assim, estar aptos à leitura dos livros modernos de Pedagogia.

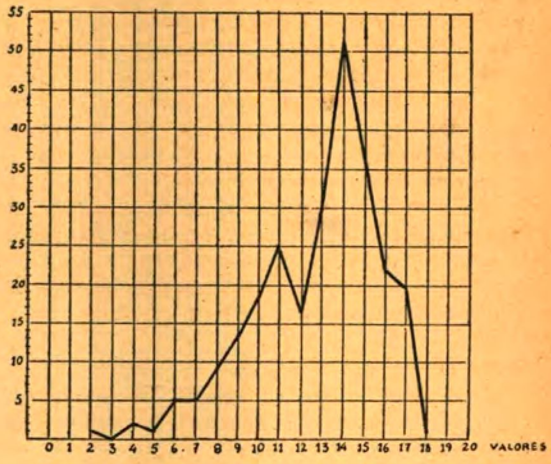
No Ministério da Educação Nacional ou no Instituto de Estatística, deveria existia uma Repartição encarregada dos estudos das questões pedagógicas pelos métodos da Estatística. O progresso do professor, o contrôlo da sua acção, quanto à didáctica, as alterações nos programas, enfim tôda a escola receberia a mais benéfica influência. A escola, quanto ao ensino transformar-se-ia numa casa de vidro. Seria a verdadeira inspecção... sem inspectores, aquela que todo o ensino português de todos os graus tanto precisa.

Embora haja professores dos liceus que se tenham dedicado ao estudo dos métodos da estatística aplicados aos problemas da educação e revelado a mais alta competência —o Anuário do Liceu de Gil Vicente, 1940 — 1941, é uma prova brilhante desta nossa afirmação — os professores dos liceus não podem ser encarregados dêsses serviços. Legitimamente não podem ser sobrecarregados com êsse trabalho.

No próximo ano, os professores incumbidos de organizar os pontos de exame, encontrarão as mesmas dificuldades que nós encontrámos para organizar o ponto de Geometria para o primeiro ciclo e terão, para se orientar, como nós o palpite ou a própria gana.

Enquanto não enveredarmos pelo estudo crítico dos pontos de exame — pelo menos, enquanto houver exames — nêsse sector não podemos ter pedagogia científica. Quando muito teremos pedagogia de palpite e continuaremos a assistir aos bonus de três valores, à anulação de provas, com ou sem substituïção, enfim, um rol já longo e desprestigiante de remendos.

Polígono de freqüência das notas de prova escrita do exame de geometria do 1.º ciclo, em Julho, 1.ª chamada, no Liceu de Passos Manuel



$N = 255$	$Q_1 = 10{,}8$
$M = 12{,}8$	$Q_3 = 14{,}9$
$M_d = 13{,}5$	
$M_0 = 14$	$Q = 2{,}0$

Nota mínima de admissão à prova oral : 7,5.

8.ª questão do ponto

Número de alunos que não tentou resolvê-la	86
Número de alunos que a resolveu mal.	168
Número de alunos que a resolveu bem.	1
$N =$	255

Num próximo número publicaremos o artigo referente ao ponto de Julho de 1946 (Liceu de Passos Manuel).

ANTOLOGIA

ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE ALGUNAS TEORIAS MATEMÁTICAS

por ***L. A. Santaló***

Cálculo de variaciones

El Cálculo de Variaciones hace su aparición en la Historia de la Matemática con dos problemas : el de la superficie de revolución de mínima resistencia de Newton (1686) y el de la braquistocrona de Johann Bernoulli (1696).

El primero de estos problemas consiste en lo siguiente [1]: «Determinar la curva plana que une dos pontos A y B y que al girar alrededor de un eje de su plano que no la corte, engendre la superficie de revolución que al moverse según la dirección del eje encuentre mínima resistencia». Newton supone que la resistencia, para cada elemento de superficie, es proporcional al cuadrado de la proyección de la velocidad sobre la normal al mismo.

No hay duda de que este problema tiene un origen eminentemente práctico y es de gran utilidad tanto para la construcción de navíos, como en balística, como, más modernamente en la construcción de dirigibles o aviones. El Cálculo de Variaciones, parece,

[1] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London 1686, libro II, sección VII, proposición 34, escolio.

por tanto, originado a partir de un problema presentado por la técnica.

Sin embargo se da el caso notable de que el verdadero problema que más ha influído en el desarrollo del Cálculo de Variaciones y que constituye su verdadero origen, puesto que para él se idearon los métodos característicos de dicho cálculo, no es el problema anterior, sino otro mucho más alejado de cualquier posible aplicatión práctica, pero de enunciado y resultado mucho más atrayente y curioso. Es el problema de la «braquistocrona» de Johann Bernoulli, el cual lo propuso por primera vez en el *Acta Eruditorum* de Leipzig en Junio de 1696. El problema dice: «Dados dos puntos A y B en un mismo plano vertical, determinar la trayectoria AMB descrita por un punto M que partiendo de A y bajo la acción de su propio peso, llega a B en un tiempo mínimo».

