

## MECÂNICA RACIONAL

### 1. S. T. — MECÂNICA RACIONAL — 1.º exame, 2-2-944.

**2111** — Integrar a equação às derivadas parciais  $z(rt - s^2) + pqs = 0$ .

**2112** — Desenvolver a função  $f(x) = x(\pi - x)/8$  em série do seno, no intervalo  $0 \leq x \leq \pi$ .

**2113** — Averiguar que a equação integral

$$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b k(x, y) \varphi(y) dy,$$

se fôr  $k(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$  e  $\int_a^b f_1(x) \cdot f_2(x) dx = A$ , admite a solução

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda f_1(x)}{1 - A\lambda} \int_a^b f(y) f_2(y) dy.$$

**2114** — Determinar as curvas de estacionaridade do integral  $I = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^n \sqrt{1 + y'^2} dx$ .

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de criticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas criticas de livros e outras publicações de matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

### 46 — NEVILLE, ERIC HAROLD — *Jacobian Elliptic Functions* — Cambridge — 1944.

Oferta do «British Council» por intermédio do Instituto Britânico em Portugal.

O intento deste livro, no dizer do autor, é restabelecer, sob um novo aspecto, à custa de estruturas fundamentais de definição, a aparelhagem algoritmica das clássicas funções elípticas de Jacobi, que o emprêgo das funções *theta* como elementos iniciais, embora artificiosos, da teoria, quasi por completo banira dos modernos tratados. E, como as principais razões desse banimento se apoiavam nas dificuldades trazidas pela inversão do integral de Legendre, no caso da variável complexa, é à remoção dessas dificuldades que directamente visa a elegante construção dos novos elementos elípticos do autor, permitindo restaurar, em moldes acessíveis, a fertilíssima teoria clássica. E não se recuperam apenas os benefícios dessa fertilidade que tem, sobretudo, como razão de ser, a possibilidade de cálculo daquêles integrais com as quais as funções jacobianas estão tradicionalmente associadas, possibilidade que resulta, como se sabe, das relações que as ligam com as suas derivadas. A teoria exposta tem ainda o merito de elucidar mais fortemente do que a teoria elementar weierstrassiana da função  $P(z)$  as relações que implicitamente ligam a dupla periodicidade da função elíptica às propriedades do integral que é a sua inversa. Como se consegue este objectivo? O autor associa com uma arbitraria função weierstrassiana um conjunto simétrico de funções duplamente periódicas, tendo em cada paralelogramo dos periodos da função inicial, dois polos simples. Esse conjunto

converte-se num sistema jacobiano pela especialização dum dos parâmetros; e essa especialização, que é fundamental na teoria, importa, para o sistema obtido, a dupla periodicidade, sem impôr aos parâmetros a condição de serem reais. Seguidamente, demonstrações simples dos teoremas de adição e das transformações de Jacobi e Landen substituem as demonstrações algébricas exigidas pelo integral de inversão.

A estrutura é a configuração dos pontos congruentes (em que a função toma o mesmo valor); e, embora ela seja sempre formada (para uma função duplamente periódica) pelos pontos de intersecção de duas familias de rectas paralelas equidistantes, no plano da variável complexa, essas familias não são fundamentais: porque não são únicas e porque apenas têm interesse os pontos congruentes em que se cruzam. Das estruturas, das células de congruência e do conceito geral de função elíptica se occupa pormenorizadamente o autor na introdução do livro, na qual se inclui ainda a teoria das funções weierstrassianas, formulada a partir do conceito de estrutura. E logo no capítulo primeiro são introduzidos os elementos *primitivos* com as seguintes notações:

$$(1) \quad \begin{cases} f_j z = [P(z) - e_j]^{1/2} \\ g_j z = [P(z) - e_g]^{1/2} \\ h_j z = [P(z) - e_h]^{1/2}, \end{cases}$$

sendo  $P(z)$  a função de Weierstrass e  $e_f, e_g, e_h$  os respectivos parâmetros ( $e_1, e_2, e_3$ ) (ou sejam os valores de  $P(z)$  nos pontos semi-períodos). As funções (1) são duplamente periódicas, e constroem-se, à sua custa, as restantes funções elementares (ao todo doze) defini-

das pelos símbolos

$$(2) \quad \begin{cases} fj(z-\omega_f) & fj(z-\omega_g) & fj(z-\omega_h) \\ gj(z-\omega_f) & gj(z-\omega_g) & gj(z-\omega_h) \\ hj(z-\omega_f) & hj(z-\omega_g) & hj(z-\omega_h) \end{cases}$$

Dum modo geral, representando por  $\omega_i$  um símbolo alternativo da origem, tôdas as funções elementares se podem escrever sob a forma  $pqz$ , sendo  $pqz$  a função que tem um zero em  $\omega_p$  e um polo em  $\omega_q$

$$\left[ \frac{p}{q} \left\{ = j, f, g, h \right\} \right].$$

Assim, visto que  $fj(z-\omega_f)$  tem um polo em  $\omega_f$  e zeros em  $\omega_j, \omega_g, \omega_h$ , será  $fj(z-\omega_f) = jfz$ .

