

que o lugar geométrico dos pontos do plano cujas distâncias a dois pontos fixos estão numa razão constante é precisamente a circunferência de centro O cujo diâmetro \overline{AB} divide harmónicamente o segmento $\overline{Q'Q}$ dos dois pontos fixos (circunferência de Apolónio).

E de $(ABQ'Q) = -1$ resulta ainda, como se sabe do estudo das pontuais harmónicas, $\overline{OB}^2 = \overline{OQ'} \cdot \overline{OQ} = -d' d$, donde $d' = r^2/d$.

Em particular,

$$\frac{\overline{AQ'}}{\overline{AQ}} = \frac{r+d'}{r+d} = \frac{r(1+r/d)}{d(1+r/d)} = \frac{r}{d},$$

e, por conseguinte, $Q' = -Qr/d$.

Obtém-se assim o valor e a posição da carga Q' que, juntamente com Q , permite calcular o campo e o potencial em todos os pontos do dieléctrico exteriores à esfera condutora.

ASTRONOMIA

O PRETENSO PROBLEMA DA HORA NA ACTUALIDADE

O astrónomo não terá possibilidade, por muito tempo ainda, de reconhecer sequer esse milésimo do segundo que dizem ter-lhe oferecido a Radiotécnica

por **A. Baptista dos Santos** (Astrónomo de 1.^a classe do Observatório Astronómico de Lisboa)

Inicia-se entre nós, segundo parece, a propaganda entusiástica da obtenção radio-astronómica do milésimo do segundo. Diz-se, e escreve-se mesmo, mercê provavelmente de influências estrangeiras mais animosas e por isso menos reflectidas, ou, talvez melhor, por errada interpretação do que se tem dito e escrito lá por fora, que em matéria de determinação e conservação da hora *entrámos na era do milésimo do segundo* — tal qual se disse da bomba atómica.

E isto se afirma porque possuímos, também se diz, um guarda-tempo, o relógio de quartzo, que nos garante esse milésimo na sua preciosa marcha e porque os astrónomos melhoraram consideravelmente os seus instrumentos de observação e estão hoje de posse de um novo registador do tempo de extraordinária precisão e... velocidade porque nele *o segundo tem meio metro de comprimento*.

Com estas razões se procura, em conferências, nos jornais e em revistas técnicas, interessar professos e entusiasmar leigos, prometendo a estes o milésimo do segundo — áqueles seria menos fácil — como se da sua posse pudesse resultar-lhes uma melhoria certa das condições de vida.

Não podemos concordar com a afirmação e dizêmo-lo com mágoa porque a aquisição real do milésimo do segundo seria certamente de incalculável valor na investigação astronómica e, segundo parece, na Física Electrónica moderna.

E não podemos concordar porque as razões apresentadas não bastam para nela crermos e é até à afirmação contrária — *estamos longe, ainda, de atingir artronòmicamente o milésimo do segundo* — que nos conduz a análise fria do conjunto de tudo quanto possa influir na determinação exacta da hora; além do que se nos

afigura bem discutível, por enquanto, que os astrónomos tenham melhorado consideravelmente os instrumentos de observação.

Em poucas e por outras palavras poderíamos apresentar as razões da nossa discordância se nos dirigissemos apenas aos da especialidade, mas, porque o assunto é já do domínio público nacional e nos parece fácil expô-lo de modo que todos o entendam, para todos escrevemos na esperança de que seremos compreendidos.

*

Coube sempre ao astrónomo, em todos os tempos, a determinação exacta da hora porque só ele sabe e pode ler o padrão clássico de medida do tempo, esse gigantesco relógio natural que é a Terra animada do seu movimento de rotação.

A Mecânica ensinou-lhe que este movimento seria rigorosamente uniforme — condição indispensável a um padrão de medida do tempo — se a Terra fosse um sólido perfeitamente livre e invariável; e se ele sabe, por considerações também de ordem mecânica, que esta última condição se não pode realizar rigorosamente, a verdade é que determinados os defeitos de uniformidade, por comparação com outros relógios naturais — os movimentos dos planetas em torno do Sol —, os valores obtidos não justificam o abandono do padrão.

