

Les principes mathématiques de la mécanique classique ⁽¹⁾

por René de Possel (Université d'Alger)

Les principes de la mécanique classique sont exposés d'ordinaire pour les systèmes d'un nombre fini de masses ponctuelles. Dès qu'il s'agit de les appliquer, ils se montrent presque toujours insuffisants, et de nouvelles hypothèses, plus ou moins arbitraires, sont introduites explicitement ou non pour rester en accord avec l'expérience. On fait également des passages à la limite nullement justifiés pour arriver d'un nombre fini de points à un milieu continu.

Bornons-nous à citer un exemple: pour évaluer le travail des forces intérieures dans un milieu continu, il faut d'abord décomposer ce milieu en cellules polyédriques, introduire deux forces opposées pour chaque couple de cellules en contact suivant un polygone, ensuite composer toutes les forces ainsi appliquées à une cellule en un point intérieur, et enfin passer à la limite. Si l'on néglige d'effectuer ces deux dernières opérations, le résultat est erroné, et on trouve zéro comme valeur du travail (voir par exemple BÉGHIN, *Statique et Dynamique*, collection Armand Colin).

Bien peu d'efforts ont été consacrés jusqu'à ces derniers temps pour remédier à l'insuffisance de tels principes. On peut citer un essai partiel de HAMEL (*Mathematische Annalen*, 1909) et un autre ZAREMBA (*Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1934) mais qui n'examinaient l'un et l'autre qu'un seul côté de la question. Cet état de choses a nui énormément à la faveur de la mécanique auprès des mathématiciens.

Il est cependant facile de transformer la mécanique rationnelle en une théorie mathématique rigoureuse. La masse, la force, et bien d'autres grandeurs, doivent être considérées comme des fonctions additives d'ensemble, et les sommations relatives aux différents points par des intégrations au sens de Stieltjès.

Une mise au point très complète dans ce sens a été faite par M. BRELOT (2 notes aux *Annales de l'Université de Grenoble*, section sciences-médecine, t. 19, 1943 et t. 20, 1944, et un fascicule, *Les principes mathématiques de la mécanique classique*, Arthaud, Grenoble, 1945). J'ai eu moi-même l'occasion d'en faire une dans le cours que je professe à Alger depuis 4 ans. L'exposé qui va suivre est d'ailleurs largement inspiré des travaux de M. Brelot, mais le point de vue reste plus élémentaire.

Les deux premières parties contiennent les notions de fonction additive d'ensemble et d'intégrale de Stieltjès, ces notions déjà si fécondes en calcul des probabilités. Une dernière partie tente une interprétation physique des principes mathématiques énoncés dans la troisième.

I. Fonction additive d'ensemble

Étant donné un ensemble E , le plus souvent l'espace euclidien à trois dimensions ou l'une des ses parties, considérons une fonction qui associe à certains ensembles A contenus dans E un nombre réel ou un vecteur $m(A)$. Toutes les fois que m est définie pour deux ensembles A_1 et A_2 sans point commun et pour leur réunion A , supposons que l'on ait

$$m(A) = m(A_1) + m(A_2).$$

On dit alors que m est une fonction additive d'ensemble ou une mesure. (Nous ne nous occuperons pas ici des fonctions d'ensemble complètement additives). Les ensembles pour lesquels m est définie sont dits «mesurables» par rapport à m et doivent vérifier les conditions suivantes:

la réunion, l'intersection, la différence de deux ensembles mesurables par rapport à m est encore mesurable par rapport à m .

Tout ensemble mesurable est la réunion d'un nombre fini d'ensembles mesurables tous de diamètre au

(1) Le sujet de cet exposé a fait l'objet de plusieurs conférences données par l'auteur aux Facultés des Sciences de Lisbonne, Coimbra et Porto, et à l'Institut de Coimbra, en mars et avril 1946.

plus égal à un nombre donné positif quelconque (et d'après la condition précédente, on peut admettre que ces ensembles sont sans point commun deux à deux).

La mesure peut être concentrée en un nombre fini de points, sur des courbes, des surfaces. Bien entendu il est souvent essentiel de préciser si les extrémités de l'arc de courbe, ou si la frontière de l'ensemble A en fait partie, car des points de mesure non nulle peuvent s'y trouver.

Comme exemples de mesures, citons la longueur d'un ensemble d'intervalles d'une droite en nombre fini, l'aire d'un ensemble plan, le volume d'un ensemble de l'espace à trois dimensions, l'étendue à n dimensions d'un ensemble de l'espace à n dimensions. Parmi les grandeurs physiques, la masse d'un système, son énergie cinétique, la quantité de chaleur reçue pendant un temps donné par une partie donnée d'un système, l'énergie électromagnétique contenue dans un volume donné. En calcul des probabilités, si tous les cas possibles constituent un ensemble E , la probabilité de réalisation d'un cas appartenant à une partie A de E est une fonction additive de l'ensemble A : la donnée d'une loi de probabilité équivaut à celle d'une fonction additive d'ensemble.

Bourbons-nous à rappeler la définition précise de l'aire d'un ensemble plan A : traçons un quadrillage Q , et désignons par S la somme des aires des carreaux contenus ainsi que leur périmètre dans A , et par S' la somme des aires des carreaux qui touchent A . Formons des quadrillages Q_n de plus en plus petits par subdivision du premier. Nous obtenons une suite non décroissante S_n et une suite non croissante S'_n . Si leurs limites sont égales, on dit que A est quarrable, et que cette limite constitue l'aire ou la mesure de Jordan de A . On constate aisément que c'est bien une fonction additive d'ensemble, que les ensembles quarrables vérifient les propriétés indiquées plus haut pour les ensembles mesurables; on démontre également que l'aire ne dépend pas du quadrillage initial. On définit de même l'étendue à n dimensions.

