VI — TRIGONOMETRIA

2458 — Verifique que a soma dos quadrados da secante e da cossecante de um arco é igual ao produto dos seus quadrados.

R: $\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x}=\dfrac{1}{\cos^2 x\cdot\operatorname{sen}^2 x}=\sec^2 x\cdot\operatorname{cosec}^2 x$.

Nota. **É obrigatória a resolução de 4 pontos. A parte primeira dos pontos I e V vem esclarecida em qualquer bom compêndio, respectivamente, de Aritmética Racional do 3.º ciclo e de Geometria do 2.º ciclo.**

Soluções dos n.os 2451 a 2458 de Mário Madureira.

I. S. T. e preparatórios para a Faculdade de Engenharia do Porto — Ponto N.º 1 — Julho de 1947.

2459 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a zero, à equação:

$$-1/2\,(1-2x)\,(2x+1)=(1/x2-1)^4-2/3\,(x+1)\,.$$

R: $3x^4-24x^3-24x^2-128x+40=0$.

2460 — Resolva a inequação: $\dfrac{2x^2+x-4}{x-1}>0$.

R: $x>1{,}1861$; $-1{,}6861<x<1$.

2461 — Diga o que é uma superfície de revolução. Enumere, sem definir, os sólidos que conhece limitados total ou parcialmente por tais superfícies.

2462 — Dispondo de umas tábuas que lhe dêem os logaritmos com o mínimo de 5 decimais, dos números e das funções goniométricas, determine, com a aproximação que aqueles lhe permitem, os valores de α que satisfazem a equação:

$$\operatorname{sen}\alpha=\sqrt[3]{0{,}032745\times\cos^2 100^\circ\,12'\,30''}$$

R: $\theta=n180^\circ+(-1)^n\,5^\circ\,47'\,36''$.

2463 — Escreva o 5.º termo do desenvolvimento de $(2a\sqrt[3]{x}-x^{-1})^6$ e simplifique-o. R: $\dfrac{60\,a^2}{x^3\sqrt[3]{x}}$.

2464 — Sendo dadas uma circunferência e uma recta sobre o plano, determine, apenas com o auxílio da régua e do compasso os pontos da recta dos quais se vê a circunferência segundo um ângulo de 30°. Discuta as soluções possíveis.

Soluções dos n.os 2459 a 2464 do Eng. Manuel Amaral.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — ÁLGEBRA SUPERIOR — 2.ª exame de frequência, — 1945-46.

2465 — Primitivar as funções

a) $e^x/(4+e^{2x})$ *b)* $(x+\operatorname{sen}x\cos x)/\cos^2 x$

R: *a)* $1/2\operatorname{arc\,tg} e^x/_2+K$ *b)* $x\operatorname{tg}x+K$.

2466 — Achar os extremos da função

$$f(x)=\operatorname{sen}2x\operatorname{sen}^2 x$$

R: *Um máximo nos pontos* $K\pi+\pi/3$, *com o valor* $3\sqrt{3}/8$; *um mínimo nos pontos* $K\pi-\pi/3$, *com o valor* $-3\sqrt{3}/8$.

2467 — Conduzir pelo ponto (1,4) as rectas tangentes à circunferência de centro na origem e raio 2. R: $y=4$ *e* $4y-x+1=0$.

2468 — Determinar o plano conduzido por ox paralelamente ao plano $x-y-z=1$ R: $y+z=0$

F. C. C. — ALGEBRA SUPERIOR — Exame final, Junho de 1947.

2469 — Sendo $0,1,2,4,6,8,10,\cdots$ os quocientes incompletos do desenvolvimento de certo número em fracção contínua, calcular uma fracção racional que represente o número com um erro inferior a 10^{-6}.

2470 — Primitivar a função $f(x)=\log\left(1-\sqrt[3]{x}\right)$.

2471 — Calcular pelo método de iteração três aproximações da raiz de $x+\log_{10}x-2=0$ compreendida em $(1,2)$.

2472 — Que pontos da recta $3x-3y+2=0$ distam $\sqrt{5}$ do ponto $(2,3)$?

