

Ora  $\frac{d}{dx} \left| \int_{x_0}^x u(t) dt \right| = \pm u(x)$ , conforme respectivamente  $x \geq x_0$  e, além disso, no ponto  $x=x_0$ , a função  $\theta(x) = \left| \int_{x_0}^x u(t) dt \right|$  tem, como semi-derivada

à direita,  $u(x_0)=0$  e, como semi-derivada à esquerda,  $-u(x_0)=0$  e, portanto, tem aí uma derivada nula. Consideremos pois, em primeiro lugar, o intervalo fechado,  $(x_0, x+d)$ , onde a função  $\theta(x)$  tem  $u(x)$  como derivada primeira. Derivando então em ordem a  $x$  ambos os membros da (6), resulta

$$(7) \quad u'(x) - mL u(x) = g'(x)$$

e portanto, atendendo a que  $u(x_0)=0$ ,

$$(8) \quad u(x) = e^{mLx} \int_{x_0}^x g'(t) e^{-mLt} dt$$

de onde se deve concluir que, em todo o intervalo,  $(x_0, x+d)$ , será  $g'(t) \geq 0$  porque  $u(x) \geq 0$  e, por conseguinte, que a função  $g(x) \leq 0$  é não decrescente no intervalo  $(x_0, x+d)$ . Mas para  $x=x_0$  é  $g(x_0)=0$  (vide expr. 6), de modo que em todo o  $(x_0, x+d)$ , é  $g(x) \equiv 0$  donde  $g'(x) \equiv 0$  donde ainda  $u(x) \equiv 0$  de onde resulta, em todo o intervalo fechado  $(x_0, x+d)$

$$(9) \quad \varphi_i(x) - \Psi_i(x) \equiv 0 \quad (i=1, 2, \dots, m).$$

Um raciocínio completamente análogo, feito para o intervalo  $(x-d, x_0)$  (de facto basta trocar nas (7) e (8)  $mL$  por  $-mL$  e substituir a conclusão « $g(x)$  é não decrescente em  $(x_0, x+d)$ » por esta outra: « $g(x)$  é não crescente em  $(x-d, x_0)$ » porque será agora neste intervalo  $g'(x) \leq 0$ ) permite demonstrar que também no intervalo fechado  $(x-d, x_0)$  é  $u(x) \equiv 0$  e que,

por conseguinte, as (9) são válidas em todo o intervalo  $(x-d, x+d)$ .

*Nota.* No meu trabalho, citado a págs. 6, considerava-se o caso mais geral em que às  $m$  componentes  $\varphi_i(x)$  da solução a determinar se atribuem «a priori» os  $m$  valores iniciais  $c_1, c_2, \dots, c_m$  em  $m$  pontos  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , todos distintos ou não. Demonstrei que uma condição suficiente para que a solução procurada exista e seja única é que às condições atrás citadas I, II, (convenientemente modificada), III e IV se junte a condição:  $V-O$  número  $d$  satisfaz ainda à limitação  $2Lm d < 1$ .

Com esta nova condição, a demonstração da unicidade da solução  $\{\varphi_i(x)\}$  correspondente simplifica-se extraordinariamente. Com efeito, se fizermos  $M_k = \max |\varphi_i(x) - \Psi_k(x)|$  em  $(x-d, x+d)$  ( $k=1, 2, \dots, m$ ) poderemos escrever, a partir das (5)

[onde em vez de  $\int_{x_0}^x$  deve então pôr-se  $\int_{x_i}^x$ ]

$$|\varphi_i(x) - \Psi_i(x)| \leq L \left( \sum_{k=1}^m M_k \right) |x - x_i| \leq 2Ld \left( \sum_{k=1}^m M_k \right)$$

e portanto também

$$(10) \quad M_i \leq 2Ld \left( \sum_{k=1}^m M_k \right) \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

Adicionando membro a membro as  $m$  desigualdades

$$(10), \text{ resulta } \sum_{i=1}^m M_i \leq 2Lm d \left( \sum_{k=1}^m M_k \right) \text{ e portanto,}$$

quando se tenha  $2Lm d < 1$ ,  $\sum_{i=1}^m M_i = 0$  isto é  $M_i = 0$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) e isto significa que se terão as (9).

Roma, Novembro de 1944.

