

# Comprimento de uma curva. Área de uma superfície<sup>(1)</sup>

por **Ruy Luís Gomes**

## 1. Trajectórias

Perante a dificuldade que se sente à menor tentativa de definir *curva* ou *superfície*, dada a circunstância de se lhes atribuírem sentidos diferentes conforme o domínio—Geometria ou Análise—em que se consideram, vamos tomar como ponto de partida do desenvolvimento deste capítulo uma noção muito mais clara—a de *trajectória*.

Ora, interpretando-a à maneira corrente em Mecânica, como a *sucessão contínua das posições* de um ponto (móvel) com relação a um referencial determinado, chamaremos *trajectória* em  $E_2$  ou  $E_3$ , a toda *transformação contínua*,  $\Phi(t)$ , de um intervalo fechado,  $I=[a, b]$ , no espaço  $E_2$  ou  $E_3$ .

O ponto  $t \in I$  tem como imagem o ponto  $\Phi(t) \in E_2$  ou  $E_3$ , de coordenadas  $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$  ou  $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$ , que são, evidentemente, *funções contínuas*, de  $t$ , em  $I$ .

Inversamente, todo sistema,  $x_1=\varphi_1(t)$ ,  $x_2=\varphi_2(t)$  ou  $x_1=\varphi_1(t)$ ,  $x_2=\varphi_2(t)$ ,  $x_3=\varphi_3(t)$ , de funções contínuas de  $t$  em  $I$ , define uma transformação contínua  $\Phi[\varphi_1, \varphi_2]$  ou  $\Phi[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ , de  $I$  em  $E_2$  ou  $E_3$  e, portanto, uma *trajectória* de  $E_2$  ou  $E_3$ .

O conjunto  $\Phi(I)$ , imagem do intervalo fechado  $I$  e lugar das posições sucessivas do ponto móvel em  $E_2$  ou  $E_3$ , chama-se *gráfico* ou *traço* da trajectória.

Se é possível decompor  $I$  num número,  $n$ , de intervalos  $I_k=[t_{k-1}, t_k]$ ,  $t_0=a < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n=b$ , em cada um dos quais as funções  $\varphi_i(t)$  são *lineares*, a trajectória diz-se *poligonal*. Os segmentos  $\Phi(I_k)$ ,  $k=1, \dots, n$ , chamam-se *lados* e os pontos  $\Phi(t_k)$ ,  $k=0, \dots, n$ , *vértices* da poligonal; a soma dos comprimentos dos lados constitui o *trajecto*<sup>(2)</sup> da poligonal.

Dada uma trajectória qualquer,  $\Phi=\Phi(t)$ ,  $t \in I$ , diz-se que uma poligonal  $\mathcal{P}=\mathcal{P}(t)$ ,  $t \in I$ , está *inscrita* em  $\Phi$ , se os *vértices* de  $\mathcal{P}$  são pontos de  $\Phi(I)$ .

Nestas condições, toda cadeia  $\{t_k\}$ ,  $k=0, \dots, n$ , entre  $a$  e  $b$  dá origem a uma *poligonal inscrita* em  $\Phi$ : a que tem por *lados* os segmentos  $\Phi[t_{k-1}, t_k]$ ,  $k=1, \dots, n$ ,

*Comprimento (trajecto) de uma trajectória*,  $\Phi=\Phi(t)$ ,  $t \in I$ , é o supremo,  $L(\Phi)$ , dos trajectos,  $p$ , das poligonais  $\mathcal{P}$ , inscritas em  $\Phi$ .

**TEOREMA 1.** *O comprimento,  $L(\mathcal{P})$ , de uma poligonal coincide com o seu trajecto.*

Com efeito, segundo a definição de  $L(\mathcal{P})$ , tem-se  $p(\mathcal{P}') \leq L(\mathcal{P})$ , qualquer que seja a poligonal  $\mathcal{P}'$  inscrita em  $\mathcal{P}$ .

Mas, por outro lado, se  $\mathcal{P}'$  está inscrita em  $\mathcal{P}$ , vê-se imediatamente que  $p(\mathcal{P}') \leq p(\mathcal{P})$ , portanto  $p(\mathcal{P}') = L(\mathcal{P})$ .

A noção de *comprimento*,  $L(\Phi)$ , é, pois, uma extensão da de *trajecto*  $p(\mathcal{P})$ , de uma poligonal. Trata-se de uma função da trajectória  $\Phi(t)$  e não do conjunto  $\Phi(I)$ .

