y suponiendo que la masa del punto mòvil sea la unidad.

Si com F y F' representamos los centrosomas, las distancias ρ y ρ_1 entre el punto genèrico de la membrana celular — cuyas coordenadas cartesianas rectangulares son x y y, tomando como eje X la recta FF' y como eje Y la perpendicular en su punto medio — y los dos centrosomas F y F' serian respectivamente:

$$\rho^2=(x-a)^2+y^2\,; \quad \rho_1^2=(x+a)^2+y^2\,.$$

Ese punto estará sometido a las fuerzas k_1/ρ y k_1/ρ_1 dirigidas hacia los centrosomas.

Las proyecciones de estas fuerzas sobre los ejes serán:

$$-k_1\,(x-a)/\rho^2 \qquad -k_1\,y/\rho^2 \qquad -k_1\,(x+a)/\rho_1^2 \qquad -k_1\,y/\rho_1^2\,.$$

Las ecuaciones del movimiento son, por tanto:

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\tau\left(\frac{a-x}{\rho^2}-\frac{a+x}{\rho^2}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\tau y\left(\frac{1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho_1^2}\right).$$

E immediatamente se obtiene:

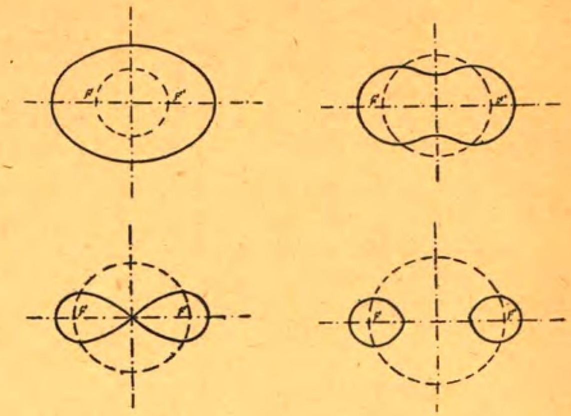
$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt}=-\tau\left[\frac{(x-a)\,dx/dt+y\,dy/dt}{\rho^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{(x+a)\,dx/dt+y\,dy/dt}{\rho_1^2}\right]=-\frac{\tau}{\rho}\frac{d\rho}{dt}-\frac{\tau}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}.$$

Por lo tanto, la integral de las fuerzas vivas dá:

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=-2\tau L\rho\rho_1+C\,.$$

Pero si queremos que la velocidad permanezca constante ello exige que la trayectoria buscada sea $\rho\rho_1=k^2$ es decir que la figura de equilibrio de la membrana será, como antes se dijo, la curva cuya ecuacion en coordenadas bipolares es: $\rho\rho_1=k^2$ que representa como es sabido una *cassínica*.

Cuando la célula crece, aumenta la distancia FF' entre ambos centrosomas y las diversas formas de



dichas curvas son las indicadas en las figuras adjuntas.

Puede observarse que la funcion de variable compleja $w=z^2$ transforma las cassínicas

$$|\,z-a\,|\cdot|\,z+a\,|=k^2 \quad (a\;y\;k\ \text{reales})$$

en circunferências $|\,w-a^2\,|=k^2$, del plano w.

Por tanto, las transformadas de las lineas de fuerza seian las rectas que pasan por el centro de esas circunferencias ya que la representacion es conforme.

Ello equivale a decir que las lineas de fuerza, en el interior de la célula, son hipérbolas equiláteras que pasan por los centrosomas F, F'.

El estudio de la membrana en un espacio de tres dimenciones, por medio de las ecuaciones:

$$\begin{cases} x=x\,(u\,,v\,,t) \\ y=y\,(u\,,v\,,t) \\ z=z\,(u\,,v\,,t) \end{cases}$$

en donde u y v son parámetros y t es el tiempo, y llevando a cabo un más detenido análisis de las fuerzas que al principio aludimos será objeto de otro ensayo.

Madrid, Julio 1946.

PEDAGOGIA

OS PONTOS DE EXAME DE GEOMETRIA DO 1.º CICLO NA ÉPOCA DE JULHO

I — JULHO DE 1945 (LICEUS DE LISBOA)

por ***A. Nicodemos Pereira*** e ***J. Xavier de Brito***

Por intermédio da reitoria do Liceu de Passos Manuel, recebemos ordem de serviço para organizar o ponto para a prova escrita do exame de geometria do 1.º ciclo, em Julho, subordinado às seguintes normas:

«Geometria. 6 questões de geometria plana e 2 de geometria no espaço».