## PEDAGOGIA

### A GEOMETRIA DEMONSTRATIVA NO ENSINO LICEAL

por António Nicodemus Pereira

Na leitura de livros modernos sobre a pedagogia da Matemática, é frequente encontrarmos referências à geometria intuitiva e experimental e à geometria demonstrativa.

Segundo creio, foi na reforma de programas do ensino secundário, em 1918, que entre nós, pela primeira vez, em linguagem oficial, houve referências à geometria intuitiva e experimental e ao método de laboratório.

Na reforma de 1918, houve uma inovação brilhante e notável no estudo da geometria que foi dividido em dois ciclos.

No 1.º ciclo, constituído pela 1.ª e 2.ª classes, a geometria plana e no espaço devia ser «estudada intuitiva e experimentalmente e introduzido o método de laboratório», conforme aconselhavam as instruções pedagógicas que acompanhavam o programa.

No 2.º ciclo, constituído pela 3.ª, 4.ª e 5.ª classes, era retomado o estudo da geometria, começando a 3.ª classe por uma «revisão, sob um ponto de vista mais ordenado das propriedades estudadas na 1.ª classe» (Geometria plana). A 4.ª classe começava também por revisões da 2.ª classe (Geometria no espaço), segundo o mesmo critério.

Ainda, quanto ao 2.º ciclo, as instruções pedagógicas aconselhavam: «o professor recorrerá judiciosamente, à intuição e à experiência sempre que o julgue necessário».

As alterações a este programa, nas muitas reformas que tem sofrido o ensino liceal, desde então, ou foram incaracterísticas ou más.

Os pedagogísticos da Matemática, quando se referem à geometria intuitiva e experimental, não excluem a dedução, reduzida a inferências estabelecidas a partir de propriedades verificadas intuitiva ou experimentalmente e, quando se referem à geometria demonstrativa, não excluem o apêlo à intuição e à experiência. Querem apenas significar que o carácter intuitivo e experimental ou dedutivo do estudo da geometria deverá ser mais ou menos acentuado.

Assim o entendeu Westuway e Breslich entre tantos outros notáveis pedagogistas da Matemática. Assim o entendeu, em 1918, a comissão de professores que organizou os programas de geometria, mostrando que conhecia up-to-date a moderna didáctica da Matemática.

Interessa-nos agora, em especial, o estudo da geometria demonstrativa. O objectivo da geometria demonstrativa no ensino liceal é principalmente dar ao aluno a prática do raciocínio lógico e não convencê-lo de que determinadas propriedades das figuras geométricas são verdadeiras.

Não tem pequeno trabalho nem revela pouca habilidade, o professor que faz criar no espírito dos seus alunos do 2.º ciclo, a necessidade de demonstração da maioria dos teoremas da geometria no espaço, sobretudo aquêles que se referem a posições de rectas e de planos entre si, por quanto os alunos têm a tendência de os considerar quasi todos como evidentes.

Como orientar o estudo da geometria demonstrativa?

Segundo a orientação indicada em muitos compêndios destinados às escolas de ensino médio de vários países (Itália, França, Inglaterra, América do Norte, etc.), isto é, mais ou menos rigorosamente dedutivo, com mais ou menos apêlo à intuição e à experiência?

É esta a orientação clássica do ensino da geometria. É a orientação mais próxima da de Euclides e que tem a tradição de muitos séculos.

Grandes nomes nas ciências matemáticas, alguns actuais, tem escrito compêndios destinados ao ensino assim orientado.

O aluno assiste dèste modo «à construção, pedra por pedra, do mais belo edificio erguido pelo espirito humano e, embora não atinja andares elevados toma conhecimento do modo como o edificio foi construido e da unidade que possui».

Apesar destas e de outras razões que possam ser

invocadas a favor da orientação clássica do estudo da geometria demonstrativa, nas escolas de ensino médio, há pedagogistas da Matemática que a rejeitam.

Breslich nos seus dois notáveis livros *The technique of teaching secondary school mathematics* e *Problems in teaching secondary school mathematics*, critica a orientação clássica no ensino da geometria demonstrativa (logical organization) porque, nessa orientação, muitas vezes, a psicologia do adolescente é sacrificada. Em muito pouco contam as dificuldades que êle encontrará no decurso do estudo.

Pouco importa que o aluno passe abruptamente de um assunto mais fácil ao mais difficil ou vice-versa.