J. Bernoulli propone este problema a los matemáticos de su tiempo, añadiendo que dará la solución del mismo al terminar el año en curso si nadie lo hace antes. No obstante, en enero de 1697, vuelve a publicar en Gröningen un «Aviso» dirigido a «todos los matemáticos del mundo» en el cual expone que ante el ruego de Leibnitz y para dar tiempo a que el problema pueda ser conocido en Francia e Italia y nadie pueda quejarse de lo perentorio del plazo, extiende el mismo hasta las próximas fiestas de Pascua. En este «Aviso» repite J. Bernoulli el enunciado del problema y añade estos interesantes párrafos: «Quien logre resolverlo ganará el premio que hemos establecido para el solucionista. Naturalmente éste no consiste en oro ni plata, pues esto atrae únicamente a las almas pequeñas y venales de las cuales no esperamos nada loable ni útil para la Ciencia. Por el contrario, puesto que la Virtud es por sí misma la más hermosa recompensa y la Fama un poderoso aguijón, ofrecemos como premio, como corresp nde a los hombres nobles, honor, alabanza y aplauso, para lo cual la sagacidad de este gran Apolo, nosotros, públicamente y en privado, por escrito y de palabra, elogiaremos, ensalzaremos y festejaremos».

De un problema planteado en tales términos es evidente que no era de esperar provecho utilitario alguno. La Fama, que Bernoulli prometía a los demás, era el único fin que lo había movido a él a plantearse y resolver el problema.

Más tarde, al irse desarrollando y evolucionando el Cálculo de Variaciones, gracias principalmente a las obras de Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi y Weierstrass, fueron encontrándose muchas aplicaciones del mismo: aplicaciones sobre todo a la mecánica y a la física (principios de mínima acción), pero también a a otras ramas al parecer mucho más apartadas, como la estadística y la economía política [1].

Topología

Otra rama importantísima de la matemática moderna es la Topología o Análisis situs. Ella estudia, como es bien sabido, las propriedades de las figuras que se conservan por deformaciones continuas de las mismas.

La Topología se suele clasificar en *topología combinatoria* que se refiere a las redes o reticulados de líneas y *topología continua,* que se refiere a las superficies o, más generalmente, a las variedades de cualquier número de dimensiones.

Las dos ramas tienen actualmente importantes aplicaciones. La topologia de las redes se relaciona y tiene aplicación en el estudio de la distribución de la corriente en redes eléctricas, estudio iniciado por el físico alemán Kirchhoff (1824-1887). La topología continua, siguiendo a Poincaré, es cada día más utilizada en la resolución de problemas de mecánica, siendo casi el único medio de atacar problemas referentes a la estabilidad o periodicidad de las soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales. Dice, por ejemplo, Hadamard [2]: «Conociendo, como conocemos, la importancia del Análisis situs y que cada paso del punto de vista local al general, es decir, cada proceso de integración, debe estar profundamente influenciado por él, debemos concluir que los progresos en esta rama de la ciencia deben devenir, un día u otro, esenciales al Cálculo Integral, y que de la misma manera como hemos estado obligados a introducir órdenes de conexión en el estudio de la ecuación diferencial general de primer orden, debemos esperar ser incapaces de tratar correctamente los sistemas o las ecuaciones diferenciales de orden superior sin un conocimiento, tan profundo como sea posible, del Análisis situs en mas de dos dimensiones».

Sin embargo, todas las aplicaciones de la Topología han aparecido cuando ella había alcanzado ya un cierto desarrollo. El primer problema de topología continua es uno puramente geométrico: el expresado por la fórmula $C-A+V=2$ que relaciona los números de caras, aristas y vértices de un poliedro que se pueda obtener por deformación continua de uma esfera; fórmula de la geometría elemental que expresa el llamado comunmente teorema de Euler, dado por este autor en 1752, pero que ya era conocido anteriormente por Descartes.

Los primeros problemas de topología combinatoria están todavía más alejados de cualquier aplicación práctica. Se considera como primero de ellos el lla-

(1) Ver por ejemplo, L. Tonelli, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni,* Vol. I, Bologna 1921, pág. 11.

