Prof. Picone tem podido formar um escol de investigadores que se contam entre o que há de mais prometedor na moderna geração matemática italiana.

Os institutos dêste género estabelecem um contacto com a realidade, em virtude do qual a produção matemática é apreciada não sòmente do ponto de vista da *veracidade ou falsidade*, mas sôbretudo do ponto de vista do seu *maior ou menor valor efectivo*, em relação a nós, homens, que criamos os símbolos para que êles nos sirvam, e não para que êles se tornem fins a si mesmo. Pretende-se muitas vezes ter resolvido um problema, apresentando um processo de resolução que depois, passando à prática, se revela inaplicável pela massa astronómica de cálculos que requere. Abundam assim, na Análise clássica, as *elegantes* demonstrações de existência, que bem magra satisfação podem dar a quem não queira permanecer eternamente numa atitude contemplativa.

Todavia a máquina calculadora electrónica vem modificar enormemente êste estado de coisas, multiplicando por mil, segundo se diz, as possibilidades humanas de efectuar cálculos numéricos. Dêste modo, muitos procedimentos considerados até hoje como inexequíveis passam a ter viabilidade — o que vem abrir à Ciência e à Técnica perspectivas inimagináveis.

Infelizmente, o anterior comunicado fala sobretudo de aplicações bélicas da máquina electrónica — e foi na verdade a guerra que criou o «Eniac», como foi ela que criou a bomba atómica. Mas o mesmo comunicado refere-se a várias outras possíveis aplicações do «Eniac», que nada têm que ver com a guerra.

Uma última conclusão nos parece lícito tirar daqui: a necessidade premente de arejar os nossos métodos e programas de ensino, tornando-os adequados ao espírito da época.

Entrámos numa nova era, que é, feliz ou infelizmente, a *era atómica*. E devemos abrir os olhos, fazer um esfôrço sério de adaptação, se não quizermos ficar para sempre agarrados a sombras, no mundo do passado.

José Sebastião e Silva

Géométries Elémentaires et Nombres Complexes

III. Variétés Quadratiques Spécialisées (*)

par **Paul Belgodère**

Transformations projectives conservant une variété quadratique:

Dans la plupart des géométries au sens de Klein couramment étudiées, le groupe principal est isomorphe au groupe projectif conservant une variété quadratique, ou à l'un de ses sous-groupes.

Par exemple, la *géométrie projective* considérée pour la surface seule d'une hyperquadrique de l'espace projectif S_{n+1} à $n+1$ dimensions donne, par projection stéréographique, la *géométrie anallagmatique* à n dimensions puis, par projection isotrope, la géométrie de contact des hypersphères orientées *(groupe de Lie)* de l'espace à $n-1$ dimensions. Ce même groupe correspond aussi à la *géométrie cayleyenne* à $n-1$ dimensions.

On obtiendra la *géométrie euclidienne* à n dimensions en fixant le «*point à l'infini*» de la géométrie anallagmatique, et sa projection isotrope donne la *géométrie de Laguerre* de l'espace à $n-1$ dimensions. Citons aussi la *géométrie projective réglée*, et la *cinématique à 3 dimensions*, respectivement équivalentes aux géométries à la surface d'une hyperquadrique de S_5 ou S_7.

Signalons, pour les géométries dont le groupe a même structure que le groupe des transformations projectives conservant une variété quadratique, l'importance fondamentale de la *forme polaire*, dont l'annulation exprime toujours une propriété géométrique importante.

Variétés spécialisées; utilité:

Mais le simple exemple de la *Géométrie euclidienne* nous introduit à une nouvelle étude, car on peut l'obtenir directement en fixant dans l'espace projectif un absolu quadratique tangentiellement spécialisé (conique ombilicale) c'est-à-dire en étudiant les *transformations automorphes* d'une variété quadratique spécialisée. A un changement près du *domaine de réalité* (si l'on ne considère que l'ensemble des transformations à paramètres réels), on retrouve cette propriété dans la *Géométrie de Laguerre*. De façon encore plus marquée, il en est de même dans la *géométrie pseudo elliptique* de Blaschke, équivalente à la cinématique plane, obtenue en fixant dans l'espace projectif S_3 une quadrique décomposée ponctuellement en deux plans,

(*) Continuação dos artigos I-Éléments Imaginaires. Répresentations Réelles e II-Nombres Hipercomplexes, publicados respectivamente em «Gazeta de Matemática» nos n.os 30 e 31.

et tangentiellement en deux points de leur intersection.

