2119 — Dados dois números inteiros cujas decomposições em factores primos são $n=p^a \cdot q^b$, $n'=p^{a'} \cdot q^{b'}$ ¿como estão relacionados os números de divisores de n e n' com o número de divisores do produto $n \cdot n'$? Justifique a resposta. R: *Sejam* N_1, N_2 *e* N_3, *respectivamente os números de divisores de* n, n' *e de* $n \cdot n' = p^{a+a'} \cdot q^{b+b'}$; *ter-se-á:*

$N_1=(a+1)(b+1)$, $N_2=(a'+1)(b'+1)$ e $N_3=(a+a'+1)(b+b'+1)=N_1+N_2+ab'+a'b-1$.

2120 — ¿Uma equação biquadrada de coeficientes reais em que os coeficientes de x^4 e x^2 têm o mesmo sinal, pode ter tôdas as raízes reais? Justifique a resposta.

Soluções dos n.os 2115 a 2119 de Orlando Morbey Rodrigues.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.º Exame de freqüência — 1945.**

2121 — Quais os intervalos em que é uniformemente convergente a série $\sum \frac{x^n}{\log(n+1)}$? R: *Apliquemos o critério d'Alembert:* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = x \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)}$. *Ora* $\lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = 1$ *pois* $1 - \frac{\log(n+1)}{\log(n+2)} = \frac{\log \frac{n+2}{n+1}}{\log(n+2)} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}{\log(n+2)}$ *tende para* 0 *com* $1/n$, *como fàcilmente se vê. Então* $\lim_{n=\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = x$ *e o intervalo de convergência da série é* $(-1, 1)$. *Ela é portanto uniformemente convergente em qualquer intervalo interior a* $(-1, 1)$. *No extremo superior* $(x=1)$ *a série diverge, por ser* $\frac{1}{\log(n+1)} > \frac{1}{n+1}$ *e divergir* $\sum 1/(n+1)$. *Não se pode pois aplicar o teorema de Abel que daria a convergência uniforme no intervalo* $(0,1)$.

2122 — Qual a circunferência que passa pela origem e define com $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ um sistema de eixo radical $y-x+1=0$? (Coordenadas cartesianas rectangulares). R: *Pode considerar-se o eixo radical como uma das circunferências do feixe. Multiplicando por um parâmetro ambos os membros da sua equação e somando à equação da circunferência dada vem* $x^2+y^2-(h+2)x+(h-4)y+h+1=0$ *que para cada valor de* h *dá uma das circunferências do feixe. Qualquer delas define com a circunferência dada o próprio feixe de eixo radical* $y-x+1=0$. *A que passa pela origem é aquela cuja equação carece de têrmo independente, portanto a que corresponde a* $h=-1$, *isto é* $x^2+y^2-x-5y=0$, *que é o resultado pedido.*

2123 — Qual a natureza do lugar geométrico dos pontos equidistantes da recta $x=0$ e da circunferência de centro $(a, 0)$ e raio r? ($r<a$; coordenadas cartesianas rectangulares). R: *Seja* (x, y) *um ponto do lugar geométrico. A distância dêste ponto à recta* $x=0$ *(eixo das ordenadas) é a própria abcissa do ponto,* x. *A distância de um ponto a uma circunferência é o valor absoluto da diferença entre o raio da circunferência e a distância do ponto ao centro da circunferência. No caso presente, como* $r<a$, *a circunferência e a recta dada não se intersectam, nenhum ponto interior à circunferência pode ser equidistante desta e da recta; o lugar geométrico é pois, exterior à circunferência e por isso na diferença a considerar o diminuendo é sempre a distância do ponto* (x, y) *ao centro* $(a, 0)$ *e o diminuidor o raio da circunferência. A distância de* (x,y) *à circunferência é pois* $\sqrt{(x-a)^2+y^2}-r$ *e a equação do lugar geométrico pedido é*

$$x=\sqrt{(x-a)^2+y^2}-r \quad ou \quad x+r=\sqrt{(x-a)^2+y^2}.$$

Quadrando: $x^2+2rx+r^2=x^2-2ax+a^2+y^2$ *ou* $y^2-2(a+r)x+a^2-r^2=0$; *o lugar geométrico é pois uma parábola.*

