ASSOCIAÇÃO ESPANHOLA PARA O PROGRESSO DAS CIÊNCIAS

19.º CONGRESSO — SAN SEBASTIAN

De 7 a 13 de Abril do corrente ano realizar-se-á em San Sebastian um congresso da Associação Espanhola para o Progresso das Ciências.

Anuncia-se entre outros discursos inaugurais o do Prof. Tomás R. Bachiller, da Faculdade de Ciências da Universidade de Madrid, intitulado «*Estado actual de la teoria de la dimensión en los espácios topológicos*».

Pela Sociedade Portuguesa de Matemática serão apresentadas quatro comunicações dos seus associados Profs. Dr. Ruy Luís Gomes, Dr. Almeida Costa, Dr. Hugo B. Ribeiro, e Dr. A. Pereira Gomes.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Em Janeiro de 1947 reuniu a Assembleia Geral da S. P. M. que aprovou o relatório da Direcção. Foram eleitos na mesma sessão para o biénio 1947-1948:

Assembleia Geral: *Presidente,* Dr. Manuel Peres; *Secretários,* Dr.ª D. Maria Henriqueta Trigo de Sousa Zanatti e Dr. Augusto Macedo Sá da Costa.

Direcção: *Presidente,* Prof. Manuel Zaluar Nunes; *Vice-Presidente,* Dr. Jaime Xavier de Brito; *Secretário-Geral,* Dr. Hugo Baptista Ribeiro; *Tesoureiro,* Dr. Orlando Morbey Rodrigues; *1.º Secretário,* Dr. D. Maria do Pilar Ribeiro; *2.º Secretário,* Dr. José Cardoso Morgado Jr.; *Vogal:* Dr. Alfredo Pereira Gomes.

Delegados à Associação Portuguesa para o progresso das Ciências: Profs. Drs. Ruy Luís Gomes e Bento J. Caraça.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

MÉTODOS GEOMÉTRICOS — SÔBRE A INVERSÃO

por ***Raul Rato***

Do programa actual de Matemática, 7.º ano dos liceus, faz parte o estudo dos métodos geométricos para a resolução de problemas, fazendo-se referência especial aos métodos de transformação. Mas, nem nos livros aprovados ou não oficialmente, nem nos pontos propostos em exame, se faz qualquer referência à *transformação por inversão.* Ora é este um dos métodos geométricos mais fecundos e que fornece, por vezes, soluções muito elegantes para problemas aparentemente complicados.

Propômo-nos, neste estudo, dar uma breve notícia deste método, quanto baste para o aplicar à resolução do seguinte problema:

«Achar a intersecção de uma recta com uma cónica, sem traçar a curva».

A transformação por inversão

«Duas figuras dizem-se *inversas*, quando entre os seus pontos existe uma correspondência biunívoca, de modo tal que as rectas que unem dois pontos homólogos concorrem num ponto, o *polo da inversão,* e os produtos das distâncias de dois pontos homologos ao polo é constante, a *potência da inversão.*

Há uma certa analogia entre a homotetia e a inversão; qualquer ponto tem um e só um ponto inverso, num dado sistema, e, porque há reciprocidade, os pontos dizem-se *conjugados inversos;* mas onde na homotetia se diz *razão de homotetia,* um quociente, diz-se na inversão *potência da inversão,* um produto. Outra diferença se impõe desde logo, a homotetia é transitiva, a inversão *não o é;* duas figuras homotéticas de uma terceira são homotéticas entre si, duas figuras inversas de uma terceira não são *inversas entre si*, são homotéticas.

Na homotetia, qualquer figura é homotética de si mesma, coincidindo todos os pontos homologos, isto é, sendo cada ponto homotético de si mesmo. Na inversão há figuras que são inversas de si mesmas, sem que todos os pontos sejam inversos de si mesmos. Por exemplo, numa recta que passa pelo *polo* os pontos conjugados inversos existem na recta, mas são, em regra, distintos.