Além disso, o estudo dispersa-se por minúcias isoladas e os assuntos são estudados sem que importe a sua conexão com outros assuntos e sem que se atenda à contribuição de cada um dêles para um todo.

Breslich, nos seus livros já citados, indica outros modos de orientar o estudo da Geometria demonstrativa (topical organization, unitary organization, etc.).

Uma vez que rejeitamos a orientação clássica no estudo da geometria demonstrativa, surgem múltiplas possibilidades de novas orientações nesse estudo.

Vamos esboçar, como exemplificação, um plano de estudo da geometria demonstrativa.

Neste plano de estudo, o curso da geometria demonstrativa seria iniciado por uma revisão das idéias adquiridas pelo aluno no seu estudo da geometria intuitiva e experimental.

Essa revisão pode ser feita de vários modos e tendente a vários objectivos.

Suponhamos que fixavamos os seguintes objectivos:

a) Enunciar, sob forma sintética e condicional, as propriedades das figuras geométricas, já conhecidas do aluno.

Por exemplo, o aluno já sabe, por intuição ou por ter verificado experimentalmente, que os ângulos verticalmente opostos são iguais. Quando o aluno se refere a esta propriedade, geralmente, dirá: os ângulos verticalmente opostos são iguais.

Pretende-se habituar o aluno a referir-se a esta propriedade enunciada sob forma condicional:

Se dois ângulos são verticalmente opostos, êsses ângulos são iguais.

b) Discriminar a hipótese e a tese de um teorema.

Aproveitando a forma condicional dos teoremas e dividindo-a em orações (orações condicional e principal, com as suas subordinadas) será fácil a decomposição do teorema em hipótese e tese e a sua correspondência com a figura que ao teorema diz respeito.

c) Entendimento da locução, condição necessária e condição sufficiente, em substituição da hipótese e da tese de um teorema.

d) Enunciado de teoremas recíprocos, devendo utilizar-se somente aquêles que o aluno já verificou serem verdadeiros.

Cumprida esta primeira parte do plano que estamos a estabelecer, no que ocuparíamos cinco ou seis lições, tínhamos procedido ao renascimento das idéias adquiridas pelos alunos na geometria intuitiva e experimental e preparado os alunos para a leitura do seu compêndio.

É oportuno dizer que há pedagogistas da Matemática que rejeitam o uso de compêndios pelo aluno na escola secundária, mesmo no estudo da geometria demonstrativa e preconizam o emprêgo do syllabus method (ver Breslich nos livros já citados). Adoptar-se o syllabus method outra terá que ser a orientação no estudo da geometria demonstrativa.

A revisão da geometria intuitiva e experimental podia ainda ser aproveitada para constituir grupos de propriedades das figuras geométricas com o fim de as utilizar na justificação das fases da demonstração dos teoremas, isto é, listas das propriedades que se referem às condições de igualdade de segmentos da recta, igualdade de ângulos, paralelismo de duas rectas, etc.

É certo que essas listas poderiam ser constituídas à medida que se encontrasse necessidade da propriedade considerada na demonstração do teorema, mas julgo que nada impediria que começassem a ser organizadas quando da revisão da geometria intuitiva e experimental, embora fôsem depois sucessivamente acrescentadas.

Exemplificaremos a organização de uma dessas listas com propriedades utilizadas para justificar a igualdade de dois ângulos porque a ela nos referiremos mais adiante.

Dois ângulos podem ser iguais por serem :

Complementos de ângulos iguais

Suplementos de ângulos iguais

Verticalmente opostos.

Opostos a lados iguais de triângulos iguais correspondentes, alternos-internos ou alternos-externos, formados por duas paralelas interceptadas por uma secante, de lados perpendiculares e da mesma espécie.

Preparado o aluno dêste modo para entrar no estudo da geometria demonstrativa, os assuntos seriam agrupados, não relativamente às figuras a estudar, mas tendo em vista conceitos ou métodos gerais : igualdade geométrica, proporcionalidade, lugar geométrico, semelhança, método de redução ao absurdo, translação, etc.

É evidente que a mesma figura geométrica poderá pertencer a vários agrupamentos e subordinados ao mesmo conceito poderemos constituir mais de um agrupamento.

Uma vez escolhido o conceito que servirá de directriz no estudo a prosseguir, há que constituir a lista das propriedades da geometria intuitiva e experimental que serão tomadas por iniciais e a partir das quais outras propriedades serão estabelecidas por processos de demonstração.