Em vista de indicações tão vagas resolvemos, antes de organizar o ponto, especificar normas para a sua constituição, tendo ficado assentes, depois de uma troca de impressões a êsse respeito, as seguintes:

a) As questões propostas deveriam dirigir-se, umas, aos conhecimentos dos alunos e, outras, ao uso dêsses conhecimentos, em raciocínios simples.

b) Tôdas as questões, à excepção de uma, deveriam ser familiares aos alunos.

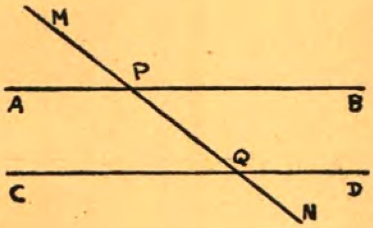
c) As primeiras questões apresentadas seriam as mais fáceis, para que os alunos, resolvendo-as, ganhassem confiança em si próprios.

d) A última questão do ponto, a oitava, seria destinada aos alunos bem dotados.

Considerámos satisfazendo a estas normas o ponto que a seguir transcrevemos e saído na 1.ª chamada dos exames de Julho, nos liceus de Lisboa:

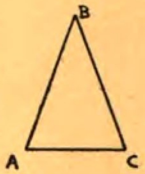
I — O lado de um hexágono regular mede 4 cm. Calcule, referido a metros, o perímetro do hexágono.

II — Condições da figura: As rectas AB e CD são paralelas e a recta MN intercepta-as respectivamente em P e Q. *a)* Se o ângulo $A\hat{P}M$ medir 40°,

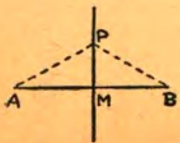


quanto mede o ângulo $C\hat{Q}N$? *b)* Dê exemplo de dois ângulos que sejam: 1.º) Verticalmente opostos; 2.º) Correspondentes.

III — No triângulo ABC é: $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\hat{B} = 30^{\circ}$. Calcule a medida de cada um dos outros ângulos internos do triângulo.

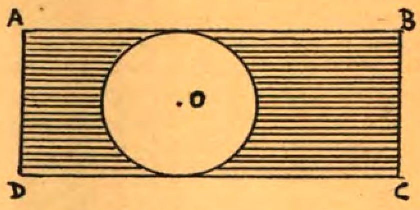


IV — Construa o triângulo ABC cujos lados medem respectivamente 3 cm., 4 cm. e 5,5 cm. Construa a figura simétrica dêste triângulo, tomando o vértice A, como centro de simetria.



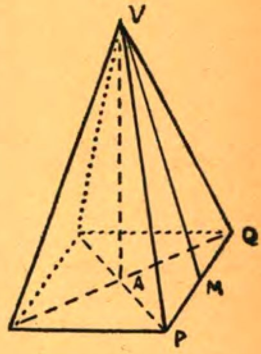
V — Condições da figura: M é o meio do segmento de recta $\overline{AB}$, PM é perpendicular a $\overline{AB}$. Por que razão podemos afirmar que $\overline{AP} = \overline{PB}$?

VI — Condições da figura: $ABCD$ é um rectângulo; $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são tangentes à circunferência de



centro O. $\overline{AB} = 5$ cm $\overline{AD} = 2$ cm. Calcule a área da parte tracejada da figura referida a dm^2.

VII — A figura representa uma pirâmide quadrangular regular. M é o meio da aresta PQ da base da pirâmide. V é o vértice da pirâmide, e A é o ponto de encontro das diagonais da sua base. Como se chamam relativamente à pirâmide representada, os segmentos seguintes: 1.º $\overline{VA}$, 2.º $\overline{VM}$ e 3.º $\overline{VP}$.



VIII — A razão dos raios de duas esferas é 2/3. O volume da esfera de raio menor é 8 cm³. Calcule o volume da outra esfera.

Alguns professores, infelizmente poucos, transmitiram-nos os seus juizos críticos sôbre o ponto, logo que se tornou conhecido e que foram, em resumo:

1.º) Ponto fracamente selectivo.

2.º) Deficientemente graduado.

3.º) Dados numéricos preparados para evitar cálculos.

4.º) A última questão do ponto, a oitava, está fora do programa; excede a mentalidade dos alunos do 1.º ciclo; tem carácter mais aritmético do que geométrico.

Não temos, nem é fácil de obter, a estatística do comportamento dos alunos que prestaram prova nos vários liceus de Lisboa.

Devemos à amabilidade do Dr. Betânio de Almeida, que classificou as provas no liceu Passos Manuel, a estatística do comportamento dos alunos que prestaram prova nêste liceu, a qual inserimos no fim dêste artigo.