Précisons notre langage:

Selon que nous considèrerons une multiplicité de points ou d'hyperplans, nous parlerons de variété *ponctuelle ou tangentielle.*

Nous dirons qu'une variété est:

générale, si elle n'a pas d'élément multiple;

spéciale, ou spécialisée, si elle a des éléments multiples, sans être décomposable en multiplicités analytiquement distinctes;

décomposée, si elle est constituée par l'ensemble de variétés analytiquement distinctes;

dégénérée, si elle est constituée par l'ensemble de variétés confondues, de degrés moindres;

évanescente, si son équation est identiquement vérifiée par tous les points (ou hyperplans).

Exemple: dans S_3 une *quadrique générale* n'a ni point ni plan tangent double.

— une *conique* est une quadrique spécialisée tangentiellement, et dégénérée ponctuellement en un plan double.

— un *cône* est une quadrique spécialisée ponctuellement, et dégénérée tangentiellement en un point double.

— l'ensemble de *2 plans* et de *2 points* situés sur leur intersection est une quadrique décomposée ponctuellement et tangentiellement.

Géométrie	Éléments	Éléments pour lesquels la forme quadratique est nulle	Couples d'éléments pour lesquels la forme polaire est nulle	Couples d'éléments pour lesquels la forme polaire est nulle, et dont chacun annule la forme quadratique.
Cayleyenne	Point de l'espace	Point de l'absolu	Points conjugués	Points sur une même génératrice de l'absolu.
	Droite de l'espace	Droite «minima»	Droites «perpendiculaires»	Droites minima associées.
Anallagmatique	Hypersphère	Point	Hypersphères orthogonales	Points d'une même isotrope.
De Lie		Hypersphère orientée		Hypersphères tangentes.
Projective réglée à 3 dimensions	Complexe linéaire	Droite	Complexes en involution	Droites concourantes.
Cinématique à 3 dimensions		Soma (position d'un corps solide)		Somas déduits l'un de l'autre par rotation.

Variétés quadratiques générales:

Rappelons les notations et formules habituelles.

S_p est une variété linéaire ponctuelle à p dimensions de l'espace projectif S_n, à n dimensions.

Elle y dépend de $(p+1)\,(n-p)$ paramètres.

Si elle est astreinte à passer par une variété linéaire fixée S_q, à q dimensions, elle ne dépend plus que de $(p-q)\,(n-p)$ paramètres.

Une hyperquadrique générale V_n^2 de S_n y dépend de $n\,(n+3)/2$ paramètres. Le sous groupe du groupe projectif (à $n\,(n+2)$ paramètres) qui la conserve dépend donc de $n\,(n+2)-n\,(n+3)/2=n\,(n+1)/2$ paramètres.

La V_n^2 contient des variétés linéaires S_p si $p\leq(n-1)/2$, dépendant de $(p+1)\,(2n-3p-2)/2$ paramètres, et l'on peut démontrer qu'il passe par un S_q donné de V_n^2 des S_p linéaires, entièrement situés sur V_n^2, dépendant de $(p-q)\,(2n-3p-q-3)/2$ paramètres, sous la condition $q\leq p\leq(n-1)/2$.

Pour $n=4m+1$, il existe des S_{2m} formant deux familles distinctes: deux S_{2m} de la même famille ont $1, \infty^2, \dots \infty^{2m}$ points communs; deux S_{2m} de familles différentes ont $0, \infty^1, \dots \infty^{2m-1}$ points communs.

Pour $n=4m+2$, il existe des S_{2m}, formant une seule famille.

Pour $n=4m+3$, il existe des S_{2m+1}, formant deux familles distinctes: deux S_{2m+1} de la même famille ont $0, \infty^1, \dots \infty^{2m+1}$ points communs; deux S_{2m+1} de familles différentes ont $1, \infty^2, \dots \infty^{2m}$ points communs.

