vaient commencer à entreprendre des recherches personnelles.

. . . .

Pour parfaire l'enseignement des domaines particuliers de la science pure et appliquée auxquels se destinent les chercheurs à leur sortie des grandes écoles ou après leur licence, nous organisons au Centre National de la Recherche Scientifique un enseignement préparatoire à la recherche. Le programme d'enseignement comprendra des options... L'élève chercheur pourra choisir une option; il sera souvent nécessaire de guider ce choix en tenant compte de ses aptitudes, indiquées par ses maîtres de l'école ou de la Faculté dont il a été l'élève, et en tenant compte en outre des besoins des laboratoires du pays.

Au cours d'une première année l'élève fréquentera *successivement plusieurs laboratoires* où, sous la direction de chercheurs qualifiés, il pratiquera les diverses techniques en usage. Cet enseignement pratique ne devrait pas avoir le caractère de manipulation du type de la licence, sauf en cas exceptionnel pour des techniques d'emploi occasionnel. Les élèves chercheurs devront plutôt servir d'aides à des chercheurs au cours de leurs travaux, et manipuler les appareils utilisés au cours des recherches.

. . . .

Durant cette première année, les élèves chercheurs suivent obligatoirement des cours d'un niveau très élevé correspondant à l'option choisie et enseignés par plusieurs chercheurs, chacun d'eux traitant les chapitres où se trouvent les questions au développement desquelles ils ont le plus contribué.

Ces cours seront publics, pour qu'ils puissent profiter non seulement aux élèves chercheurs, mais à tous les chercheurs intéressés par les questions traitées. Ces cours, mis à jour chaque année, seront publiés par les soins du C. N. R. S. et distribués dans les laboratoires spécialisés.

Une deuxième année d'enseignement est prévue, pendant laquelle les élèves chercheurs fréquenteront les laboratoires étrangers. Ils seront admis à titre d'élèves et non comme des chercheurs expérimentés, et je sais par des conversations que j'ai pu avoir avec quelques collègues étrangers que le meilleur accueil leur sera réservé.

Nous pensons qu'après ces deux années d'enseignement les chercheurs qui seront admis dans les laboratoires français auront une excellente préparation pour entreprendre des recherches particulières et devenir des spécialistes éclairés.

Les élèves de l'enseignement préparatoire à la recherche recevront du C. N. R. S. une allocation leur permettant de vivre....

. . . .

Je voudrais terminer en faisant remarquer que tous les efforts que nous faisons pour mener à bien la tâche dont j'ai esquissé les grandes lignes risqueraient d'être vains si nous ne recevions pas les crédits nécessaires.

En dépit des immenses services qu'ils rendent à leur pays, après les durs sacrifices qu'ils ont consentis pendant de nombreuses années d'études à l'Université ou dans les grandes Ecoles, nos chercheurs, comme d'ailleurs les membres de l'Enseignement, sont encore mal rétribués. La responsabilité en est au Ministère des Finances qui, par une mauvaise politique poursuivie pendant des décades, n'a pas compris l'excellent placement que constitue, pour le pays, la recherche scientifique. L'exemple donné par les grandes nations créatrices était pourtant assez probant.

Il faut toutefois reconnaître que depuis la Libération, une meilleure compréhension s'est manifestée et un effort, certes encore insuffisant, a été fait dans le sens d'une augmentation des crédits.