Seria arrojado estabelecer quaisquer conclusões de ordem geral baseadas nesta estatística ($N=255$) quando o ponto serviu todos os alunos dos liceus de Lisboa (mais de dois milhares).

Por isso, as referências que a seguir faremos às observações críticas de alguns professores, dizem respeito exclusivamente ao comportamento, perante o ponto, dos alunos que prestaram prova no liceu de Passos Manuel e supondo que êsses alunos tiveram preparação normal.

A distorsão para a esquerda, média (12,8) inferior à mediana (13,5) e o valor do 1.º quartil (10,8) — a nota mínima de admissão à prova oral foi 7,5 — revelam a pouca selectividade do ponto, o que confirma plenamente a 1.ª observação crítica feita por aqueles professores, quanto aos alunos que prestaram prova no Liceu de Passos Manuel, repetimos.

O intervalo semi-quartil (2,0) e a mediana (13,5), desigualmente afastada da *região de normalidade,* do 1.º quartil (10,8) e do 3.º quartil (14,9) mostram a irregular graduação do ponto, o que confirma a 2.ª observação crítica.

A 3.ª observação é também inteiramente justa.

Quando tivemos conhecimento do Dec. 34.646 de 4-6-45, determinando que as provas escritas dos exames liceais tivessem a duração de 1 hora, substituímos todos os dados numéricos do ponto de modo a reduzir ao mínimo os cálculos. Mais tarde, com a circular n.º 1.161 de 8-6-45 foi concedida a tolerância de meia hora, mas resolvemos não alterar outra vez os dados, esperando a última resolução das estâncias superiores sôbre a duração da prova... Entretanto o ponto foi dactilografado.

Se julgamos inteiramente judiciosas as três primeiras observações críticas que foram feitas ao ponto, já o mesmo não acontece à 4.ª.

Ora vejamos.

A resolução da oitava questão do ponto exige o conhecimento do volume da esfera expresso no raio e o do conceito de razão de duas grandezas. Êstes dois conceitos pertencem taxativamente ao programa do 1.º ciclo.

Além disso, o conceito de razão de duas grandezas, embora de carácter aritmético, é fundamental e da maior aplicação em geometria e é, em geral, pelo recurso à aplicação dêste conceito à geometria que os alunos adquirem o bom entendimento dêle. Acresce ainda que a questão se destinava aos alunos bem dotados.

É certo que a estatística do comportamento dos alunos, no Liceu de Passos Manuel, perante esta oitava questão do ponto — em 255 provas, 1 resposta exacta (de um aluno externo) — vem justificar a observação de que ela excede a mentalidade dos alunos do 1.º ciclo; ou, então, vem mostrar que aqueles alunos não adquiriram, com perfeito entendimento, o conceito de razão de duas grandezas.

Esta última hipótese, faze-mo-la com o à vontade de ter sido professor de duas das turmas dos alunos internos, desde o 1.º ano, um dos autores do ponto.

Seria útil o conhecimento da estatística do comportamento dos alunos que prestaram prova nos outros liceus de Lisboa e, mais útil ainda, o estudo estatístico completo do ponto, que apenas foi esboçado.

Verificadas as deficiências do ponto de exame que organizámos, há que corrigi-las, alterando as normas que serviram de base à sua organização e aumentando a dificuldade das questões propostas, a fim de dar ao ponto do próximo exame a justa eficiência.

Quais as normas a estabelecer para a organização do ponto do próximo exame de geometria do 1.º ciclo?

Qual o grau de dificuldade a introduzir em cada uma das questões propostas?

As respostas a estas preguntas, em boa verdade, só poderão ser dadas depois de ouvidos muitos professores, quer do ensino oficial, quer particular e depois do estudo estatístico completo dos pontos, que serviram em exames anteriores.

Os pontos, depois de realizados os exames, as normas que presidiram à sua organização e os respectivos estudos estatísticos, deveriam ser tornados públicos para que todos aqueles que se interessam pelas questões de ensino, pudessem colaborar, emitindo os seus juizos críticos.

A Pedagogia tem por base a experiência do professor e a alheia e experimentar sem a estatística dos resultados equivale a navegar sem rumo.

Actualmente não é admissível que um professor — de qualquer grau de ensino ou grupo — não esteja familiarizado com termos como êstes: mediana, quartil, distribuição normal, coeficiente de variação de Pearson, etc.

É inadmissível que os dados seguintes, por exemplo, extraidos do Anuário do Liceu Gil Vicente, 1940-41:

«Correlação da frequência x, e exame y.

Ano 3.º. Disciplina: Português. Professor Q.

$N=41$ $r=0{,}401$ $E.$ $P.=0{,}088$.