2124 — Quais são os pontos próprios ou impróprios de continuïdade de $f(x)=\frac{x^2}{e^x-2}$? R: *As funções* x^2 *e* e^x-2 *são definidas e contínuas em todos os pontos próprios mas a divisão não é definida quando o denominador se anula, isto é, quando* $x=\log 2$. *São pois de continuïdade todos os pontos próprios excepto* $x=\log 2$. *Haveria ainda ponto impróprio de continuïdade se existisse e fôsse finito* $\lim f(x)$ $(x \to \infty)$. *Ora tal não sucede porquanto* $\lim \frac{x^2}{e^x-2} = -\infty$ $(x \to \infty)$.

Soluções dos n.os 2121 a 2124 de Renato Pereira Coelho.

I. S. A. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º Exercício de revisão — 30 de Novembro de 1945.

2125 — Dados dois segmentos de comprimentos respectivamente iguais a m e n, construa, servindo-se da régua e compasso, um segmento x de comprimento dado por $x=\dfrac{m^2}{n\sqrt[4]{1+\cos 22^{\circ}\,30'}}$. R: *Pode escrever-se* $x=m^2/a$, *com* $a=\sqrt{nb}$, $b=\sqrt{nc}$, $c=n+d$, $d=n\cos 23^{\circ}\,30'$. *Dividindo o ângulo recto em quatro partes iguais, obtém-se o ângulo* $\alpha=22^{\circ}\,30'$. *Constrói-se um triângulo rectângulo que tenha um ângulo igual a* α *e a hipotenusa igual a* n; *o cateto adjacente a* α *é igual a* d. *Constrói-se em seguida* $c=n+d$. b *é dado pela altura relativa à hipotenusa dum triângulo rectângulo em que* n *e* c *são as projecções dos catetos sôbre a hipotenusa. De uma maneira análoga se obtém* a. *Finalmente* x *pode constituir-se, determinando, pelo lema de Thales, o quarto proporcional entre* a, m *e* m.

2126 — As equações das diagonais AC e BD do rectângulo $[A,B,C,D]$ são respectivamente: $y=2x$ e $y=3-x$; o vértice C tem de abscissa -1 e a ordenada de B é inferior à de D. Determine: *a)* as coordenadas do centro da circunferência circunscrita ao rectângulo; *b)* a equação dessa circunferência; *c)* as coordenadas dos vértices B e D; *d)* as equações dos lados AB e AD; *e)* mostre que o quadrilátero que tem para vértices os pés das perpendiculares baixadas dos vértices do rectângulo sôbre as suas diagonais é um rectângulo. R: a) *O centro da circunferência é o ponto* $O(1,2)$, *intersecção das rectas* AC *e* BD; b) *Como o raio da circunferência é a distância de* $O(1,2)$ *a* $C(-1,-2)$, *a equação da circunferência é* $(x-1)^2+(y-2)^2=20$; c) *A resolução do sistema* $(x-1)^2+(y-2)^2=20$, $y=3-x$ *conduz aos resultados:* $B(1+\sqrt{10},2-\sqrt{10})$, $D(1-\sqrt{10},2+\sqrt{10})$. d) *Como* $O(1,2)$ *é o ponto médio do segmento* $\overline{AC}$, *as coordenadas de* A *são dadas por* $(-1+x)/2=1$, $(-2+y)/2=2$, *isto é,* A *é o ponto* $(3,6)$. *Então vem:* $AB\equiv(x-3)/(2-\sqrt{10})=(y-6)/(4+\sqrt{10})$, $AD\equiv(x-3)/(2+\sqrt{10})=(y-6)/(4-\sqrt{10})$. e) *Basta mostrar que os lados do quadrilátero em questão são paralelos aos lados do rectângulo dado.*

2127 — No plano xOy, a cada recta $r\equiv ax+by=1$, faz-se corresponder o ponte $R(a,b)$. Mostre que, se o ponto R descreve a recta $x+y=k$, a recta r roda em tôrno dum ponto fixo F e determine as coordenadas de F. Calcule os valores de k para os quais a recta $x+y=k$ passa por F. R: *Se* R *descreve a recta* $x+y=k$, *as suas coordenadas serão* $(a,k-a)$, *com a variável e então* $r\equiv ax+(k-a)y=1$ *passa pelo ponto* $F(1/k,1/k)$, *qualquer que seja* a. *Para que* $x+y=k$ *passe por* F *é necessário que se tenha* $1/k+1/k=k$, *ou seja,* $k=\pm\sqrt{2}$.

