III — História das Matemáticas

— História e importância do problema da resolução algébrica das equações. Evaristo Galois.

IV — Física e Química

— Calor e temperatura. Termómetro.

Prova Oral de Matemáticas Superiores

Ponto n.º 1

— Representação de função por meio de série;

— Resolução numérica de equações.

— Modos de definir função de uma variável (séries, produtos infinitos, integrais, etc.).

— Princípios de Geometria Analítica (problemas métricos).

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência ordinário — Junho de 1946.

2416 — Estude e represente geomètricamente a função $y=\dfrac{1}{1+e^{1-x}}$ e determine a aproximação com que deve tomar o número e para calcular o valor da função para $x=2$ com um erro inferior a 10^{-n} (n int.).

2417 — Determine a menos de 0,1 raizes reais da equação $2^x-x^2+2x+1=0$.

2418 — Calcule os 4 primeiros termos do desenvolvimento em série de potências da função $y=\dfrac{\cos x}{\cosh x}$.

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — 2.º exame de frequência extraordinário — Junho de 1946.

2419 — Determinar no plano definido pelos 3 pontos $P_1\,(1,1,0)$, $P_2\,(0,2,1)$ e $P_3\,(2,0,1)$ um ponto equidistante de P_1, P_2 e P_3. R: *O ponto* $\mathrm{P}\,(x,y,z)$ *pertence ao plano* $[P_1\,P_2\,P_3]$ *de equação* $x+y-2=0$ *e deve satisfazer às condições* $\overline{PP_1}=\overline{PP_2}=\overline{PP_3}$ *ou, o que é o mesmo,* $2x-2y-2z+3=0$ *e* $2x-2y+2z-3=0$. *Resolvendo o sistema formado por estas três equações obtém-se* $\mathrm{P}\,(1,1,3/2)$.

2420 — Dada a função $y\,(x)=a+b/e^x+c/e^{2x}$ *a*) obter o seu desenvolvimento em série de potências. *b*) estudar o seu crescimento, as estacionaridades, a concavidade e as inflexões conforme os sinais possiveis das constantes reais a, b, e c. R: *a*) *Desenvolvendo em série de potências* e^{-x} *e* e^{-2x} *obtém-se* $y\,(x)=a+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,(b+2^n\,.\,c)\,x^n/n\,!$. *b*) *A análise da 1.ª e 2.ª derivadas,* $y'=-e^{-x}\,(b+2c\,e^{-x})$ *e* $y''=e^{-x}\,(b+4c\,e^{-x})$, *permite concluir, independentemente de* a: 1) $b>0,\ c>0\rightarrow y'<0$ *e* $y''>0$, *qualquer que seja* x *real e, portanto,* y *monotónica decrescente com a concavidade voltada no sentido positivo do eixo* Oy; 2) $b<0,\ c<0\rightarrow y'>0$ *e* $y''<0$, *qualquer que seja* x *real e, portanto,* y *monotónica crescente com a concavidade voltada no sentido negativo do eixo* Oy; 3) $b\,.\,c<0\rightarrow y'>0$ *quando* $x>\log\,(-2c/b)$ *e* $y'<0$ *quando* $x<\log\,(-2c/b)$ *sendo* $\mathrm{P}\,[\log\,(-2c/b),\ (4ac-b^2)/4c]$ *um ponto de mínimo. Ainda, nesta hipótese,* $y''>0$ *quando* $x<\log\,(-4c/b)$ *e* $y''<0$ *quando* $x>\log\,(-4c/b)$ *sendo* $\mathrm{Q}\,[\log\,(-4c/b),\,(16\,ac-3b^3)/16c]$ *um ponto de inflexão.*

Soluções dos n.ºs 2419 e 2420 de O. Morbey Rodrigues.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exame de frequência, 1945-46.

2421 — Achar os extremos da função

$$f\,(x,y)=x\,y\,(x-y-1)\,.$$

R: *As condições de primeira ordem verificam-se em* (0,0) *e* $(-1/3,-1/3)$; *mas como para ambos os pontos é* $s^2-rt>0$, *não há extremos.*

2422 — Determinar por integração o volume do toro gerado quando uma circunferência de raio 1 roda em torno duma recta do seu plano situado a uma distância 3 do centro da circunferência. R: $2\pi^2$.

Soluções dos n.ºs 2421 e 2422 de L. G. M. Albuquerque.

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 2.º Exame de frequência — Maio de 1946.

2423 — *a*) Defina elementos tangente e normais a uma superfície num seu ponto ordinário e indique a respectiva representação analítica quer no caso da superfície ser definida pela sua equação cartesiana quer em coordenadas curvilíneas. *b)* Defina contacto de ordem n entre uma curva e uma superfície, escreva as condições analíticas para um tal contacto, defina conceito de osculação nesse caso, indique qual a ordem de contacto do plano osculador a uma linha torsa e defina plano oscular estacionário. *c)* Defina integral definido; propriedades.

2424 — Calcule $\int \frac{\sqrt{e^x+1}+e^x}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$.