Se forem  $\Phi(t_k)$ ,  $k=0, \dots, k=n$  os vértices de  $\mathcal{P}$ , considerados por ordem crescente dos  $t_k$ , teremos

$$p(\mathcal{P}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2}.$$

**TEOREMA 2.** *A condição necessária e suficiente para que  $L(\Phi)$  seja finito, é que as funções  $\varphi_i(t)$ ,  $i=1, 2, 3$ , tenham variação total limitada.*

*Condição necessária.* Na verdade, como

$$|\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2},$$

vem

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)| \leq p(\mathcal{P}) \leq L(\Phi),$$

donde<sup>(1)</sup>  $V(\varphi_i) \leq L(\Phi)$ .

*Condição suficiente.* De

$$\sqrt{\sum_{i=1}^3 [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2} \leq \sum_{i=1}^3 |\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)|,$$

tira-se  $p(\mathcal{P}) \leq \sum_{i=1}^3 V(\varphi_i)$  e, portanto,  $L(\Phi) \leq \sum_{i=1}^3 V(\varphi_i)$ .

Consideremos agora a família,  $\{\Phi\}$ , de todas<sup>(2)</sup> as transformações contínuas ou trajectórias,  $\Phi(t)$ ,  $t \in I$  e introduzamos a noção de *distância*,  $d(\Phi, \Psi)$ , de duas transformações  $\Phi, \Psi$ , pela seguinte relação:  $d(\Phi, \Psi) = \sup_{t \in I} d(\Phi(t), \Psi(t))$ , em que  $d(\Phi(t), \Psi(t))$

representa a distância dos pontos  $\Phi(t), \Psi(t)$  de  $E_m$ .

(1) Excerpto do Capítulo VII da obra a publicar brevemente intitulada «Integral de Riemann».

(2) Não lhe chamamos *perímetro*, visto que até se pode dar o caso de os lados  $\Phi(I_k)$ , como conjuntos de  $E_2$  ou  $E_3$ , não serem todos *distintos* ou de se reduzirem a um ponto.

(1) Ver *condição  $V_i$* , Cap. II, § 3, pág. 63.

(2) Transformações contínuas de um mesmo intervalo  $I$ .

Como  $\varphi_i(t), \psi_i(t), i=1, 2, 3$ , são funções contínuas no intervalo fechado  $I$ ,

$$d(\Phi(t), \Psi(t)) = \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\varphi_i(t) - \psi_i(t)]^2}$$

admite um supremo (máximo) finito em  $I$  e, portanto,  $d(\Phi, \Psi)$  é um número não-negativo.

Imediato é também que

$$d(\Phi, \Psi) = 0 \text{ se e só se, } \varphi_i(t) = \psi_i(t), t \in I;$$

$$d(\Phi, \Psi) = d(\Psi, \Phi);$$

$$d(\Phi, \Psi) \leq d(\Phi, \Pi) + d(\Pi, \Psi),$$

sendo  $\Phi, \Psi, \Pi$  três trajectórias quaisquer (relativas ao mesmo intervalo  $I$ ).

Ora, a partir da distância,  $d(\Phi, \Psi)$ , podemos introduzir na família ou espaço das transformações contínuas,  $\{\Phi\}$ , de um mesmo intervalo  $I$ , uma topologia; nos termos indicados no § 7, Cap. II, pág. 17.

Essa topologia transforma  $\{\Phi\}$ , num espaço de Kuratowski <sup>(1)</sup>.

**TEOREMA 3.** Nos termos dessa topologia,  $L(\Phi)$ , considerada como função numérica das trajectórias  $\Phi$ , de comprimento finito, é semi-contínua inferiormente.

Segundo a definição de continuidade, dada no Cap. II, pág. 43, em que o ponto  $x_0$  é substituído pela trajectória  $\Phi^{(0)}$  e o conjunto  $A \subset E_m$  pelo subconjunto do espaço topológico  $\{\Phi\}$  no qual  $L(\Phi) < \infty$ , tudo se reduz a demonstrar que, dado  $\delta > 0$ , existe uma vizinhança  $V(\Phi^{(0)}) \subset \{\Phi\}$ , tal que

$$L(\Phi^{(0)}) - \delta < L(\Phi) \text{ para } \Phi \in V(\Phi^{(0)}), L(\Phi) < \infty.$$

Ora, considerando a poligonal  $\mathcal{P}^{(0)}$ , de vértices  $\Phi^{(0)}(t_k), k=0, \dots, n$ , inscrita em  $\Phi^{(0)}$ , vem <sup>(2)</sup>

$$\begin{aligned} p(\mathcal{P}^{(0)}) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=0}^3 \{[\varphi_i^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_i(t_{k+1})]^2 + \\ &\quad + [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2 + [\varphi_i(t_k) - \varphi_i^{(0)}(t_k)]^2\}} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=0}^3 [\varphi_i^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_i(t_{k+1})]^2} \end{aligned}$$

(1) Ver definição em Cap. II, § 7, pág. 17.