II. Intégrale de Stieltjès

Prenons d'abord le cas d'une mesure m non négative. Soit E un ensemble mesurable par rapport à m et $\vec{f}(x)$ une fonction définie dans E dont la valeur est un vecteur ou un simple nombre réel.

Partageons E en un nombre fini d'ensembles e_i mesurables par rapport à m , dans chacun d'eux choisissons un point x_i , et formons la somme

$$\vec{S} = \sum_i \vec{f}(x_i) m(e_i).$$

Nommons «maille» du partage le plus grand diamètre des e_i . Supposons qu'il existe un vecteur \vec{I} vérifiant la condition suivante: à tout $\epsilon > 0$, on peut associer un $\alpha > 0$ tel que, pour tout partage de maille au plus égale à α et tout choix des x_i , on ait $|\vec{I} - \vec{S}| < \epsilon$ (les deux barres verticales indiquant qu'il s'agit de la longueur du vecteur). On dit alors «que \vec{S} a pour limite \vec{I} quand la maille tend vers zéro», que \vec{f} est «intégrable par rapport à m » et que \vec{I} est «l'intégrale (de Stieltjès) de \vec{f} , sur l'ensemble E , prise par rapport à m ». On écrit $\vec{I} = \int_E \vec{f} dm$.

Si $\vec{f}(x)$ est uniformément continue sur E , (c'est-à-dire, si à tout $\eta > 0$, on peut associer un $\alpha > 0$ tel que l'on ait $|\vec{f}(x_1) - \vec{f}(x_2)| \leq \eta$ dès que x_1 et x_2 sont distants d'au plus α), on peut démontrer immédiatement que l'intégrale existe. En effet, pour deux partages de maille au plus $\alpha/2$, en ensembles e_i et e'_j , et pour des choix arbitraires de x_i dans e_i et de x'_j dans e'_j , on a, en désignant par e_{ij} l'intersection de e_i et e'_j , et en supposant m nul pour l'ensemble vide,

$$\begin{aligned} \vec{S} - \vec{S}' &= \sum_i \vec{f}(x_i) m(e_i) - \sum_j \vec{f}(x'_j) m(e'_j) = \\ &= \sum_i \sum_j [\vec{f}(x_i) - \vec{f}(x'_j)] m(e_{ij}). \end{aligned}$$

Un terme de cette dernière somme est nul si e_i et e'_j n'ont pas de point commun, il est en longueur au plus égal à $\eta m(e_{ij})$ dans le cas contraire, et l'on a

$$|\vec{S} - \vec{S}'| \leq \sum_i \sum_j \eta m(e_{ij}) = \eta m(E),$$

nombre aussi petit qu'on le veut pourvu que α soit assez petit.

Il en résulte immédiatement la convergence des sommes \vec{S}_n , correspondant à des partages dont la maille tend vers zéro, vers une limite unique. On a en effet $|\vec{S}_{n+p} - \vec{S}_n| < \epsilon$, quel que soit $\epsilon > 0$ pourvu que n soit assez grand, la suite \vec{S}_n vérifie donc le critère de Cauchy et converge.

Le théorème s'étend au cas où \vec{f} présente certaines discontinuités.

Si m représente la longueur, l'aire, le volume, l'intégrale par rapport à m se réduit aux intégrales ordinaires simple, double, triple, d'une fonction vectorielle.

Supposons que la mesure m prenne des valeurs négatives. Nous admettrons alors que les sommes $\sum_i |m(e_i)|$ correspondant aux divers partages de E sont bornées

par une nombre fixe. On dit dans ce cas que la mesure m est à variation bornée sur E . Si nous formons les sommes $\sum_i |m(e_i)|$ pour une partie fixe de A ,

leur borne supérieure constitue une fonction d'ensemble $\mu(A)$, définie pour les mêmes ensembles que m , et dont on vérifie qu'elle est additive. La démonstration de l'existence de l'intégrale reste valable en remplaçant $m(e_{ij})$ par $\mu(e_{ij})$.

D'ailleurs $\mu' = \mu - m$ constitue également une mesure non négative, et m est la différence de deux mesures non négatives.

Supposons enfin que \vec{m} prenne des valeurs vectorielles. Si f est numérique, on considérera la somme

$$\sum f(x_i) \vec{m}(e_i).$$

Si \vec{f} est un vecteur du même espace que \vec{m} , on pourra considérer les sommes

$$\sum \vec{f}(x_i) \cdot \vec{m}(e_i), \quad \sum \vec{f}(x_i) \wedge \vec{m}(e_i).$$

Si ces expressions ont des limites, on les désignera par les symboles

$$\int_E f \vec{d}m, \quad \int_E \vec{f} \cdot \vec{d}m, \quad \int_E \vec{f} \wedge \vec{d}m.$$

Les deux derniers sont les intégrales de \vec{f} prises scalairement et vectoriellement par rapport à \vec{m} . Si les sommes $\sum_i |m(e_i)|$ sont bornées, la mesure \vec{m} sera

encore dite «à variation bornée sur E »; si de plus \vec{f} est uniformément continue sur E , la démonstration donnée plus haut s'appliquera encore, et chacune des intégrales ci-dessus existera.

