

2625 — If

(i)  $a_n > 0, b_n > 0$  for all  $n$

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l > 0,$

show that the series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  converge and diverge together.

Discuss the convergence of the series

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{\log(n+1) - \log n}{n}}$ , (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \sqrt{\frac{2n^2 - 1}{n^6 + 2n^4 + 3}}$ .

2626 — (i) Show that, for  $|r| < 1,$ 

$$r \sin \varphi - r^3 \sin 3\varphi + r^5 \sin 5\varphi - r^7 \sin 7\varphi + \dots = \frac{r(1-r^2) \sin \varphi}{1+r^2 \cos 2\varphi + r^4}$$

(ii) Sum to infinity

$$\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

2627 — Show that the series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converges or diverges according as  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}$  is  $< 1$  or  $> 1$ .

Deduce the formula for the radius of convergence of any power series.

Find the radius of convergence of

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^3} x^n.$$

2628 — By means of the substitution  $x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1}$  where  $\mu, \nu$  are appropriate constants, or otherwise, find the integral

$$\int \frac{x dx}{(3x^2 + 8x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 1}}$$

2629 — Define a Riemann integral.

By dividing the interval  $0 \leq x \leq 1$  into parts whose lengths are in the ratio  $1:2:3:\dots:n$ , show that, as  $n \rightarrow \infty,$

$$\frac{2}{n(n+1)} \sum_{k=1}^n k f\left(\frac{k(k+1)}{n(n+1)}\right) \rightarrow \int_0^1 f(x) dx,$$

where  $f(x)$  is any function continuous in  $0 \leq x \leq 1$ .

Hence, or otherwise, show that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{n^2(n+1)^2 + k^2(k+1)^2}} = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}).$$

2630 — Solve:

(i)  $(y - xy')^2 = y'$

(ii)  $y'''' + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = e^{-x}.$

O exame incluía ainda outra prova de matemáticas aplicadas (respectivamente Geometria e Mecânica).

## BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

66 — HEITLER, W. — **Elementary Wave Mechanics.** VIII + 136 pp. Clarendon Press, Oxford, 1945. Preço 7s 6d.

Este pequeno livro — uma das melhores introduções elementares à Mecânica Ondulatória que conhecemos — parece ter sobretudo por fim conduzir o leitor à compreensão clara da natureza essencialmente não clássica, isto é quântica, do fenómeno que é talvez o mais fundamental da química: a valência homopolar. Depois de mostrar a necessidade da descrição ondulatória das partículas e de deduzir a equação de onda para estados estacionários de um só electrão (equação estática de Schrödinger), trata o átomo de

hidrogénio e discute a sua quantificação e o efeito Zeeman. Vem a seguir uma exposição simplificada mas admirável do problema do átomo de hélio (problema de dois electrões) por meio da equação das ondas estacionárias no chamado «espaço de configuração» a seis dimensões. Desprezando primeiramente a interacção dos dois electrões, põe em evidência a relação íntima que existe entre o princípio de exclusão de Pauli e a propriedade de indiscernibilidade de partículas da mesma espécie e mostra como esta propriedade restringe as funções de onda às classes simétrica e antisimétrica relativamente às permutações das posições das partículas. A interacção dos electrões é analisada então pela teoria das pertur-

bações, o que faz aparecer o fenómeno caracteristicamente quântico da «energia de troca» a que correspondem forças de natureza não clássica. A origem destas forças é afinal a indiscernibilidade das partículas de mesma espécie. A mesma propriedade fundamental aparece com um papel dominante no capítulo sobre a teoria da ligação química homopolar e no capítulo final sobre valência, onde são tratadas, entre outras questões, a molécula de hidrogénio, os gases inertes, a relação entre a valência e o spin, a valência do carbono, etc.

A clareza e o poder didactico destes dois últimos capítulos não podem ser excedidos, o que de resto era de esperar da parte do autor, um dos físicos teóricos que mais contribuíram para a criação da química quântica. Devemos no entanto chamar a atenção para três características do livro que consideramos como defeitos.