2473 — Dados, dum triângulo esférico, os elementos $A=90^\circ$, $a=72^\circ\,31'\,32''$, $b=120^\circ\,20'\,21''$; calcular B e discutir.

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame Final — Julho de 1946.

2474 — Determine a equação da hipérbole de focos $(-1{,}0)$ $(1{,}0)$ e de assíntotas $y=\pm\sqrt{3}x$. R: *A equação será* $3x^2-y^2=k^2$ *ou* $\dfrac{x^2}{k^2/3}-\dfrac{y^2}{k^2}=1$ *com* $\dfrac{k^2}{3}+k^2=$ $=\dfrac{4k^2}{3}=1$; $k=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *donde:* $\dfrac{x^2}{(1/2)^2}-\dfrac{y^2}{(\sqrt{3}/2)^2}=1$.

2475 — Ache os máximos e mínimos da função: $f(x,y)=(y+x^2)^2-(x-2y)^2$. R: *As condições de es-*

tacionariedade são: $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^3+2xy-x+2y=0$, $\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y} = x^2+2x-3y=0$. *Substituindo* y *tirado da 2.ª equação na 1.ª vem:* $8x^3+6x^2+x=0$ *ou* $x(8x^2+6x+1)=0$ *de raízes* $x_1=0$, $x_2=-1/2$, $x_3=-1/4$; *correspondem* $y_1=0$, $y_2=-1/4$, $y_3=-7/48$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{1}{2}r=6x^2+2y-1$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{1}{2}t=-3$; $\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y\,dx}=\frac{1}{2}s=2x+2$; $\frac{s^2-rt}{4}=22x^2+8x+6y+1=\Delta$.

Para $x=0$, $y=0$ $\Delta=1>0$;

Para $x=\frac{-1}{2}$, $y=\frac{-1}{4}$ $\Delta=1>0$,

Para $x=\frac{-1}{4}$, $y=\frac{-7}{48}$ $\Delta=\frac{-1}{2}<0 \begin{matrix} \nearrow r<0 \\ \searrow t<0. \end{matrix}$

A função tem um máximo para $x=\frac{-1}{4}$, $y=\frac{-7}{48}$.

Nota: Como $t<0$ (para x e y quaisquer) está excluida a hipótese de mínimo.

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame Final — Outubro de 1946.

2476 — *a*) Ache a equação geral da família de curvas que satisfazem à equação diferencial $xy'-y-x^2=0$. *b*) Caracterize geomètricamente a família e determine a equação da curva particular que admite tangente coincidente com o eixo dos xx. R: *a*) $y'-y/x-x=0$. *É equação linear; admite factor integrante* $u=1/x$; *o integral geral é:* $-y/x+x+C=0$ *ou* $y=x^2+Cx$. *b*) *As curvas da família são parábolas de eixo paralelo ao eixo dos* yy; *todas têm por vértice a origem dos eixos coordenados. Como* $y'=2x+C$ *as curvas da família têm tangente paralela ao eixo dos* xx *para* $x=-C/2$, $y=-C^2/4$. *Obtém-se a curva particular pedida para* $C=0$.

2477 — *a*) Determine as coordenadas do ponto P do plano para o qual é mínima a soma s dos quadrados das distâncias aos vértices do quadrado limitado pelas rectas de equações $x=0$, $y=1$, $x=1$, $y=0$. *b*) Fixando s num valor constante qual é a equação do lugar dos correspondentes pontos P? Caracterize geomètricamente o lugar e diga que valor deve escolher para a constante, para que o lugar passe pela origem dos eixos coordenados? Que disposição particular toma então o lugar relativamente ao quadrado dado? R: *a*) *Os vértices do quadrado são os pontos de coordenadas respectivamente* $(0,0)$; $(0,1)$; $(1,1)$; $(1,0)$. *Portanto:* $s=x^2+y^2+x^2+(y-1)^2+(x-1)^2+(y-1)^2+(x-1)^2+y^2=4x^2+4y^2-4x-4y+4$; $s/4=x^2+y^2-x-y+1=S$. *As condições de estacionariedade são:* $0=\frac{\partial S}{\partial x}=2x-1$; $0=\frac{\partial S}{\partial y}=2y-1$ *ou seja:* $x=1/2$, $y=1/2$. *Corresponde um mínimo pois* $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}=2$; $\frac{\partial^2 S}{\partial x\,\partial y}=0$ *ou* $s^2-rt=-4$ $(r,t>0)$.