A condição de uniformidade não tem sido coisa que possa estabelecer-se por absoluto no laboratório e, deste modo, qualquer relógio construído pelo homem só tem sido considerado uniforme se, em relação ao padrão natural, ele se atrasar ou adiantar sempre da mesma quantidade em intervalos de tempo iguais.

Por bom ou mau que seja esse relógio, garanta ele ou não o desejado milésimo do segundo, o único meio de o reconhecer astronómicamente, isto é, de conhecer o seu estado em vários instantes e dele deduzir a sua *marcha* — respectivamente a correcção que é necessário fazer à leitura do seu mostrador para obter a hora exacta e a quantidade de que ele se adianta ou atraza diáriamente — tem sido sempre o da sua comparação com o padrão natural.

Nessa indispensável comparação o astrónomo terá de fazer a leitura deste padrão cujo mostrador é a esfera celeste e em que o ponteiro em qualquer lugar da Terra é o seu próprio meridiano. As zero horas são por convenção indicadas no mostrador por um ponto notável da esfera celeste, o equinócio vernal, que não é absolutamente fixo mas de que o astrónomo conhece as leis do movimento, podendo, assim, determinar a sua posição em qualquer instante.

Quando em qualquer lugar da Terra o seu meridiano coincidir com o equinócio vernal serão zero horas nesse lugar; em qualquer outro momento a hora do lugar será o ângulo horário do equinócio vernal, isto é, a sua distância angular ao meridiano, exactamente como no mostrador do nosso relógio da sala de jantar se ele só tivesse o ponteiro das horas — distância angular do ponteiro às zero horas (1).

Mas porque é incómodo um mostrador com uma só hora marcada e porque o equinócio vernal, não tendo existência real, não é um ponto visível que possa observar-se directamente, o astrónomo adoptou outros bem visíveis que a natureza se encarregou de distribuir profusamente por toda a esfera celeste, as estrelas, cujas distâncias a esse ponto notável das zero horas — distâncias angulares na direcção do movimento da Terra — ele mediou com o rigor que pode e vem acertando dia a dia. A esta distância chamou «*ascensão recta*» e ela será a hora dum lugar quando a estrela respectiva coincidir com o seu meridiano, porque, evidentemente, nesse momento a *ascensão recta* da estrela será igual ao ângulo horário do equinócio vernal.

Cada estrela indicará, assim, no mostrador a hora α , designando por esta letra grega a sua *ascensão recta*.

O meridiano não é, igualmente, uma linha real e já por isto já porque o observador tem fraca sensibilidade visual para determinar com perfeita exactidão, à vista desarmada, o momento da coincidência, ele serve-se,

na observação, dum instrumento provido dum eixo cujo eixo óptico deveria descrever rigorosamente o meridiano. Este absoluto rigor não é, porém, possível na prática e, assim, o instrumento mantém sempre uma certa distância ao meridiano que é uso designar por «*ângulo horário do instrumento*» e que o astrónomo procura conhecer com a mais perfeita exactidão.

A hora do lugar de observação, em dado momento, será, portanto, igual à *ascensão recta* da estrela que nesse momento cruza o meridiano do instrumento somada com o ângulo horário deste meridiano ou dele subtraída conforme o instrumento estiver a oeste ou a leste do meridiano verdadeiro, visto que a Terra gira de oeste para leste em torno do seu eixo.

Assim se lê o relógio padrão. E para o comparar com outro cujo estado queiramos conhecer basta ler este ao mesmo tempo, o que se consegue com o rigor necessário registando o momento em que se faz a leitura do padrão num aparelho cronográfico que marque os segundos do relógio a comparar.

* *

Vejamos que rigor poderemos esperar nesta comparação.

A exactidão da hora lida no padrão depende, como se vê, da exactidão com que são conhecidos o ângulo horário do instrumento e a *ascensão recta* da estrela; e ainda, evidentemente, do rigor com que o observador apreciou o momento da coincidência na leitura do padrão.

