MOVIMENTO MATEMÁTICO

SÔBRE A ÍNDOLE DO ENSINO DA MATEMÁTICA EM ZÜRICH

por ***Hugo B. Ribeiro*** (bolseiro do I. A. C. em Zürich)

Em tôda a Federação Suíça é Zürich a cidade de maior desenvolvimento industrial e também cultural. Além da Universidade cantonal — cantonais são também as restantes universidades suíças: de Basel, de Berne, de Lausanne, de Genève, de Neuchâtel e de Fribourg — está ali instalada a única escola superior federal, a «Eidgenössische Technische Hochschule» («École Polytechnique Fédérale»). A organização e objectivos *gerais* do ensino na Universidade de Zürich são como de ordinário numa universidade; em particular inclue-se ali uma Faculdade de Ciências (a «Philosophische Fakultät II») com a sua secção de Matemática. A escola Politécnica Federal abrange não só as escolas para os vários ramos da Engenharia mas ainda escolas de Arquitetura, Farmácia, Agronomia, Matemática e Física, etc. A E. T. H. desempenha um papel decisivo nas relações directas, muito estreitas, entre o ensino, a investigação científica e a indústria suíça. Por exemplo: é freqüente que com os trabalhos de fim de curso («trabalhos de diploma») os estudantes tenham também o objectivo de resolver determinados problemas postos pela indústria aos institutos da Escola; e, por outro lado que a indústria facilite, directamente, o ensino e a investigação oferecendo aparelhagem àquêles Institutos, prémios à Escola, etc.

Além da influência de uma tradição matemática que é o orgulho da vizinha cidade de Basel (Euler, os Bernouilli, etc.) têm os estudos matemáticos em Zürich a influência mais recente de uma tradição própria: trabalharam em Zürich, entre outros, Dedekind, Schröder, Christoffel, Zermelo, Hurwitz, Schur, Einstein, H. Weyl, John von Neumann.

A formação «tão universal quanto possível em Matemática» que as duas escolas de Zürich dão ao matemático, em especial ao futuro professor de Matemática de qualquer escola superior ou média, pode talvez descrever-se grosseiramente pelos três seguintes objectivos que sucessivamente se devem atingir com o estudo e pelos adequados *tipos de actividade* e *meios* à disposição dos estudantes: O primeiro objectivo é o domínio de uma perfeita técnica do cálculo e da construção geométrica, e obtém-se sobretudo nas lições e proseminários de Cálculo diferencial e integral e de Geometria descritiva e vectorial, lições fixas e comuns a físicos, engenheiros etc. (1.º e 2.º semestres). O segundo objectivo é o perfeito conhecimento da estructura (moderna!) dos capítulos basilares da Matemática, o domínio das principais noções e resultados e a compreenção dos problemas actuais e do desenvolvimento de cada teoria; isto consegue-se nos seminários e nas lições dos semestres seguintes, sôbre Teoria das funções (3 semestres), Álgebra linear, Geometria projectiva, Geometria diferencial, Álgebra, Equações diferenciais. O terceiro objectivo é o alargamento dos objectivos anteriores a um extenso conjunto de capítulos especiais, muitos dos quais à escolha, nos quais se pode desenvolver a curiosidade orientada e o trabalho próprio. Nunca antes dos 8 semestres faz o estudante o seu exame, depois de ter elaborado o trabalho de diploma que geralmente o ocupa durante mais um ou dois semestres. Êste trabalho de diploma não inclue necessàriamente um resultado original, mas é, antes, um estudo, escolhido com um professor e orientado por êste, freqüentemente sôbre alguma questão mal esclarecida na literatura. O primeiro objectivo serve também as aplicações mais importantes, em especial as mais correntes em Física, Astronomia, Geodesia, Seguros, Estatística, Métodos gráficos e numéricos, etc, das quais há lições periódicas com professores fixos. Em face das lições de «Aplicações da Matemática» há, na E. T. H., um curso semestral, de «Introdução à teoria das funções», êste dedicado aos matemáticos e que serve de ponte de passagem do 1.º para o 2.º objectivos. Nêste curso são analisados detalhadamente e rigorosamente certos conceitos e resultados dos fundamentos da Teoria das funções que foram já tratados no «Cálculo diferencial e integral»: estudo cuidado da topologia do plano, da noção de integral, dos principais teoremas de existência de soluções de sistemas de equações diferenciais, etc.

