2433 — Considere a recta E perpendicular ao plano Π. Seja O a intersecção de E com Π.

Demonstre que o momento de inércia em relação ao ponto O dum sistema material qualquer é igual à soma dos seus momentos quadráticos em relação a E e a Π.

2434 — A equação do movimento do ponto material P, com a massa de 20 t, em relação ao sistema galileano $O e_1 e_2 e_3$, é $P=O+5t^2 e_1-1/2 . e_2+4t\, e_3$, onde a unidade de comprimento é o metro e a de tempo o segundo.

Determine, em kWh, a energia cinética do ponto material no instante $t=5$ seg. R: $T \approx 6{,}99$ kWh.

2435 — Sôbre a face Oxy do triedro fixo $Oxyz \equiv \equiv O\mathbf{ijk}$ move-se o plano Π.

São conhecidas a equação do movimento do ponto P de Π, $P=O+X(t)\,\mathbf{i}+Y(t)\,\mathbf{j}$, e a velocidade angular $\omega=\omega(t)$ de Π em relação ao triedro.

Determine a base da rolante. R: *A base tem por equações paramétricas*

$$\begin{cases} \xi = X(t) - \dfrac{Y'(t)}{\omega(t)} \\ \eta = Y(t) + \dfrac{X'(t)}{\omega(t)} \end{cases}.$$

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 2.° Exame de frequência extraordinário — 1-6-1946.

2436 — Os centros das rodas duma engrenagem plana exterior M 20 distam 1050 mm e a razão de transmissão é igual a 2. Calcule os números de dentes das duas rodas. R: $Z_1=70$, $Z_2=35$.

2437 — Considere um sistema de pontos materiais situados sôbre o plano Π. Sejam E_1 e E_2 duas rectas de Π, ortogonais entre si e cruzando-se no ponto O.

Demonstre que o raio de giração do sistema em relação à recta perpendicular a Π, que passa por O, é a hipotenusa do triângulo rectângulo que tem por catetos os raios de giração do sistema em relação a E_1 e a E_2.

2438 — O ponto material P, com 2 kg de massa, submetido ùnicamente à acção das fôrças dum campo conservativo, atravessa a superfície equipotencial de cota nula com a velocidade de 10 m/s.

Calcule a velocidade de P ao atingir a superfície equipotencial de cota igual a 3,673 kgm. R: $V=8$ m/s.

2439 — O sólido S move-se em relação ao triedro tri-rectângulo $O\mathbf{ijk}$. A velocidade de S é o torsor cujas coordenadas vectoriais em relação a O são

$$\vec{\Omega} = \text{sen}\, t^4\, \mathbf{i} + e^t \mathbf{j} + \log(2-e^{-})\, \mathbf{k}$$

e

$$O' = (3-t)\,\mathbf{i} - \cos(\pi+t^3)\,\mathbf{k}.$$

Determine a posição inicial do eixo de Mozzi. R: *A equação vectorial do eixo de Mozzi inicial é* $Q=O+\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, *onde* λ *designa o parâmetro.*

Enunciados e soluções dos n.os 2432 a 2439 de P. de Varennes e Mendonça.

PROBLEMAS

UM PROBLEMA E VÁRIAS SOLUÇÕES

2440 — Sumar la serie

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_1 a_2 a_3 \cdots a_n} \quad \text{siendo} \quad a_{i+1}=a_i^2-2.$$

SOLUCIÓN I

Llamemos S (x) *a la función:*

$$S(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x^2-2)} + \cdots$$

definida por la serie dada supuesta convergente. Se tendrá:

$$x . S(x) = 1 + \frac{1}{x^2-2} + \frac{1}{(x^2-2)[(x^2-2)^2-2]} + \cdots =$$

$= 1 + S(x^2-2)$. *Para resolver la ecuación funcional*

(1) $$x . S(x) = 1 + S(x^2-2),$$

hagamos $S(x^2-2) = z(x) . \overline{S(x)}^2$ *donde* z (x) *es una función desconocida. Resulta asi:* $z(x) . \overline{S(x)}^2 - - x . S(x) + 1 = 0$, *que da:* $S(x) = \dfrac{x \pm \sqrt{x^2-4z(x)}}{2z(x)}$.

