imediatamente x, é ou $x \cap a = y \cap a$ e $y \cap b$ segue imediatamente $x \cap b$, ou $x \cap b = y \cap b$ e $y \cap a$ segue imediatamente $x \cap a$; enfim que, com êstes vértices e os segmentos daquelas paralelas se obtém de facto um diagrama de L por êste método e que L é quadriculada. (Se L_a e L_b têm respectivamente $r+1$ e $s+1$ elementos há $r \cdot s$ pequenos quadrados)·

Êste teorema pode fàcilmente ser generalizado de várias maneiras e obtêr outras formas. Estas tarefas são recomendadas ao leitor. A consideração da noção de diagrama, e portanto tôdas as considerações de carácter geométrico, pode considerar-se como constituindo simplesmente um meio auxiliar que evita uma noção, a de «*produto de estruturas*» (aqui estruturas lineares), muito simples também mas menos aconselhável nesta introdução. O teorema pode evidentemente interpretar-se como fornecendo uma definição algébrica, em têrmos da teoria das estruturas, do quadriculado.

Zürich, Dezembro de 1945.

TEMAS DE ESTUDO

SUR UNE MANIÈRE DE PRÉSENTER LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES

por **G. Dedebant**

1. Préliminaire. Il va de soi que la théorie des équations algébriques a dèja été si complétement et si parfaitement étudiée que nul ne saurait prétendre à une nouveauté quelconque sur ce sujet.

Aussi bien n'avons-nous en vue que d'exposer une certaine maniére de présenter la résolution de ces équations — rencontrée au hasard d'une méditation — et dont nous ignorons d'ailleurs si elle est nouvelle, mais qui nous a paru posséder une certaine valeur pédagogique.

Nous n'y attachons guère plus que l'importance d'une «Récréation mathématique».

Soit:

$$f_n(x) = 0 \quad (E_n)\,,$$

l'équation générale du n^{eme} degré.

Résoudre cette équation, au sens des algébristes, c'est exprimer ses solutions dans l'extension obtenue en adjoignant au corps des nombres rationnels des deux signes, d'autres nombres qui sont les racines de l'équation binôme:

$$t^n - 1 = 0 \quad (B_n)\,.$$

Le but à atteindre (s'il est accessible ?) est d'exprimer les racines de (E_n) par une fraction rationnelle ayant ces nouveaux nombres pour arguments.

L'équation (B_n) admet toujours la racine banale $t = +1$ et, si n est pair, la racine $t = -1$. Ces deux racines font partie du corps des nombres rationnels de l'un ou l'autre signe; les autres racines sont étrangères à ce corps. Il nous semble qu'il y ait intérêt à se placer seulement dans le corps des nombres rationnels positifs et à considérer -1 comme une entité extérieure. Nous allons voir tout de suite l'avantage de cette conception pour la resolution de l'équation da 2^{eme} degré.

2. L'équation du second degré. Soit l'équation générale du 2^{eme} degré:

$$x^2 + px + q = 0 \quad (E_2)\,.$$

L'équation binôme correspondante est:

$$t^2 - 1 = 0 \quad (B_2)\,.$$

Elle admet les racines $+1$ et -1. Désignons la seconde par α que nous ne considérons plus comme appartenant au corps des coefficients de (E_2). α sera donc une variable «indépendante» sur laquelle nous calculerons en remplaçant son carré par $+1$. Grace à cette régle, la solution de (E_2), si elle existe au sens des algébristes, se présentera sous la forme *d'un binôme*: $x = y + \alpha z$. Substituons cette expression dans (E_2); il vient: $(z^2 + y^2 + py + q) + z\,(2y + p)\,\alpha = 0$. Ce doit être une *identité en* α, ce qui donne le système d'équations: $\begin{cases} z^2 + y^2 + py + q = 0 \\ z\,(2y+p) = 0\,. \end{cases}$ Ecartant la solution $z = 0$, de la $2.^e$ équation, qui n'avancerait pas la résolution de l'équation (E_2), il reste: $y = -p/2$. Portant alors cette valeur dans la 1^{ere}, on obtient: $z^2 = p^2/4 - q$. Les racines de (E_2) sont donc, en écrivant maintenant $\alpha = -1$: $x = -p/2 \pm \sqrt{p^2/4 - q}$.