Enunciados e soluções dos n.os 2125 a 2127 de José Morgado.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira. Prova de revisão prática — 12-XII-1945 — Ponto n.º 1.

2128 — Resolver e discutir as soluções da equação $\operatorname{sen}2x(\cos x-6)+k\operatorname{sen}x=0$ (k real). R: *A equação proposta pode escrever-se:* $\operatorname{sen}x\,(2\cos^2x-12\cos x+k)=0$ *donde:* $\operatorname{sen}x=0\rightarrow x=n\pi$ (n inteiro) *e* $f(\cos x)=2\cos^2x-12\cos x+k=0\rightarrow\cos x=(6\pm\sqrt{36-2k})/2$ *com* $36-2k\geq0$ *ou* $k\leq18$ *e* $-1\leq\cos x\leq1$. *A solução* $(6+\sqrt{36-2k})/2$ *não interessa por ser maior do que* 1. *A condição para que o trinómio* $f(\cos x)$ *tenha uma raiz compreendida no intervalo aberto* $(-1,1)$ *é que* $f(-1)\cdot f(1)<0\rightarrow(k+14)(k-10)<0\rightarrow-14<k<10$. *Para* $k=-14$ *e* $k=10$ *é respectivamente* $\cos x=-1$ *e* $\cos x=1\rightarrow x=(2h+1)\pi$ *e* $x=2h\pi$ (h inteiro).

2129 — É dado um rectângulo $[ABCD]$ cujos lados são $\overline{AB}=2a$ e $\overline{AC}=a$. Inscrevam-se neste rectângulo dois triângulos isósceles de bases $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Sendo E e F os vértices opostos às bases e sendo G e H os pontos de encontro dos lados iguais dos dois triângulos, determinar a área da circunferência inscrita no losango $[EGFH]$. Determine a razão dos volumes obtidos por rotação em tôrno de GH, do losango e da circunferência. R: *Construa-se a figura de acôrdo com o enunciado. Verifica-se que os pontos* E *e* F *são pontos meios dos lados* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$ *e que, portanto,* $\overline{EF}$ *divide o rectângulo dado em dois quadrados* $[EFBD]$ *e* $[EFAC]$. *Os lados iguais dos triângulos em questão são as diagonais dêsses quadrados, iguais portanto a* $a\sqrt{2}$. *Como as diagonais dos quadrados se cortam perpendicularmente e ao meio é imediato que* $[EGFH]$ *é um quadrado de lado* $a\sqrt{2}/2$ *e de diagonal* $\overline{GH}=a$. *A circunferência inscrita no quadrado terá por raio* $a\sqrt{2}/4$ *e a sua área será* $\pi a^2/8$. *A rotação da figura em tôrno de* GH *gera uma esfera cujo volume é* $V_1=a^3\pi\sqrt{2}/24$ *e um sólido constituído por dois cones de base comum (círculo de diâmetro* $\overline{EF}$*), cujo volume é* $V_2=\pi a^3/12$. *A razão pedida é portanto:* $V_1/V_2=\sqrt{2}/2$.

2130 — Dado o polinómio $P(x)=4x^3-mx^2+nx+p$ determinar m, n e p por forma que dois dos seus zeros sejam recíprocos e que dividido por $(x-2)$ dê de resto 18. Resolva a equação $P(x)=0$. R: *Desi-*