O carácter dos seminários é, naturalmente, adequado aos respectivos objectivos. Enquanto que nos primeiros semestres os alunos devem resolver muitos problemas de exercício fornecidos pelo professor e revistos pelos assistentes, nos semestres seguintes são as sessões de seminário dedicadas a exposições críticas, e sua discussão, que completam as lições e a que assistem e em que participam sempre vários professores. De facto as lições não pretendem fornecer informação total, não são exposições fechadas do tipo livresco: dão uma informação comentada, original e moderna, dos pontos mais importantes de cada teoria. Assim, embora sejam conduzidas até às fronteiras do conhecimento e incluam a explicação, ou pelo menos a referência, aos problemas actuais mais significativos, devem ser completadas nos seminários e na leitura dos tratados e das revistas.

As lições especiais aparecem periòdicamente procurando-se que cada assunto não deixe de figurar nos programas das escolas pelo menos uma vez durante o curso de um estudante normal; e são distribuídas pelos professores entre êstes, de acôrdo com as suas especializações e também de acôrdo com os problemas que êles se ocupam em estudar no momento. Os seus títulos, não fixos, são por exemplo: espaços topológicos, grupos de Lie, equações às derivadas parciais de 2.º ordem, lógica matemática, teoria da representação de grupos, combinatória, operadores lineares no espaço de Hilbert, teoria dos conjuntos, etc, etc. E a estas lições seguem-se muitas vezes seminários especiais e, depois, colóquios. Actualmente funcionam na E. T. H. dois seminários gerais (2 horas por semana para cada), um de Análise, outro de Álgebra e Geometria. Os seminários obrigam a um tipo de actividade que é, de facto, indispensável à formação dos futuros professores de Matemática. A direcção de trabalhos de diploma, de seminários, de colóquios, e o bom rendimento das lições (pelo menos daquelas lições que não têm programa fixo) já exigem que os respectivos professores sejam estudiosos, investigadores, especialistas — aliás bem conhecidos em tôda a parte onde se estuda Matemática. Êles preparam as suas tarefas para o semestre seguinte, e elaboram os trabalhos próprios durante as férias; participam dos colóquios e seguem, por vezes, certas lições que no momento mais lhe interessam; têm as suas horas de recepção para os estudantes, discutem com êstes os trabalhos escolares e, sôbretudo, aconselham-nos na orientação a dar aos seus estudos. Há os especialistas da Análise, os da Álgebra e Geometria, os dos Fundamentos e Teoria dos números, etc. (Os programas são editados, para cada semestre, com uma antecedência de 3 meses). Além dêste primeiro factor da actividade do estudante que é o professor, há um outro factor importante em Matemática: é uma biblioteca acessivel e bem apetrechada. Em Zürich, além da riquíssima biblioteca da Universidade que é ao mesmo tempo, a biblioteca da cidade, dispõem os estudantes da explêndida biblioteca da E. T. H. As revistas e os livros mais consultados estão à mão dos estudantes na «sala do seminário» de que cada estudante possue uma chave. Tôdas as bibliotecas emprestam os volumes para consulta em casa por um mês, e êste prazo é prorrogável.