Os astrónomos têm procurado desde sempre melhorar o instrumento e os métodos de observação de modo a obterem com o mais perfeito rigor o ângulo horário daquele e o momento exacto da coincidência.

Muito se tinha já conseguido neste ponto mas a ânsia de atingir a perfeição fez-nos aparecer na América, há uns dez anos, um novo instrumento — ou melhor, uma adaptação ao serviço da hora de um instrumento destinado até então só à determinação da latitude, o Tubo Zenital (2) — que de novidade só tem o registo fotográfico da imagem da estrela utilizando um processo engenhoso, mas de eficiência prática ainda duvidosa, que dispensa a intervenção do astrónomo na observação, eliminando, assim, o seu erro pessoal. Procede-se com ele de modo a eliminar também o efeito do seu ângulo horário, mas os processos usados são os clássicos, um dos quais, o da inversão do instrumento nas observações meridianas, se deve a um português, o falecido almirante Frederico Augusto Oom, primeiro director do Observatório da Tapada.

(1) Não é por esta hora a que chamamos «hora sideral», das estrelas, que regulamos a nossa vida civil. Esta é regulada pela «hora solar» em que a referência é o Sol, mas o astrónomo sabe passar daquela para esta em qualquer instante. O padrão é o mesmo, a rotação da Terra, mas tem dois mostradores o se o astrónomo lê aquele e não este é porque isso lhe é mais fácil e a leitura mais rigorosa.

(2) Há cerca dum ano não havia ainda na Europa um único destes instrumentos.

Neste instrumento, a que poderemos chamar o instrumento moderno, puzeram os «milesimistas» todas as suas esperanças e nós poderíamos admitir com o Sr. J. Tinoco, distinto astrónomo do País vizinho, um dos que no-lo descrevem e que dele nos faz a justa critica, que o erro a esperar, usando-o na leitura do padrão, é de um centésimo do segundo por cada observação isolada de uma estrela — isto, é claro, em condições ideais de perfeição instrumental que não foi ainda possível obter inteiramente na prática. Mas por comodidade nossa e do leitor e porque desejamos falar, apenas, daquelas causas de erro de que pouco ou nada se tem dito e que reputamos de muito maior importância, vamos supôr nulo aquele erro: o *instrumento é rigorosamente perfeito*.

Fica-nos, portanto, apenas o erro da ascensão recta.

Ora, é do conhecimento de todos os que observam e sabem interpretar os resultados da observação que, não obstante esse já tão longo e continuado trabalho dos astrónomos de todo o Mundo, dispendido durante muito mais dum século em acertar as ascensões rectas das estrelas, elas não são ainda hoje conhecidas com perfeita exactidão; mesmo as daquelas estrelas de posições mais rigorosas que designamos por *fundamentais*. O seu erro sobe a alguns centésimos do segundo, por vezes ao décimo. E note o leitor que isto se reconhece, em qualquer observatório, mesmo com aqueles instrumentos e aquelas pêndulas que a moda, e não a razão fundamentada, entende dever agora substituir.

Mas nem só da experiência, da observação, nos pode advir aquele conhecimento. Pode toma-lo quem quizer consultando o Fk_3 , a efeméride de fundamentais por excelência: na última coluna de cada uma das páginas que contêm as posições médias das estrelas para o começo do ano, esse encontrará os erros prováveis dessas posições, e embora estes números não sejam de modo algum a medida da exactidão daquelas posições mas tão somente indiquem a precisão das observações que lhes deram origem, precisão essa que diminui de ano para ano devido à incerteza, no conhecimento dos movimentos próprios, por eles se poderá já formar uma ideia.

O erro cometido na determinação da hora seria, assim, exactamente o da ascensão recta, alguns centésimos do segundo, mais raramente o décimo, se fosse observada apenas uma estrela; mas o astrónomo observa sempre mais e o erro da média é menor.

A teoria dos erros ensina-nos que o seu valor é o quociente do erro numa observação simples pela raiz quadrada do número total das observações. Se, portanto, na medida duma grandeza uma só observação no-la der com um certo erro e quizermos obtê-la com um erro dez ou vinte vezes menor teremos que a medir

cem ou quatrocentas vezes e tomar a média das medidas simples.