1.º O autor, resolutamente indeterminista, dá às funções de onda da Mecânica Ondulatória uma interpretação essencialmente probabilística de acordo com as ideias de Born e da «escola de Copenhague». Isto pode induzir no espírito dos principiantes a ideia errónea que essa interpretação faz parte dos fundamentos da Mecânica Ondulatória, quando é certo que as funções de onda podem ser interpretadas duma maneira muito diferente, compatível com um determinismo essencial dos fenómenos e em que a noção de probabilidade cede o lugar à noção mais geral de intensidade (dos valores possíveis das grandezas), sendo por exemplo a noção de probabilidade de presença duma partícula num elemento de volume substituída pela noção de intensidade de presença da partícula nesse volume.

2.º As funções de onda nos espaços de configuração para sistemas de mais de uma partícula são consideradas da mesma natureza que as funções de onda para sistemas de uma única partícula. Ora, existem diferenças essenciais entre estes dois casos. Ao passo que as funções de onda de sistemas «monoparticulares» descrevem estados reais, as funções no espaço de configuração para sistemas «pluriparticulares» servem apenas para descrever os estados virtuais, isto é os estados em que se encontrariam os sistemas se as partículas que os compõem, em vez de se encontrarem, num determinado momento, nas posições que ocupam efectivamente se encontrassem em qualquer outra posição. É precisamente este carácter puramente virtual das funções de onda que permite compreender a significação física dos espaços de configuração e da indiscernibilidade.

3.º A dedução da equação de onda para um sistema pluriparticular é feita por uma generalização

da regra da Mecânica Ondulatória que faz corresponder os operadores de derivação espacial e temporal aos momentos e à energia. Ora, é possível deduzir esta equação por um processo mais fundamental, utilizando apenas a indiscernibilidade de partículas da mesma espécie.

As três características que acabamos de apontar são de resto comuns à grande maioria dos livros e memórias de física teórica quântica. Por um lado a vaga de indeterminismo que assola a ciência contemporânea e a que poucos físicos têm resistido, vai obscurecendo os fundamentos da Mecânica Ondulatória, interpretando infundadamente as chamadas relações de «incerteza» das medidas simultâneas de grandezas «canonicamente conjugadas» e fazendo uma separação arbitrária e cosmologicamente insustentável entre observador e objecto observado. Por outro lado, a confusão entre funções de onda de estados reais e funções de onda de estados virtuais não deixa ver que é possível estabelecer nma Mecânica Ondulatória cujas funções de onda descrevam duma maneira não arbitrária o conjunto dos corpúsculos elementares do espaço-tempo sem separações entre observadores e sistemas observados.

António Gilão

67 — FLETCHER, A., MILLER, J. C. P. and ROSENHEAD, L. — *An Index of Mathematical Tables*, London, 1946 — Scientific Computing Service, Ltd.

Matemáticos, físicos, engenheiros, astrónomos, estatísticos e todos aqueles que, acidental ou frequentemente, têm de utilizar ou elaborar tabelas de funções para a investigação ou para as variadas aplicações à técnica, ficaram devendo aos Autores deste Index um enorme serviço pela economia de tempo nas consultas de bibliotecas, ou na repetição escusada de cálculos, e pela fonte de numerosas e preciosas informações que a publicação fornece guiando e facilitando a construção de novas tabelas.

Não se trata duma simples catalogação das tabelas publicadas até hoje desde o século xvi mas sim duma ordenada e inteligente compilação.

Para poder ser utilizado com proveito o Index, é indispensável a leitura da Introdução onde os Autores indicam como planearam a obra e nos dão indicações da maneira de dela nos servirmos. Apresentam-nos em seguida uma lista das abreviaturas utilizadas para indicar os meios de interpolação que uma tabela referida nos fornece.

Segue-se a 1.ª parte do Índice, relativo às funções, compreendendo 24 secções, cada uma agrupando um tipo, ou congéneres, de funções. É impossível resumir

o conteúdo destas secções apontando a simples título de ilustração: números primos, potências de números, factoriais, coeficientes binomiais, números de Bernoulli e de Euler, logaritmos, funções trigonométricas naturais e seus logaritmos, funções circulares inversas, funções hiperpólicas, função  $r$  e  $B$ , função de Legendre. Bessel, elípticas, etc, etc.

Para cada tabela de funções citada é indicado o número de decimais ou de algarismos significativos, os valores extremos e a equidistância dos valores do argumento, as facilidades que a tabela fornece para efeitos de interpolação, os erros que dada edição apresenta, etc.

