Anàlogamente, mostram as igualdades

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon_1\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\varepsilon_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

que as 4 matrizes I, c, d, g (que têm iguais os elementos não nulos) constituem novo sub-grupo de G_8.

Facilmente se veria que não há outros divisores próprios além dos que encontrámos:

$$I;\ \{I,a\};\ \{I,b\};\ \{I,c\};\ \{I,d\};\ \{I,g\};$$
$$\{I,e,e^2,e^3\}\equiv\{I,c,e,f\}\equiv\{I,f,f^2,f^3\};$$
$$\{I,a,b,c\};\ \{I,c,d,g\}.$$

Estes resultados estão de acordo com o facto de todo o grupo de ordem p^a (p primo) ter $p+1$ divisores de ordem p^α; e permitem-nos desenhar (fig. 2) o gráfico da estrutura dos sub-grupos de G_8 que, como mostra a sub-estrutura assinalada (e outras existem isomorfas a ela), é uma estrutura não modular.

Pode mesmo afirmar-se que 8 é a menor ordem de um grupo cujos divisores têm estrutura não modular, de acordo com o seguinte teorema que o exemplo apresentado nos sugeriu.

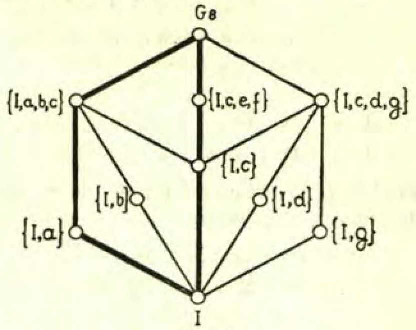
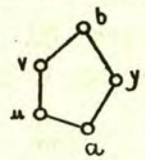


Fig. 2

TEOREMA: É modular a estrutura dos sub-grupos de qualquer grupo de ordem inferior a 8.

Com efeito, para que a estrutura não seja modular deve conter uma subestrutura isomorfa de



Ora o caso mais simples que se pode apresentar é aquele em que a é de ordem 1 (grupo unidade), u de ordem 2, v de ordem 4, b de ordem 8, q. e. d.

Uma desigualdade entre números positivos

por Maurício Matos Peixoto (Rio de Janeiro)

Sejam $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, n números não-negativos e suponhamos que dois deles, pelo menos, sejam diferentes de zero, isto é

$$x_{n-1} > 0.$$

Ponhamos

$$S = x_1 + \cdots + x_n.$$

Vamos demonstrar a relação

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Com efeito, ponhamos

$$(2)\qquad P=(S-x_1)\cdots(S-x_n),\ P_i=\frac{P}{S-x_i}\qquad (i=1,\cdots,n).$$

É claro, então, que

$$(3)\qquad 0 < P_1 \leqslant P_2 \leqslant \cdots \leqslant P_n.$$

A relação (1) a demonstrar é equivalente a

$$(4)\qquad \sum_{i=1}^{n} P_i x_i \geqslant \frac{n}{n-1} P$$

que se obtém de (1) multiplicando ambos os membros por P. Mas (4) ficará demonstrada se mostrarmos que

$$(5)\qquad A=\sum_{i=1}^{n}\left[(n-1)P_i x_i - P\right] \geqslant 0.$$

Mas, em virtude de (2),

$$(n-1)\,x_i P_i - P = (n-1)\,x_i \frac{P}{S-x_i} - P = P_i\,(n\cdot x_i - S)$$

e, portanto,

$$A=\sum_{i=1}^{n} P_i\,[n\cdot x_i - S].$$

Ponhamos

$$A_k=\sum_{i=1}^{k} P_i\,(nx_i - S),\qquad (k=1,2,\cdots,n).$$