Discutido o seu trabalho de diploma e prestadas as suas segundas e últimas provas de exame o estudante de Matemática é muitas vezes (quási sempre na E. T. H.) conservado como assistente nesta escola e, assim, tem oportunidade de seguir certas lições que ainda não ouvira, participar em novos colóquios, e discutir os seus problemas com os professores. São, em geral, mais três anos de estudo intenso de que dispõe para preparar a dissertação de doutoramento. Periòdicamente, as escolas põem a prémio problemas determinados, estimulando o trabalho dos estudiosos a elas ligados. Para exemplo transcrevemos o enunciado do problema a prémio relativo ao ano de 1945-46 de Faculdade de Filosofia II: «investigue-se o comportamento duma função regular de quaterniões na vizinhança dum ponto singular não essencial isolado e o mesmo nos pontos duma curva e superfície singular não essencial isolada». A preparação matemática, de que acabamos de dar uma idéia, é, com inclusão do doutoramento, a exigida, em especial, para um professor do ensino secundário. O doutoramento consiste essencialmente, como se sabe, na elaboração de uma dissertação original orientada por um professor. (Há ainda os doutores honorários nas escolas de Zürich. O único doutor honorário da Escola de Matemática e Física da E. T. H. é, actualmente, Albert Einstein — há três anos Einstein não estava assim sozinho, o outro era David Hilbert).

Os estudiosos de Matemática da Universidade e da E. T. H. reünem-se quinzenalmente no «Mathematische Kolloquium» de Zürich para discutirem algum trabalho original que um dêles ou algum convidado das outras Universidades, suíças ou estrangeiras, expõe. Êstes trabalhos são depois publicados, freqüentemente nos «Commentarii Mathematici Helvetici» — a revista suíça que só publica memórias originais de Matemática. A êstes colóquios também assistem alunos, avançados, das duas escolas. Por seu turno a Sociedade Matemática Suíça reüne-se anualmente com as outras Sociedades científicas num congrésso em local variável, por hábito numa cidade não universitária que assim toma conveniente contacto directo com os cientistas da Federação.

Os capítulos da Matemática que recentemente mais teem merecido a atenção dos estudiosos em Zürich são talvez a Topologia algébrica, a Teoria dos grupos, os Fundamentos da Matemática, a Teoria das funções. Porém os volumes recentes dos Commentarii Mathematici Helvetici contêm trabalhos sôbre os mais diversos assuntos. Na medida em que é possível dizer quando determinado tipo de problemas, determinados métodos, etc. pertencem a uma escola fixada, poderemos afirmar terem os estudos em Zürich a marca da escola de Matemática, primacialmente importante, que foi a escola alemã. Quási todos os professores de Zürich passaram, nos bons tempos, pela famosa escola de Göttingen, famosa pelo menos, desde Gauss até Hilbert.

De Göttingen se diz que foi para a Europa daquela época, e portanto para o Mundo, o que Alexandria foi para os gregos. Por outro lado, a literatura matemática em língua alemã é, naturalmente, a mais utilizada. Como é sabido as grandes revistas como «Mathematische Annalen», «Journal für die reine und angewandte Mathematik», «Mathematische Zeitschrift», etc., as diversas edições da enciclopédia, as colecções célebres das editoras Springer (só a colecção Grundlehren der Mathemathischen Wissenschaften contém mais de 50 volumes), Teubner, Göschen, etc. são extraordinàriamente valiosas. (Folheando um programa recente de uma grande escola americana, o Instituto Tecnológico da Califórnia, que inclui uma Faculdade de Matemática, vê-se, por exemplo, que como única exigência prévia para a eficaz freqüência de certas lições e seminários de Matemática se indica a possibilidade da leitura de textos em língua alemã). Os professores em Zürich são também alguns dos principais colaboradores dessas revistas e colecções. Entre nós não é fácil encontrar uma idéia justa sôbre o extraordinário interêsse desta escola, dominados como estamos pelo que se poderá chamar a cultura francesa (que, quanto à Matemática se tem orientado sobretudo para a Análise) e isto por vários motivos entre os quais avulta o de ser a língua francesa a nossa segunda língua. Mas nos Estados Unidos e na URSS, para onde se voltam as esperanças mais legítimas quanto ao futuro desenvolvimento dos estudos matemáticos, a influência desta escola é de primeira importância; deixando de lado, por mais conhecido e neste caso menos significativo, o facto de os Estados da América serem desde o domínio fascista um poderoso centro de atracção para os matemáticos europeus, e sôbretudo alemães, podemos citar que quando êste país enviava para estudar matemática na Europa os que hoje são os mais destacados professores nas suas Universidades chegou a fazê-lo de modo que por cada dezena de estudantes em França havia 8 dezenas de estudantes na Alemanha.