O ponto P *é pois o ponto de coordenadas* $1/2, 1/2$ *ou seja o centro do quadrado.*

b) *Seja a constante* $s=4k$ *e vem:* $x^2+y^2-x-y=k-1$ *ou* $(x-1/2)^2+(y-1/2)^2=k-1/2$. *O lugar é uma circunferência cujo centro está situado no centro do quadrado e cujo raio é* $\sqrt{k-1/2}$. *Para que o lugar passe pela origem dos eixos coordenados deve ser* $k=1$ *e então o raio será* $r=\sqrt{1/2}=\sqrt{2}/2$ *a circunferência correspondente será circunscrita ao quadrado.*

Soluções dos n.os 2474 a 2477 de Peter A. Braumann.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência, 1946-47.

2478 — Dado o ponto $P\,(1,0,-1)$ e a recta $r\equiv x+y=z=2$, determine a equação da superfície cónica de revolução que passa por P, tem por eixo a recta r e por vértice V o ponto de r de abcissa 2. R: *Tem-se* $V\,(2,0,2)$ *e* $\overrightarrow{VP}\equiv-\vec{i}-3\vec{k}$, $\vec{r}\equiv\vec{i}-\vec{j}$ *logo* $\cos\alpha=-1/\sqrt{20}=(x-y-2)/\sqrt{(x-2)^2+y^2+(z-2)^2}\cdot\sqrt{2}$, *donde* $9x^2+9y^2-z^2-36x+40y+4z-20xy+64=0$.

2479 — Mostre que o sistema

$$\begin{cases} ax+by+cz+dt=0 \\ -bx+ay-dz+ct=0 \\ -cx+dy+az-bt=0 \\ -dx-cy+bz+at=0 \end{cases}$$

não admite soluções diferentes da solução nula, quaisquer que sejam a, b, c, d reais não conjuntamente nulos. R: *Nas condições do problema trata-se dum sistema de Cramer, visto o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas ser igual a* $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

2480 — Considere o sistema $\sum_1^n a_{ij}x_j=0$, $i=1,2,\cdots n$, $a_{ij}=(i.j)^2$. Mostre que este sistema admite soluções diferentes da solução nula qualquer que seja $n>1$. R: *Com efeito, o determinante formado pelos coeficientes das incógnitas tem sempre, para* $n>1$, *duas filas paralelas proporcionais*

2481 — Estude o comportamento das seguintes funções quando $n\to+\infty$: $\frac{1}{n}+\operatorname{sen} n\pi$, $(-1)^n\frac{2n^2+3}{2n}$, $\frac{n^2+1}{2n}+\frac{I(0,1.n)}{n^2}$, $\frac{I(0,9.n)}{n^3+1}$. R: 1.ª *oscilante finitamente,* 2.ª *oscilante infinitamente,* 3.ª$\to+\infty$, 4.ª$\to 0$.

2482 — Desenhe um quadrado $[A'B'C'D']$ de lado igual a 4 cm.. Considere os pontos A, B, C e D que se projectam em A', B', C' e D' e teem de cotas 1, 2, 4 e 0 respectivamente. Gradue o plano que passa por D é paralelo a BC e perpendicular ao plano que admite AC como recta de maior declive (tome para unidade de medida de cotas o duplo centímetro).

Soluções dos n.os 2478 a 2482 de F. A. Carvalho Araujo.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Julho de 1946.