Para melhor esclarecimento do que acabamos de dizer, vamos considerar um dos conceitos atrás indicados, por exemplo, o de proporcionalidade.

Suponhamos que o aluno está de posse das idéias seguintes, adquiridas no seu estudo da geometria intuitiva e experimental :

Conceito de proporcionalidade de duas grandezas.

Na mesma circunferência a ângulos ao centro iguais, correspondem arcos iguais. Dois triângulos que têm dois ângulos iguais têm os lados homólogos proporcionais.

Área do círculo.

Lista das condições em que dois ângulos podem ser iguais e a que já nos referimos anteriormente.

A partir dêste conjunto de idéias, tomado como inicial, podíamos estudar em geometria demonstrativa, isto é, por processos dedutivos, o seguinte agrupamento de teoremas :

Na mesma circunferência, os ângulos ao centro são proporcionais aos arcos correspondentes.

Num triângulo rectângulo a altura relativa a hipotenusa é meia proporcional aos dois segmentos que ela determina na hipotenusa.

A bissectriz do ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos aditivos directamente proporcionais aos lados adjacentes.

As áreas de dois círculos são proporcionais aos quadrados dos raios.

Muitos outros teoremas poderiam fazer parte dêste agrupamento, dependendo apenas das propriedades estudadas na geometria intuitiva e experimental, tomadas como iniciais.

Se quisermos estudar simultâneamente a geometria plana e a geometria no espaço, (fusionismo) alargarse-ia consideravelmente o agrupamento de teoremas a constituir.

Quando um agrupamento, como êste, relativo ao conceito de proporcionalidade, se pode tornar muito grande, é conveniente cindi-lo em outros menores e estudá-los depois de os interpolar com o estudo de outros agrupamentos com os quais esteja em conexão.

Como vemos, na exemplificação que acabamos de fazer, no estudo de um agrupamento de teoremas, o aluno pode ser informado, no começo do estudo, do caminho e do objectivo que nêle vai prosseguir. Os teoremas não lhe aparecem como se saltassem de uma boceta mágica.

Além disso a geometria intuitiva e experimental e

a geometria demonstrativa coordenam-se mais perfeitamente e torna-se muito fácil aumentar o programa de estudo, havendo até possibilidade de iniciar os alunos, embora cautelosamente, nos primeiros princípios da chamada «geometria pura».

É certo que o estudo da geometria demonstrativa, como acabamos de esboçar, apresenta graves dificuldades, quer no bom condicionamento dos assuntos ou figuras, quer na organização da lista das propriedades já estudadas na geometria intuitiva e experimental e que deverão ser tomadas como iniciais no estudo de cada agrupamento de teoremas.

Acresce ainda que algumas das propriedades das figuras geométricas que foram estabelecidas por métodos experimentais convém que sejam estabelecidas por métodos demonstrativos para que se aproveite o interesse que o mesmo assunto desperta no aluno quando tratado por modos diferentes.

Muitos outros planos de estudo da geometria demonstrativa poderiam ser estabelecidos, uma vez abandonada a orientação clássica da geometria.

Mas, porque o aluno não é uma cobaia de experiência há que ser prudente e cauteloso.

Há que dirigir inquéritos à experiência dos professores e também à experiência dos alunos; há que con-

vidar os professores a estabelecer planos de estudos e a debatê-los largamente.

Há professores — eu conheço uma boa meia dúzia deles — que muito poderiam contribuir com a sua experiência e o seu saber para elucidar os problemas da pedagogia da Matemática.

À sua crítica submeto o plano que esbocei neste artigo.

A Comissão Pedagógica da Sociedade Portuguesa de Matemática no projecto de programa de Matemática para o ensino secundário, apresentado à Assembleia Geral da Sociedade sugeria que «alguns liceus, por exemplo, os liceus onde se realizam os estágios ou outros que as estâncias superiores determinassem, deveriam ter autorização para ensaiar novos métodos e alterar os programas, segundo plano previamente estabelecido. Esses liceus deveriam depois publicar um relatório das experiências que tivessem realizado e sobre o qual incidiria a livre discussão de todas as pessoas a quem o assunto interessasse».

Se o homem ocupa o mais alto lugar na escala zoológica é porque tem sabido recorrer à experiência alheia.

