

entre elas é apenas aparente; a sua síntese não só dá um todo fechado, mas a possibilidade da passagem duma à outra. Em conjunto, há propriamente, só uma questão do ponto de vista, o de determinar se uma propriedade fica melhor num ou no outro lado; uma visão artificial do todo, permite, casualmente, que um sobressaia mais que o outro.

Sem querer é-se, aqui, levado a pensar num fenómeno semelhante na física: a luz e também a matéria apresentam-se muitas vezes quer com a natureza das ondas quer com a dos corpúsculos (partículas); a teoria moderna dos quanta conseguiu encontrar uma formulação que reúne as duas formas de apresentação, melhor, que assenta sobre as duas (para isso renuncia-se contudo à intuição). Que se observe uma vez o comportamento duma, outra vez da outra, isso só a experiência determinará. É portanto uma visão artificial que prefere, e manifesta, duma vez a natureza das ondas, doutra vez a dos corpúsculos. A analogia com o nosso dualismo espaço-número falhou; talvez não seja mais do que uma simples analogia.

Seria fácil apresentar casos semelhante em exemplos da vida diária, onde segundo o ponto de vista, se pode considerar um facto sob dois aspectos completamente diferentes — mas então quasi sempre as coisas não se passam tão simplesmente como na matemática.

Que espaço e número estejam tão intimamente ligados nas suas propriedades elementares, como tenho procurado mostrar rapidamente é, decerto, extraordinário. Há, na matemática e nas ciências da natureza, ainda muitos outros exemplos desta espécie em que duas coisas aparentemente diferentes se apresentam, contra o que se espera, como de igual valor, permutáveis entre si. E isto não parece ser por acaso. Talvez possa então formular: Para nos aproximarmos do nosso mundo construimos diferentes figuras, esquemas — diferentes na origem, com diferentes meios e para diferentes fins — e quando, apesar disto, resultam iguais, ou de igual

valor, então é evidente que o construtor é culpado de ter utilizado o mesmo espírito matemático para tudo; e é ele mais o responsável do que o exemplo especial em que se apoia. As relações têm validade mais geral do que os objectos nos quais elas se manifestam.

Certamente existem e sempre se mantêm os problemas singulares, especiais, concretos, do domínio do trabalho próprio do matemático; e ele consagrará toda a sua energia na execução desse trabalho. Mas esforçar-se-à, depois disto, por resolvê-los com o mínimo de cálculo automático e com o máximo de idéias claras. E, quando assim, procura a generalidade e não teme a máxima abstracção, não se afasta da realidade; pelo contrário, encontra sempre, outra vez, relações e leis que são comuns a todas as nossas maneiras de pensar e encarar o mundo e das quais, evidentemente não pode fugir.

LITERATURA

Correspondendo ao caracter da conferência, a nossa exposição é um apontamento geral, que contém também formulações de teoremas e resultados. Para as formulações, fundamentações completas, assim como para a exposição de pormenores, enviamos o leitor para as obras seguintes:

- 1 D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig und Berlin 1913)
- 2 H. SEIFERT und W. THRELFALL: *Lehrbuch der Topologie* (Leipzig und Berlin 1935).
- 3 H. WEYL, *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig und Berlin 1913)
- 4 P. ALEXANDROFF und HOPF, *Topologie I* (Berlin 1935), em especial Parte II.
- 5 L. PONTRYAGIN, *Topological groups* (Princeton 1939) Cap. V.
- 6 A. WEIL, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (Paris 1940), Cap. VI.

(tradução de Maria Pilar Ribeiro)

P E D A G O G I A

SOBRE A CORRELAÇÃO ENTRE A MATEMÁTICA E A FÍSICA NO ENSINO LICEAL

por Rómulo de Carvalho

É evidente que entre as várias partes do mesmo programa geral do ensino deve existir a necessária harmonia para que todas se equilibrem ao mesmo nível quando se referem à mesma fase do desenvolvimento mental dos alunos. Cada informação dada em cada disciplina deve ter o seu momento pedagógico apropriado e, postas ao lado umas das outras, as várias disciplinas do mesmo ano devem seguir paralelamente na sequência regular desses momentos. Sucede ainda

que algumas disciplinas se penetram profundamente e, para estas, com muito maior razão, é necessário atender ao paralelismo dos seus programas parciais. Dá-se isto claramente entre a Matemática e as outras Ciências que a ela recorrem constantemente como acontece com a Física. Seria inconcebível, por exemplo, que um aluno estudasse a lei da queda dos graves, que tivesse de traduzi-la em termos matemáticos e, entretanto, só no ano seguinte estudasse, na disci-

plina de Matemática, a potenciação. Seria inconcebível visto que a referida lei da Física obriga a conhecer o que é o quadrado dum número.