Numa circunferência traçada com centro no *polo* e raio igual à raiz quadrada da *potência,* todos os pontos são inversos de si mesmos e por isso se lhe chama ⊙ *de auto-inversão.*

A figura inversa de uma circunferência é, em regra, outra circunferência; mas se a ⊙ directa passa pelo *polo*, a transformada é uma recta que não passa por ele, e reciprocamente. Se a $\odot$ directa é *ortogonal* com a $\odot$ de auto-inversão, isto é, se as tangentes nos pontos comuns são perpendiculares, a $\odot$ transformada coincide com a $\odot$ directa, mas *sómente* os pontos comuns à $\odot$ de auto-inversão, são inversos de si mesmos; os outros conjugados inversos são distintos:

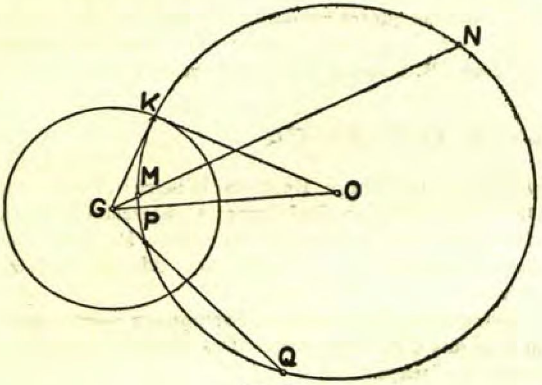

Fig. 1

a circunferência diz-se *inversa de si mesma.* Esta propriedade notável verifica-se claramente na fig. 1.

Sendo G o *polo* e $\overline{GK}^2$ a *potência*, será a $\odot[G, \overline{GK}]$ a $\odot$ de auto-inversão; sendo a $\odot[O, \overline{OK}]$ ortogonal com $[G]$, será $O\hat{K}G = 90°$ e serão M e N, P e Q conjugados inversos por ser $\overline{GK}^2 = \overline{GM}.\overline{GN} = \overline{GP}.\overline{GQ}$.

Com estes elementos já podemos resolver o nosso problema.

Uma definição geral das cónicas

Define-se habitualmente a *parábola* como «lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes de um ponto, o *foco* e de uma recta, a *directriz*».

Esta definição pode generalizar-se à hiperbole e à elipse. Chama-se director, nestas cónicas, o circulo descrito de um foco, como centro, e de raio igual ao *eixo transverso*, na hiperbole, ao *eixo maior* na elipse. A recta directriz da parábola pode assemelhar-se-lhes, considerando-a como pertencendo a uma circunferência descrita do foco impróprio como centro. Toma-se, nesta definição, o círculo pela circunferência; esta *incorrecção* é habitual, para se não estabelecer confusão com as directrizes da elipse e da hipérbole, que são linhas rectas.

Consideremos um dos focos e o $\odot$ director descrito do outro; qualquer ponto da curva fica a igual distância do foco e do $\odot$ director e é indiferente, dada a simetria das curvas em relação aos eixos, tomar um ou outro foco, contanto que se tome o $\odot$ director descrito do outro.

Com efeito, na elipse de focos F e F_1, e eixo maior $\overline{AB}$, temos para qualquer ponto $M: \overline{MF} + \overline{MF_1} = \overline{AB}$, ou $\overline{MF} = \overline{AB} - \overline{MF_1}$, e na hiperbole do eixo transverso AB, semelhantemente $\overline{MF_1} - \overline{MF} = \overline{AB}$, ou $\overline{MF} = \overline{MF_1} - \overline{AB}$.

Contando $\overline{AB} - \overline{MF_1}$ no sentido de F_1 para M e $\overline{MF_1} - \overline{AB}$ no sentido de M para F_1 aquelas diferenças representam a distância de M ao $\odot$ director $[F_1]$ da elipse, no 1.º caso, da hiperbole, no 2.º caso, distância que é em ambos os casos igual a MF, distância do ponto ao foco.

Podemos, pois, definir qualquer das três cónicas como «lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes do foco e do $\odot$ director».

Será a partir desta definição que resolvemos o problema proposto.