gnando por α *uma das raizes da equação, em face do enunciado, ela admitirá a sua recíproca* $1/\alpha$, *isto é, ter-se-á:* $P(\alpha)\equiv 0$ *e* $P(1/\alpha)\equiv 0$, *ou seja,* $4\alpha^3+m\alpha^2+n\alpha+p=0$ *e* $p\alpha^3+n\alpha^2+m\alpha+4=0$. *Para que estas duas relações sejam simultâneamente verificadas terá de ser* $4/p=m/n=n/m=p/4$, *donde* $p=4$ *e* $m=n$ *ou:* $p=-4$ *com* $m=-n$. *Por outro lado, por ser 18 o resto da divisão de* $P(x)$ *por* $(x-2)$, *obtém-se* $P(2)=18\rightarrow 14+4m+2n+p=0$. *Num caso há a resolver o sistema* $P(2)=18$, $p=4$ *e* $m=n$, *cuja solução é* $p=4$ $m=n=-3$. *A equação será então* $4x^3-3x^2-3x+4=0$ *de raízes* -1, $(7+i\sqrt{15})/8$ *e* $(7-i\sqrt{15})/8$. *No outro caso tem-se* $P(2)=18$, $p=-4$ *e* $m=-n$ *de solução* $p=-4$, $m=-5$ *e* $n=5$ *e a equação correspondente* $4x^3-5x^2+5x-4=0$ *admite as raízes* 1, $(1+i\sqrt{63})/8$, $(1-i\sqrt{63})/8$.

Soluções dos n.os 2128 a 2130 de J. Oliveira Campos

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Análise Superior — 1.º Exame de freqüência — 1944-1945.

2131 — Determine a constante k de modo que a equação $y'^2-2xy'+kx^2=2y$ admita uma solução singular. Indique essa solução $y=\varphi(x)$ e integre a equação proposta, para o valor de k obtido, recorrendo à transformação $y=\varphi(x)+z$, onde z representa a nova função. R: *Se* $y=\varphi(x)$ *é solução singular, a ela devem corresponder raízes iguais em* y': $\Delta=b^2-4ac\equiv 4x^2-4kx^2+2y=0$, $y=x^2(k-1)/2$ e $y'=x(k-1)$. *Mas, com* $\Delta=0$, *a equação dá* $y'=x$. *Logo* $k-1=1\rightarrow k=2$. *A solução singular é, pois:* $y=x^2/2$. *A correspondente equação diferencial é:* $y'^2-2xy'+2x^2-2y=0$. *Com* $y=\varphi(x)+z=x^2/2+z$ *vem:* $y'=x+z'$, $z'^2-2z=0\rightarrow$ $z'=\pm\sqrt{2z}$. *Integrando, com separação de variáveis:*

$$\begin{cases}\sqrt{2z}-x-c=0\\ \sqrt{2z}+x-c=0\end{cases}.\quad \textit{Donde, o integral geral:}$$

$$\left(\sqrt{2\,(y-x^2/2)}-c\right)^2-x^2=0.$$

2132 — Considere a função $w=e^z$ e a região (R) do plano z definida por $x\leq 0$, $0\leq y\leq\pi$. Determine a região (R') transformada de (R) mediante a função w, indicando concretamente a figura transformada, por w, de cada uma das partes do contôrno de (R).

Indique as singularidades: *a)* de w na região (R); *b)* da função inversa de w na região (R'), caracterizando tais singularidades pelos módulos e argumentos que lhes respeitam. R: *Como* $z=x+iy$, $w=e^x\cos y+ie^x\operatorname{sen} y=U+iV$. *Ao longo do segmento* $(0,\pi)$ *do eixo dos* YY, *é* $x=0$ *e* $w=\cos y+i\operatorname{sen} y$ *e o afixo de* w *descreve a semicircunferência de centro* O_1 *e raio* 1, *acima de* OU (*visto que* $|w|=1$ *e* $\operatorname{sen} y\geq 0$). *Ao semi-eixo negativo* $\overrightarrow{OX}$ $(y=0)$ *corresponde o segmento real* (0,1) *do eixo* OU *no plano* w (*visto que* $w=e^x$); *à semi-recta paralela a* OX *que completa o contôrno de* (R) *corresponde o segmento real* $(0,-1)$ *do eixo* OU *no plano* w.

Como, no caso geral, $|w|=U^2+V^2=e^{2x}(\cos^2 y+\operatorname{sen}^2 y)=e^{2x}$ *e* $x\leq 0$, *é* $|w|\leq 1$. *Logo, a região* (R') *do plano* w *é o semi-círculo (acima de* OU) *de centro* O_1 *e raio* 1.

O único ponto crítico de w *é o ponto impróprio e êsse, com a direção de* $\overrightarrow{OX}$, *no caso presente, pertence ao contôrno de* (R) *e não pròpriamente à região* (R) *limitada por êsse contôrno. Quanto à inversa,* $z=\log w$, *da mesma forma, só* $w=0$ (*ponto* O_1) *é ponto crítico (de ramificação) mas situa-se no contôrno de* (R') *e não, pròpriamente, em* (R').