3. L'équation du 3ème degré. Le même procedé est applicable à l'équation générale du 3^{eme} degré:

$$x^3 + px + q = 0 \quad (B_3)\,.$$

L'équation binôme du 3^e degré:

$$t^3 - 1 = 0 \quad (E_3)$$

admet les racinos: $1\,,\ \alpha\,,\ \alpha^2$, liées entre elles par la relation: $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$.

Nous pouvons donc calculer sur α comme sur un nombre «irrationnel» dont le cube est égal à 1 et le carré à $-(1+\alpha)$.

Une fraction rationnelle ayant pour arguments les racines cubiques de l'unité, se réduira donc *encore à un binôme* $:x=y+\alpha z$.

Substituant cette expression dans (E_3), il vient:

$$(y^3+py+q-3yz^2+z^3)+z\,(3y^2+p-3yz)\,\alpha=0\,.$$

Et, comme ce doît être une identité en α, on obtient le système d'équations: $\begin{cases} y^3+py+q-3yz^2+z^3=0 \\ z\,(3y^2+p-3yz)=0\,. \end{cases}$

Ecartant la solution $z=0$, de la 2e équation, qui n'avancerait pas la résolution de (E_3), celle-ci donne: $z=y+\dfrac{p}{3y}$. Substituons cette valeur dans la 1ere, on obtient:

$$y^6-qy^3-p^3/27=0 \quad (E'_3)\,,$$

qui est une équation du 2e degré en y^3, en fait la résolvante classique de l'équation canonique du 3e degré. La suite du calcul conduit aux formules de Cardan.

4. L'équation du 4eme degré. Soit:

$$x^4+px^2+qx+r=0 \quad (E_4)\,,$$

l'équation générale du 4eme degré.

Les racines de l'équation binôme:

$$t^4-1=0 \quad (B_4)$$

sont, en dehors de 1: -1, i, $-i$. Une fraction rationnelle ayant pour arguments ces racines pourra donc se réduire encore à un binôme: $x=y+iz$, i étant l'imaginaire classique $(i^2=-1)$.

La substitution dans (E_4) donne lieu aux deux équations: $\begin{cases} (y^2-z^2)^2-4y^2z^2+p\,(y^2-z^2)+qy+r=0 \\ 4yz\,(y^2-z^2)+2pyz+qz=0\,. \end{cases}$

Et la seconde — écartant la solution $z=0$ — donne: $z^2=y^2+p/2+q/4y$ Substituant dans la première, on obtient la «résolvante»

$$64y^6+32py^4+(4p^2-16r)\,y^2-q^2=0\,, \quad (E'_4)\,,$$

qui est une équation du 3eme degré en y^2.

La suite du calcul conduira vraisemblablement aux formules de l'une des méthodes classiques de résolution.

5. Equations de degré supérieur au quatriéme.

Les cas de $n\leq 4$ présentent une grande simplicité parce qu'une fraction rationnelle en α se réduit à un binôme.

Si l'on aborde le 5e degré, on constate qu'une telle fraction rationnelle ne se réduit qu'à un polynôme du 3e degré. Les calculs se compliquent singulièrement, et la résolvante de degré 120, ne paraît guère susceptible de décomposition.

Pour le 6e degré, la complication diminue, une fraction rationnelle se réduisant de nouveau à un binôme. La résolvante n'est plus que du 15e degré.

Il serait curieux de pénétrer le sens profond de ces «phénoménes de calcul» et de voir comment il se rattachent aux théories d'Abel et de Galois. Nou nous proposons de revenir sur ce sujet.

Janvier, 1946.