Procuremos então determinar o número de estrelas que seria necessário observar para obter a hora com o erro de um milésimo do segundo apenas.

Admitamos, para isso, que é em média de três centésimos do segundo o valor absoluto da correcção que necessita cada uma das ascensões rectas de um grande grupo de estrelas e que as correcções se distribuem por elas segundo as leis dos erros acidentais de modo a podermos, legitimamente, aplicar-lhes a teoria dos erros. Por ela se sabe que o erro provável duma observação simples é aproximadamente igual à média dos erros e esta é exactamente igual a três centésimos do segundo, ou sejam trinta milésimos. Se quizermos obter a hora com o erro de um milésimo do segundo, trinta vezes menos do que aquele, teremos que observar *novecentas estrelas* visto que trinta é exactamente a raiz quadrada de novecentos.

O leitor viu já, certamente, como isto seria impraticável: novecentas estrelas, com o intervalo de quatro minutos, apenas, entre duas consecutivas, levariam sesenta horas seguidas a observar; o dia só tem vinte e quatro e dessas vinte e quatro só são úteis para a observação das estrelas aquelas em que o Sol está abaixo do horizonte.

Tomemos pois um grupo mais modesto: dezasseis estrelas, por exemplo, que é o número indicado para a observação com o instrumento moderno.

A hora obtida pela sua média virá com o erro de sete ou oito milésimos do segundo — cociente de trinta por quatro — e aí temos já um erro da ordem do centésimo do segundo.

Abandonemos agora as condições ideais, em que nos collocámos, de obedecerem as correcções às leis dos erros acidentais — num pequeno grupo de estrelas é pouco provável que isso suceda.

A aplicação da teoria dos erros não é já legítima, deixando de ter significação o número que por ela acabámos de determinar. A média das observações aparecer-nos-á, então, com um erro já de aspecto sistemático que é, evidentemente, igual à média das correcções (afectadas do seu sinal, positivo ou negativo) e se aproximará tanto mais do valor médio absoluto que adoptámos (tres centésimos do segundo) quanto maior for a disparidade entre o número das estrelas cujas ascensões rectas requerem correcções positivas e o das que requerem correcções negativas.

Logo, a inexactidão das ascensões rectas, e só ela, introduz na determinação da hora um erro compreendido entre *um e tres centésimos* do segundo.

É esta a primeira causa de erro em que não falam, pelo menos em Portugal, os propagandistas do milésimo.

Mas há ainda outra e essa de maior gravidade.

O observador — Perdão! O instrumento moderno quando estiver, com eficiência, em uso. — tem na atmosfera da Terra um inimigo até agora irredutível que caprichosamente, sem lei, ou, pelo menos, segundo lei que os astrónomos ainda desconhecem por absoluto, lhe falseia a observação das coincidências, desviando-lhe para um e outro lado da sua posição verdadeira a direcção em que é vista a estrela.

Quero referir-me às refrações laterais na direcção do paralelo: a cintilação paralactica e as refrações accidentais.

A primeira traduz-se por uma vibração da imagem da estrela, de pequena amplitude e curto período, devida à agitação das camadas altas da atmosfera. Por ser de período bastante curto, é de pequena importância visto que na observação de uma estrela se fazem sempre várias coincidências e a sua média vem praticamente isenta dos desvios por ela provocados.

As segundas dão origem a deslocamentos da imagem da estrela, para um e outro lado, da ordem do décimo do segundo e de período compreendido entre quinze e vinte segundos. Têm explicação na forma ondulada, e não perfeitamente esférica, das superfícies de separação das camadas baixas da atmosfera de densidades diferentes.

Estas são já de grande importância na observação porque, sendo o seu período de quinze a vinte segundos, não é a média de algumas coincidências que consegue eliminar completamente os seus efeitos; mas se aquela ondulação é larga e teimosamente se mantém sem mudança de forma por largo tempo, a refração perde o caracter accidental e passa a ser constante, o que é pior porque desvia da mesma quantidade e no mesmo sentido todas ou grande parte das estrelas a observar.