Pour $n=4m+4$, il existe des S_{2m+1}, formant une seule famille.

Nous n'avons considéré jusqu'ici, conformément à l'habitude, que les variétés linéaires admises *ponctuellement* par une variété quadratique générale: par exemple une quadrique de S_3 porte deux familles de droites, une hyperquadrique de S_5 porte deux familles de ∞^3 plans générateurs, etc. Corrélativement, les hyperplans S_{n-1} tangents à l'hyperquadrique peuvent se grouper en familles linéaires, ensemble des hyperplans passant par une variété linéaire ponctuelle d'un nombre moindre de dimensions (axe de la famille).

Dans un espace S_{2m+1} à nombre impair de dimensions, il existe des variétés linéaires S_m appartenant point par point à l'hyperquadrique (et la polarité induit une *corrélation de Chasles* entre les ∞^m points de cet S_m, et les ∞^m hyperplans qui la contiennent). Mais, dans un espace S_{2m+2} à nombre impair de dimensions, il existe des S_{m+1} axes d'une famille linéaire d'hyperplans tous tangents à la variété quadratique, qui ne font que *toucher* l'hyperquadrique le long d'un S_m (et la polarité induit une corrélation de CHASLES entre les ∞^m points de cet S_m, et les ∞^m hyperplans passant par le S_{m+1}, admis *tangentiellement* par l'hyperquadrique).

C'est ainsi que, dans l'espace à 4 dimensions, il existe ∞^3 plans, associés à une hyperquadrique, touchant l'hyperquadrique selon l'une de ses ∞^3 droites (qui compte double dans l'intersection), et tel que tout hyperplan qui le contienne touche l'hyperquadrique en l'un des points de la droite de contact précédente.

Plus généralement, à chaque variété linéaire S_p, située sur une hyperquadrique générale V_n^2 d'un S_n, correspond un S_{n-p-1}, qui en est polaire réciproque par rapport à la V_n^2, qui contient S_p, et qui est l'axe d'une famille d'hyperplans tous tangents à la V_n^2.

Variétés quadratiques spéciales:

Afin d'étudier les spécialisations que peut présenter l'hyperquadrique *limite* d'une famille d'hyperquadriques générales, bornons-nous au cas d'une famille d'hyperquadriques admettant toutes un $(n-1)$ èdre non dégénéré conjugué commun, et dont les équations (ponctuelle et tangentielle) peuvent donc se ramener simultanément à une somme de carrés

$$a_0 x_0^2 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 0$$

$$\frac{u_0^2}{a_0} + \frac{u_1^2}{a_1} + \cdots \frac{u_n^2}{a_n} = 0$$

les a_i étant fonctions d'un paramètre λ, et rangés par ordre d'infinitude, c'est-à-dire que pour λ assez petit

$$|a_0| \geq |a_1| \geq \cdots \geq |a_n|$$

le rapport $\left|\frac{a_n}{a_0}\right|$ tendant effectivement vers 0 avec λ, afin que la limite ne soit pas une hyperquadrique générale.

Pour l'hyperquadrique limite, seuls les a_i du même ordre que a_0 interviendront dans l'équation ponctuelle

$$b_0 x_0^2 + \cdots + b_k x_k^2 = 0, \qquad (k < n)$$

où les b_i ont entre eux les rapports limites des rapports finis des a_i $(i \leq k)$

De même l'équation tangentielle sera:

$$\frac{u_l^2}{b_l} + \frac{u_{l+1}^2}{b_{l+1}} + \cdots + \frac{u_n^2}{b_n} = 0 \qquad (l \geq k+1)$$

où les b_i ont encore entre eux les rapports limites des rapports finis des a_i $(i \geq l)$.

Ainsi, une hyperquadrique limite non générale apparaît comme ayant à la fois une équation ponctuelle et une équation tangentielle, opérant sur des carrés d'indices distincts, avec des lacunes pour certains indices, qui ne figurent dans aucune des deux équations.