2483 — Verificar a igualdade

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 4 & 8 & 27 \\ 3 & 9 & 27 & 64 \\ 4 & 16 & 64 & 125 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 1 \\ 3 & 9 & 27 & 1 \\ 4 & 16 & 64 & 1 \end{vmatrix}$$

sem calcular os determinantes. R: *O teorema da adição permite-nos escrever*

$$c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 26 \\ 3 & 9 & 27 & 63 \\ 4 & 16 & 64 & 124 \end{vmatrix} = 0$$

Êste determinante pode ser considerado como característico do sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=7 \\ 2x+4y+8z=26 \\ 3x+9y+27z=63 \\ 4x+16y+64z=124 \end{cases}$$

Se houver apenas um característico $c=0$, *a característica será* $p=3$ *e o sistema é então determinado. Com efeito tomando 3 quaisquer das equações, teremos* $x=3$, $y=3$ e $z=1$, *solução que verifica a outra equação.*

2484 — Na equação $x^3-6x^2+13x-\lambda=0$ uma das raízes é a média aritmética das outras duas. Determinar λ e resolver a equação. R: *Sejam* a, b, c *as raizes da equação é* $2a=b+c$. *Pelas fórmulas de Viète e da relação anterior temos*: $3a=6$ *ou* $a=2$, $a(b+c)+bc=13$ *donde* $bc=5$ *e* $\lambda=10$. *Sendo* $a=2$ *as 2 restantes raizes determinam-se pela regra de Ruffini:* $b=2+i$ e $c=2-i$.

2485 — As curvas $y=x^4$ e $3y-4x^3=3$ intersectam-se em dois pontos P e Q reais. Desenhar os gráficos (aproximados) destas curvas e provar pelo cálculo que as tangentes à primeira nos pontos P e Q são concorrentes no ponto $I(1,-3)$. R:

(1) $y=x^4$ *domínio* $(-\infty,+\infty)$; *contradomínio* $(0,+\infty)$

$y'=4x^3$ *crescente para* $x>0$; *decrescente para* $x<0$

Mínimo em $x=0, y=0$; $\lim\limits_{x=\pm\infty} y=+\infty$

(2) $y=4/3 \cdot x^3+1$ *domínio* $(-\infty,+\infty)$; *contradomínio* $(-\infty,+\infty)$

$y'=4x^2$ *Sempre crescente*

Ponto de inflexão $(x=0 \;\; y=1)$

$\lim\limits_{x=+\infty} y=+\infty$; $\lim\limits_{x=-\infty} y=-\infty$

Seja $P(a,b)$ *e* $Q(c,d)$. *Equação da tangente à curva* $y=x^4$ *no ponto* P:

(3) $$y-b=4a^3 \cdot (x-a)$$

Equação da tangente à curva $y=x^4$ *no ponto* Q:

(4) $$y-d=4c^3\,(x-c)$$

Pretende-se provar que a solução do sistema formado pelas equações (3) *e* (4) *é* $I(1,-3)$. *Tendo em conta que* P *e* Q *são pontos de ambas as curvas, teremos:*

(5) $b=a^4$; $3b=4a^3+3$; $d=c^4$; $3d=4c^3+3$.

Eliminando y *entre* (3) *e* (4), *vem:*

$x=\dfrac{d-b+4\,(a^4-c^4)}{4\cdot(a^3-c^3)}$; *e de* (5), $a^4-c^4=b-d$ *e* $a^3-c^3=3/4\cdot(b-d)$, *donde* $x=1$.

De (3), *vem:* $y=b+4a^3-4a^4=b+3b-3-4b=-3$, c. q. p.

2486 — Dados os pontos $A(1,0,0)$; $B(0,0,1)$ e $C(1/2, \sqrt{6}/2, 1/2)$, verificar que podem ser vértices de um tetraedro regular e calcular as coordenadas do quarto vértice dêsse tetraedro. R: *Deverá ser o triângulo* [ABC] *equilátero:* $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{BC}$. *Com efeito:* $\overline{AB}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\overline{AC}=\sqrt{1/4+3/2+1/4}=\sqrt{2}$ $\overline{BC}=\sqrt{1/4+4/2+1/4}=\sqrt{2}$.

Quarto vértice $D(x,y,z)$; *como* $\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, *vem:*

$$\begin{cases} 1)\;\; (x-1)^2+y^2+z^2=2 \\ 2)\;\; x^2+y^2+(z-1)^2=2 \\ 3)\;\; (x-1/2)^2+(y-\sqrt{6}/2)+(z-1/2)^2=2. \end{cases}$$

De 1), 2) *e* 3), *deduz-se* $y=\sqrt{6}/6$ *e* $x=z=(3\pm2\sqrt{6})/6$.