Há, com efeito, que ensaiar e experimentar em Pedagogia. Há que submeter as idéias à crítica de todos. Só assim é que pode haver progresso. As grandes certezas actualmente estão a passar de moda.

## SOBRE O TREINO DE ESTUDO DOS NOSSOS PROFESSORES

(Resumo do artigo com este título, «Gazeta de Matemática» n.º 19\*)

por **Hugo Ribeiro** (bolseiro em Zürich do I. A. C.)

As causas de «certos hábitos e vícios de raciocínio», «nas provas de muitos candidatos» (a exames de aptidão ao I. S. C. E. F.) «que, no entanto, mostram não ser totalmente desprovidos de aptidões» residem num meio social propício e parece actuarem neste momento com maior agudeza. A *diversidade* e a *interdependência* de tais causas não devem entrar o estudo de cada uma delas nem a *acção* progressiva sobre cada uma delas: pelo contrário é por este estudo e esta *acção* que poderemos desde já começar. É *isolada* uma *especial* causa *próxima*, *provavelmente* decisiva: a normal, oficial, insuficiência no treino de estudo dos nos-

sos professores de Matemática; e são dadas algumas primeiras indicações sobre esta insuficiência. Pergunta-se se esta situação não assenta no florescimento, entre nós, dum *erro de princípio* sobre a idéia do que sejam os estudos matemáticos — uma idéia degenerada num horizonte limitado (*incompatível com o ensino a futuros professores*) pelos objectivos das aplicações a certas técnicas. A *freqüência de seminários* dos mais diversos níveis, junta a uma *preparação complementar* para os actuais professores constituiria o remédio para *esse especial motivo*.

Zürich 1945, Maio, 27

\* Julgo que seria útil explicar o estado actual («Gazeta de Matemática», n.º 23) do «debate» no qual, com este artigo, pensei dever intervir. Por outro lado afigura-se-me que, neste início da discussão, já se acumularam, a par de observações de interesse, simples opiniões insuficientemente explicadas, confusões de problemas, contradições, incompreensões e preocupações distintas em número bastante para que não me seja aconselhável a trabalhosa tarefa de escrever, agora, uma análise detalhada, análise que um leitor atento poderá fazer (ler seguidamente «Gazeta de Matemática», n.ºs 17, 18, 19, 21, 23). Aliás a publicação de uma tal análise traria o risco de provocar, neste momento, novas incompreensões. Creio, por isto, preferível limitar-me a explicar, a algum leitor menos avisado, o que de mais urgente se relaciona com o meu artigo: Em primeiro lugar publicando um resumo autêntico dele. Em segundo lugar declarando expressamente: 1.º que *nesse artigo* tive já o cuidado *expresso* de não pôr em dúvida a «dedicação» como norma na classe dos nossos professores (dos esclarecidos observadores do desenvolvimento da nossa Cultura, em especial da nossa cultura matemática, são bem conhecidas numerosas razões que puderam mover-me a recordar a existência dum *exemplo* de desinteresse, dedicação e entusiasmo *excepcionais*); 2.º que não me aproximei de algum conceito de «competência profissional» mais do que aquilo a que as interrogações e o próprio título do meu artigo necessariamente me levavam: os problemas enunciados conduziam precisamente a *por o problema do estudo desta noção* no caso especial dos professores de Matemática (a qual noção não é, sem mais, axiomatisável — seja ou não favoravelmente à norma na classe dos nossos professores).

PONTOS DOS EXAMES DE ADMISSÃO AO ESTÁGIO DO 8.º GRUPO  
NO LICEU DE PEDRO NUNES DE LISBOA

Ano lectivo de 1938-1939

*História das matemáticas*: — História e importância das aplicações da álgebra à geometria. Viète e Descartes.

*Física e Química*: — Efeitos da corrente eléctrica.

*Álgebra e Geometria Analítica*: — a) Determine as condições a que devem satisfazer os valores de  $x$  para que verifiquem a desigualdade

$$\frac{x^4 + x^3 - 24x^2 + 7x + 55}{x^3 - 8x^2 + 7x} > 1.$$

b) Fixando sobre o eixo das ordenadas um ponto  $A$  à distância  $a$  da origem  $O$  marque-se arbitrariamente sobre o eixo das abscissas um ponto  $M$  e tire-se por este, uma perpendicular à recta  $AM$  que cortará o eixo das ordenadas num ponto  $N$ . Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo vértice  $P'$  do rectângulo construído sobre os segmentos  $\overline{OM}$  e  $\overline{ON}$  quando o ponto  $M$  se desloca sobre o eixo das abscissas.