Il y a lieu de croire qu'un enseignement aura été tiré des évènements passés et que ce ministère permettra d'assurer à ceux qui servent la Science sous toutes ses formes des conditions de vie convenables. Alors nous serons certains de pouvoir donner à notre pays les nombreux savants et techniciens qui lui sont indispensables pour assurer son indépendance et sa grandeur.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

O PROFESSOR RENÉ DE POSSEL EM PORTUGAL

Conforme tínhamos anunciado no último número da *Gazeta de Matemática*, chegou a Portugal, em Março dêste ano o jóvem investigador francês, Prof. René de Possel, que desenvolveu entre nós uma intensa actividade realizando em Lisboa, Coimbra e Pôrto, nas respectivas Faculdades de Ciências, várias conferências sôbre os seguintes assuntos: *Os princípios matemáticos da Mecânica Clássica; Os axiomas da Geometria Euclideana baseados na teoria dos grupos; As teorias modernas de Integração; Alguns problemas de Topologia.*

O Prof. René de Possel, evidenciou em tôdas essas lições os seus grandes recursos didáticos e a bela escola de Matemática, clássica e moderna, em que teve a oportunidade de fazer a sua preparação, primeiro em Paris, na Escola Normal Superior e no

Colégio de França, onde ouviu entre outros, Lebesgue, Borel, Cartan, e depois em outros notáveis centros da Europa, como Goettingen, Munich, Szeged, onde conheceu Hilbert, Caratheodory, Haar, Riesz, etc.

Foi assim, em contacto com grandes Mestres do seu País e do Estrangeiro, que começou a carreira de investigador e imediatamente colocou as suas faculdades e a sua especialização ao serviço da Pátria, quer como professor quer como um dos fundadores do grupo Bourbaki, onde, de colaboração com Henri Cartan, A. Weil, Dieudonné, Mandelbrojt, Eheresman, etc., iniciou um largo e profundo movimento a favor daquilo que se costuma chamar Matemática Moderna e que compreende nomeadamente a Algebra e a Topologia.

Os resultados obtidos por êsse trabalho de équipe, ainda antes da última guerra, estão, em parte, reunidos em 4 fascículos da colecção Actualités Scientífiques et Industrielles e grande serviço prestará no futuro êsse grupo de investigadores, se retomar a sua anterior actividade e a puser ao alcance dos estudiosos de todo o mundo.

O Prof. René de Possel, além das lições mencionadas, colaborou intensamente com todos aquêles que trabalham no Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, expondo vários resultados das suas próprias investigações, nomeadamente *sôbre a forma de completar uma funcional linear* — um problema geral que compreende, por exemplo, a passagem do integral ordinário para o integral de Lebesgue — e fornecendo sugestões para novos temas de estudo.

De regresso a Lisboa realizou também, no Instituto Francês, a pedido dum grupo de estudiosos, 3 lições sôbre cálculo exterior.

Concluiu ainda originais para quási tôdas as nossas revistas da especialidade incluindo a *Gazeta de Matemática* e deu-nos a todos um admirável exemplo de dedicação pela investigação matemática e pelo ensino.

Dirigindo-lhe daqui as nossas calorosas saudações e os nossos sinceros agradecimentos, significamos mais uma vez ao Instituto Francês e aos seus ilustres directores, Prof. Pièrre Hourcade e Paul Teyssier, o nosso profundo reconhecimento por terem conseguido trazer a Portugal o matemático René de Possel.

A terminar fazemos votos porque esta iniciativa se repita e em breve possamos conviver com outro investigador francês, facilitando-se assim aos nossos jóvens novas possibilidades de completarem a sua cultura matemática.

ACTIVIDADE DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Por iniciativa da J. I. M. estão a realizar-se aos sábados, de tarde, com regularidade, sessões de trabalho nas quais se faz a exposição crítica, com ampla discussão, de um determinado assunto.