E aqui temos, então, outro erro inevitável que pode atingir o décimo do segundo e que, como o da ascensão recta, nenhum instrumento, moderno ou antigo, consegue eliminar.

Neste também não falam os entusiastas do milésimo.

*

Estabelecido, portanto, como parece ter ficado, que a leitura do padrão se não pode fazer com precisão muito superior a alguns centésimos do segundo — apenas um ou dois centésimos quando nos sai a sorte grande por ter a atmosfera da Terra assinado conosco tréguas momentâneas — procuremos, agora, determinar a marcha dum cronómetro — do relógio de quartzo, por exemplo, que, se não estamos em erro, conta já um quarto de século de existência não obstante só agora se lhe reconhecerem as virtudes todas.

Para o fazermos, teremos de o comparar com o pa-

drão pelo menos duas vezes, uma no principio e outra no fim dum certo intervalo de tempo. Admitamos que é de cinco centésimos do segundo o erro cometido na leitura do padrão em qualquer das comparações.

O erro do intervalo de tempo medido, quer ele seja grande quer seja pequeno, — diz-no-lo a teoria dos erros — é aproximadamente de sete centésimos do segundo, para mais ou para menos.

Se, por simplicidade de raciocínio, supozermos ainda que o nosso cronómetro é rigorosamente uniforme e que é nula a sua marcha em relação ao padrão, que nos levará, não obstante, a dizer dele aquele erro cometido?

Como em astronomia é o resultado da observação que faz fé, se errámos para mais diremos que ele se atrasou de sete centésimos do segundo naquele intervalo de tempo; se para menos, que ele se adiantou dos mesmos sete centésimos.

Se o intervalo medido for pequeno, menor do que vinte e quatro horas, da sua medida deduziremos uma marcha diária superior a sete centésimos do segundo, positiva ou negativa.

Se o intervalo for grande, de setenta dias, por exemplo, poderíamos dizer que o nosso cronómetro se atrasou ou se adiantou de um milésimo do segundo por dia. Mas teremos a certeza de que ele assim marchou regularmente durante todo o intervalo? — Pode ter tido irregularidades da ordem do segundo e de curto período sem termos dado por elas; e se para o reconhecermos medirmos, a seguir, um intervalo menor, cometeremos um erro da mesma ordem e teremos de concluir que deve ter havido irregularidades porque a marcha do cronómetro é agora muito diferente.

Mas admitamos que a fé no nosso relógio é grande: conhecedores como somos, de que é precária a precisão da leitura do padrão, chegados que fomos à determinação de um milésimo do segundo para a sua marcha diária, não procuraremos irregularidades medindo intervalos menores e adoptaremos o sistema de observar somente de setenta em setenta dias, isto é, apenas cinco vezes por ano. Deste modo determinaremos sempre o milésimo do segundo para marcha diária do nosso cronómetro, umas vezes positiva, outras vezes negativa, segundo as leis do acaso.

Será isto que nos permite afirmar que entramos na era do milésimo do segundo? Se é, já lá entramos muitas vezes e desde há muito, com aquelas pêndulas e aqueles instrumentos velhinhos que há no Observatório da Tapada: ali verificámos nós, há dias, que o astrónomo encarregado das observações de tempo — por sinal o Director — obteve uma diferença de dois milésimos do segundo na medida de um intervalo de sete dias; desta vez entrou ele na era dos três décimos milésimos do segundo.

Mas voltemos ao nosso raciocínio. Admitamos que na medida do primeiro intervalo de setenta dias determinamos, pela observação, a marcha positiva de um milésimo do segundo para o nosso cronómetro; ele atrazase, portanto, diáriamente de um milésimo do segundo. Como só voltaremos a observar passados outros setenta dias, o estado do cronómetro durante o intervalo seguinte terá de ser determinado por extrapolação e para o obtermos em certo dia nó somaremos um milésimo do segundo ao do dia anterior. Imediatamente antes da observação seguinte nós teremos adicionado setenta milésimos ao estado determinado pela observação anterior. Se na medida do segundo intervalo tivermos errado da mesma quantidade e para menos, como é natural segundo as leis do acaso, verificaremos que o estado determinado por extrapolação requer a correção de dezassete centésimos do segundo.