F. C. L. — Análise Superior — 2.º Exame de freqüência — 1944-1945.

2133 — Uma família de curvas planas é definida por certa equação diferencial de 2.ª ordem, da qual $y'=2ax+e^a$ (a const.) é um integral primário. Estabeleça a relação — em têrmos finitos — que deve existir entre os 2 parâmetros da família para que a envolvente da família com um parâmetro arbitrário assim definida tenha, com cada uma das envolvidas, um contacto de ordem não inferior a 2. R: *Do integral primário deduz-se*

$$(1)\qquad y=ax^2+e^a.x+b.$$

Ao longo da envolvente é

$$y'=2ax+e^a+\left(x^2+xe^a+\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dx}.$$

Uma 1.ª condição de contacto é, pois:

$$(2)\qquad \frac{da}{dx}\left(x^2+xe^a+\frac{db}{da}\right)=0\qquad x^2+xe^a+\frac{db}{da}=0$$

(*pondo de parte a hipótese* $\frac{da}{dx}=0$). *Por outro lado, ao longo das envolvidas é* $y''=2a$ *e ao longo da envolvente:* $y''=2a+(2x+e^a)\frac{da}{dx}$. *A 2.ª condição imposta pelo contacto é, então:*

$$(3)\qquad 2x+e^a=a.$$

Eliminando x *entre* (2) *e* (3) :

$$\frac{e^{2a}}{4}-\frac{e^{2a}}{2}+\frac{db}{da}=0 \qquad \frac{db}{da}=\frac{e^{2a}}{4}.$$

Integrando, com separação de variáveis:

$$b=e^{2a}/8+c\,. \quad \text{(c const. arbitrária)}$$

Para cada valor de c , *a equação anterior fixa uma forma da função* b *de* a *nas condições do enunciado.*

Interpretação geométrica da constante c: *para 2 valores diferentes de* c , *a relação anterior dá 2 famílias simplesmente infinitas de curvas* (1) , *cada uma das quais se deduz da outra por translacção paralela a* OY , *e mantendo um contacto de 2.ª ordem, pelo menos, com a respectiva envolvente.*

2134 — Estabeleça a equação às derivadas parciais das superfícies para as quais o plano tangente genérico corta OZ no ponto médio N do segmento $\overline{OM'}$, onde por M' se designa a projecção ortogonal, sôbre OZ, do ponto de contacto $M(x,y,z)$. Integral geral da equação obtida. Recorrendo à transformação $e^{x'}=x$ $e^{y'}=y$ $e^{z'}=z$ e tirando proveito da equação transformada, escreva um integral completo daquela equação. Superfície integral que contém a curva $x^2-y^2=1$, $z=1$. R: *Coordenadas de* $N\to 0,0,z/2$. *Equação do plano tangente genérico:* $Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$. *Equação do problema*:

$$-z/2=-px-qy \qquad z=2px+2qy. \quad \text{(linear)}$$

Sistema diferencial associado: $\dfrac{dx}{2x}=\dfrac{dy}{2y}=\dfrac{dz}{z}$. *Integrando:*

$$y=c_1x, \quad z^2=c_2x \qquad \text{(característica)}$$

Donde, o integral geral da equação: $z^2=x\varphi(y/x)$. *De* $z=2px+2qy$, $e^{x'}=x$, $e^{y'}=y$, $e^{z'}=z$ *resulta* (*por ser* $\dfrac{\partial z'}{\partial x'}=p'=\dfrac{1}{z}px$, $\dfrac{\partial z'}{\partial y}=q'=\dfrac{1}{z}qy$) : $p'+q'=1/2$.