As sessões dêste ano têm sido preenchidas inteiramente com a Teoria dos Números, conforme o seguinte esquema:

1. Teoria Elementar dos Números Naturais (segundo Hilbert e Bernays em Grundlagen der Mathematik, Bd I — pág. 20): *Ruy Luís Gomes.*

2. Teoria Axiomática dos Números Naturais, a partir dos Axiomas de Peano: *Ruy Verdial.*

3. Construção dos Números inteiros como o grupo mínimo aditivo que contém uma parte isomorfa ao semi-grupo dos números naturais;

4. O domínio de integridade ordenado dos números inteiros;

5. Construção de corpo ordenado dos racionais como o menor corpo ordenado que contém uma parte isomorfa ao domínio de integridade dos números inteiros: *António Andrade Guimarães.*

6. Construção do corpo dos números reais pelo método de Cantor (os números como classes de equivalência das sucessões racionais de Cauchy): *Luís Neves Real.*

A bibliografia utilizada é a seguinte:

Hilbert und Bernays — *Grundlagen der Mathematik,* I. *Enz. der Math. Wissen.* Bd. I_1, Heft. 2: Artigo de Bachmann — *Aufbau der Zahlensystems.* Van der Waerden — *Moderne Algebra,* Erster Teil — Cap. IX — *Reelle Körper.* O. Perron — *Irrazional Zahlen.* Birkhoff and MacLane — *Survey of Modern Algebra,* e *Publicações do Centro e da Junta* sob a orientação do Dr. Almeida Costa. Escolhendo a Teoria dos Números para tema de estudo durante êste ano correspondemos aos desejos manifestados por alguns alunos da Faculdade de Ciências do Pôrto e, àlém disso, julgamos prestar um serviço aos nossos estudiosos fornecendo-lhes os primeiros elementos para qualquer futura especialização, em Matemática Clássica ou Moderna.

Para facilitar o estudo de todos aquêles que se mostrem interessados, a J. I. M. resolveu publicar, na Colecção das Cadernos, a sistematização em curso naquelas sessões de trabalho, tendo-se encarregado de coligir as notas necessárias de acôrdo com as exposições feitas e respectiva discussão os alunos Rui Verdial, António Andrade Guimarães e Tiago de Oliveira.

Para o próximo ano projecta a J. I. M. um estudo análogo dos *Fundamentos de Geometria.*

CURSO DE MECÂNICA ALEATÓRIA

O físico francês Georges Dedebant iniciou no dia 7 de Maio um curso de Mecânica Aleatória que tem funcionado regularmente com duas sessões semanais (às 3.as e 6.as feiras) na Faculdade de Ciências do Pôrto.

As lições têm consistido na exposição detalhada da memória da autoria de G. Dedebant e Ph. Wehrlé publicada na *Portugaliae Physica* (Vol. 1, fasc. 3, pp. 95-150 e fasc. 4, pp. 179-294).

Nas primeiras lições foram dadas algumas noções fundamentais de Cálculo das Probabilidades e Estatística. Seguidamente iniciou-se um estudo sistemático dos espaços de números aleatórios. Introduzindo num dêstes espaços uma *distância* definida por $d(X,Y)=\overline{X^2}+\overline{Y^2}-2\,\overline{XY}$, onde X e Y são dois números aleatórios do espaço considerado, obtém-se um «espaço de distâncias» no sentido de K. Menger que é além disso um espaço métrico. E, salvo condições muito especiais de correlação entre os pontos do espaço, êle será congruente dum sub-conjunto do espaço de Hilbert.

Foi chamada vivamente a atenção para o papel importantíssimo que desempenham na geometria dum espaço de números aleatórios as chamadas *condições de coerência*. Seja $\{X_i\}$ uma «base» de números aleatórios normados do espaço considerado. Qualquer número do espaço se pode escrever sob a forma $X=\sum_i \lambda_i X_i$, onde os λ_i são números reais. Logo $\overline{X^2}=\sum_{i,j} r_{ij}\lambda_i\lambda_j$ onde r_{ij} é o coeficiente de correlação de X_i e X_j. Ora $\overline{X^2}\geq 0$; daqui as condições, ditas *de coerência*:

$$\begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{vmatrix} \geq 0 \qquad (n=1,2,\cdots)$$