Quel que soit le type d'intégrale, on démontre aisément les égalités

$$\int_E (\vec{f} + \vec{g}) \vec{d}m = \int_E \vec{f} \vec{d}m + \int_E \vec{g} \vec{d}m, \quad \int_E \lambda \vec{f} \vec{d}m = \lambda \int_E \vec{f} \vec{d}m,$$

λ étant constant, pourvu que les intégrales écrites existent. Ces égalités expriment que l'intégrale est une fonctionnelle linéaire.

Citons encore, \vec{k} étant un vecteur constant, les égalités

$$\int_E \vec{k} f \vec{d}m = \vec{k} \int_E f \vec{d}m, \quad \int_E \vec{k} \wedge \vec{f} \vec{d}m = \vec{k} \wedge \int_E \vec{f} \vec{d}m, \\ \int_E (\vec{k} \wedge \vec{f}) \cdot \vec{d}m = \vec{k} \cdot \int_E \vec{f} \wedge \vec{d}m.$$

L'intégrale d'une fonction fixe \vec{f} prise sur un ensemble variable A constitue une nouvelle fonction additive d'ensemble. Si \vec{f} est intégrable sur E , cette nouvelle fonction est définie pour tous les ensembles me-

surables par rapport à m et contenus dans E , soit

$$(1) \quad \mu(A) = \int_A \vec{f} \vec{d}m.$$

Le théorème est conséquence immédiate des définitions, et reste vrai quelle que soit la nature, scalaire ou vectorielle, de f , de m et de leur produit.

Soit $F(x)$ une fonction intégrable par rapport à la mesure μ définie par l'égalité (1). On démontre immédiatement, en remontant aux définitions, l'égalité

$$\int_E F \vec{d}\mu = \int_E F \vec{f} \vec{d}m.$$

Autrement dit, le symbole $\vec{d}\mu$ peut être remplacé par $\vec{f} \vec{d}m$. La propriété reste vraie quelle que soit la nature de F , f , m et de leurs produits, pourvu que les expressions écrites aient un sens.

Densité. Étant données deux mesures, définies pour les mêmes ensembles, $\vec{\mu}$ vectorielle ou numérique, m numérique, supposons que le rapport $\frac{\vec{\mu}(e)}{m(e)}$ ait une

limite $\vec{\varphi}$ quand l'ensemble e tend vers un point x_0 , c'est-à-dire qu'à tout $\varepsilon > 0$ on puisse associer un $\eta > 0$, tel que pour tout ensemble e mesurable par rapport à m et dont tout point est au plus distant de η de x_0 ,

on ait $\left| \frac{\vec{\mu}(e)}{m(e)} - \vec{\varphi} \right| < \varepsilon$. On dit alors que $\vec{\varphi}$ est la

densité de $\vec{\mu}$ par rapport à m au point x_0 . Le mot est consacré par l'usage en physique où, m désignant en général le volume, $\vec{\mu}$ représente par exemple la masse ou une forme quelconque d'énergie. (Le mot «densité» est parfois employé en mathématiques dans un sens tout différent, par exemple par M. Denjoy).

Si m est l'aire d'une surface ou la longueur d'un arc de courbe, on a des densités superficielles ou linéaires. Il est à peu près évident que la densité par rapport à m de la mesure μ définie par la formule (1) est égale à $\vec{f}(x)$ en tout point x où \vec{f} est continue. C'est là une extension de la propriété élémentaire de la dérivée d'une intégrale ordinaire par rapport à sa borne supérieure.

Inversement, si la densité $\vec{\varphi}(x)$ de $\vec{\mu}$ par rapport à m existe en tout point d'un ensemble A , supposé compact, c'est-à-dire fermé et borné, on démontre que $\vec{\varphi}(x)$ est uniformément continue sur A , et que l'on a

$$\vec{\mu}(e) = \int_e \vec{\varphi}(x) \vec{d}m.$$

La démonstration peut être calquée sur celle de la continuité uniforme d'une fonction continue sur un ensemble compact.

Cette réciproque cesse d'être exacte si la densité cesse d'exister en certains points.

Nous aurons besoin dans la suite de passer à la limite et de dériver sous le signe \int . Pour cela, nous admettons que la mesure m vérifie la propriété suivante, qui équivaut à l'additivité complète: pour une suite d'ensembles A_n mesurables par rapport à m , dont chacun contient le suivant et dont l'intersection est vide, les mesures $m(A_n)$ tendent vers zéro. Cette propriété paraît évidente dans les applications physiques, et se démontre pour l'aire, le volume ou l'étendue de dimension n .

Moyennant cette hypothèse, on démontre les théorèmes suivants, qui sont classiques dans la théorie de l'intégrale de Lebesgue: soit $\vec{f}(x, t)$ une fonction intégrable sur E quelle que soit la valeur de la variable numérique t dans un intervalle; désignons par $\vec{\mathcal{F}}(t)$ l'intégrale $\int_E \vec{f} dm$;

1°. Si quand t tend vers t_0 , $\vec{f}(x, t)$ tend vers $\vec{f}(x, t_0)$ et si $|\vec{f}(x, t)|$ est borné par un nombre indépendant de x et t , alors $\vec{\mathcal{F}}(t)$ tend vers $\vec{\mathcal{F}}(t_0)$.

2°. Si $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$ existe dans tout un intervalle de t , est intégrable quel que soit t , et est bornée par un nombre indépendant de x et t , alors $\vec{\mathcal{F}}(t)$ a une dérivée égale à $\int_E \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} dm$.

Les théorèmes s'appliquent encore pour \vec{m} vectoriel et des intégrales prises scalairement ou vectoriellement.