Esta notação é duma grande comodidade e compatível com a das funções primitivas.

Estas funções elementares são estudadas nos capítulos II e III; e os respectivos teoremas de adição no capítulo IV, iniciando-se no capítulo V o estudo do problema da inversão, que se prolonga nos capítulos seguintes, VI, VII, VIII e IX.

É só no capítulo X que se introduzem as funções de Jacobi, à custa das funções elementares, utilizando-se, sem esforço, todo o seu algoritmo no estabelecimento daquelas propriedades das funções jacobianas cuja dedução, pelos processos clássicos, tornava ingrata e fastidiosa a sua estruturação.

Depois duma breve exposição, no capítulo XVI, da teoria das funções *theta*, aborda o autor, no último capítulo, a teoria das funções jacobianas no campo real.

Um belo livro! Didáctico e original!

A. de Mira Fernandes

47—MONTEIRO, A. A. e PAULO, J. SILVA. — *Aritmética Racional*. — Livraria Avelar Machado, 1945, 182 págs.

Todos los Profesores de enseñanza media reconocen que la introducción de la Aritmética racional constituye el punto más espinoso de un plan verdaderamente didáctico. Dos caminos se presentan para abordar tal problema pedagógico de la enseñanza de la Aritmética racional en el Bachillerato: el primero, consiste en simplificar el estudio de tal disciplina facilitándole con una amplia concesión a la intuición, introduciendo como postulados muchas propiedades casi evidentes de difícil demostración y reduciéndolo a las propiedades más necesarias para pasar al estudio del Algebra. La segunda solución, más radical, se reduce a transportar la Aritmética racional al último curso del Bachillerato, cuando el desarrollo intelectual es mayor y el estudio puede ser más proficuo.

Este segundo criterio es el adoptado en su notabilísimo libro de Aritmética racional por los autores Profs. A. Monteiro y J. Silva Paulo, el primero Prof. universitario y el segundo de Liceo (\*).

No han olvidado los autores la seria dificultad que supone para el alumno de Bachillerato el paso de la enseñanza intuitiva a la racional, y la gran desorientación que produce en ellos (si no se cuida extraordinariamente de la bondad de los métodos), al estudiar por segunda vez propiedades y teoremas que conocen y manejan hace tiempo. Por ello los autores han procurado y conseguido hacer un libro de lectura sencilla y sumamente atrayente, con multitud de ejemplos curiosos, notas históricas, etc.

En diez capítulos se exponen la teoría de números enteros y la de números racionales desde un punto de vista moderno (influido por las recientes teorías modernas: Algebra, Topología general, teoría de estructuras, etc.); pero en forma tan agradable y fácil que cualquier estudiante de los últimos cursos de bachillerato puede, sin ayuda especial de Profesor, realizar el estudio de este texto. A tal facilidad contribuye la multitud de bellos ejercicios y problemitas con que aparecen ilustrados los capítulos.

Sin proponérselo, los autores han hecho una obra que tiene también un gran interés para el estudioso en general, porque le introduce de manera elemental y profunda en métodos peculiares del pensamiento matemático moderno, sin necesidad de una preparación técnica especial. Nos parece altamente recomendable la lectura de esta Aritmética racional para todo alumno de Bachillerato que, al terminar, piense dedicarse a estudiar Matemáticas.

Com nuestra calurosa felicitación a los autores terminamos expresándoles nuestro vivo deseo de que aparezca en plazo breve un segundo tomo dedicado a los capítulos de la Aritmética racional que no han sido tratados en éste.

El libro está dedicado a M. Zaluar y H. Ribeiro, cuya destacada labor en la Matemática portuguesa es bien conocida.

Sixto Rios

ÍNDICE — Cap. 0. Aritmética Racional — Cap. I. Igualdade — Cap. II. Adição e multiplicação — Cap. III. Subtracção e divisão — Cap. IV. Ordem — Cap. V. Indução finita — Cap. VI. Representação dos Enteiros — Cap. VII. Divisibilidade — Cap. VIII. Restos — Cap. IX. Frações.

Esta crítica é também publicada em «Revista Matemática Hispano Americana».