Apesar de tão instantânea necessidade de paralelismo entre o ensino das duas disciplinas verifica-se que nem sempre se atende a ela o que traz prejuízo grave para a eficácia do ensino. O exemplo que poderemos dar não é o anterior que apenas serviu de preâmbulo ao assunto. Podemos, porém, dar este: aparecem, na Física do 4.º ano dos liceus, equações do 2.º grau cuja resolução apenas se estuda no ano seguinte, na Matemática do 5.º ano. Passa-se o caso quando se trata da lei de Kepler que relaciona os valores das intensidades luminosas de duas fontes de luz com as distâncias a que elas devem estar do mesmo alvo para que o iluminem igualmente. O programa indica noções sumárias sobre Fotometria e nesse aspecto sumário está, necessariamente, aquela lei. A sua expressão matemática inclui os quadrados das referidas distâncias de modo que, se numa aplicação prática, se dá ao estudante o valor da distância D entre as duas fontes de intensidades luminosas conhecidas i_1 e i_2 (no intervalo das quais se supõe o alvo colocado) e se se pretende determinar um dos valores de d (distâncias das fontes ao alvo), por exemplo d_1 , logo se cai na expressão $i_1/i_2 = d_1^2/(D-d_1)^2$ cuja resolução obriga ao conhecimento das equações do 2.º grau.

Bem sabemos que o professor de Física do 4.º ano pode, dentro da sua aula, fugir à dificuldade e nunca apresentar um caso prático onde surja aquela proporção. Isto é possível mas não é regular. Na aula concedem-se os elementos informativos que o aluno assimila e desenvolve para a generalização dos seus conceitos. O aluno que estuda há-de, e deve, praticar em casa, por iniciativa própria, sobre o que o professor lhe ensinou e o problema surge-lhe então inevitavelmente. A prática tem-nos mostrado que é assim.

Não é esta a única ocasião em que nos aparece o desequilíbrio entre a Física e a Matemática. No mesmo 4.º ano estuda-se a reflexão da luz nos espelhos esféricos. Aí já o programa não indica que o estudo deva ser sumário embora seja, evidentemente, elementar. Estudam-se as imagens formadas em todas as posições possíveis do objecto e, muito naturalmente, sem procurar artificios nem alçapões, surge este caso simples. É conhecida a distância focal f dum espelho esférico côncavo e pretende-se saber a que distância p dele se deve colocar um objecto linear para que a sua imagem real se vá formar entre o espelho e o objecto a uma certa distância d deste, a qual também é conhecida. O problema resolve-se com a equação $1/p + 1/(p-d) = 1/f$ cuja resolução em ordem a p exige o conhecimento da resolução das equações do 2.º grau.

Não é razoável que, em casos tais, digamos aos alunos que esperem pelo ano seguinte para saberem a resposta do problema pois este, olhado de dentro da Física, é exactissimamente do mesmo grau de dificuldade de que qualquer dos outros problemas que se referem a espelhos côncavos e os mesmos estudantes sabem resolver. Os livros que por aí correm trazem, inocentemente, problemas que vão terminar na resolução de equações de 2.º grau e que estão dentro do programa do 4.º ano de Física. O que não estão é dentro do programa do 4.º ano de Matemática. Dir-se-á que esses livros não são oficiais mas o que nos interessa é a realidade e essa diz-nos que é por muitos desses livros que os alunos estudam.

A lição dos factos é, pois, esta: o programa de Matemática não pode ser gizado num compartimento e o da Física em outro à parte. Nem aqui nem em qualquer grau de ensino, evidentemente. (Lembrámo-nos, agora, a propósito, da tristíssima situação em que se encontram os estudantes de Medicina. Para estes a Matemática acabou com o 7.º ano do Liceu. Acabou para sempre. Inexoravelmente banida. Apesar disso o estudante entra na Química dos preparatórios e logo nas primeiras lições assiste, estupefacto, ao aparecimento de derivadas e de integrais, noções totalmente desconhecidas, que não lhe foram, nem são, nem serão ensinadas e das quais nem sequer conhece a finalidade. Convençamo-nos de que o médico, na sua vida profissional, também necessita da Matemática desde que pretenda caminhar ao lado do saber contemporâneo da sua especialidade. Para prova basta citar a importância do cálculo estatístico e das probabilidades na Biologia o qual, de ano para ano, toma mais incremento).

Vejamos outro aspecto que também nos parece digno de atenção. É sabido que as equações (referímo-nos particularmente a este caso) são estudadas na Matemática e aplicadas frequentemente na Física. Na Matemática, triste é dizer, são as equações ensinadas, geralmente, fora da sua aplicação real; na Física são empregadas concretamente. Parece-nos que o ensino é feito ao invés do que deveria fazer-se: aplicar-se primeiro em casos simples, reais, e generalizá-lo depois. Podemos pessoalmente afirmar que, muitos alunos, ao verem pela primeira vez a equação que traduz uma lei física, e da qual deverão concluir o valor desconhecido duma grandeza, ou hesitam ou declaram não saber resolvê-la. Mas, se o professor lhes disser que a resolvam «como se fôsse uma equação daquelas que aprenderam na Matemática» o aluno resolve sem dificuldade. Afirmamos que é assim porque temos anotado muitos exemplos desta espécie.