Resolução do probleme

Segundo a difinição dada, a intersecção de uma recta com uma cónica será o ponto da recta que fique equidistante de um foco e do $\odot$ director com centro no outro foco, ou seja centro de uma circunferência que passe polo foco e seja tangente ao $\odot$ director.

Parábola

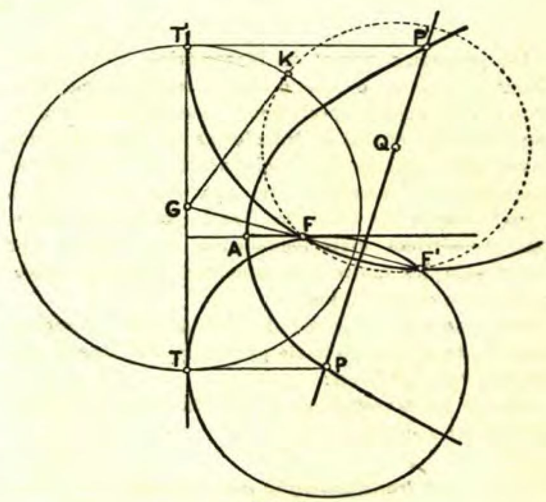

Fig. 2

Sejam, fig. 2, a parábola definida pelo vértice A e pelo foco F, fig. 3, a hipérbole definida pelos vértices A e B e pelos focos F e F_1 e, fig. 4, a elipse definida também pelos vértices A e B e pelos focos F e F_1; e seja em qualquer das figuras a recta r (PP'), cuja intersecção com a curva se pretende determinar. Tomemos, nas três figuras, o foco F e a directriz TT', fig. 2, ou ⊙ director $[F_1]$, fig. 3 ou fig. 4. Para aplicarmos a transformação por inversão, procuremos o *polo* e a *potência* de modo que a figura formada pela recta dada, pela directriz ou ⊙ director e ainda pela circunferência solução $[P]$ seja inversa de si mesma; nesta figura os pontos inversos de si mesmos serão os pontos de tangência, a partir dos quais se encontram com toda a facilidade os pontos de encontro da recta com a curva, que são os centros das circunferências-solução. Para que a figura referida seja inversa de si mesma, é necessário que o sejam separadamente as rectas e circunferências que a formam.

Como P —.— PP', a ⊙ $[P]$ deve passar por F', simétrico de F_1 em relação a PP', tomando o polo G sobre FF' e adoptando a potência $\overline{GF}\times\overline{GF'}$, a ⊙ $[P]$ será inversa de si mesma, o que dá uma primeira condição para a determinação de G.

Na parábola, fig. 2, a directriz, como é uma linha recta, tem que passar pelo polo e assim teremos $G \equiv FF'_1 . TT'$. Para a hipérbole ou para a elipse, fig. 3 ou fig. 4, uma ⊙ $[Q]$ de raio qnalquer que passe por F e F' será inversa de si mesma, no mesmo sistema; esta ⊙ auxiliar corta o director ⊙ $[F_1]$ nos

Hipérbole

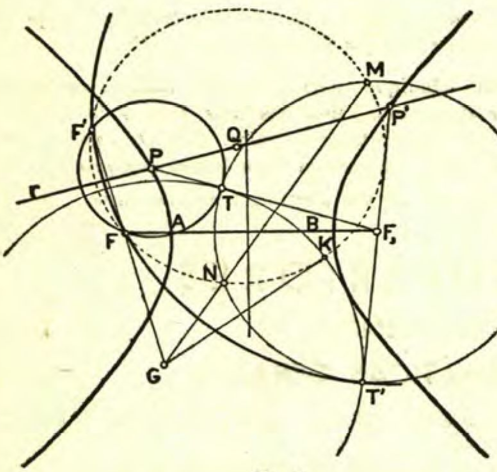

Fig. 3

pontos M e N que são conjugados inversos e teremos $G \equiv FF' . MN$. A raiz quadrada da potência, $\sqrt{\overline{GF}.\overline{GF'}}$, obtem-se tirando a tangente $\overline{GK}$ à ⊙ $[Q]$, que na fig. 2 se traça especialmente para esse fim.

