a} + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ e $J(a) = \bar{a} - \alpha_2 e_2 - \cdots - \alpha_n e_n$.

Mas agora, alguns dos e_i podem ser nulos: os que correspondem aos e'_i que são simétricos, sem pertencerem ao corpo (λu). E então a involução é ainda uma simetria, mas em relação ao hiperplano-imagem do sistema dos elementos da base que são simétricos.

Note-se que os e'_i não podem ser todos simétricos sem que a involução seja a identidade. Mas podem ser todos anti-simétricos, porque lá está o u (simétrico) para o impedir.

2. — Numa álgebra linear $\mathfrak{A}$, com elemento unidade (u), no corpo fundamental dos números reais, seja $e'_1 = u, e'_2 \cdots e'_n$ uma base. Seja J uma involução.

Seja $e'_i = \bar{e}_i + e_i$ $(i = 1, 2 \cdots n)$ onde $\bar{e}_i$ é a parte simétrica e e_i a parte antisimétrica do elemento e'_i em relação a J. Evidentemente, cada um dos elementos e_i é linearmente independente dos $\bar{e}_i$; e cada um dos $\bar{e}_i$, linearmente independente dos e_i.

Entre os elementos $\bar{e}_i$ (pelo menos um $(e_1 = u)$ não é nulo) haverá p linearmente independentes. Representemo-los por $\bar{g}_1 \bar{g}_2 \cdots \bar{g}_p$.

Entre os elementos e_i (pelo menos um não é nulo, senão a involução era uma identidade), haverá q linearmente independentes. Representemo-los por $g_1, g_2 \cdots g_q$.

Será, manifestamente, $p + q = n$. Para qualquer elemento a será

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{e}_i + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \sum_{i=1}^{p} \gamma_i \bar{g}_i + \sum_{i=1}^{q} \lambda_i g_i.$$

Os elementos $\bar{g}_1, \bar{g}_2 \cdots \bar{g}_p, g_1, g_2 \cdots g_q$ $(p + q = n)$ formam uma base, em que todos os elementos são *simples*: isto é, ou simétricos ou antisimétricos. Chamar-lhe-emos uma *base normal*, em relação a J.

Se $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \cdots \bar{h}_{p'}, h_1 . h_2 \cdots h_{q'}$ $(p' + q' = n)$ fôr outra base normal, devendo ser

$$\bar{h}_k = \sum_{i=1}^{p} \delta_{ik} \bar{g}_i \quad (k = 1, 2 \cdots p')$$

e

$$\bar{g}_k = \sum_{i=1}^{p'} \mu_{ik} \bar{h}_i, \quad (k = 1, 2 \cdots p)$$

é evidentemente $p = p'$ (e portanto, $q = q'$). Isto é, duas bases normais duma álgebra linear, em relação à mesma involução J, têm o mesmo número de elementos simétricos e o mesmo número de elementos anti-simétricos (*Lei de inércia*). O *hiperplano* dos elementos simétricos é de simetria em relação a J.

* Duas Notas enviadas à Redacção pelo Prof. Ruy Luís Gomes para publicação.