(\*) Quizá no es superfluo señalar este libro como un ejemplo de la importancia de las aportaciones realizadas por los Profesores de Universidad para la renovación de los métodos y contenido de la enseñanza media.

48 — AREAL, AMÉRICO — **Álgebra Prática** (Exercícios), 6.º ano. Editora Educação Nacional, Pôrto.

São os livros desta natureza, exercícios de revisão e preparação, bastante úteis quer a alunos quer a mestres, desde que à escolha e ordenação dos exercícios tenha presidido um bom critério pedagógico. O livro do

sr. Areal contém 359 exercícios ordenados de acôrdo com o programa do 6.º ano, alguns dos quais têm saído em exames liceais. É mais um livro de exercícios que tende a fornecer ao aluno matéria de preparação para um exame escrito feito nos moldes das antigas provas.

J. da Silva Paulo

## PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

### REVISTAS E PUBLICAÇÕES EXCLUSIVAMENTE DE MATEMÁTICA

#### NACIONAIS

**Publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto:**

N.º 9 *Sur une certaine classe de polynomes à coefficients complexes* — 1944 — por J. Gaspar Teixeira.

N.º 12 *Sobre uma Construção Algébrica da Noção de Integral* — 1945 — por Ruy Luís Gomes.

N.º 13 *Sobre a Construção Algébrica da Medida à Borel* — 1945 — L. Neves Real.

N.º 14 *Sobre os Anéis Semi-primários* — 1945 — por A. Almeida Costa.

N.º 15 *As Funcionais Semi-contínuas e a Propriedade de Darboux* — 1945 — A. Pereira Gomes.

N.º 16 *Sobre a Noção do Espaço compacto* — 1945 — A. Pereira Gomes.

**Publicações da Junta de Investigação Matemática** — Cadernos de Análise Geral:

N.º 13 *«Geometria das Distâncias»* — 1 — *Generatidades — Álgebra Vectorial* — por A. de Mira Fernandes.

#### ESTRANGEIRAS

##### Argentina

**Boletim Matemático** — (Buenos Aires) — Revista Argentina de Matemática — Ano XVII, n.ºs 8, 9 e 10. Ano XVIII, n.ºs 1 e 2.

**Mathematicae Notae** — (Rosário) — Boletim del Instituto de Matemática — Facultad de Ciências Mate-

máticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Ano IV, 1944.

**Revista de la Unión Matemática Argentina** — (Buenos Aires) — Volume X, n.ºs 3 4. — 1945.

##### Cuba

**Revista de la Sociedad Cubana de Ciencias Físicas y Matemáticas** — (Habana) — Vol. I, n.º 6 — 1944.

##### Espanha

**Matemática Elemental** — (Madrid) — Revista publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª série. Tomo V, n.ºs 1 e 2 — 1945.

##### Estados Unidos da América do Norte

**Scripta Mathematica** — (New-York) — A quarterly journal devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics. Vol. X, n.ºs 1-4 — 1944.

##### Inglaterra

**The Journal of the London Mathematical Society** — Vol. 19, Part. 2, n.º 74 — April, 1944.

**The Mathematical Gazette** — (London) — Vol. XXIX n.ºs 283 e 284 — 1945.

**A Treatise on the Theory of Bessel Functions** — G. N. Watson — 2.ª edition — 1944 — Cambridge (Oferta do British Council).

## OUTRAS PUBLICAÇÕES

**Afinidades** — Revista de Cultura Luso-Francesa n.º 12 — Junho de 1945.

**Euclides** — (Madrid) — Revista mensual de Ciências Exactas. Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones. Tomo V, n.ºs 50, 51 e 52, Abril a Junho de 1945.

**Portugaliae Acta Biologica** — Vol. I, n.º 1 Lisboa, 1944

**Scientia** Revista dos Alunos da Faculdade de Ciências de Lisboa, n.º 15, 1945.

**Técnica** Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. n.ºs 155 e 156, Abril e Maio, 1945.

**Estudos de Demografia Portuguesa** — Dissertação

para o doutoramento em Ciências Económicas e Financeiras — por João Remy T. Freire.

**Da influência das forças de «spin» nas reacções entre partículas nucleares** — Contribuição para o estudo da espectroscopia nuclear — Dissertação para doutoramento na Faculdade de Ciências da Universidade de Coimbra — por José L. Rodrigues Martins — Coimbra, 1944.

**Statistics** — por L. H. C. Tippett — The Home University Library — Oxford — 1943 (oferta do British Council).

**Prontuário de língua portuguesa** — por F. Xavier Roberto e Luís de Sousa — Lisboa, 1945.