A 2.<sup>a</sup> parte contém a Bibliografia por autores das publicações abrangidas na 1.<sup>a</sup> parte.

Termina o Index por um índice analítico da 1.<sup>a</sup> parte.

Anteriormente à publicação desta obra eram únicos auxiliares uma lista elaborada pelo Dr. Comrie, do «Scientific Computing Service» publicado em «Monthly Notices of the Royal Astronomical Society» e o jornal americano «Mathematical Tables and other Aids to Computation», cuja existência em Portugal ignoramos.

Julgamos que todas as bibliotecas científicas, observatórios, laboratórios, centros de estudos científicos e vários dos nossos serviços públicos devem possuir esta obra como valioso auxiliar.

Manuel Zaluar

**68 — COLEROOK, F. M. — Basic Mathematics for Radio Students, Wireless Word — Ilife & Sons Ltd. — Dorset House, Stamford Str., London.**

O livro pretende dar o essencial para que o estudante de assuntos de rádio possa abordar os problemas que este lhe põe, e consegue-o. Nos primeiros cinco capítulos o autor estuda gradualmente as *idéias fundamentais da álgebra*, ou melhor a simbologia da álgebra e as operações algébricas, depois as *equações e os números complexos*, a *continuidade*, os *limites*, as *séries* e por fim *noções de geometria e trigonometria*, tendo sempre em vista as suas aplicações.

No capítulo VI aborda o estudo do cálculo diferencial e integral e finalmente no capítulo VII faz aplicação do estudo feito a problemas da rádio, ou melhor de electricidade aplicada.

O livro é de formato reduzido com 270 páginas; é por isso um livro essencialmente prático onde os factos físicos, em geral, dão a sugestão ou justificação da teoria. Não põe, no entanto, inteiramente de lado toda a justificação teórica da matéria apresentada.

Em princípio o livro dirige-se aos estudantes de rádio, mas, como o autor diz, as idéias básicas da ma-

temática são comuns a todas as suas aplicações e o livro pode assim ser útil a todos os que queiram estudar a física com vista ás suas imediatas aplicações.

José da Silva Paulo

**69 — FERREIRA DE MACEDO, A. A. — A Geometria ao alcance de toda a gente — Vol. 2 — Col. «Cosmos».**

Neste volume apresenta o autor o estudo intuitivo das áreas e volumes de alguns sólidos, precedidos de um breve mas essencial estudo da geometria do espaço.

Pela clareza da matéria exposta recomenda-se a todo o indivíduo que pretenda adquirir uma cultura elementar sobre a geometria; pela sistematização, precisão e exactidão dos conceitos, aconselha-se a sua leitura a todo o candidato a uma escola superior e aos alunos dos anos mais adiantados do curso liceal. Em especial para os alunos que frequentam actualmente o 5.<sup>o</sup> ano, o livro é da máxima utilidade por estar em flagrante harmonia com os programas vigentes.

Este segundo volume bem como o primeiro, constituem preciosos e valiosos livros de iniciação matemática, pela segurança científica e exposição pedagógica que uma leitura cuidadosa põe em evidência. Como exemplo veja-se logo de início no livro I pág. 19 a maneira como o autor apresenta a «distância entre dois pontos». Na frase — ... é o que acontece quando nos encontramos num terreno plano, que podemos percorrer entre (dois pontos)  $A$  e  $B$  ... , verifica-se não só a finalidade de aclarar um conceito, como a de evitar induções que levem erradamente a supor-se que a distância mínima entre dois pontos seja sempre um segmento de recta.

Mais adiante, a páginas 27, dá o autor o significado da linha recta. Para isso materializa-a no traço obtido por uma ponta de um lápis que corre ao longo de uma régua assente num papel. Se bem que não tire dessa experiência a definição de linha recta como eixo de rotação (por não lhe interessar na orientação tomada), completa-a por fazer indirectamente alusão a tal definição.

Ainda no mesmo livro no Cap. IX apresenta aplicações práticas dos conhecimentos expostos.

No segundo livro destaca-se a maneira como o autor introduz a noção de perpendicularidade entre recta e plano, e as referências feitas à divisão de ângulos e de arco de circunferência.

Resumindo pode afirmar-se, que estes dois livros, escritos numa exposição corrente, são notáveis pelo rigor e simplicidade com que o autor trata as questões expostas.

Joaquim de S. M. G. Calado