Ponctuellement, l'hyperquadrique limite admet un espace linéaire double S_{n-k-1} à $n-k-1$ dimensions; tangentiellement c'est l'ensemble des S_{n-1} menés par des S_{n-l-1} tangents à une hyperquadrique générale V_{n-l}^2 d'un S_{n-l} intérieur au S_{n-k-1}.

L'espace à trois dimensions est trop restreint pour montrer de véritables exemples; toute spécialisation y entraîne une décomposition ou une dégénérescence (ponctuelle ou tangentielle); un cône est dégénéré tangentiellement en son sommet, comptant double. Mais, dans l'espace à 6 dimensions, on peut considérer une hyperquadrique spécialisée ponctuellement et tangentiellement, admettant un espace double à 3 dimensions, et dont le *noyau* tangentiel soit réduit à une conique: il apparaît ainsi une lacune d'un carré dans le couple des équations ponctuelle et tangentielle.

D'une manière générale, une hyperquadrique limite est définie par son noyau tangentiel, hyperquadrique générale d'un S_{n-l}, par sa variété double S_{n-k-1} issue de S_{n-l}, et par sa trace ponctuelle sur un S_k sans point commun avec le S_{n-k-1}.

Spécialisation purement ponctuelle ou tangentielle:

Plaçons-nous au point de vue strictement ponctuel (par exemple), en supposant l'équation tangentielle complètement évanescente. Comptons les paramètres.

Une variété quadratique d fois spécialisée a une équation comportant $n+1-d$ carrés, et porte une variété linéaire double S_{d-1}, à $d-1$ dimensions. Les S_{d-1}, situés dans S_n, y dépendent de $d(n-d+1)$ paramètres. D'autre part, dans un S_{n-d} *ne coupant* *pas* le S_{d-1} choisi, les hyperquadriques générales dépendent de $(n-d)(n-d+3)/2$ paramètres. Une hyperquadrique d fois spécialisée est parfaitement définie par sa variété double S_{d-1}, et sa trace ponctuelle sur S_{n-d}. Elle dépend donc de $d(n-d+1)+ +(n-d)(n-d+3)/2 \equiv n(n+3)/2 - d(d+1)/2$ paramètres.

Le *groupe automorphe* de cette hyperquadrique, c'est-à-dire le sous groupe projectif de S_n qui la conserve, dépend donc de $n(n+2)-[n(n+3)/2 - -d(d+1)/2] \equiv n(n+1)/2 + d(d+1)/2$ paramètres.

Ce groupe automorphe n'est pas *simple*, car il contient des sous-groupes invariants, dont un cas particulier est fourni par les déplacements, homothéties et translations, sous-groupes des similitudes de l'espace euclidien.

En prenant l'équation de l'hyperquadrique sous la forme:

$$x_0^2 + x_1^2 + \cdots\cdots + x_{n-d}^2 = 0,$$

les transformations automorphes peuvent s'écrire:

$$X = \left\| \begin{array}{c:c} H & 0 \\ \hdashline A & B \end{array} \right\| x$$

où la matrice (à $n+1$ lignes et colonnes) représente la transformation linéaire faisant passer de la colonne de coordonnées x à la colonne de coordonnées X.

Un point de S_{d-1} étant transformé en un autre point de S_{d-1}, le tableau à $n-d+1$ lignes et d colonnes, représenté par le symbole 0, a tous ses éléments nuls. La matrice carrée représentée par H, transformant les x_i $(i \leq n-d)$ en X_j $(j \leq n-d)$ et conservant (à un facteur près) la somme des carrés, est *orthogonale* (le produit scalaire de deux lignes différentes étant nul, et le carré scalaire d'une ligne étant égal à la valeur du déterminant, que l'on peut supposer égale à 1 à cause de l'homogénéité).

Quant aux d lignes résiduelles, leurs éléments sont arbitraires.

Remarquons que, dans la composition de deux transformations, les matrices H, H' se multiplient entre elles (substitutions du système des génératrices), les B, B' également (transformations projectives de S_{d-1}), tandis que le nouveau tableau A'' dépend des 6 tableaux AA' BB' HH'.