Tem-se pois: $V\left((3+2\sqrt{6})/6, \sqrt{6}/6, (3+2\sqrt{6}/6)\right)$ *e* $V'\left((3-2\sqrt{6})/6, \sqrt{6}/6, (3-2\sqrt{6}/6)\right)$.

Soluções dos n.os 2483 a 2486 de Jorge Cândido da Silva.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **2.º Exame de frequência, 1945-46.**

2487 — É dado um plano vertical que forma um ângulo de 45° com o plano vertical de projecção. Conduzir por um ponto uma recta que defina um ângulo de 60° com um plano vertical dado, e um ângulo de 40° com o plano vertical de projecção. R: *Conduzam-se pelo ponto as rectas* r e s *perpendiculares ao plano vertical dado e ao plano vertical de projecção. A recta pedida é a terceira aresta do triedro em que as outras arestas são* r e s *e as faces teem* 30° *e* 50°.

2488 — É dada uma pirâmide quadrangular, recta e regular, de base assente no plano horizontal de projecção. Determinar a secção feita pelo primeiro bissector, e suprimir a parte do sólido acima deste plano.

2489 — Por uma recta do primeiro bissector, cujas projecções formam ângulos de 45° com a L. T., conduzir os planos que formam com esta mesma linha ângulos de 20°. R: *Seja* V *o ponto de intersecção da recta dada,* r, *com a* L. T.. *Os planos pedidos são os planos tangentes conduzidos por* r *à superfície cónica de revolução que tem* V *por vértice, a* L. T. *por eixo, e uma abertura de* 20°.

F. C. C. — Geometria Descritiva — **Exame final, 1945-46**

2490 — Determinar a distância entre duas rectas enviezadas, uma horizontal e outra frontal.

2491 — Dado um plano pelos traços, considere-se um dos seus pontos. Conduzir por este ponto as rectas que definem ângulos de 65° com o plano horizontal de projecção e pertencem ao plano. R: *Considere-se a superfície cónica de revolução que tem o vértice no ponto considerado,* 25° *de abertura. e por eixo uma recta vertical. As rectas pedidas são as geratrizes da secção feita pelo plano dado neste cone.*

Soluções dos n.os 2487 a 2491 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. — Cálculo — **Exame final, 1945-46**

2492 — Determinar por integração a área gerada pela rotação em torno de ox do segmento definido pelos pontos $(1,1,0)$ e $(2,2,1)$. R: $(1-2\sqrt{2})\sqrt{3}\pi/2$.

2493 — Integrar a equação $y''+y=x^3-1$.

R: $y=c_1\cos x+c_2 \operatorname{sen} x+x^3+6x-1$

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequencia, 1946-47.**

2494 — Determinar os máximos e mínimos da função $x^2y^2-x^2-y^2$ no conjunto fechado, definido pelo losango de vértices $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1/2,0)$ e $(-1/2,0)$.

2495 — Achar o integral geral da equação

$$y''-3y'+y=x^3e^x.$$

2496 — Calcular o volume de revolução quando a área limitada pelo arco de parábola $y^2=x$ e pelo segmento de recta $x=2$ roda em torno da recta $x=-1$.

F. C. C. — Calculo Infinitesimal — **Exame final, Junho de 1946-47.**

1.º Ponto

2497 — Desenvolver a função $\dfrac{x^2-1}{(x+2)^2}$ em série de potências de $x+1$ e escrever o termo geral desse desenvolvimento.

2498 — Resolver o sistema $\begin{cases} y'+z=x^3 \\ y'+z'=e^x. \end{cases}$

2499 — Calcular por integração o volume do sólido definido pelos planos $x=k$, $y=h$, e $z=x$ e pelos planos coordenados xOy e xOz. R: $hk^2/2$.

2.º Ponto

2500 — Em que direcções emergentes do ponto $(1,-1)$ se anula a 2.ª derivada direccional da função $f(x,y)=x^2-2y^2$?