Foi dada depois uma definição de *função aleatória* e construido um cálculo diferencial para as funções aleatórias. Uma função aleatória X/t é definida; *a)* por uma correspondência entre um conjunto numérico $\{t\}$ e um conjunto de números aleatórios $\{X\}$; *b)* por tôdas as leis de probabilidade conjugadas dos X/t. É com êste novo e potente instrumento de análise, cuja introdução em Física foi naturalmente imposta pelo estudo de certas questões de hidrodinâmica e meteorologia, que será construída tôda a Mecânica Aleatória. O conceito físico fundamental é o de *corpúsculo aleatório,* representado por uma ou várias funções aleatórias, e de certo modo equivalente a um fluido (agregado de partículas) da Mecânica Clássica. As grandezas medíveis são médias estatísticas e coeficientes de correlação relativos a pares de instantes.

Presentemente, e um pouco à margem do curso que vinha fazendo, o Prof. Dedebant está a expôr alguns resultados de investigações suas recentes sôbre o conceito de *onda aleatória,* com vista a uma possível interpretação da dualidade onda-corpúsculo da Mecânica Ondulatória.

As idéias directrizes destas pesquizas são as seguintes: — O coeficiente de correlação de funções aleatórias muito gerais tem caráccer periódico. Daqui o dever esperar-se que em qualquer fluido se manifestem, sob condições convenientes, fenómenos periódicos reveláveis pela experiência. É o que se observa de facto na distribuïção de certas núvens e nas correntes líquidas. Dentro desta ordem de idéias, os fenómenos de interferência com feixes de electrões teriam natureza meramente estatística: seriam a revelação, em condições experimentais adequadas, da periodicidade contida em potência no coeficiente de correlação da função aleatória representativa do agregado.

C. E. M. P., 10-VI-1945 — *F. Soares David*

INSTITUTO DOS ACTUARIOS PORTUGUESES

Desde a sua fundação, que oportunamente anunciámos, o Instituto tem mantido intensa actividade realizando mensalmente reüniões onde são apresentados e discutidos diversos problemas actuariais de que prèviamente são informados os sócios por resumos dos assuntos a tratar enviados com antecedência.

Foram apresentadas, até 31 de Maio passado, as seguintes comunicações:

Linhas gerais referentes à construção da tábua de mortalidade da população portuguesa, (1941), por J. J. Pais Morais.

Nota sôbre o fraccionamento de anuidades, por Carlos A. F. Carvalho.

Sugestões para uma notação a adoptar pelo I. A. P., por Caetano M. Beirão da Veiga.

Reservas técnicas duma Caixa de Previdência de um grupo fechado, por Carlos A. F. Carvalho e António Leão.

Sôbre a estabilidade de uma caixa aberta de renovação anual por António Leão.

Indeterminações actuariais no problema mutualista, por Caetano M. Beirão da Veiga.

Também foram discutidas as *Bases técnicas de previdência social,* em questão levantada pelo sócio J. Remy Teixeira Freire.

Encontra-se já no prelo o primeiro número do Boletim.

SOCIEDADE MATEMÁTICA DE FRANÇA

CONFERÊNCIAS REALIZADAS EM 1945-46.

L. Lesieur: Représentation rationnelle des hyperbiquadratiques, (17-1-1945); S. Mandelbrojt: Sur une inégalité relative aux séries asymptotiques, et applications aux fonctions quasi-analytiques et aux séries de Dirichlet, (14-2-1945); A. Chatelet: Sur les corps abéliens du troisième ordre, (14-3-1945); A. Lichnerowicz: Sur certains espaces variationnels généralisant les espaces de Finsler, (11-4-1945); P. Levy: Sur des théorèmes nouveaux relatifs au mouvement brownien, (16-5-1945); M. Krasner: Sur la théorie non abélienne des corps de classes, et les extensions finies de corps valués complets, (13-6-1945); A. Weil: L'hypothèse de Riemann dans les corps de fonctions algébriques, (4-7-1945); R. Marrot: La théorie mathématique de l'équation de Boltzmann, (7-11-1945); G. Bouligand: Sur des résultats obtenus par Mr-Zahorski dans l'application de la théorie des ensembles à la théorie des fonctions, (21-11-1945); G. Choquet: Sur les surfaces et hypersurfaces isométriques dans les espaces cartésiens, (21-11-1945); F. Pollaczec: Sur la résolution de certaines équations intégrales à l'aide de la théorie des fonctions d'une variable complexe, (15-12-1945).