III. Énoncé des principes mathématiques de la mécanique et de quelques-unes de leurs conséquences.

1. Torseurs. *Torseur réparti.* Considérons une mesure vectorielle $\vec{S}(e)$ définie pour un ensemble A . Partageons A en ensembles e_i mesurables par rapport à \vec{S} , choisissons un point M_i dans chaque e_i , et considérons le système des vecteurs glissants ayant pour origines les points M_i et pour valeurs $\vec{S}(e_i)$. Le moment de ce système par rapport à un point O est

$$\sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{S}(e_i)$$

et tend vers

$$\vec{G}_0(A) = \int_A \vec{OM} \wedge d\vec{S}$$

lorsque la maille du partage tend vers zéro. A tout ensemble A mesurable par rapport à \vec{S} , nous avons

ainsi associé un torseur de vecteur principal $\vec{S}(A)$ et de moment en O égal à $\vec{G}_0(A)$. C'est cette fonction que nous nommerons un *torseur pur réparti*.

La notion coïncide avec celle d'un système de vecteurs glissants dans le cas où \vec{S} est concentrée en un nombre fini de points.

On a évidemment

$$\vec{G}_0(A) = \int_A \vec{OM} \wedge d\vec{S} = \vec{O} \wedge \vec{S}(A) + \vec{G}_0(A).$$

Plus généralement, nous appellerons *torseur réparti* un système constitué par une première mesure vectorielle $\vec{S}(e)$ et une deuxième mesure vectorielle, fonction d'un point O de l'espace et de e , soit $\vec{G}_0(e)$, et variant avec O suivant la loi

$$\vec{G}_0(e) = \vec{G}_0(e) + \vec{O} \wedge \vec{S}(e).$$

La différence

$$\vec{w}(e) = \vec{G}_0(e) - \int_e \vec{OM} \wedge d\vec{S}$$

n'est plus nécessairement nulle, mais ne dépend pas de O comme on le vérifie immédiatement. On voit que tout torseur réparti est la somme de deux autres, l'un qui est *pur* et qui a pour vecteur principal $\vec{S}(e)$ et pour moment $\int_e \vec{OM} \wedge d\vec{S}$, et l'autre dont le vecteur principal est nulle pour tout ensemble e , et dont le moment en O a pour valeur $\vec{w}(e)$ et ne dépend pas de O . Un torseur ayant ces dernières propriétés sera appelé un *couple pur réparti*. On rencontre des exemples de couple pur en magnétisme. Il est à remarquer que le système de deux vecteurs glissants opposés constituant un couple au sens élémentaire du mot n'est pas un couple pur, mais est au contraire un torseur pur réparti.

Un *corps doué de masse* C sera défini par une mesure m non négative définie pour l'ensemble des points de C et pour certaines de ses parties.

Barycentre. \vec{k} étant un vecteur fixe, considérons le torseur pur réparti qui, pour un ensemble e , a pour vecteur principal $\int_e \vec{k} dm = m(e) \vec{k}$. Son moment en O est

$$\int_e \vec{OM} \wedge \vec{k} dm = \left(\int_e \vec{OM} dm \right) \wedge \vec{k}.$$

Si on désigne par G un point tel que

$$(2) \quad m(e) \vec{OG} = \int_e \vec{OM} dm,$$

on voit que ce moment est $\overrightarrow{OG} \wedge km(e)$, donc égal à celui d'un vecteur unique d'origine G et égal à $km(e)$.

Le point G défini par (2) est indépendant de O comme on le vérifie immédiatement. C'est par définition le *barycentre* du corps e .

C'est aussi la limite des barycentres des systèmes de points obtenus en partageant e en ensembles partiels, en concentrant la masse de chacun en l'un de ses points, et en faisant tendre vers zéro la maille du partage.

De même, le *moment d'inertie* d'un corps C doué de masse, par exemple par rapport à une droite, sera l'intégrale $\int_C \delta^2 dm$, où δ représente la distance d'un point du corps à la droite. C'est encore la limite des moments d'inertie d'un système de points, comme pour le barycentre.

2. Cinématique. Un *corps en mouvement* (le système de plusieurs corps solides, par exemple, étant considéré comme un unique corps déformable) sera défini au moyen d'un ensemble K , appelé *image fixe du corps*, et d'une fonction $M(P, t)$ définie quand P est un point de l'image fixe, et quand t , qui désigne le temps, appartient à un certain intervalle.

Pour chaque valeur de t , $M(P, t)$ établit en général une correspondance biunivoque entre K et un ensemble C_t d'un espace euclidien E qui est le *corps considéré à l'instant t* .

Nous pouvons rapporter le mouvement du corps à un repère quelconque R en mouvement par rapport à l'espace E .

La vitesse et l'accélération du point M du corps relatives au repère R sont alors les dérivées

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial t}, \quad \vec{\Gamma} = \frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial t^2}$$

prises relativement à R . Nous admettrons que ces dérivées existent et satisfont à des conditions de continuité suffisantes pour pouvoir effectuer les dérivations sous le signe \int que nous rencontrerons.

Supposons que le corps en mouvement soit doué de masse. A chaque instant, nous avons une mesure m_i définie pour C_t et pour certaines de ses parties. Un ensemble c_t mesurable à un instant t par rapport à m_t reste mesurable et conserve la même masse $m_t(c_t)$ à tout instant. Un tel ensemble sera un «*corps partiel*». Il suffit de se donner une mesure μ dans l'image fixe K telle que $m_t(c_t) = \mu(k)$, en désignant par k l'image fixe de c_t .