2425 — Determine a superfície envolvente dos planos osculadores à hélice

$$x = a\cos t\,, \quad x = a \operatorname{sen} t\,, \quad z = a\,t\,.$$

I. S. A. — Calculo Infinitesimal e das Probabilidades — 2.º Exercício de revisão.

2426 — Considere um triângulo $[ABC]$, um ponto P qualquer de AB e as paralelas tiradas por P a AC e BC; designe por R e S os pontos de encontro dessas paralelas com BC e AC respectivamente. Determine a posição de P sobre AB para a qual a soma das áreas dos triângulos $[ASP]$ e $[PRB]$ é mínima R: *A soma das referidas áreas é mínima se* P *é o ponto médio de* AB.

2427 — Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^{\alpha+1}\operatorname{sen} x^{-\alpha}}{\operatorname{sen} x}\ (\alpha>0)$.

R: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+1}\operatorname{sen} x^{-\alpha}}{\operatorname{sen} x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen} x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}(x^{\alpha}\operatorname{sen} x^{-\alpha}) = 0$.

2428 — Mostre que a equação $\frac{1}{x-1}+\frac{2}{2x-1}+\cdots+\frac{n}{nx-1}=0$ tem todas as raízes reais. R: *Visto nenhum dos números* $1, \frac{1}{2}, \cdots \frac{1}{n}$ *ser raiz da equação dada, esta é equivalente à equação*

$$\frac{d}{dx}\left[(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)\right]=0$$

o que, em virtude do teorema de Rolle relativo a equações algébricas, prova o que se pretendia.

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — 1.º Exame de Frequência.

2429 — A cada ponto M da curva $\gamma \equiv y=\log x$ faz-se corresponder o ponto P da normal a γ em M que tem a mesma ordenada que o ponto de encontro do eixo dos yy com a tangente γ em M. Determine a equação da curva γ', lugar dos pontos P. Determine as coordenadas do ponto de γ' tal que a tangente a γ' nesse ponto é paralela à bissectriz dos quadrantes pares. R: *Coordenadas do ponto* P: $x=y-1$, $y=x+1/x$. *Eliminando* x *e* y *entre estas equações e a equação de* γ, *obtém-se* $\gamma'\equiv X=e^{Y+1}+e^{-(Y+1)}$. *O ponto pedido tem por coordenadas*

$$X=\sqrt{5}\,,\ Y=\log\left(((\sqrt{5}-1)/2\right)-1\,.$$

2430 — A série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ é definida da seguinte maneira: $u_1=1$ e $u_n=\frac{n}{n+2}u_{n-1}$ para $n>1$. Mostre que a série é convergente e calcule a sua soma. R: *Visto ser* $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}-1\right)=2$, *a série é convergente.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{6}{(n+1)\,(n+2)} =$$
$$=1+6\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=3\,.$$

2431 — Sejam $y=f(x)$ a função da variável real x, assim definida:

para $x=2/n$ (n inteiro não nulo): $y=x^2-1$;
para $x\neq 2/n$ (n inteiro não nulo): $y=3/2\,x\cdot|x-1|$.

Estudar a continuidade da função dada, existência e continuidade da sua derivada. R: *A função é descontínua para* $x=0$ *e para* $x=2/n$ (n *inteiro não nulo), com exclusão dos valores* $x=1$ *e* $x=2$. *A função tem derivada contínua nos pontos em que é contínua.*

Soluções dos n.os 2426 a 2431 de José C. Morgado Júnior.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 2.º Exame de frequência ordinário — 1-6-1946.

2432 — As rodas dentadas direitas, com os dentes do lado de fora, A_1, A_2 e A_3 estão montadas, respectivamente, nos veios paralelos 1, 2 e 3. A_2 engrena com A_1 e A_3. A roda A_1 tem 20 dentes e raio primitivo igual a 40 mm. As distâncias do veio 2 aos veios 1 e 3 são respectivamente iguais a 90 mm e 150 mm. O veio 1 efectua 10 r/s.

a) Classifique o trem; *b*) calcule o raio primitivo e o número de dentes da roda A_3; e *c*) determine a velocidade angular do veio 3. R: a) *O trem é ordinário simples plano, tendo* 2 *por veio parasita*; b) *raio primitivo*, $R_3=100$ mm; *número de dentes*, $Z_3=50$; c) $\Omega_3=4$ r. p. s.

2433 — Considere a recta E perpendicular ao plano Π. Seja O a intersecção de E com Π.

Demonstre que o momento de inércia em relação ao ponto O dum sistema material qualquer é igual à soma dos seus momentos quadráticos em relação a E e a Π.

2434 — A equação do movimento do ponto material P, com a massa de 20 t, em relação ao sistema galileano $O\mathrm{e}_1\,\mathrm{e}_2\,\mathrm{e}_3$, é $P=O+5t^2\,\mathrm{e}_1-1/2\,.\,\mathrm{e}_2+4t\,\mathrm{e}_3$, onde a unidade de comprimento é o metro e a de tempo o segundo.