J. Ferrand: Sur l'approximation des fonctions par des fonctions définies sur un réseau, (23-1-1946); M. Krasner: Sur une généralisation de la théorie de Galois, (13-12-1946); L. Gauthier: La géométrie réglée des espaces à n dimensions, (13-2-1946); G. Choquet: Topologie des solutions des équations différentielles $y'=f(x,y)$, (20-3-1946); J. Favard: Corps convexes, (10-4-1946); N. Aronszajn: Sur certains développements canoniques en fonctions harmoniques de l'espace (8-5-1946).

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

UM TEOREMA DE ARITMÉTICA

por ***José da Silva Paulo***

1. Um teorema de Aritmética

Ao mesmo tempo que se deduz a fórmula que dá o número de combinações de m objectos tomados n a n, demonstra-se que:

Teorema: *O produto de* n *inteiros consecutivos é divisível pelo produto dos* n *primeiros inteiros naturais,* isto é que

$$(1)\qquad \frac{(a+1)\,(a+2)\cdot\,\cdots\,\cdot(a+n)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\,\cdots\,\cdot n}$$

é um inteiro, se fôrem a e n inteiros.

É possível, no entanto, demonstrar aquêle teorema ignorando a análise combinatória. Uma tal demonstração pode fazer-se mostrando que tôda a potência de um inteiro primo que divida o denominador de (1) dividirá o seu numerador, ou o que é o mesmo, que se na decomposição em factores primos, do denominador existir a potência p^r de um inteiro primo p, na decomposição do numerador existirá uma potência p^s, do mesmo factor primo p, onde $s\geq r$; e se o facto se der para qualquer factor primo do denominador, (1) será um inteiro. Para fazermos esta demonstração necessitamos de certas noções que a seguir se expõem.

2. Parte inteira de um número real

Definição: *Chama-se parte inteira de um número real* x, *ao maior inteiro não superior a* x.

Notação: Para designar *a parte inteira de* x, ou como também se diz, o *maior inteiro contido em* x, usaremos a notação $[x]$.

Em vista da Definição teremos

$$[3]=3;\quad [\pi]=3;\quad [13/2]=6;\quad [-13/2]=-7 \text{ etc.}$$

Da definição resulta ainda que $[x]$, satisfaz às seguintes relações $[x]\leq x<[x]+1$, e, por isso, é $x=[x]+\theta$, sendo $0\leq\theta<1$. A θ dá-se o nome de *parte fraccionária de* x.

É fácil agora deduzir as seguintes propriedades

a) $[[x]]=[x]$
b) $[x+a]=[x]+a$, se a fôr um inteiro
c) $[x]+[-x]=0$, ou a -1, conforme fôr x um inteiro ou não
d) $[x+y]\geq[x]+[y]$
e) $[[x]/n]=[x/n]$, se n fôr um inteiro natural.

As duas primeiras propriedades são evidentes bem como o caso de ser x um inteiro, na propriedade *c)*. Se x não fôr um inteiro será $x=[x]+\theta$, com $0<\theta<1$, e portanto $-x=-[x]-1+(1-\theta)$, onde $0<1-\theta<1$.

Tomando a parte inteira de $-x$, tem-se $[-x]=[-[x]-1+(1-\theta)]$, ou, em virtude de *b)*, $[-x]=-[x]-1+[1-\theta]$ ou, finalmente, $[-x]=-[x]-1$ e, portanto, $[-x]+[x]=-1$, c. c. d.