Quer dizer: a observação indica-nos que tínhamos o relógio errado de cento e setenta milésimos. Que isto nos suceda irremediavelmente em plena era do milésimo é coisa que não cabe na cabeça de ninguém.

E afinal, todas estas conclusões são illusórias porque de antemão supozemos que é nula a marcha do cronómetro.

Conclusão real, verdadeira, só pode ser esta: *No estado actual da Astronomia é impossível reconhecer pela observação que as irregularidades da marcha dum cronómetro são da ordem do milésimo do segundo.*

E por muito tempo ainda se manterá a situação

visto que a revisão das ascensões rectas e a determinação rigorosa dos movimentos próprios das estrelas não é tarefa de meia dúzia de anos. Quanto a refrações laterais cremos bem que nem mesmo se sabe por onde se lhes pegar.

O problema da hora na actualidade é, pois, o de ontem e será o de amanhã porque não são o relógio de quartzo e o instrumento moderno que lhe dão a solução.

Como é então que com tanta facilidade e convicção, que só o entusiasmo irreflectido pode justificar, se afirma que entramos na era do milésimo do segundo?

Haverá algum processo alheio à Astronomia, processo de laboratório que desconhecamos, que permita reconhecer a rigorosa uniformidade do relógio de quarto e determinar rigorosamente a sua marcha em relação à rotação da Terra, já que por esta temos regulado o calendário e a nossa vida toda? Dispensa de facto esse relógio o «controle» da Astronomia?

Em caso afirmativo, parece naturalmente indicado o abandono do padrão clássico e a sua substituição pelo padrão de laboratório. Mas haverá alguém que se atreva a fazê-lo sem recear seriamente ter de constatar, passado algum tempo, que, por exemplo, o dia de S. Martinho indicado pelo seu padrão lhe cai exactamente em verdadeiro 1.º de Dezembro de tão grata comemoração para os portugueses?

Lisboa, Maio de 1948.

P E D A G O G I A

INSEGNARE COSE VECCHIE IN MODO NUOVO

di *Umberto Forti* (Milano)

Da tempo lo spirito dogmatico, che aspirava a fare del sapere una collezione di «nozioni», è stato detronizzato. Noi cerchiamo di cogliere le dottrine ed i fatti nella loro genesi e nel loro significato. La storia, la poesia, la filosofia, vogliamo studiarle al vero, cogliendone i valori nel loro stesso prodursi, nell'atto unico e — in certo senso — supremo in cui si formano, e prendono vita, e parlano al nostro spirito. Nè è da rimproverare ai docenti di matematica di rimanere indietro in questo moto della coscienza moderna. Ma quà e là, nella matematica come in ogni altro dominio del sapere, vi sono ancora «nozioni» così semplici e di così scarso rilievo — vere cenerentole della scienza — che passando accanto ad esse noi non vi gettiamo più di uno sguardo sbadato, per puro obbligo di ufficio.

Se una volta però, noi ci soffermiamo a pensarle, anche queste nozioni ci appaiono interessanti, e presto osserviamo che esse sono tanto vive quanto altre, a cui siamo soliti dedicare meno affrettata considerazione. Ma per le prime occorre propiziare il genio delle piccole cose, se non addirittura quell'esprit des infiniements petits che un Ministro poco benevolo rimproverava al grande Newton. E noi lo propiziamo volentieri a favore di un vecchio e modesto argomento: *Il quadrato del binomio*. La prima osservazione è che esso, insieme al prodotto notevole, non è che un caso particolare di un'operazione più generale: e che dunque converrebbe che come tale venisse insegnato, per ragioni che accenneremo poco appresso, e che — del resto — è facile intuire.

I vari libri di algebra elementare indicano quà e là