Il y a parfois lieu d'admettre que la correspondance entre k et C_t n'est plus biunivoque, deux points matériels pouvant occuper la même position au même

instant: par exemple, si on étudie le mouvement d'un point matériel sur une surface elle-même matérielle; la coïncidence physique n'existe pas, mais pour schématiser simplement le système, il faut admettre la coïncidence mathématique. Chaque fois qu'une telle circonstance entraînerait une difficulté, par exemple pour les intégrales que nous allons considérer, il suffirait de revenir à l'image fixe.

Voici une propriété que nous utiliserons constamment: soit $\vec{f}(P, t)$ une fonction dont la dérivée $\frac{\partial \vec{f}}{\partial t}$ existe, est bornée en P et t , et est intégrable sur K par rapport à μ . La fonction

$$\vec{I}(t) = \int_K \vec{f}(P, t) d\mu$$

admet une dérivée par rapport à t égale à $\int_K \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} d\mu$.

Si la correspondance entre K et C_t est biunivoque, on peut écrire cette égalité sous la forme

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \vec{f} dm_i = \int_{C_t} \frac{\partial \vec{f}}{\partial t} dm_i,$$

bien que C_t et m_t dépendent de t .

3. Dynamique. La *quantité de mouvement* du corps est le torseur réparti qui a pour vecteur principal (en omettant les indices t)

$$\vec{Q}(c) = \int_c \vec{V} dm = \int_K \vec{V} d\mu;$$

son moment résultant en un point O , aussi appelé moment cinétique, est

$$\vec{\sigma}_0(c) = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{Q} = \int_c \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V} dm.$$

La *quantité d'accélération* est le torseur pur réparti qui a pour vecteur principal

$$\vec{R}(c) = \int_c \vec{\Gamma} dm;$$

son moment résultant en O est

$$\int_c \overrightarrow{OM} \wedge dR.$$

Repère galiléen et force répartie. Principe fondamental.

Considérons d'une part un repère particulier dit «galiléen» et d'autre part un certain nombre de torseurs répartis, définis pour les ensembles mesurables par rapport à la masse, et dépendant du temps; chacun d'entre eux constituera, par définition, une «*force absolue répartie appliquée au corps*» (ou un «*dynâme*»

suivant le terme employé par M. Brelot). Pour un nombre fini de points, une «force répartie» se réduit à des vecteurs appliqués en chaque point. Le principe fondamental de la dynamique s'énonce ainsi:

Le torseur réparti somme des forces absolues appliquées au corps est égal à la quantité d'accélération, évaluée dans le repère galiléen.

La somme des forces absolues est donc un torseur pur; chacune d'elles renferme peut-être un couple pur, mais l'égalité des moments des deux torseurs se traduit par le fait que la somme de ces couples est nulle.

Si on désigne par $\vec{A}_k(c)$ les vecteurs principaux des différentes forces ($k=1, 2, \dots, q$), et par $\vec{\lambda}_k(c)$ les moments des couples purs correspondants, le principe s'écrit

$$\sum \vec{A}_k(c) = \int \vec{\Gamma} dm, \quad \sum \vec{\lambda}_k(c) = 0.$$

Remarquons que tout repère R en translation rectiligne et uniforme par rapport au précédent vérifiera encore le principe; nous le nommerons encore *galiléen*.

Pour un repère quelconque R_1 , on aurait

$$\vec{\Gamma}_1 = \vec{\Gamma} - \vec{\Gamma}_e - \vec{\Gamma}_c,$$

$\vec{\Gamma}_e$ et $\vec{\Gamma}_c$ étant les accélérations d'entraînement et complémentaire du point M , correspondant au passage de R à R_1 . Si on nomme «forces d'inertie complémentaire et d'entraînement» les torseurs répartis purs qui ont pour vecteurs principaux

$$\int \vec{\Gamma}_e dm, \quad \int \vec{\Gamma}_c dm,$$

le principe peut s'énoncer:

La somme des forces absolues et des forces d'inertie d'entraînement et complémentaire correspondant au passage d'un repère galiléen à un repère R_1 est égale à la quantité d'accélération évaluée dans le repère R_1 (on peut appeler cette dernière somme «force totale relative au repère R_1 appliquée au corps», généralisant l'expression adoptée par Painlevé dans le cas d'un seul point).

Forces intérieures et extérieures. Parmi les forces absolues appliquées au corps, les unes sont appelées «intérieures» et satisfont à la condition de prendre une valeur nulle pour le corps tout entier C , c'est-à-dire d'avoir un vecteur principal et un moment nul pour C)⁽¹⁾. Les autres forces seront appelées «exté-

rieures», y compris les forces d'inertie d'entraînement et complémentaire voulues si le repère n'est pas galiléen.

Si nous désignons par $\vec{S}_e(c)$ et $\vec{w}_e(c)$ le vecteur principal et le moment du couple pur de la somme des forces extérieures, et par $\vec{S}_i(c)$ et $\vec{w}_i(c)$ les mêmes éléments relatifs à la somme des forces intérieures, nous avons, par définition,

$$\vec{S}_i(C) = 0, \quad \vec{w}_i(C) + \int_C \vec{OM} \wedge \vec{dS}_i = 0.$$

Mais comme $\vec{w}_e(c) + \vec{w}_i(c) = 0$ quel que soit c , on en déduit

$$\vec{w}_e(C) = \int_C \vec{OM} \wedge \vec{dS}_e.$$

4. Théorèmes ne faisant intervenir que les forces extérieures. Désignons par $\vec{S}(c)$ le vecteur principal de toutes les forces. L'égalité $\vec{S}(C) = \int_C \vec{\Gamma} dm$ s'écrit, puisque $\vec{S}(C) = \vec{S}_e(C)$,

$$\vec{S}_e(C) = \int_C \frac{d\vec{V}}{dt} dm = \frac{d}{dt} \int_C \vec{V} dm = \frac{d\vec{Q}(C)}{dt},$$

le vecteur principal des forces extérieures pour le corps entier est égal à la dérivée du vecteur principal de la quantité de mouvement du corps entier.