Comptons les paramètres:

$(n-d)(n+1-d)/2$ pour la matrice orthogonale H de déterminant 1; $d(n+1)$ pour les tableaux A et B (d dernières lignes) donc en tout $n(n+1)/2 + d(d+1)/2$, conformément au résultat antérieur.

On obtient des sous groupes invariants en supposant:

H réduit à la matrice unité E

ou

B réduit à la matrice scalaire $\lambda E'$.

Comptons les variétés linéaires situées sur une V_n^2, d fois spécialisée, en nous attachant d'abord aux variétés linéaires contenant la variété double S_{d-1}, et dont la trace sur un S_{n-d} ne coupant pas le S_{d-1} doit nécessairement appartenir à la V_{n-d}^2 trace de la V_n^2: il suffit, dans ce cas de substituer à n, p, q les quantités $n-d$, $p-d$, $q-d$, dans les formules donnant le nombre de variétés linéaires portées par une variété quadratique générale.

Donc, sous les conditions $d-1 \leq q \leq p \leq (n-1)/2$, il existe sur la V_n^2 des variétés linéaires S_p, à p dimensions, issues du S_{d-1}, dépendant de

$$(p-d+1)(2n-2-3p+d)/2 \text{ paramètres}$$

et des variétés linéaires S_p, issues d'un S_q, dépendant, lorsque cet S_q est fixé, de

$$(p-q)(2n-3p-q+2d-3)/2 \text{ paramètres.}$$

D'autre part, les variétés linéaires S_r à r dimensions contenues dans une variété linéaire fixée S_p à p dimensions y dépendent de $(p-r)(r+1)$ paramètres et les variétés linéaires S_r à r dimensions, contenues dans une variété linéaire fixée S_p à p dimensions, et contenant une variété linéaire S_s à s dimensions dépendent de $(p-r)(r-s)$ paramètres.

Donc, sous les conditions $s \leq r \leq p \leq r+d$, $q-d \leq \leq s \leq q \leq p$, on peut considérer toute variété linéaire S_r à r dimensions située sur V_n^2 comme appartenant à *une* variété S_p à p dimensions issue du S_{d-1} double (l'entier q dépendant de la disposition relative du S_r et du S_{d-1}), et dépendant de $(p-r)(r+1)$ paramètres dans cet S_p, donc sur V_n^2 de

$$(p-d+1)(2n-2-3p+d)/2 + \\ +(p-r)(r+1) \text{ paramètres}.$$

Lorsqu'un S_s à s dimensions de V_n^2 est *fixé* (appartenant à un S_q issu de S_{d-1}), les S_r qui passent par lui et dont la disposition est telle qu'ils soient joints à S_{d-1} par un espace linéaire S_p à p dimensions (contenant nécessairement S_q) dépendraient, si S_p était aussi fixé, de $(p-r)(r-1)$ paramètres, donc dépendent en tout sur V_n^2, lorsque S_s est seul fixé, de

$$(p-q)(2n-3p-q+2d-3)/2 + \\ +(p-r)(r-s) \text{ paramètres.}$$

Spécialisation à la fois ponctuelle et tangentielle :

Considérons maintenant à la fois l'équation ponctuelle ($n+1-d$ carrés) et l'équation tangentielle ($n+1-d'$ carrés). Nous poserons:

$$n+1-(n+1-d)-(n+1-d') = d+d'-(n+1) = l,$$

nombre de lacunes entre les carrés qui interviennent dans l'équation ponctuelle et ceux qui interviennent dans l'équation tangentielle.

Dans tous les cas $l<d$, et en particulier si $d=1$ (variétés à un seul point double), $l=0$.

Un hyperplan tangent touche une hyperquadrique tangentielle à $d-l$ carrés de S_{d-1}. Or, ces hyperquadriques, l fois spécialisées par rapport à S_{d-1}, dépendent de $(d-1)(d-1+3)/2-l(l+1)/2$ paramètres.

De même, les hyperquadriques ponctuelles, d fois spécialisées, ayant pour espace double S_{d-1}, dépendent de $n(n+3)/2-d(d+1)/2$ paramètres.