AS RELAÇÕES DE INCERTEZA DE HEISENBERG

por ***F. Soares David***

As célebres relações de indeterminação da Mecânica Quântica estabelecidas pela primeira vez por Heisenberg em 1927 [1] podem justamente ser consideradas como uma das proposições fundamentais da nova Mecânica [2]. O seu principal interêsse reside, contudo, no que elas representam como factor de progresso na nossa concepção do mundo atómico — progresso no sentido de libertação de ideias feitas, admitidas a priori, portanto limitações de carácter extra-científica impostas à própria Ciência.

Poderia, portanto, parecer descabido abordar aqui um assunto tão trabalhado como êste. Contudo — e é êste o aspecto educativo da presente nota! — uma análise detalhada do problema alguma coisa de novo nos permitiu dizer a seu respeito e nos habilita agora a propor algumas questões a êle ligadas. O aspecto que aqui nos interessa da relações de Heisenberg é o seguinte: Sabe-se que representando por q e p respectivamente a abcissa e a quantidade do movimento dum electrão móvel sôbre uma recta, por Δq e Δp os êrros absolutos contidos numa avaliação de q e p, se tem

$$\Delta q\,\Delta p \sim h \tag{1}$$

($\sim$ significa *da ordem de* e h é a constante de Planck).

É essencial notar que os êrros Δq, Δp não resultam de quaisquer imperfeições evitáveis (mesmo teòricamente) dos aparelhos de medida, mas são impostos pela própria natureza da partícula dentro dos quadros da Mecânica Quântica, podendo embora (muito importante!) variar de acôrdo com o método experimental ou teórico de que se não lance mão.

A relação (1) pode obter-se quer imaginado, como fez Heisenberg [3], experiências à escala atómica — teòricamente possíveis e correctas do ponto de vista da Mecânica Quântica — quer recorrendo a certas propriedades dos integrais de Fourier que figuram na onda de de Broglie associada ao electrão [4], [5].

Um grau superior de precisão no enunciado do princípio de indeterminação será evidentemente atingido se obtivermos

$$(2) \qquad \Delta q \Delta p \geq \alpha h ,$$

sendo α uma constante da ordem da unidade.

Na única demonstração (teórica) conhecida duma relação dêste tipo assimilam-se Δq e Δp aos desvios médios quadráticos de q e p (consideradas como variáveis aleatórias) e aplicam-se noções elementares de Mecânica Quântica. Partindo da relação conhecida entre os operadores associados a q e p

$$(3) \qquad PQ-QP=h/2\pi i$$

obtem-se fàcilmente $\alpha = 1/4\pi$ [6].

Do ponto de vista matemático há que fazer ainda algumas observações. Com efeito, sabe-se que Q e P não são operadores definidos em todo o espaço das fases — é manifesto que $\int |f(x)|^2 dx < +\infty$ não implica $\int |x f(x)|^2 dx < +\infty$ nem $\frac{h}{2\pi i}\int \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2 dx < +\infty$ — e que nem tampouco há coïncidência dos seus domínios de definição. Acontece, pois, que para certos elementos do espaço PQ (ou QP) e portanto $PQ-QP$ não tem sentido. Ora o segundo membro de (3) pode aplicar-se a qualquer elemento do espaço. Esta igualdade não tem portanto, a bem dizer, qualquer sentido.

Pode contudo obter-se uma relação do tipo (2) seguindo um raciocínio totalmente diferente. Consideremos nos espectros (contínuos!) de Q e P rêdes de intervalos $\{I_n\}$, $\{J_m\}$ e associados a Q e P os operadores $f(Q)=\sum \lambda'_n E(I_n)$, $g(P)=\sum \mu'_m f(J_n)$ onde $\lambda'_n \in I_n$ $\mu'_m \in J_m$ e E, F são as decomposições da unidade [6] relativas a Q e P. $f(Q)$ e $g(P)$ são operadores com espectros pontuais puros e uma base de vectores próprios (valores próprios: λ'_n, μ'_m; projecções próprias: $E(I_n), f(J_m)$). Do ponto de vista físico, a substituïção de Q e P por $f(Q)$ e $g(P)$ traduz-se na introdução automática de certos êrros associados à medição de q e p, êrros limitados superiormente por $\varepsilon = \sup |I_n|$ e $\delta = \sup |J_m|$.