De plus, si G désigne le barycentre du corps entier,

$$\begin{aligned} \vec{S}_e(c) &= \frac{d}{dt} \int_C \vec{V} dm = \frac{d}{dt} \int_C \frac{\partial \vec{OM}}{\partial t} dm = \\ &= \frac{d^2}{dt^2} \int_C \vec{OM} dm = m(C) \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2}, \end{aligned}$$

d'où, le barycentre du corps a même mouvement que si toute la masse y était concentrée, et si une force égale au vecteur principal des forces extérieures pour le corps entier lui était appliquée.

Si $\vec{G}_o(c)$ désigne le moment en O de la somme de toutes les forces, et $\vec{G}_{oo}(c)$ celui de la somme des forces extérieures, le principe fondamental donne, en égalant les moments pour le corps entier,

$$\vec{G}_{oo}(C) = \vec{G}_o(C) = \int_C \vec{OM} \wedge \vec{\Gamma} dm.$$

Mais

$$\vec{OM} \wedge \vec{\Gamma} = \vec{OM} \wedge \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} (\vec{OM} \wedge \vec{V}),$$

d'où

$$\vec{G}_{oo}(C) = \frac{d}{dt} \int_C \vec{OM} \wedge \vec{V} dm = \frac{d\vec{\sigma}_0(C)}{dt},$$

(1) Cette condition équivaut à la suivante: si on partage C en deux corps partiels C' et C'' , les valeurs d'un même force répartie prise pour C' et C'' auront des vecteurs principaux et des moments opposés.

en désignant par $\vec{\sigma}_0(C)$ le moment en O du torseur quantité de mouvement du corps, que nous nommerons *moment cinétique*. C'est le théorème du moment cinétique pour un point O fixe dans le repère où l'on s'est placé.

Pour un point mobile A , on aurait :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(C)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_C \vec{AM} \wedge \vec{V} dm = \frac{d}{dt} (\vec{AO} \wedge \int_C \vec{V} dm + \vec{\sigma}_0) = -\vec{V}_A \wedge \vec{Q}(C) + \vec{G}_{Ae}(C),$$

forme commode lorsqu'une force inconnue se réduit à un vecteur passant par A .

5. Théorèmes faisant intervenir les forces intérieures.

Théorème de l'énergie cinétique. Puissance d'un torseur pour un champ de vecteurs. Pour un point, le théorème de l'énergie cinétique revient, comme on sait, à projeter l'égalité fondamentale sur la tangente à la trajectoire, ou encore à multiplier scalairement les deux membres par par la vitesse. Ici, c'est l'égalité $\vec{S}(e) = \int_C \vec{r} dm$, ou plutôt sa forme symbolique $d\vec{S} = \vec{r} dm$, dont nous multiplierons les deux membres par \vec{V} :

$$(1) \quad \int_C \vec{V} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{r} \cdot \vec{V} dm.$$

Le second membre s'écrit

$$\int_C \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot \vec{V} dm = \frac{d}{dt} \int_C \frac{1}{2} \vec{V}^2 dm$$

cette dernière intégrale sera, par définition, l'énergie cinétique du corps :

$$T = \int_C \frac{1}{2} \vec{V}^2 dm.$$

Le premier membre de (1) est de la forme $\int_C \vec{W} \cdot d\vec{S}$.

Si \vec{W} désigne un champ de vecteurs quelconque, cette intégrale sera appelée *puissance du torseur de vecteur principal* $\vec{S}(e)$ pour le champ de vecteurs \vec{W} .

Si \vec{W} est la vitesse \vec{V} du point M , nous dirons que l'intégrale est la *puissance réelle* $\mathcal{P}(C)$ du torseur, et le *travail fourni par le torseur entre deux instants* t_1 et t_2 est, par définition, ⁽¹⁾

$$\int_{t_0}^{t_1} \mathcal{P} dt.$$

L'équation (1) s'écrit alors

$$\mathcal{P} = \frac{dT}{dt}$$

et constitue le théorème de l'énergie cinétique. En intégrant de t_0 à t_1 , on l'obtient sous la forme dite «finie».

Puissance des forces appliquées à un corps solide.

Si $\vec{\omega}$ désigne la rotation instantanée du solide, et O un de ses points, la vitesse d'un point quelconque est donnée par la formule

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \wedge \vec{OM},$$

et la puissance cherchée est

$$\mathcal{P}(C) = \int_C \vec{V} \cdot d\vec{S} = \vec{V}_0 \cdot \int_C d\vec{S} + \int_C (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) \cdot d\vec{S}.$$

Mais la dernière intégrale s'écrit

$$\vec{\omega} \cdot \int_C \vec{OM} \wedge d\vec{S},$$

et l'on a

$$\begin{aligned} \int_C \vec{OM} \wedge d\vec{S} &= \int_C \vec{OM} \wedge d\vec{S}_e + \int_C \vec{OM} \wedge d\vec{S}_i = \\ &= \int_C \vec{OM} \wedge d\vec{S}_e + \vec{w}_e(C) = \vec{G}_{oe}(C). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathcal{P}(C) = \vec{V}_e \cdot \vec{S}_e(C) + \vec{\omega} \cdot \vec{G}_{oe}(C).$$

Dans le cas où la somme des forces extérieures est un torseur pur, il en est de même de la somme des forces intérieures, et la puissance de ces dernières est nulle.