2501 — Resolver o sistema $\begin{cases} y'=y-z-x-2 \\ z'=z-x. \end{cases}$

R: $\begin{cases} z=e^x c_1-(x+1) \\ y=c_2e^x-c_1xe^x+1. \end{cases}$

2502 — Determinar o volume do sólido gerado pela revolução, em torno de Oz, da região limitada pela parábola $z^2=2(x-1)$ e pela recta $x-z=2$.

Soluções dos n.os 2492 a 2502 de L. G. Mendonça de Albuquerque.

F. C. L. — CÁLCULO INFINITESIMAL — **2.º Exame de frequência — Maio de 1946.**

2503 — *a)* Defina envolvente duma família de superfícies caracteristicas e aresta de reversão. Enuncie as propriedades da envolvente e aplique os conceitos definidos à determinação da equação geral das superfícies conicas. *b)* Escreva a equação vectorial duma superficie regrada, indique o significado das grandezas que nela figuram, escreva a equação do plano tangente num ponto de tal superfície e deduza a partir dela a condição para que a superfície seja planificável. *c)* Defina curvatura média num arco de curva plana, curvatura num ponto de tal curva, centro de curvatura relativo a esse ponto e evoluta da curva. Indique como se determina a representação analítica da evoluta da curva e suas propriedades.

2504 — Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^3}}$.

2505 — Determine os pontos singulares, as assíntotas e a curvatura no ponto $(-1,\ 1)$ da curva

$$y^3 - x^3 - x^2 - y^2 = 0\,.$$

I. S. A. — CALCULO INFINITESIMAL — **Alguns pontos do 2.º Exame de frequência, 1946-47.**

2506 — Calcule a área definida pelas relações

$xy \leq 8$, $y \geq x^2$, $y \leq 8$. R: $\mathrm{A} = \int_0^8 \sqrt{\mathrm{y}}\,\mathrm{dy} + \int_0^{\sqrt[3]{8^2}} \sqrt{\mathrm{y}}\,\mathrm{dy} + \int_{\sqrt[3]{8^2}}^{8} 8/\mathrm{y}\,\mathrm{dy} = 16/3\,[1+\sqrt{8}] + 8 \log \sqrt[3]{8}$.

2507 — Calcule a área definida pelas relações

$$x^2 + y^2 - 4x \leq 0 \text{ e } y^2 + 2 - x \leq 0\,.$$

R: $\mathrm{A} = 2\int_a^b \sqrt{\mathrm{x}-2}\,\mathrm{dx} + 2\int_b^c \sqrt{4\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}\,\mathrm{dx} = 4/3\,[(\mathrm{x}-2)^{3/2}]_a^b + 32\left[\operatorname{arc\,tang}\frac{\sqrt{4\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}}{\mathrm{x}} - \frac{\sqrt{4\mathrm{x}-\mathrm{x}^2}}{4\mathrm{x}}\right]_b^c$, *onde* $\mathrm{a}=2$, $\mathrm{b}=(3+\sqrt{17})/2$ *e* $\mathrm{c}=4$.

2508 — Mostre que a sucessão de funções da variável x, de termo geral $f_n(x) = 1/(1+|x|^n)$, é convergente qualquer que seja x e uniformemente convergente, em qualquer intervalo fechado a que não pertençam os pontos $+1$ e -1. R: *Para* $\mathrm{x}=0$ *e* $|\mathrm{x}|<1$ *tem-se* $\mathrm{f_n(x)} \to 1$; *para* $|\mathrm{x}|>1$, $\mathrm{f_n(x)} \to 0$ *e para* $|\mathrm{x}|=1$, $\mathrm{f_n(x)} \to 1/2$. *Em qualquer intervalo, a que pertençam os pontos* 1 *ou* -1 *ou ambos, a sucessão não converge uniformemente visto nesses pontos a função limite ser discontinua; em qualquer outro intervalo fechado nas condições do problema é fácil de ver que o conjunto* $\mathrm{N}(\varepsilon, \mathrm{x})$ *é limitado superiormente.*

2509 — Mostre que a sucessão de funções, da variável real x, de termo geral $f_n(x) = 1/[1+|x|]^n$ é convergente qualquer que seja x e uniformemente convergente em qualquer intervalo fechado que não contenha a origem.