A rápida descrição anterior interessará, provàvelmente, todos os que compreendem que, o desenvolvimento da nossa cultura científica tem que ter em conta informações dêste tipo que aqui esboçamos, tem que ter em grande conta a experiência alheia visto que a nossa própria experiência é pràticamente quási inexistente. A tarefa de fazer progredir os nossos estudos matemáticos (ou quaisquer outros) é, *em primeiro lugar,* uma tarefa de análise das nossas necessidades, das experiências nossas e das estranhas — é uma tarefa para especialistas. Os pontos de vista gerais, filosóficas e outros, são, naturalmente, de extraordinária importância para a realização duma tal tarefa — com a condição, indispensável, de que se não perca o essencial carácter científico de que ela, prèviamente, se reveste.

A formação *matemática* dos nossos professores de Matemática, das universidades e das escolas médias, é, para nós, o problema fundamental dos nossos estudas matemáticos. Em primeiro lugar até porque as importantes questões, de organização, de programas, etc., só poderão ser resolvidas convenientemente, cientìficamente, por matemáticos experientes, e a pouco e pouco, na medida em que êstes existem no nosso país, Em segundo lugar porque, sem professores com preparação científica, estas outras questões constituem ainda, de certo modo, pseudo problemas porque a sua resolução, não podendo traduzir-se através de uma actividade pedagógica autêntica, não terá valor efectivo

Parece-nos evidente que os jovens que se propõem estudar Matemática para se tornarem professores, ou simplesmente investigadores, têm, antes do mais, que abandonar, decididamente, qualquer tipo de aprendizagem passiva e livresca.

Lisboa, Setembro de 1945.

Prémio Doutor F. Gomes Teixeira

Pela primeira vez, desde 1940, foi atribuído o Prémio Nacional Dr. F. Gomes Teixeira que «se destina a galardoar, mediante concurso, o melhor trabalho de matemáticas puras elaborado em cada ano lectivo por um aluno de qualquer estabelecimento de ensino universitário». Coube a honra a Fernando Soares David, autor de «Sôbre a comutabilidade de operadores com espectro contínuo» e à Faculdade de Ciências do Pôrto, de que era aluno o premiado.

Instituto dos Actuários Portugueses

Promovida por um grupo de actuários, realizou-se no dia 18 de Junho uma reünião com o objectivo de estabelecer as bases de uma associação destinada a desenvolver a técnica e a matemática dos seguros. Nesta reünião foram elaborados os estatutos do Instituto dos Actuários Portugueses os quais tiveram a aprovação oficial em 24 de Julho.

Os Estatutos dispõem a realização de reüniões mensais da Assembleia Geral com carácter científico nas quais serão apreciadas comunicações apresentadas pelos sócios. Outro objectivo fundamental do Instituto é a publicação periódica de um Boletim. Há duas categorias de sócios — ordinários e extraordinários — cabendo nesta última categoria as instituïções seguradoras. À data da última Assembleia Geral, realizada em 27 de Novembro, o Instituto contava já com a adesão, na categoria de sócios extraordinários, de trinta e sete Companhias de Seguros. Naquela mesma data o número de sócios ordinários elevou-se a 81 dos quais os primeiros 78 são considerados fundadores.

Os primeiros corpos gerentes estão assim constituídos:

Mesa da Assembleia Geral: *Presidente,* Victor Hugo de Lemos; *Vice-Presidente,* A. Castanheira Nunes; *Secretários,* Álvaro Alexandre e J. Matos Correia.