Principe de d'Alembert. Comme pour le théorème de l'énergie cinétique, l'égalité fondamentale $S(e) = \int_C \vec{r} dm$ donne, quel que soit le champ de vecteurs \vec{W} ,

$$(2) \quad \int_C \vec{W} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{W} \cdot \vec{r} dm.$$

Cette opération, effectuée pour un nombre fini de points, revient à projeter pour chaque point l'égalité fondamentale sur une direction convenablement choisie, et à faire une combinaison linéaire des égalités obtenues, en opérant de manière à éliminer les forces inconnues.

Au premier membre de (2) figure la puissance de toutes les forces pour le champ de vecteur \vec{W} . Or,

(1) Cette définition ne répond au sens physique de la puissance et du travail que dans le cas d'un torseur pur. Si le couple pur n'est pas nul, des hypothèses supplémentaires sont nécessaires pour évaluer le travail «physique» du torseur, mais la définition mathématique donnée ici s'applique dans tous les cas.

d'après la nature physique des problèmes que se pose d'ordinaire la dynamique, les forces sont pour la plupart inconnues, mais leur puissance est connue pour certains mouvements du corps. Il est donc nécessaire

de considérer les vecteurs \vec{W} comme les vitesses des points du corps dans un certain mouvement fictif, dit «virtuel», pour lequel cette puissance est connue. Ce mouvement sera défini par une fonction $M(P, \theta)$, θ étant un paramètre qui peut être appelé le «temps virtuel». On dit alors que $\vec{W} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$ constitue un

«champ de vitesses virtuelles». Le mouvement virtuel sera considéré comme rapporté à un repère fixe par rapport à la configuration du corps à l'instant t .

Il est commode de partager les forces en deux catégories, les unes dont la puissance sera connue pour les mouvements virtuels que l'on envisagera et qui seront appelées *forces données* ou *actives*, les autres dont la puissance sera nulle pour ces mêmes mouvements et qu'on nommera *forces de liaison*. Les mouvements virtuels pour lesquels la puissance totale des forces de liaison sera nulle seront dits «utilisables pour le partage des forces considérées».

Si on désigne par $S_D(c)$ la somme géométrique de la somme des forces données, l'équation (2) s'écrit

$$(3) \quad \int_c \vec{W} \cdot \vec{dS}_D = \int_c \vec{W} \cdot \vec{\Gamma} \, dm,$$

et s'énonce ainsi: *pour tout mouvement virtuel utilisable vis-à-vis du partage des forces considérées, la puissance virtuelle des forces données est égale à la puissance virtuelle de la quantité d'accélération réelle*. C'est une forme généralisée du principe de d'Alembert.

Système dépendant d'un nombre fini de paramètres.

Supposons que les configurations du corps à priori possibles à un instant t , et assez voisines d'une configuration donnée puissent être mises en correspondance biunivoque et bicontinue avec les systèmes de valeurs de r paramètres q_1, \dots, q_r appartenant à un domaine de l'espace à r dimensions.

Le point M se présente comme une fonction de P, q_1, \dots, q_r, t :

$$M(P, q_1, \dots, q_r, t),$$

et un mouvement réel du système est défini par la donnée des q_x en fonction du temps.

Nous limitant aux mouvements virtuels obtenus en considérant les q_x comme fonctions du temps virtuel θ , et en laissant t constant, et désignant par $\frac{\delta q_x}{\delta \theta}$

la dérivée de q_x par rapport à θ , nous avons

$$\vec{W} = \sum_x \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_x} \frac{\delta q_x}{\delta \theta}.$$

Le premier membre de l'équation de d'Alembert (3) s'écrit

$$\int_c \vec{W} \cdot \vec{dS}_D = \sum_x Q_x \frac{\delta q_x}{\delta \theta},$$

en désignant par Q_x l'intégrale $\int_c \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_x} \cdot \vec{dS}_D$, qu'on peut appeler «puissance des forces données par rapport à q_x ».

Le deuxième membre s'écrit

$$\int_c \vec{W} \cdot \vec{\Gamma} \, dm = \sum_x L_x \frac{\delta q_x}{\delta \theta},$$

L_x désignant l'intégrale $\int_c \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_x} \cdot \vec{\Gamma} \, dm$, et étant appelé «expression de Lagrange relative au paramètre q_x ».

L'équation de d'Alembert s'écrit alors

$$(4) \quad \sum_x (L_x - Q_x) \delta q_x = 0,$$

les δq_x devant correspondre à un mouvement virtuel utilisable vis-à-vis du partage des forces.

Les mouvements virtuels utilisables sont généralement caractérisés par des relations linéaires (R) entre les δq_x qui permettent d'exprimer $r-p$ d'entre eux en fonction des autres. Il suffit de reporter leurs valeurs dans (4), et d'annuler les coefficients des δq_x restants, pour obtenir p équations du mouvement. On opère souvent un peu autrement en identifiant le premier membre de (4) avec une combinaison linéaire des premiers membres des relations (R), dont les coefficients indéterminés constituent de nouvelles inconnues appelées «multiplicateurs», mais souvent ce procédé ne présente pas d'avantage. Si certaines liaisons sont imposées au système en plus de celles qui résultent de sa description au moyen des r paramètres, q_x , elles se traduisent par des relations (ρ) sous forme finie ou différentielle qu'il faut adjoindre aux p équations obtenues.