(2) Basta utilizar a desigualdade

$$\sqrt{\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n y_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n z_j\right)^2} \leq \sum_{j=1}^n \sqrt{x_j^2 + y_j^2 + z_j^2},$$

que é verdadeira para quaisquer três sucessões  $\{x_j\}, \{y_j\}, \{z_j\}$   $j=1, \dots, n$ , de números reais, mediante as seguintes substituições:

$$\begin{aligned} n &= 3, x_1 = \varphi_1^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_1(t_{k+1}), x_2 = \varphi_1(t_{k+1}) - \varphi_1(t_k), x_3 = \\ &= \varphi_1(t_k) - \varphi_1^{(0)}(t_k); y_1 = \varphi_2^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_2(t_{k+1}), \dots; \\ z_1 &= \varphi_3^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_3(t_{k+1}), \dots \end{aligned}$$

Se a trajectória pertence a  $E_2$ , fazemos  $x_i = z_i = 0$ . A demonstração da desigualdade faz-se, por indução, a partir de  $n=2$ , em que é imediata [consultar S. Saks — *Theory of the Integral*, Warszawa, 1937, pág. 171].

$$\begin{aligned} &+ \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2} + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=0}^3 [\varphi_i(t_k) - \varphi_i^{(0)}(t_k)]^2}, \end{aligned}$$

donde

$$(1) \quad p(\mathcal{P}^{(0)}) \leq L(\Phi) + 2nd(\Phi^{(0)}, \Phi),$$

visto que a segunda parcela da desigualdade anterior não excede  $L(\Phi)$  e cada uma das outras duas é menor ou igual a  $nd(\Phi^{(0)}, \Phi)$ , se atendermos à definição de distância de duas trajectórias.

Mas, por definição de  $L(\Phi^{(0)})$ , dado  $\frac{\delta}{2} > 0$ , é sempre possível determinar uma poligonal  $\mathcal{P}^{(0)}$ , inscrita em  $\Phi^{(0)}$ , tal que  $L(\Phi^{(0)}) - \frac{\delta}{2} < p(\mathcal{P}^{(0)})$ .

Logo,  $L(\Phi^{(0)}) - \delta < L(\Phi)$ , para todas as trajectórias de comprimento finito, que pertençam à vizinhança (esférica),  $d(\Phi^{(0)}, \Phi) < \frac{\delta}{4n}$ , de centro  $\Phi^{(0)}$  e raio  $\frac{\delta}{4n}$ .

**COROLÁRIO.**  $L(\Phi)$  é o limite comum dos trajectos das poligonais inscritas em  $\Phi$ , que convergem para  $\Phi$  nos termos da topologia já introduzida.

Em primeiro lugar, dada uma poligonal  $\mathcal{P}(t), t \in I$ , inscrita em  $\Phi$ , de vértices  $\Phi(t_k), k=0, \dots, n$ , tem-se no intervalo  $[t_k, t_{k+1}]$ ,

$$d(\Phi(t), \mathcal{P}(t)) \leq d(\Phi(t), \Phi(t_k)) + d(\Phi(t_k), \Phi(t_{k+1})) < \delta,$$

desde que o diâmetro,  $d(t_k)$ , da cadeia  $\{\Phi\}$  seja suficientemente pequeno <sup>(1)</sup>.

Consequentemente, dado  $\delta > 0$ , é sempre possível determinar  $\varepsilon > 0$ , por maneira que  $d(\Phi, \mathcal{P}) < \delta$ , para toda poligonal,  $\mathcal{P}$ , inscrita em  $\Phi$ , tal que  $d(t_k) < \varepsilon$ .