Direcção: *Presidente,* Caetano M. Beirão da Veiga; *Vice-Presidente,* Frederico Caroça de Figueiredo; *Secretário,* Carlos A. Fernandes Carvalho; *Tesoureiro,* A. da Costa Miranda; *Vogal,* A. Stichini Vilela.

Conselho Fiscal: *Presidente,* José A. Queiroz de Barros; *Vogais,* J. J. Pais Morais e A. Tavares Júnior.

Comissão do Boletim: *Presidente,* Rinaldo Campeão; *Vice-Presidente,* Frederico Macedo Santos; *Vogais,* A. da Costa Miranda, António Leão e Mário Ferreira Braga.

A Gazeta de Matemática regista com prazer a criação do Instituto, cuja actividade científica passará a referir, e deseja, vivamente, êste novo centro de estudos contribua para o progresso das matemáticas actuariais.

Cientistas estrangeiros em Portugal

O Professor da Universidade de Cambridge, Sir William Lawrence Bragg, prémio Nobel de Física, especialista no estudo da estrutura da matéria pelos raios X, veio a Portugal realizar uma série de conferências em Lisboa e Pôrto.

Os temas das lições expostas em Lisboa, pelo ilustre cientista, foram:

«A Optica dos Raios X»,

«Alguns problemas do estado metálico» e «Conseqüências científicas da descoberta de Roentgen».

Estas conferências efectuaram-se respectivamente no anfiteatro de Física da Faculdade de Ciências, na Academia das Ciências e no Instituto Britânico em Lisboa.

L. S.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO NEGATIVAS DA EQUAÇÃO DE DIOFANTO

por ***José da Silva Paulo***

Como é sabido a equação de Diofanto $ax+by=c$, onde a, b e c são inteiros positivos e a e b primos entre si, admite soluções inteiras da forma $x=\alpha+bm$, $y=\beta-am$ onde α,β é uma solução inteira e m um inteiro qualquer. Sabe-se também que o teorema de Catalan indica o número de soluções inteiras não negativas, com uma certa indeterminação, pois afirma que o seu *número é igual ao maior inteiro contido em* c/ab, *ou êsse inteiro aumentado de uma unidade.*

No entanto o número exacto de soluções inteiras não negativas daquela equação pode determinar-se pelo método a seguir exposto, onde se seguiu de perto a exposição de *J. V. Upensky* e *M. A. Heaslet* no seu livro *Elementary Number Theory.*

Seja então a equação

$$ax+by=c \tag{1}$$

e x,y uma sua solução em inteiros não negativos. Dividamos x e y respectivamente por b e a, obtém-se:

$$x=b\xi+r\,,\ 0\leq r<b\,,\quad x=a\eta+s\,,\ 0\leq s<a\,. \tag{2}$$

Por substituïção em (1) vem:

$$ab\,(\xi+\eta)+ar+bs=c\,. \tag{3}$$

Determinemos o cociente e o resto da divisão de c por ab. Será

$$c=ab\cdot q+R\,,\quad 0\leq R<ab$$

ou seja

$$ab\,(\xi+\eta)+ar+bs=ab\cdot q+R\,.$$

Ora $ar+bs\geq 0$, e como $s<a$ e $r<b$ é também $ar+bs<2ab$; logo, terá que ser ou $0\leq ar+bs<ab$ e então é

$$ar+bs=R \tag{4}$$

e

$$\xi+\eta=q \tag{5}$$

ou $ab<ar+bs<2ab$ (1) e será

$$ar+bs=ab+R \tag{6}$$

e

$$\xi+\eta=q-1\,. \tag{7}$$

Note-se que q é o maior inteiro contido em c/ab.

(1) É fácil ver que $ar+bs\neq ab$, por serem a e b primos entre si e $r<b$ e $s<a$.