*Trigonometria e Geometria Sintética*: — a) Resolva o triângulo de que se conhece um lado, o ângulo oposto e a soma dos outros dois lados. Condição de possibilidade. b) Seccione uma esfera de raio  $r$  e diâmetro  $\overline{SS'}$  por um plano perpendicular a esse diâmetro e situado à distância  $x$  do ponto  $S$ . Seja  $[c]$  a secção obtida e  $V$  e  $V'$  os volumes dos cones de base  $[c]$  e vértices  $S$  e  $S'$ . Calcule a razão  $y$  entre  $(V+V')$  e o volume da esfera e estude a variação de  $y$  em função de  $x$ .

Ano lectivo de 1943-1944

*História das matemáticas*: — História e importância da lei da atracção universal.

*Física e Química*: — Movimento curvilíneo. Fôrça centrífuga.

*Álgebra e Geometria Analítica*: — a) Determine em função de  $m$  os coeficientes do trinómio do 2.º grau que toma os valores:  $-1$  para  $x=-1$ ;  $\alpha$  para  $x=\beta$  e  $\beta$  para  $x=\alpha$ , sendo  $-1, \alpha, \beta$  as raízes da equação:  $x^3 + (m-1)x + m = 0$ . b) Determine o lugar geométrico dos pontos  $M$  que dividem cada um dos segmentos  $\overline{PQ}$  traçados do ponto  $P(0,2)$  para a curva  $x^2 - 2y^2 = 10$  em dois segmentos  $\overline{PM}$  e  $\overline{MQ}$  tais que  $\overline{PM}/\overline{MQ} = 1/2$ .

*Trigonometria e Geometria Sintética*: — a) Considere o paralelepípedo rectângulo de bases  $[ABCD]$  e  $[EFGH]$  e centro  $O$ . Sejam  $M, N, P$  os centros das 3 faces concorrentes no mesmo vértice.

1) Indique as medidas das faces e dos diedros do triedro  $OMPQ$ . Justifique. 2) Conhecida a aresta  $\overline{AE} = a$  e a diagonal  $\overline{BD} = d$ : determine o seno do ângulo  $\alpha$  das diagonais  $\overline{AC}$  e  $\overline{BD}$  de modo que a pirâmide  $[EABD]$  tenha um volume dado  $V$ .

b) São dados dois eixos rectangulares  $OX$  e  $OY$  e o ponto  $A$  sobre  $OX$  de abscissa  $a$ . Por  $A$  trace duas rectas  $AM$  e  $AP$  que cortem o semi-eixo positivo  $OY$  em dois pontos  $M$  e  $P$  tais que  $\widehat{OAM} = \widehat{OPA}$ . Determine a medida deste ângulo de modo que  $\overline{AM} + \overline{AP} = c$ . Condições de possibilidade do problema. Caso particular de  $c = 2a\sqrt{6}$ .

## ANTOLOGIA

### ASPECTS ACTUELS DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE \*

par A. Denjoy

La science est un phénomène social qu'il n'est pas possible d'isoler et dont les caractères, à chaque époque déterminée, reflètent les conditions générales de la civilisation où elle se développe: conditions de la vie spirituelle et imaginative s'exprimant dans les arts et les lettres, et même conditions économiques, et politiques, influençant toutes les autres.

Depuis la guerre mondiale de 1914-1918, la production mathématique a cru en intensité dans de très fortes proportions. Le fait a été moins sensible dans les régions appartenant à des pays constitués avant

1914 que dans celles dont les nouveaux États ont été formés. Dans ces derniers, un nationalisme très vif, mais de la nature la plus louable, a poussé les gouvernements et les peuples à la fondation de nombreuses universités dont le personnel professoral s'est pris d'une très noble émulation pour rivaliser avec les représentants des écoles mathématiques étrangères les plus réputées, et pour tenter, souvent avec succès, de les surpasser.

\* Conferência inaugural da Reunião Internacional das Matemáticas em Paris promovida pela Sociedade Matemática de França em Julho de 1937.