Em segundo lugar, partindo de uma poligonal  $\mathcal{P}^1$ , tal que  $L(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2} < p(\mathcal{P}^1)$  e aplicando a desigualdade (1), a uma sucessão  $\{\mathcal{P}^{(m)}\}$  que convirja para  $\Phi$ , vem <sup>(2)</sup>

$$L(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2} < p(\mathcal{P}^{(m)}) + 2n^m d(\Phi, \mathcal{P}^{(m)}),$$

donde

$$L(\Phi) - p(\mathcal{P}^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2n^m d(\Phi, \mathcal{P}^{(m)}) < \varepsilon,$$

sob a condição  $d(\Phi, \mathcal{P}^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{4n^m}$ .

Como  $\varepsilon$  é qualquer, tem-se  $L(\Phi) = \lim p(\mathcal{P}^{(m)})$ , sempre que  $\{\mathcal{P}^{(m)}\}$  converge para  $\Phi$  nos termos da topologia do espaço das trajectórias.

(1) Atender a que as funções  $\varphi_i(t), i=1, 2, 3$ , são uniformemente contínuas em  $I$ .

(2) Designamos por  $n^m$  o número de lados de  $\mathcal{P}^1$ .

**TEOREMA 4.** *Se  $\Phi$  é uma trajectória de comprimento finito,  $L(\Phi) = \inf \lim p(\mathcal{P}^{(n)})$ , designando por  $\mathcal{P}^{(n)}$  uma sucessão de poligonais, inscritas ou não em  $\Phi$ , que convergem para  $\Phi$  e cujos trajectos constituem uma sucessão convergente (de números).*

Na verdade, como  $L(\Phi) = \underline{L}(\Phi)$ , tem-se <sup>(1)</sup>

$$L(\Phi) = \lim \inf_{m \Phi' \in \mathcal{V}_m(\Phi)} L(\Phi')$$

Ora, como  $\mathcal{P}^{(n)}$  converge para  $\Phi$ , há necessariamente em cada  $V_m(\Phi)$  um elemento  $\mathcal{P}^{(n_m)}$  de  $\{\mathcal{P}^{(n)}\}$  e, portanto,  $L(\Phi) \leq \lim p(\mathcal{P}^{(n_m)}) = \lim p(\mathcal{P}^{(n)})$ .

Logo,  $L(\Phi) = \inf \lim p(\mathcal{P}^{(n)})$ .

Por outro lado, como a família das poligonais — inscritas e não inscritas — contém a das inscritas e para estas se verifica a igualdade  $L(\Phi) = \lim p(\mathcal{P}^{(n)})$ , resulta que na hipótese mais ampla que estamos a analisar, se tem  $\inf \lim p(\mathcal{P}^{(n)}) \leq L(\Phi)$  para toda sucessão  $\mathcal{P}^{(n)}$  que converge para  $\Phi$ . Logo,  $L(\Phi) = \inf \lim p(\mathcal{P}^{(n)})$ , sendo  $\{\mathcal{P}^{(n)}\}$  uma sucessão de poligonais  $\mathcal{P}^{(n)}(t)$ ,  $t \in I$ , que converge para  $\Phi = \Phi(t)$ ,  $t \in I$ .

A própria definição de  $L(\Phi)$ , o Corolário do Teor. 3 e o Teor. 4 mostram-nos que o comprimento de uma trajectória pode ser obtido a partir de poligonais, de três maneiras igualmente significativas: 1) como supremo dos trajectos das poligonais inscritas; 2) como limite dos trajectos de qualquer sucessão de poligonais inscritas que tendem para a trajectória; 3) como infimo dos limites de qualquer sucessão de poligonais, inscritas ou não, que convergem para a trajectória.

**TEOREMA 5.** *Se a trajectória  $\Phi$  é tal que as funções  $\varphi_i(t)$ ,  $i=1, 2, 3$ , admitem derivadas  $\varphi'_i(t)$ , integráveis em  $I$ , tem-se*

$$L(\Phi) = L(\Phi; I) = \int_I \sqrt{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2} dt$$

Na verdade, a uma sucessão de decomposições de  $I$  cujos diâmetros tendam para zero, corresponde uma sucessão de trajectos poligonais inscritas  $\{\mathcal{P}^{(n)}\}$ , que tendem <sup>(2)</sup> para  $\Phi$ .

Mas, como as funções  $\varphi_i$  têm derivadas, vem

$$p(\mathcal{P}^{(n)}) = \sum_{k=0}^{k_n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2} = \sum_{k=0}^{k_n} \sqrt{\sum_{i=1}^3 [\varphi'_i(t'_k)(t_{k+1} - t_k)]^2}$$

sendo  $t_k \leq t'_k \leq t_{k+1}$ .