2510 — Considere a função assim definida:
$f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{2x-y+(x+y)^2}$ para todos os pares de valores (x,y) diferentes de $(0,0)$; $f(0,0)=0$. Estude a continuidade da função dada ao longo das rectas que passam pela origem. Pode concluir alguma coisa àcerca da continuidade da função dada na origem? R: *Fazendo* $\mathrm{ax}+\mathrm{by}=0$, *ou* $\mathrm{x}=\rho\cos\theta$ *e* $\mathrm{y}=\rho\operatorname{sen}\theta$, *substituindo em* $\mathrm{f(x,y)}$ *e tomando limites, conclui-se que a função é discontinua na origem visto ser discontinua no referido ponto segundo a direcção* $\mathrm{y}=2\mathrm{x}$ *e é discontinua em todos os pontos das rectas* $\mathrm{y}=\mathrm{mx}$ *que satisfazem a* $\mathrm{x}=(\mathrm{m}-2)/(1+\mathrm{m})^2$.

2511 — Idem $f(x,y) = \dfrac{x+(x+y)^2}{2y-(x-y)^2}$, $f(0,0)=0$.

2512 — Supondo que o sistema

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{u} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{v} = 1 \\ u^v + y^u = 1 \end{cases}$$

definem u e v como funções de x e y, calcule as derivadas de primeira ordem de u e v em ordem a y.

2513 — Idem $\begin{cases} x\cos u + v\cos y = u \\ x + v = y^u\,. \end{cases}$

Soluções dos n.os 2506 a 2513 de F. A. Carvalho Araújo.

F. C. L. — ANÁLISE SUPERIOR — **2.º Exame de frequência — 1945-46.**

2514 — *a*) Mostre que entre as superfícies integrais da equação $px+3qyx^2-4y^2=0$ existe uma família simplesmente infinita de superfícies cujas características verificam a igualdade $\dfrac{dp}{dq}+\dfrac{dy}{dx}=0$ e determine essa família (S). *b*) Ao longo de que outras linhas das superfícies (S) tem lugar a mesma igualdade? *c*) Determine a dupla infinidade de curvas que cortam sob ângulos rectos as superfícies (S). Projecções ortogonais dessas curvas no plano XOY. R: *a*) *O sistema de Charpit:*

$$\frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}^3} = \frac{\mathrm{dy}}{3\mathrm{y}\,\mathrm{x}^2} = \frac{\mathrm{dz}}{4\mathrm{y}^2} = \frac{\mathrm{dp}}{-(3\mathrm{p}\,\mathrm{x}^2+6\mathrm{q}\,\mathrm{xy})} = \frac{\mathrm{dq}}{-(3\mathrm{q}\,\mathrm{x}^2-8\mathrm{y})}$$

dá, em correspondência com $\mathrm{dp\,dx}+\mathrm{dq\,dy}=0$:

$$-3p\,x^3-6q\,yx^2-9y\,qx^2+24\,y^2=0$$

ou, atendendo à equação dada: $2q\,yx^2-4y^2=0$; *donde* $q=2y/x^2$.

Com este valor de q, *a equação proposta dá, para* p, *o valor* $p=-2y^2/x^3$ *e a equação diferencial total das superfícies* (S) *é a equação de Pfaff:*

$$dz=-\frac{2y^2}{x^3}\,dx+\frac{2y}{x^2}\,dy$$

ou

$$dz=\frac{2y\,x^2\,dy-2y^2\,xdx}{x^4}=d\left(\frac{y^2}{x^2}\right).$$

Integrando: $z=y^2/x^2+C$.

b) Substituindo as expressões de p *e* q *na igualdade* $dp\,dx+dq\,dy=0$ *logo se deduz que é* $x^2\,dy^2+3y^2\,dx^2-4xy\,dx\,dy=0$ *o que dá:* $dy/dx=y/x$ e $dy/dx=3y/x$.

A 2.ª corresponde às características; a 1.ª define a outra família de linhas de (S) *ao longo das quais e ainda verdadeira a equação* $dp\,dx+dq\,dy=0$ *e dá:* $y=c_1\,x$.

c) A ortogonalidade referida no enunciado equivale ao sist. dif.

$$\frac{dx}{-2y^2/x^3}=\frac{dy}{2y/x^2}=\frac{dz}{-1}.$$

Uma primeira combinação integrável é $xdx+ydx=0$ *e dá* $x^2+y^2=\alpha$.

