ANO IX-N.º 36 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO - 1948

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Sur le déficit isopérimétrique d'un polygone formé par des arcs de cercle

par H. Hadwiger (Berne)

Si, dans la présente notice, nous tenons à communiquer quelques relations géométriques élémentaires concernant le déficit isopérimétrique d'un polygone plan formé par des arcs de cercle, c'est tout d'abord parce que ces constatations sont facilement vérifiables.

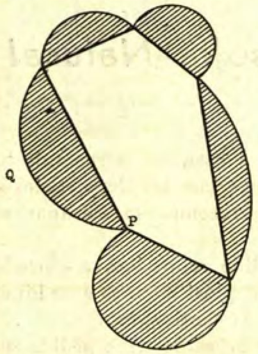

Fig. 1

Considérons un polygone convexe P. Nous lui adjoignons un polygone Q formé par des arcs de cercle et tracé selon le procédé suivant: chaque côté de P est remplacé par un arc de cercle reliant ses deux extrémités et dirigé contre le dehors (voir fig. 1).

Pour éviter une intersection des arcs de Q, nous exigeons ce que nous appellerons la propriété (*): la somme des deux angles inscrits dans les segments de cercle formés par deux arcs consécutifs ne doit pas dépasser 2π.

Les arcs consécutifs d'un polygone de la propriété (*) forment une courbe fermée, sans points doubles, circonscrite au polygone initial P. Désignons respectivement par L et $\overline{L}$ la longueur des polygones Q et P, par F et $\overline{F}$ l'aire engendrée par Q et P, et considérons le déficit isopérimétrique

$$(1) \qquad D = L^2 - 4\pi F$$

du polygone Q. Selon l'inégalité isopérimétrique classique on a

$$D \geq 0.$$

Comme on sait, il existe un polygone convexe P_0 inscrit à un cercle K et ayant les mêmes côtés que P dans le même ordre cyclique. Si nous remplaçons les

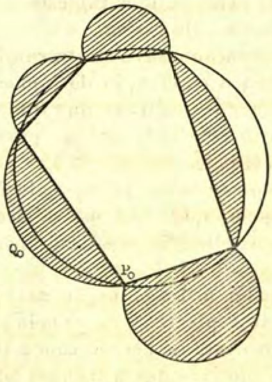

Fig. 2

côtés de P_0 par des arcs de cercle congruents aux arcs correspondants employés pour remplacer les côtés de P, nous obtenons un polygone Q_0 formé par les mêmes arcs que Q et ayant également — ceci est manifeste — la propriété (*) (voir fig. 2).