Entrando com este valor en la ecuación funcional (1):

$$\frac{x^2 \pm \sqrt{x^4-x^2 4z(x)}}{2z(x)} = 1 + \frac{x^2-2 \pm \sqrt{(x^2-2)^2-4z(x^2-2)}}{2z(x^2-2)}.$$

Sumando y restando estas dos igualdades, se obtiene:

$$\frac{x^2-2z(x)}{z(x)} = \frac{x^2-2}{z(x^2-2)};$$

$$\frac{\sqrt{x^4-4x^2 z(x)}}{z(x)} = \frac{\sqrt{(x^2-2)^2-4z(x^2-2)}}{z(x^2-2)}.$$

Resuelto este sistema se obtienen las soluciones:

$$z(x) = z(x^2-2) = 1, \quad y \quad z(x) = z(x^2-2) = 0.$$

Evidentemente sólo sirve la primeira, puesto que la serie es convergente, luego:

$$S(x) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4}}{2}.$$

Pero quando x *crece indefinidamente, la serie* S (x) *obtenida decrece, luego habremos de tomar el signo —*

y $S(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{2}$.

F. MENÉNDEZ–PIDAL DE NAVASCUES, aspirante a ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros de Caminos.

SOLUCIÓN II

Hagamos $a_1 = 2\operatorname{ch}\psi$ *será:*

$a_2 = a_1^2 - 2 = 4\operatorname{ch}^2\psi - 2 = 2(2\operatorname{ch}^2\psi - 1) = 2\operatorname{ch} 2\psi$ *que es de igual tipo que* a_1, *luego generalizando por inducción, pues si* $a_i = 2\operatorname{ch} 2^{i-1}\psi$, $a_{i+2} = a_i^2 - 2 = 2(2\operatorname{ch}^2 2^{i-1}\psi - 1) = 2\operatorname{ch} 2^i\psi$, *el término general de la serie es pues* $1/u_n$ *siendo* $u_n = 2^n \operatorname{ch}\psi \operatorname{ch} 2\psi \cdots \operatorname{ch} 2^{n-1}\psi$.

Desarrollemos ahora $\operatorname{sh} 2^n\psi$ *de la siguiente manera:*

$$\operatorname{sh} 2^n\psi = 2\operatorname{sh} 2^{n-1}\psi \operatorname{ch} 2^{n-1}\psi = 2^2 \operatorname{ch} 2^{n-1}\psi \operatorname{ch} 2^{n-2}\psi \operatorname{sh} 2^{n-2}\psi = \cdots = 2^n \operatorname{ch} 2^{n-1}\psi \operatorname{ch} 2^{n-2}\psi \operatorname{ch} 2^{n-3}\psi \cdots \operatorname{ch}\psi \operatorname{sh}\psi = u_n \operatorname{sh}\psi$$

luego: $u_n = \dfrac{\operatorname{sh} 2^n\psi}{\operatorname{sh}\psi}$ *y* $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\psi}{\operatorname{sh} 2^n\psi} = \operatorname{sh}\psi \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} 2^n\psi}$

Sea $S_1 = \displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{\operatorname{sh} 2^n\psi} = \sum_1^\infty \frac{\operatorname{ch}^2 2^{n-1}\psi - \operatorname{sh}^2 2^{n-1}\psi}{2\operatorname{sh} 2^{n-1}\psi \operatorname{ch} 2^{n-1}\psi} = \frac{1}{2}\sum (\operatorname{cth} 2^{n-1}\psi - \operatorname{th} 2^{n-1}\psi)$.

Para sumar S_1 *nos apoyamos en la formula:* $\operatorname{cth} 2x = (\operatorname{th} x + \operatorname{cth} x)/2$ *que podemos poner:* $\operatorname{cth} 2x - \operatorname{th} x = \operatorname{cth} x - \operatorname{cth} 2x$.