É manifesto que a compatibilidade de q e p se deve traduzir na possibilidade de medir estas grandezas com precisões arbitrárias, isto é, na compatibilidade de $f(q)$ e $g(p)$ para quaisquer decomposições dos espectros o que equivale ainda, como se sabe, à existência duma base comum aos $f(Q)$ e $g(P)$ relativos às mesmas decomposições.

Uma condição necessária de compatibilidade é, pois, a existência dum estado próprio comum aos $f(q)$ e $g(p)$ relativos a uma decomposição qualquer, isto é, a existência dum elemento comum a uma $V(I_n) = \underset{\varphi(q)}{E}[\varphi = E(I_n)\varphi]$ e uma $W(J_m) = \underset{\psi(q)}{E}[\psi = F(J_m)\psi]$.

Mas [6]

$$E(I_n)\varphi(q) = \varphi(q),\ q \in I_n; \quad 0,\ q \in 1-I_n$$

$$F(J_m)\psi(q) = \frac{1}{h}\int_{J_m} \exp\left(\frac{i}{\mathbf{h}}pq\right) dp \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{i}{h}pr\right)\psi(r)\,dr$$

$$(\mathbf{h} = h/2\pi)$$

Tal elemento deve pois satisfazer a equação integral

$$(4) \quad f(q) = \frac{1}{h}\int_{J_m} \exp\left(\frac{i}{\mathbf{h}}pq\right) dp \int_{I_n} \exp\left(-\frac{i}{\mathbf{h}}pr\right) f(r)\,dr \qquad (q \in I_n)$$

Designando por M o limite superior (necessàriamente diferente de zero e finito) de $|f(r)|$ em I_n, tem-se:

$$|f(q)| \leq \frac{1}{h}\int_{J_m}\left|\int_{I_n} \exp\left(-\frac{i}{\mathbf{h}}pr\right) f(r)\,dr\right| dp$$

$$M \leq \frac{1}{h}|J_m| \int_{I_n} |f(r)|\,dr \leq \frac{|I_n|\,|J_n|}{h} M$$

donde $|I_n| \cdot |J_n| \geq h$, e portanto

$$(5) \qquad \varepsilon\delta \geq h$$

ε e δ são êrros absolutos que não caem em nenhuma das categorias vulgarmente consideradas em Cálculo das Probabilidades.

Uma generalização interessante dêste resultado seria considerar uma decomposição dos espectros em conjuntos mensuráveis-L, disjuntos, e estabelecer uma relação análoga a (5) para os limites superiores das medidas dos conjuntos considerados em cada espectro. Um processo de abordar a questão é considerar, associados a Q e P, os peradores $\Phi(Q) = \sum \lambda''_n \mathcal{E}(A_n)$, $\Psi(P) = \sum \mu''_m \mathcal{F}(B_m)$ onde $\{A_n\}$ e $\{B_m\}$ são as rêdes de conjuntos mensuráveis consideradas; $\lambda''_n \in A_n$ e $\mu''_m \in B_m$; $\mathcal{E}(A_n)$ e $\mathcal{F}(B_m)$ são os operadores de projecção que generalizam $E(I_n)$ e $F(J_m)$ que se encontram definidos, por exemplo, em [7].

Um outro problema a resolver seria a determinação duma função própria comum (no caso de ser $\varepsilon\delta \geq h$), problema que se reduz à resolução da equação integral (4).

BIBLIOGRAFIA

[1]. W. Heisenberg: *ZS. f. Phys.*, 43, 172 (1927).

[2]. W. Pauli: *Handbuch der Physik*, k. 2.

[3]. W. Heisenberg: *Les principes physiques de la Théorie Quantique.*

[4]. J. Frenkel: *Wave mechanics, elementary Theory.*

[5]. R. Courant und D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik*, pag. 85.

[6]. J. von Neumann: *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.*

[7]. R. L. Gomes: *Sur une généralisation de l'operateur de projection* E(I), Port. Phys. Vol. I, Fasc. 1.

CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PÔRTO