Um integral completo da transformada é, pois: $z'=ax'+(1/2-a)y'+\log b$ *donde:* $\log z=a\log x+(1/2-a)\log y+\log b$ *ou:* $z=bx^a+y^{(1/2-a)}$. *Da eliminação de* x, y *e* z *entre as 4 equações* $y=c_1x$, $z^2=c_2x$, $x^2-y^2=1$ *e* $z=1$ *resulta, sem dificuldade* $1-c_1^2=c_2^2$ *e, portanto:* $x^2-y^2=z^4$, *que é a solução do problema de Cauchy proposto.*

F. C. L. — Análise Superior — **Exame final — Julho de 1945.**

2135 — *a)* Escreva a equação às derivadas parciais das superfícies para as quais a cota dum ponto genérico é função exclusiva da razão das outras duas coordenadas. Interprete, geomètricamente (em eixos coordenados rectangulares), as referidas superfícies, indicando alguns dos seus elementos definidores. *b)* Recorrendo à transformação $x'=\log x$, $y'=\log y$, $z'=\log z$, determine um integral completo da equação obtida. *c)* Forme, e integre, a equação diferencial das linhas assintóticas da superfície integral que passa pela linha $x+y+z=1$, $y=x+1$. Interpretação geométrica. R: a) $z=\varphi(y/x)$. *Derivando parcialmente em ordem a* x *e a* y *e eliminando* φ *e* φ', *acha-se* $p=-\dfrac{y}{x^2}\varphi'$, $q=\dfrac{1}{x}\varphi'$ $\quad px+qy=0$. *Com* $y/x=c_1$ *e* $z=\varphi(c_1)=c_2$, *o que mostra que a superfície é regrada e as suas geratrizes rectilíneas apoiam-se em* OZ, *paralelamente a* XOY: *trata-se de conóides de directriz rectilínea* OZ *e plano director* XOY *(conóides rectos)* b) *Com* $x'=\log x$, $y'=\log y$ *é*

$$\frac{\partial z}{\partial x'}=P=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx'}=px, \qquad \frac{\partial y}{\partial y'}=Q=\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dy'}=qy.$$

Logo: $P+Q=0$ *e esta equação admite a integral completo* $Z=ax'-ay'+\log b$ *ou* $Z=a\log(bx/y)$. c) *Para o problema de Cauchy, temos:* $y/x=c_1$, $Z=c_2$, $y=x+1$, $x+y+z=1$. *Da eliminação de* x, y *e* z *resulta*

$$2=c_2-c_1c_2 \quad e, \text{ portanto: } \quad 2x+zy=zx \qquad z=\frac{2x}{x-y}$$

paraboloide hiperbólico de planos directores $\alpha\equiv XOY$ *e* $\beta\equiv y=x+1$, *e directrizes rectilíneas (do sistema «β»)* OZ *e* $(r)\equiv\begin{cases}x+y+z=1\\ y=x+1\end{cases}$. *De* $z=\dfrac{2x}{x-y}$ *resulta, para a equação das linhas assintóticas:* $ydx^2-(x+y)\,dx\,dy+xdy^2=0$ *o que dá* $\dfrac{dy}{dx}=1$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$. *Com* $\dfrac{dy}{dx}=1$ *é* $y=x+\alpha$. *Com* $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}$ *é* $y=\beta x$, *e as duas famílias de linhas assintóticas são:* $\begin{cases}z=\dfrac{2x}{x-y}\\ y=x+\alpha\end{cases}$ $\begin{cases}z=\dfrac{2x}{x-y}\\ y=\beta x\end{cases}$ *o que mostra que tais linhas são as geratrizes dos 2 sistemas (a superfície é duplamente regrada).*

2136 — Calcule o valor do integral $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$ reduzindo-o a um integral de diferencial imaginária tomado ao longo duma circunferência de centro na origem. Mostre que a função integranda tem um, e um só, ponto crítico no interior do contôrno, qualquer que seja o raio dêste.

R: *Com* $z=re^{i\theta}\to\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\dfrac{z^2+r^2}{2rz}$, $d\theta=\dfrac{dz}{iz}$. *Logo*

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{5-4\cos\theta}\to\int_{(c)}\frac{2r\,dz}{i(5rz-2r^2-2z^2)}=\frac{2r}{i}\int_c f(z)\,dz.$$

Polos da função $f(z)$: $z=r/2$, $z=2r$. *Qualquer que seja* r, *o único polo interior é* $z=r/2$ *e o correspondente resíduo:* $1/3r$. *Logo* $I=2r/i\,.\,2\pi i\,.\,1/3r=4\pi/3$.

Enunciados e soluções dos números 2131 a 2136 de Humberto de Menezes.