Escribiendo desarrollada S_1 *y teniendo en cuenta la fórmula anterior, tenemos:*

$$S_1 = \lim_{n\to\infty} [\operatorname{cth}\psi - 1/2 \,.\, (\operatorname{th} 2^{n-1}\psi + \operatorname{cth} 2^{n-1}\psi)] = \operatorname{cth}\psi - 1$$

y $S = \operatorname{sh}\psi(\operatorname{cth}\psi - 1) = \dfrac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}$.

P. ALVAREZ FIDALGO, aspirante a ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros de Caminos.

SOLUCIÓN III

Se va a probar por inducción completa que se verifica la relación

$$\text{(1)} \quad a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-1}a_{n-2} + 2a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3} + \cdots + 2a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 + 2 = a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}\cdots a_2 a_1^2.$$

En efecto:

$$a_3 + 2a_2 + 2 = a_2^2 - 2 + 2a_2 + 2 = a_2(a_2 + 2) = a_2 a_1^2$$

Si se verifica para a_n: (1), *se verifica para* a_{n+1}, *puesto que:*

$$\begin{aligned} a_{n+1} &+ 2a_n + 2a_n a_{n-1} + 2a_n a_{n-1} a_{n-2} + \cdots + 2a_n a_{n-1} \cdots a_2 + 2 = a_n^2 - 2 + 2a_n + \\ &+ 2a_n a_{n-1} + 2a_n a_{n-1} a_{n-2} + \cdots + 2a_n a_{n-1} \cdots a_2 + 2 = a_n(a_n + 2 + 2a_{n-1} + \\ &+ 2a_{n-1}a_{n-2} + \cdots + 2a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2) = \\ &= a_n(a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_1^2). \end{aligned}$$

como queriamos demonstrar. Basandonos en esto, elevamos la serie al cuadrado, agrupando los términos de tal modo que en cada paréntesis intervenga el cuadrado de uno de ellos y los dobles productos en que aparezca el siguiente:

$$S^2 = \left[\left(\frac{1}{a_1}\right)^2 + \frac{2}{a_1^2 a_2}\right] + \left[\left(\frac{1}{a_1 a_2}\right)^2 + \frac{1}{a_1^2 a_2 a_3} + \frac{2}{a_1^2 a_2^2 a_3}\right] + \cdots + \left[\left(\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_{n-1}}\right)^2 + \frac{2}{a_1^2 a_2 \cdots a_n} + \frac{2}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_n} + \cdots + \frac{2}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 a_n}\right] + \cdots$$

Reduciendo cada paréntesis a común denominador:

$$S^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n + 2a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 + 2a_{n-1}\cdots a_3 + \cdots + 2a_{n-1} + 2}{a_1^2 a_2^2 \cdots a_{n-1}^2 a_n}.$$

Los numeradores son (escritos en orden inverso, excepto el primero y último términos): a_1^2; $a_1^2 a_2$; $a_1^2 a_2 a_3$; $\cdots$ $a_1^2 a_2 a_3 \cdots a_{n-1}$ y por tanto:

$$S^2 = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_2 a_3 a_4} + \cdots + \frac{1}{a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n} + \cdots$$

que es precisamente: $a_1 S$, *si se exceptúa el término* $\dfrac{1}{a_1} a_1 = 1$.

Como la serie es convergente, por ser minorante para todo $a_1 \geq 2$ *de la*

$$\sigma = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_1^3} + \cdots + \frac{1}{a_1^n} + \cdots = \frac{1}{a_1 - 1},$$

se podrá escribir: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^2 = \lim\limits_{n\to\infty} a_1 S_n - 1$, *y pasando al limite:* $S^2 = a_1 S - 1$.

De las 2 raices de esta ecuación se desecha la mayor, ya que: $\dfrac{a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4}}{2} \gtrless 1 > \sigma > S$, *resultando como suma de la serie:* $S = \dfrac{a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4}}{2}$.

FELIPE DE MACHIN VILLARREAL, aspirante a ingreso en la Escuela Especial de Ingenieros de Caminos.