Média da frequência: 10,2

Média do exame: 14,7»

sejam para um professor — de qualquer grau de ensino, repetimos — mera abstração, sem nenhum significado.

Não queremos dizer que todos os professores devam saber aplicar os métodos da estatística aos problemas da Pedagogia, mas todos devem saber ler e interpretar as características dessas estatísticas e assim, estar aptos à leitura dos livros modernos de Pedagogia.

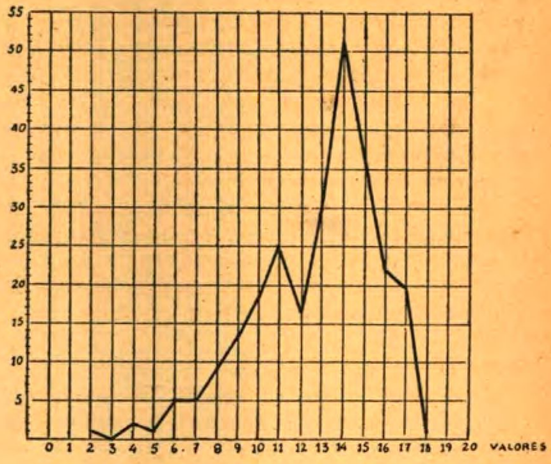
No Ministério da Educação Nacional ou no Instituto de Estatística, deveria existia uma Repartição encarregada dos estudos das questões pedagógicas pelos métodos da Estatística. O progresso do professor, o contrôlo da sua acção, quanto à didáctica, as alterações nos programas, enfim tôda a escola receberia a mais benéfica influência. A escola, quanto ao ensino transformar-se-ia numa casa de vidro. Seria a verdadeira inspecção... sem inspectores, aquela que todo o ensino português de todos os graus tanto precisa.

Embora haja professores dos liceus que se tenham dedicado ao estudo dos métodos da estatística aplicados aos problemas da educação e revelado a mais alta competência —o Anuário do Liceu de Gil Vicente, 1940 — 1941, é uma prova brilhante desta nossa afirmação — os professores dos liceus não podem ser encarregados dêsses serviços. Legitimamente não podem ser sobrecarregados com êsse trabalho.

No próximo ano, os professores incumbidos de organizar os pontos de exame, encontrarão as mesmas dificuldades que nós encontrámos para organizar o ponto de Geometria para o primeiro ciclo e terão, para se orientar, como nós o palpite ou a própria gana.

Enquanto não enveredarmos pelo estudo crítico dos pontos de exame — pelo menos, enquanto houver exames — nêsse sector não podemos ter pedagogia científica. Quando muito teremos pedagogia de palpite e continuaremos a assistir aos bonus de três valores, à anulação de provas, com ou sem substituïção, enfim, um rol já longo e desprestigiante de remendos.

Polígono de freqüência das notas de prova escrita do exame de geometria do 1.º ciclo, em Julho, 1.ª chamada, no Liceu de Passos Manuel



$N = 255$	$Q_1 = 10{,}8$
$M = 12{,}8$	$Q_3 = 14{,}9$
$M_d = 13{,}5$	
$M_0 = 14$	$Q = 2{,}0$

Nota mínima de admissão à prova oral: 7,5.

8.ª questão do ponto

Número de alunos que não tentou resolvê-la	86
Número de alunos que a resolveu mal.	168
Número de alunos que a resolveu bem.	1
N =	255

Num próximo número publicaremos o artigo referente ao ponto de Julho de 1946 (Liceu de Passos Manuel).

ANTOLOGIA

ORIGEN Y EVOLUCIÓN DE ALGUNAS TEORIAS MATEMÁTICAS

por ***L. A. Santaló***

Cálculo de variaciones

El Cálculo de Variaciones hace su aparición en la Historia de la Matemática con dos problemas: el de la superficie de revolución de mínima resistencia de Newton (1686) y el de la braquistocrona de Johann Bernoulli (1696).

El primero de estos problemas consiste en lo siguiente [1]: «Determinar la curva plana que une dos pontos A y B y que al girar alrededor de un eje de su plano que no la corte, engendre la superficie de revolución que al moverse según la dirección del eje encuentre mínima resistencia». Newton supone que la resistencia, para cada elemento de superficie, es proporcional al cuadrado de la proyección de la velocidad sobre la normal al mismo.

No hay duda de que este problema tiene un origen eminentemente práctico y es de gran utilidad tanto para la construcción de navíos, como en balística, como, más modernamente en la construcción de dirigibles o aviones. El Cálculo de Variaciones, parece,

[1] I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London 1686, libro II, sección VII, proposición 34, escolio.