Donc, les hyperquadriques de spécialisations d, d' de S_n, dépendent de $n(n+3)/2-d(d+1)/2+$ $+(d-1)(d+2)/2-l(l+1)/2=n(n+3)/2-1-l(l+1)/2$ paramètres, et leur groupe automorphe est à: $n(n+2)-$ $-[n(n+3)/2-1-l(l+1)/2]=n(n+1)/2+1+l(l+1)/2$ paramètres.

Il est remarquable que seules interviennent dans ces formules finales les valeurs de n et de l, mais non la place des l lacunes parmi l'ensemble des carrés figurant dans les équations ponctuelle et tangentielle. En particulier, la géométrie pseudo elliptique ($n=3$, $d=d'=2$, $l=0$), dépend d'un groupe à 7 paramètres aussi bien que la géométrie euclidienne ($n=3$, $d=3$, $d'=1$, $l=0$), avec évidemment une structure différente.

Ce groupe contient des sous groupes invariants, en particulier celui qui correspond à l'invariance simultanée du noyau tangentiel et des espaces linéaires générateurs du support ponctuel, et qui dépend de

$$n(n+1)/2+1+l(l+1)/2-(n-d)(n-d+1)/2-$$
$$-(n-d')(n-d'+1)/2=1+dd'$$

paramètres.

D'autres sous-groupes invariants correspondent à l'invariance respective du noyau tangentiel ou des espaces générateurs ponctuels, ou du S_{d-1} double, etc.

$$X=\left\| \begin{array}{c:c:c} H & 0 & 0 \\ \hdashline A & B & 0 \\ \hdashline C & D & H' \end{array} \right\| x$$

La matrice de la transformation, présentée ci-dessus, conserve les points de S_{d-1}, et la variété quadratique ponctuelle. Donc H est une matrice orthogonale à $n+1-d$ lignes et colonnes, et les deux tableaux supérieurs indiqués par 0 sont composés de termes tous nuls. De même, la matrice transposée indiquant, sur les coordonnées tangentielles, la transformation inverse, H' est une matrice orthogonale à $n+1-d'$ lignes et colonnes, et le troisième tableau indiqué par 0 est aussi composé de termes tous nuls. Quant aux tableaux A, B, C, D, ils sont composés d'éléments arbitraires, en nombre total dd'.

Remarquons que l'on ne peut pas en général normer en même temps toutes les coordonnées en sorte que les déterminants de H et H' prennent *en même temps* la valeur 1.

Le nombre de paramètres du groupe automorphe est donc :

$(n-d)(n+1-d)/2+(n-d')(n+1-d')/2+dd'+1=$ $=n(n-1)/2+l(l+1)/2$, et le sous groupe invariant $H=E$, $H'=\lambda E'$ dépend de $1+dd'$ paramètres.

II. Sobre o Cálculo Simbólico

(continuação do n.º 31)

por **José Sebastião e Silva**

Produto de operadores. Consideremos três conjuntos A, B, C quaisquer, e sejam: Φ, uma transformação unívoca de A em B; Ψ, uma transformação unívoca de B em C. Chama-se *produto* de Φ por Ψ, e representa-se por $\Phi.\Psi$ (ou simplesmente por $\Phi\Psi$), aquela transformação unívoca de A em C que equivale a aplicar sucessivamente Ψ, Φ (*primeiro* Ψ *e depois* Φ); isto é, em símbolos:

$$(\Phi.\Psi)(x)=\Phi(\Psi(x)), \quad \text{para cada} \quad x \in A.^{(1)}$$

(1) A expressão $x \in A$ deve ler-se aqui «x *pertencente a* A».

É claro que, em particular, os conjuntos A, B, C podem coincidir entre si.

Exemplo: Se representarmos por H a classe dos seres humanos e escrevermos «$y=pad\,x$» como abreviatura de «*y é pai de x*» e «$y=mad\,x$» como abreviatura de «*y é mãe de x*» (designando por x, y elementos indeterminados de H, sem distinção de sexo), é claro que os símbolos *pad*, *mad* representarão operadores definidos pelo menos numa parte H^* de H — operadores que fazem corresponder a cada elemento x de H^* um e um só elemento ($pad\,x$ ou $mad\,x$) de H. Ora é fácil ver que o produto $pad.mad$ não é mais do