Obtivemos assim todos os elementos para a construção. Com G e $\overline{GK}$, traça-se o ⊙ de auto-inversão, que determina sobre a directriz ou ⊙ director os pontos de tangência T e T'; levantando em T e T' perpendiculares a TT', fig. 2, ou unindo T e T' com F_1, fig. 3 e fig. 4, o que equivale ao mesmo, obtêm-se sobre a recta dada os pontos P e P', soluções do problema proposto.

Elipse

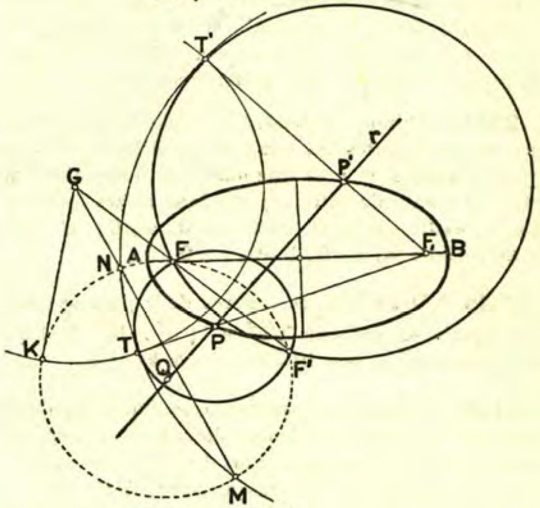

Fig. 4

Nas fig. 2, 3 e 4 estão traçadas as curvas e as circunferências $[P]$ e $[P']$, que não são necessárias para a construção, mas servem para melhor inteligência do que fica exposto.

Discussão

Na posição relativa dos dados, de que resultam as fig. 2, 3 e 4, ha duas soluções; assim sucederá sempre que F' ficar dentro do círculo director, considerando no caso da fig. 2 o centro impróprio do lado do foco.

Se F' cair sobre a directriz, ou ⊙ director, teremos $F' \equiv G$, e a ⊙ de auto-inversão reduzida a um ponto: a recta dada é *tangente* à curva; tire-se a perpendicular à recta directriz ou use-se o ponto $G \equiv F'$ com F_1 e teremos sobre a recta o *ponto de contacto* da tangente à curva. Se F' cair fora do círculo director, o problema não tem solução, a recta é exterior à curva.

Conclusão

O problema que resolvemos mostra-nos algumas das possibilidades do método de transformação por inversão.

Outros problemas do mesmo género e de outros diferentes poderiamos estudar, porque a inversão pode aplicar-se nas mais variadas questões da Geometria.

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

F. C. L. — Exame de Aptidão — **Outubro de 1946**

2343 — Determine as condições a que deve satisfazer o parâmetro m para que a inequação $m+1-3m^2-2mx-x^2<0$ seja verificada por todo e qualquer valor real atribuido a x. R: *A inequação proposta é equivalente à seguinte* $x^2+2mx+3m^2-m-1>0$, *e terá por isso que ser* $2m^2-m-1>0$, *quer dizer*, $m<-1/2$ *ou* $m>1$, visto serem $-1/2$ *e* 1 *os zeros do primeiro membro desta última desigualdade.*

2344 — Indique as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação $ax^2+bx+c=0$ para que ela tenha: 1) uma raiz nula; 2) duas raízes nulas; 3) uma raiz infinita; 4) duas raízes infinitas. R: 1) $c=0$, $a\neq0$; 2) $c=0$, $b=0$, $a\neq0$; 3) $a=0$, $b\neq0$, $c\neq0$; 4) $a=0$, $b=0$, $c\neq0$.

2345 — Determine os valores de k para os quais são iguais os radicais $\sqrt[k]{a^3}$ e $\sqrt[27]{a^k}$. R: *Terá que ser* $3/k=k/27$ *ou seja* $k^2=81$, *donde* $k=\pm9$.