On dit que les liaisons sont *parfaites* pour le partage des forces envisagé si tous les mouvements virtuels compatibles avec les liaisons telles quelles sont imposées à l'instant t sont «utilisables», c'est à dire donnent une puissance nulle pour les forces «de liaison». En ce cas les relations (R) ne sont autres que cel-

les qu'on déduit des relations (ρ) en faisant t constant et remplaçant les dq_α par les δq_α .

Si en outre les relations (ρ) n'existent pas, les δq_α sont arbitraires, et on obtient pour le mouvement les r équations dites «de Lagrange»:

$$L_\alpha - Q_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \dots, r)$$

Transformations de Lagrange et d'Appell. Les expressions L_α sont susceptibles de prendre deux formes commodes. On a

$$\vec{V} = \sum_\alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha + \frac{\partial \vec{M}}{\partial t},$$

$$\vec{\Gamma} = \sum_\alpha \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_\alpha} \dot{q}_\alpha'' + \vec{g}(q_1, \dots, q_r, q_1', \dots, q_r', t, P).$$

Les intégrales

$$T = \int \frac{1}{2} \vec{V}^2 dm, \quad F = \int \frac{1}{2} \vec{\Gamma}^2 dm,$$

dont la première est l'énergie cinétique, et dont la deuxième est appelée «*énergie d'accélération*» du corps, peuvent être considérées comme des fonctions des

q'_α, q_α, t pour la première, $q''_\alpha, q'_\alpha, q_\alpha, t$ pour la deuxième.

Adoptant ce point de vue, on peut écrire

$$L_\alpha = \int \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{\Gamma} dm = \int \vec{\Gamma} \cdot \frac{\partial \vec{\Gamma}}{\partial q_\alpha} dm = \frac{\partial F}{\partial q_\alpha},$$

c'est la *transformation d'Appell*.

D'autre part, en remarquant que $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial q_\alpha}$, et en

intervertissant les symboles $\frac{d}{dt}$ et $\frac{\partial}{\partial q_\alpha}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{\Gamma} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{V} \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_\alpha} \right) \cdot \vec{V} = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{V}}{\partial q_\alpha} \cdot \vec{V} \right) - \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \left(\frac{d\vec{M}}{dt} \right) \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q_\alpha} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q_\alpha}, \end{aligned}$$

d'où

$$L_\alpha = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q_\alpha} \right) dm - \int \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{V}^2}{\partial q_\alpha} dm = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial q_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}.$$

C'est la *transformation de Lagrange*.

(Continua)

Integrabilidade R das funções contínuas*

por A. Pereira Gomes

Do mesmo modo que a construção do integral \mathcal{L} (Lebesgue) tem por base a noção de medida \mathcal{L} , o integral \mathcal{R} (Riemann) pode ser construído (segundo um processo perfeitamente análogo) a partir da medida \mathcal{J} (Jordan) ⁽¹⁾.

Um problema que se apresenta naturalmente é o de relacionar a família das funções integráveis com a família das funções contínuas. A êsse respeito, um resultado fundamental é que a integrabilidade duma função equivale à sua mensurabilidade.

No caso do integral \mathcal{L} , a integrabilidade das funções contínuas resulta, pois, imediatamente do facto destas funções serem mensuráveis \mathcal{L} , isto é, de o conjunto $M(\lambda)$, dos pontos x tais que $f(x) \geq \lambda$, ser mensurável \mathcal{L} qualquer que seja λ ; com efeito, sendo a função f contínua, êste conjunto é sempre fechado.

A mensurabilidade \mathcal{J} duma função pode definir-se

por uma condição análoga à da mensurabilidade \mathcal{L} , incidindo sôbre os mesmos conjuntos $M(\lambda)$, na qual a medida \mathcal{J} vem ocupar o lugar da medida \mathcal{L} .

Vamos demonstrar um teorema que permite caracterizar a família das funções mensuráveis \mathcal{J} por uma condição onde intervém a continuidade.

Seja f uma função numérica finita, definida num espaço euclideano I , e seja A um subconjunto de I mensurável \mathcal{J} [NOTA 1]. Diz-se que f é *mensurável em A* , se os conjuntos $M_A(\lambda)$, dos pontos $x \in A$ tais que $f(x) \geq \lambda$, são mensuráveis, com excepção, quando muito, para uma infinidade numerável de valores de λ (isto é, se os conjuntos $M_A(\lambda)$ são *quasi sempre mensuráveis*).

TEOREMA: *Para que f seja mensurável em A é necessário e suficiente que o conjunto dos seus pontos de descontinuidade em A , relativamente a A , seja um conjunto de medida \mathcal{L} nula.*

Condição necessária — Seja D o conjunto de todos os pontos de A onde a função f é descontínua relativamente a A e suponhamos que f é mensurável em A ; mostremos que $m(D) = 0$.

* Inserimos a seguir uma série de Notas, com o fim de facilitar a leitura d'êste artigo aos leitores da G. M. menos familiarizados com as noções e a terminologia aqui usadas.

(1) Veja-se a *Bibliografia*. No seu próximo número, a *Gazeta de Matemática* publicará um artigo do Prof. Ruy Luis Gomes sôbre a construção da noção de integral baseada na medida \mathcal{J} .