(2) *The Later Scientific Work of Henri Poincaré,* The Rice Institute Pamphlet, Vol XX. N.º 1, 933, pág. 137.

mado problema de «los puentes de Koenigsberg», presentado por Euler, junto con su generalizáción a resultados generales sobre redes de líneas, en una memoria de la Academia de San Petersburgo en 1735. Se trata de lo siguiente: en aquella época había en Koenigsberg siete puentes sobre el río Pregel, dispuestos como indica la figura 1. Euler se pregunta, como curiosidad recreativa en sus paseos cotidianos, si será posible recorrer los 7 puentes en un solo paseo, sin pasar más de una vez por cada uno. Evidentemente el resultado será el mismo de cualquier manera que se modifique el tamaño y forma de la figura, con tal de no alterar la disposición general. Euler supone la deformación que reduce las islas y la tierra firme a puntos, quedando el esquema de la figura 2, donde

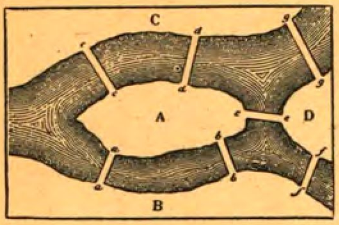


Fig. 1

los trazos representan los puentes que hay que recorrer. El problema se reduce a ver si la red de esta última figura se puede recorrer de un solo trazo, sin repetir ningún lado. La solución es fácil: es imposible. En efecto, exceptuando el vértice de partida y el de llegada, los demás deben contener un número par de lados, puesto que se debe poder llegar por uno y salir por otro todavía no recorrido; por tanto no puede haber más de dos vértices a los cuales concurran un número impar de lados. Como en la red de la figura 2, hay 4 vértices en estas condiciones, se deduce que no podrá recorrerse en las condiciones dichas.

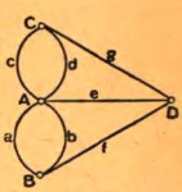


Fig. 2

¿Quién hubiera podido adivinar que de este problema, al parecer simple pasatiempo de matemático andariego, había de derivar, con el tiempo, el frondoso y útil árbol que es hoy la Topología?

Extractos de uma conferência publicada em *Revista de Ingenieria*. Uruguay — Año XXXIX — n.º 450 — 1945.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

ALGUNS NÚMEROS SÔBRE A ESCOLA POLITÉCNICA FEDERAL DE ZURIQUE

Compilação de ***A. Sá da Costa*** (bolseiro em Zurique do I. A. C.)

A *Gazeta de Matemática* publicou em números anteriores [1] alguns artigos relativos à Escola Politécnica Federal (E. P. F.) com documentação suficiente para que qualquer leitor tenha uma idéia precisa do que ela é como escola e, portanto, como centro de trabalho científico, em especial nos domínios da matemática e da física. O que se segue pretende ser apenas um complemento estatístico daqueles artigos.

Os números e quási todos os comentários que vão expôr-se foram extraídos das publicações:

(1) *Gazeta de Matemática* n.º 12: Sôbre o ensino da matemática na Suiça, I — Escolas superiores de Zürich, A Escola Politécnica Federal. Compilação de Maria do Pilar Ribeiro.

Gazeta de Matemática n.º 13: Sôbre o ensino da matemática na Suiça, II. Compilação de Maria do Pilar Ribeiro.

Gazeta de Matemática n.º 14: Sôbre o ensino da matemática na Suiça, III. Compilação de Maria Pilar Ribeiro.

Gazeta de matemática n.º 16: Sôbre o ensino da física em Zurique, por A. Gibert.

Gazeta de Matemática n.º 19: Conselhos aos estudantes da Secção de Matemática e Física da Escola Politécnica Federal de Zurique, tradução de Maria do Pilar Ribeiro.

Gazeta de Matemática n.º 24: Notícia sôbre o ensino da matemática em Zurique, por Maria do Pilar Ribeiro.

Gazeta de Matemática n.º 26: Sôbre a índole do ensino da matemática em Zurique, por Hugo Ribeiro.

1. *Statistiches Jahrbuch der Schweiz,* 1944, Basel, 1946.
2. *Eidgenössische Technische Hochschule,* Programm und Stundenplan für das Sommersemester 1946.
3. *Atlantis,* Sonderheft ETH, Band XVII, Heft 9, September 1945, Zürich.
4. *École Polytechnique Fédérale* — Son enseignement et ses instituts. Orell Füssli. Zürich, 1930.
5. *Festschrift zur Feier des fünfzigjährigen Bestehens des Eidgenössischen Polytechnikums,* I Band. Huber & Co. Frauenfeld 1905.

*

A E. P. F. foi fundada em 1854. Actualmente compreende 11 secções especiais:

1. Arquitectura
2. Engenharia civil
3. *a)* Engenharia de máquinas
   b) Electrotecnia
4. Química
5. Farmácia
6. Silvicultura
7. Agronomia
8. Engenharia hidráulica e geográfico-cadastral