2346 — Dados um cateto e a área dum triângulo rectângulo, deduza, em função dos dados, as fórmulas que exprimem os comprimentos dos lados desconhecidos do triângulo e os seus ângulos. R: *Seja* A *a área e* b *o cateto dados. O outro cateto* c *é dado pela expressão* $c=2A:b$ *e a hipotenura* a *por* $a=\sqrt{(4A^2+b^4):b^2}$. *A tangente do ângulo* B *oposto ao cateto* b *é dado por* $\operatorname{tg} B=b^2/2A$ *e* $\widehat{C}=90^\circ-B$.

2347 — Verifique a identidade $\sec(a+b)\cdot\sec(a-b)=1:(\cos^2 a-\cos^2 b)$. R: *A identidade proposta é equivalente a* $\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=\cos^2 a-\cos^2 b$. *Como* $\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)=\cos^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 a\operatorname{sen}^2 b=\cos^2 a(1-\operatorname{sen}^2 b)-\operatorname{sen}^2 a(1-\cos^2 b)=\cos^2 a-\cos^2 b$, *fica verificada a identidade proposta.*

2348 — Calcule sem recorrer às táboas $\operatorname{cosec} 16\pi/3$. R: *Como é* $16\pi/3=5\pi+\pi/3$ *e* $\operatorname{sen}(5\pi+\pi/3)=\operatorname{sen}(\pi+\pi/3)=-\operatorname{sen}\pi/3=-\sqrt{3}/2$, *será*

$$\operatorname{cosec} 16\pi/3=-2\sqrt{3}/3$$

2349 — Deduza o valor da razão entre a área duma esfera e a àrea total dum cilindro equilatero nela inscrito. R: *O cilindro equilátero inscrito na esfera tem por medida da geratriz, que é igual ao diâmetro da base,* $R\sqrt{2}$, *se for* R *a medida de raio da esfera; então a área total do cilindro é dada por*

$$\pi R\sqrt{2}\,(R\sqrt{2}+R\sqrt{2}:2)=3\pi R^2:$$

A razão pedida será por isso $4\pi R^2:(3\pi R_2:2)=8:3$.

2350 — Considere uma circunferência e nela um diâmetro MN, e uma corda MP; e seja Q a extremidade da corda que se dirige segundo a bissectriz do ângulo NMP. Prove que a tangente à circunferência no ponto Q é perpendicular à recta a que pertence a corda MP. R: *O ângulo* $N\widehat{P}M$ *é recto pois está inscrito num arco de* 180°. *Sendo* Q *o ponto médio do arco* $\widehat{NP}$ *a tangente em* Q *é paralela à corda* NP, *pois ambas são perpendiculares ao raio* OQ, *se for* O *o centro da circunferência. Assim a tangente é perpendicular à recta a que pertence a corda* MP.

2351 — Indique quais os números inteiros que pode somar simultâneamente aos dois termos da fracção 15/35 sem lhe alterar o valor. R: *Os inteiros da forma* 3 m *e* 7 m *onde* m *é um inteiro qualquer.*

Solu,ões dos n.os 2343 a 2351 de J. da Silva Paulo.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Álgebra Superior — **1.° exame de frequência — 1945-46.**

2352 — Calcular $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\binom{n+1}{n}\log n}$.

R: *O teorema de Cauchy* $\lim\sqrt[n]{\varphi(n)}=\lim\varphi(n+1)/\varphi(n)$ $(n\to\infty)$, *conduz ao valor* $L=1$.

2353 — Determinar o intervalo de convergência da série de termo geral $u_n=\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^n$. R: *Trata-se duma série geométrica. É convergente para* $|x/(x-1)|<1$, *ou seja* $x<1/2$.

2354 — Determine os limites laterais de $y=\operatorname{arctg} 1/I(x)$ para $x=1$.

R: $y(1+0)=\pi/4$ *e* $y(1-0)=\pi/2$.

2355 — Calcular as derivadas das funções

a) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x(3k^2-x^2)}{k(k^2-3x^2)}$; *b)* $y=\log\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$.

R: *a)* $y'=3k/(k^2+x^2)$; *b)* $y'=\sec x/2$.

Soluções dos n.os 2350 a 2351 de L. Mendonça de Albuquerque.