Outro defeito do ensino das equações (nos primeiros anos em que elas se estudam), defeito que também

só nós, professores de Física, podemos observar, é o de se escolherem sempre, para exercícios de aplicação, equações que tenham raízes inteiras. Compreendemos que haja interesse em escolhê-las deste modo durante os primeiros tempos do ensino pois isso facilita a verificação do resultado a que os alunos chegaram. Mas que se faça isso, e só isso, sistematicamente (nos primeiros anos, repetimos), é que não achamos admissível. As suas consequências são graves. Durante o 4.º, 5.º e 6.º anos dos liceus, o aluno (caso muitíssimo geral) só tem conhecimento das raízes inteiras da equação. Vai para a Física, aplica-lhe a sua Matemática e, se o resultado final tem que ser obtido por meio dum cociente, o aluno põe-se à espera de qualquer destas duas consequências: ou o resto desse cociente é zero e então tudo lhe corre às mil maravilhas (o problema está certo, com certeza); ou o resto é diferente de zero e então... o problema está errado.

É ver o desprevenido estudante olhar desconfiado para o professor e balbuciar: «mas isto não dá resto zero!» ou então «isto não dá contas exactas!» Esta é a verdade que a prática nos tem ensinado: os alunos só «acreditam» que um problema de Física está certo quando, na hipótese de obterem o resultado final por meio dum cociente, o resto deste seja zero. Tudo aliás se conjuga para que o erro se mantenha e prolongue: o ensino da Matemática, os problemas que se escolhem, nas aplicações, para que nunca se fuja a resultado tão agradável, e até os pontos de exame, de Física e de Química, onde os valores numéricos que se atribuirão às grandezas, são propositadamente escolhidos, a título de «facilitar as contas», de modo que tudo se resolva sem o menor esforço. Isto é deveras seducativo porque afasta completamente a escola da vida. Parece-nos que o assunto merece ser ponderado.

ANTOLOGIA

SCIENCE ET TECHNIQUE

par Paul Langevin

Extracto da última conferência do grande cientista Paul Langevin, recentemente falecido, intitulada *La Pensée et l'Action* e editada pela «Union Française Universitaire». A «Gazeta de Matemática» presta, assim, à memória do grande físico, uma simples homenagem.

Notre science est issue, pour une grande part, des besoins de l'action. Cela est bien connu pour les mathématiques, depuis l'arithmétique et la géométrie jusqu'au calcul différentiel et intégral. Les progrès de l'astronomie sont liés soit au problème de la mesure du temps, soit au désir de prévoir les positions relatives des astres ou l'avenir des hommes, soit, dans l'antiquité comme à l'époque de la Renaissance, aux besoins croissants de la navigation. L'optique, telle qu'elle a été développée surtout par Galilée, Kepler, Descartes, Newton, a suivi une marche parallèle à celle de l'astronomie dont elle s'est efforcée de satisfaire le besoin toujours plus grand de précision dans l'observation du ciel.

A peu près à la même époque, le développement de la mécanique, qui a commencé également avec Galilée, Descartes, Huyghens et qui s'est épanoui avec Newton est étroitement lié aux problèmes posés par la balistique et par l'astronomie. Le calcul différentiel et intégral a été créé au dix-septième siècle pour répondre aux questions posées par les méca-

niens, les balisticiens et les architectes. Au dix-neuvième siècle, la thermodynamique et la connaissance précise des lois qui régissent les gaz et les vapeurs se sont développées lorsque les applications de la machine à vapeur ont commencé à prendre une importance essentielle. Et depuis que, sous cette influence, notre grand Sadi-Carnot a énoncé pour la première fois les principes essentiels de la thermodynamique, cette science domine une grande partie de la physique et de la chimie pures ou appliquées. Ainsi, dans tous ces exemples, les besoins de l'action ont déterminé l'activité de la pensée.

En sens inverse, les besoins de la pensée une fois manifestés, le souci de comprendre, ce que j'ai appelé la «sainte curiosité» ne laissent pas à l'esprit de repos tant qu'il n'a pas contruit une interprétation des phénomènes naturels, soit pour calmer l'inquiétude ancestrale, soit, de plus en plus nettement, dans un but de satisfaction intellectuelle. Les résultats de cette recherche, la science pure qu'elle permet de créer, se sont montrés d'une surprenante fécondité au point de