Determine, em kWh, a energia cinética do ponto material no instante $t=5$ seg. R: $T\approx 6{,}99$ kWh.

2435 — Sôbre a face Oxy do triedro fixo $Oxyz\equiv$ $\equiv O\mathbf{ijk}$ move-se o plano Π.

São conhecidas a equação do movimento do ponto P de Π, $P=O+X(t)\,\mathbf{i}+Y(t)\,\mathbf{j}$, e a velocidade angular $\omega=\omega(t)$ de Π em relação ao triedro.

Determine a base da rolante. R: *A base tem por equações paramétricas*

$$\begin{cases} \xi=X(t)-\dfrac{Y'(t)}{\omega(t)} \\ \eta=Y(t)+\dfrac{X'(t)}{\omega(t)} \end{cases}.$$

I. S. A. — Mecânica Racional e Teoria Geral de Máquinas — 2.º Exame de frequência extraordinário — 1-6-1946.

2436 — Os centros das rodas duma engrenagem plana exterior M 20 distam 1050 mm e a razão de transmissão é igual a 2. Calcule os números de dentes das duas rodas. R: $Z_1=70$, $Z_2=35$.

2437 — Considere um sistema de pontos materiais situados sôbre o plano Π. Sejam E_1 e E_2 duas rectas de Π, ortogonais entre si e cruzando-se no ponto O.

Demonstre que o raio de giração do sistema em relação à recta perpendicular a Π, que passa por O, é a hipotenusa do triângulo rectângulo que tem por catetos os raios de giração do sistema em relação a E_1 e a E_2.

2438 — O ponto material P, com 2 kg de massa, submetido ùnicamente à acção das fôrças dum campo conservativo, atravessa a superfície equipotencial de cota nula com a velocidade de 10 m/s.

Calcule a velocidade de P ao atingir a superfície equipotencial de cota igual a 3,673 kgm. R: $V=8$ m/s.

2439 — O sólido S move-se em relação ao triedro tri-rectângulo $O\mathbf{ijk}$. A velocidade de S é o torsor cujas coordenadas vectoriais em relação a O são

$$\vec{\Omega}=\operatorname{sen} t^4\,\mathbf{i}+e^t\,\mathbf{j}+\log(2-e^{-})\,\mathbf{k}$$

e

$$O'=(3-t)\,\mathbf{i}-\cos(\pi+t^3)\,\mathbf{k}.$$

Determine a posição inicial do eixo de Mozzi. R: *A equação vectorial do eixo de Mozzi inicial é* $Q=O+\mathbf{i}+\lambda\mathbf{j}-3\mathbf{k}$, *onde* λ *designa o parâmetro.*

Enunciados e soluções dos n.os 2432 a 2439 de P. de Varennes e Mendonça.

PROBLEMAS

UM PROBLEMA E VÁRIAS SOLUÇÕES

2440 — Sumar la serie

$$\sum_1^\infty \frac{1}{a_1\,a_2\,a_3\cdots a_n} \quad \text{siendo} \quad a_{i+1}=a_i^2-2\,.$$

SOLUCIÓN I

Llamemos S (x) *a la función:*

$$\mathrm{S}(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x(x^2-2)}+\cdots$$

definida por la serie dada supuesta convergente. Se tendrá:

$$x\,.\,\mathrm{S}(x)=1+\frac{1}{x^2-2}+\frac{1}{(x^2-2)\,[(x^2-2)^2-2]}+\cdots=$$

$=1+\mathrm{S}(x^2-2)$. *Para resolver la ecuación funcional*

$$(1) \qquad x\,.\,\mathrm{S}(x)=1+\mathrm{S}(x^2-2)\,,$$

hagamos $\mathrm{S}(x^2-2)=z(x)\,.\,\overline{\mathrm{S}(x)}^2$ *donde* $z(x)$ *es una función desconocida. Resulta asi:* $z(x)\,.\,\overline{\mathrm{S}(x)}^2-$ $-x\,.\,\mathrm{S}(x)+1=0$, *que da:* $\mathrm{S}(x)=\dfrac{x\pm\sqrt{x^2-4z(x)}}{2z(x)}$.

Entrando com este valor en la ecuación funcional (1):

$$\frac{x^2\pm\sqrt{x^4-x^2\,4z(x)}}{2z(x)}=1+\frac{x^2-2\pm\sqrt{(x^2-2)^2-4z(x^2-2)}}{2z(x^2-2)}.$$

Sumando y restando estas dos igualdades, se obtiene:

$$\frac{x^2-2z(x)}{z(x)}=\frac{x^2-2}{z(x^2-2)}\,;$$

$$\frac{\sqrt{x^4-4x^2\,z(x)}}{z(x)}=\frac{\sqrt{(x^2-2)^2-4z(x^2-2)}}{z(x^2-2)}.$$

Resuelto este sistema se obtienen las soluciones:

$$z(x)=z(x^2-2)=1\,,\quad y\quad z(x)=z(x^2-2)=0\,.$$