A segunda deduz-se agora por substituição:

$$\frac{\alpha-y^2}{y}\,dy=-2\,dz\,,\quad \log|\,y^\alpha\,|-\frac{y^2}{2}=-2\,z+\beta.$$

E as linhas trajectórias são as da congruência:

$$x^2+y^2=\alpha,\ \log|\,y^\alpha\,|-y^2/2=-2z+\beta.$$

A circunstância particular de não figurar z *na 1.ª destas equações faz com que seja essa a equação das projecções ortogonais pedidas.*

2515 — Considere o integral $\int_{(c)}\frac{e^z\cdot z^{-1}}{1-z^2}\,dz$ onde (c) se supõe definido por $|\,z-(1+i)\,|=R$, condicionado o valor de R ao facto de se encontrar o contorno (c) inteiramente traçado na região do plano (z) em que

$$1<|\,z-(1+i)\,|<A.$$

Para que valores de A se pode afirmar que (c) inclui, no seu interior, um só ponto singular da função integrando? E dois pontos singulares? Faça, em cada uma destas hipóteses, o cálculo do integral.

R: *Pontos singulares:* $z=0$, $z=+1$, $z=-1$.

Se $R<\sqrt{2}$, (c) *contém um só ponto singular:* $z=+1$ *e o correspondente valor do integral é* $-\pi ei$.

Se $\sqrt{2}<R<\sqrt{3}$, *são interiores a* (c) *os 2 pontos singulares* $z=0$ e $z=+1$; *e o valor do integral, é então:* $2\pi\,i\,(1-e/2)$.

F. C. L. — Análise Superior — Exame final, 21 de Junho de 1947.

2516 — Considere o duplo lacete (c) envolvendo os pontos $z=0$ e $z=1$, percorrido no sentido negativo, e mostre que $I_1=\int_{(c)} f(z)\,dz=2\pi i\,[R(2)+R(-2)+R(\infty)]$ sendo $f(z)=\dfrac{1}{(z^2-4)\sqrt{z\,(1-z)}}$.

Faça $z=\rho\,e^{i\theta}$, $z-1=\rho_1\,e^{i\theta_1}$. Calcule $R(2)$, $R(-2)$ e $R(\infty)$. Mostre que $I_1=2\int_0^1\frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x\,(1-x)}}$ e calcule $\int_0^1\frac{dx}{(x^2-4)\sqrt{x\,(1-x)}}$.

2517 — As superfícies de certa família (S) verificam a seguinte propriedade: «A soma dos quadrados dos parâmetros directores da normal é igual a z^2+1 (z — cota de um ponto genérico). *a)* Escreva a equação às derivadas parciais, a que se subordinam essas superfícies. *b)* Determine um integral completo (tome $tg\,c_1$ como primeira constante). *c)* Mostre que as características constituem um sistema de linhas de curvatura e determine o outro. Interprete geomètricamente as superfícies do integral completo determinado, mostrando que, ao longo delas, tem lugar uma relação da forma $Ap+Bq+C=0$, com A, B e C constantes. Exprima estas constantes na do integral completo. *d)* Estabeleça a relação entre as constantes do integral completo, à qual corresponde a superfície de Cauchy relativa à curva $z-1=1-xy=0$. *e)* Estabeleça a equação diferencial a que se sujeitam as superfícies (S) — família simplesmente infinita — que são de revolução em torno de $0y$. Prove a existência de essas superfícies.

Enunciados e soluções dos n.os 2514 a 2517 de Humberto de Menezes.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

64 — ADAM, Pedro Puig — **Curso de Geometria Metrica**, Tomo I, Fundamentos — Primera Edicion — Madrid 1947 — Patronato de Publicaciones de la Escuela Especial de Ingenieros Industriales. Preço 80 pts.

Depois dos trabalhos de David Hilbert sobre os fundamentos da geometria é impossível escrever qualquer obra sobre o assunto que os ignore. A análise profunda feita naquela época, principalmente, por