(1) Ver definição da pág. 29 e, na pág. 23, a maneira prática de calcular a função,  $f$ , limite inferior de  $f$ .

(2) Ver primeira parte da demonstração do Cor., pág. 243.

Consequentemente <sup>(1)</sup>, tomando o limite,

$$L(\Phi; I) = \lim p(\mathcal{P}^{(n)}) = \int_I \sqrt{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2} dt$$

Utilizando integral- $L$  em vez de integral- $R$ , pode demonstrar-se o seguinte <sup>(2)</sup>

**TEOREMA 6.** *A condição necessária e suficiente para que  $L(\Phi) = \int_I \sqrt{\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2 + \varphi_3'^2} dt$ , é que as funções  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$  sejam absolutamente contínuas.*

*Trajectórias equivalentes.*

Em Mecânica, em todas as questões em que intervem a noção de trajectória  $t$  é, em geral, o tempo.

Mas, para efeito da resolução de determinados problemas, é, por vezes, conveniente substituir  $t$  por outro parâmetro,  $s = H(t)$ , em que  $H$  designa uma transformação (topológica) especial de  $I$  sobre  $K = [s_a, s_b]$ ,  $s_a = H(a)$ ,  $s_b = H(b)$ .

Ordinariamente, substituiu-se o tempo,  $t$ , pelo trajecto  $s = L(\Phi; [a, t])$  e diz-se, então, que as funções  $x = \psi_1(s)$ ,  $y = \psi_2(s)$ ,  $z = \psi_3(s)$ , transformadas de  $x = \varphi_1(t)$ ,  $y = \varphi_2(t)$ ,  $z = \varphi_3(t)$  por intermédio de  $s = L(\Phi; [a, t])$ , constituem uma nova representação da mesma trajectória. Mais corretamente, uma representação em termos de trajecto (ou espaço andado).

Na realidade, trata-se de duas transformações  $\Phi$  e  $\Psi$  que, embora diferentes <sup>(3)</sup>, possuem um conjunto de invariantes: de significado geométrico, como o gráfico e o trajecto; de significado físico como, por exemplo, o trabalho de uma força  $(X, Y, Z)$

$$\int_I (X\varphi_1' + Y\varphi_2' + Z\varphi_3') dt = \int_K (X\psi_1' + Y\psi_2' + Z\psi_3') ds$$

São, pois, equivalentes para o cálculo desses invariantes e por isso se diz, imprópriamente, que representam a mesma trajectória.

Ora, ampliando este resultado e exprimindo-o em termos de maior rigor, diremos que duas trajectórias,  $\Phi(t)$ ,  $t \in I$  e  $\Psi(u)$ ,  $u \in K$ , são equivalentes, quando, dado um  $\epsilon > 0$ , é sempre possível determinar uma transformação topológica,  $u = H_\epsilon(t)$ , de  $I$  em  $K$ , tal que <sup>(4)</sup>

$$d(\Phi(t), \Psi[H_\epsilon(t)]) < \epsilon, t \in I$$

(1) Atender a Cor., Cap. VII e Teor. 21, Cap. IV.

(2) Ver, por exemplo, S. Saks — *Theory of the Integral*, pág. 123, Teor. (8.4).

(3) Não é necessariamente  $I=K$  nem  $\varphi_i(t) = \psi_i(t)$ ,  $t \in I$ .

(4) É a noção de equivalência à Frechet, que compreendo como caso particular a de Lebesgue. Na verdade, segundo Lebesgue, diz-se que  $\Phi$  é equivalente a  $\Psi$ , quando  $\Psi$  é simplesmente a transformada de  $\Phi$  por intermédio de uma transformação topológica  $H: \Psi[H(t)] = \Phi(t)$ ,  $t \in I$ . Ora, se assim for, também  $\Phi$  e  $\Psi$  resultarão equivalentes à Frechet, com  $H_\epsilon = H$ , pois se tem  $d(\Phi(t), \Psi[H(t)]) = 0$ ,  $t \in I$ .

Radó, na obra a seguir citada, chama às trajectórias equivalentes à Lebesgue, *semelhantes topologicamente*. Consultar T, Radó — *Length and Area*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. XXX. 1948, pág. 57.

Em símbolos, escreveremos  $\Phi \sim \Psi$  e nenhuma dificuldade há em demonstrar que se trata efectivamente de uma relação de equivalência, quer dizer, *reflexiva simétrica e transitiva*.

Cada classe de equivalência constitui um variedade-F ou curva de Frechet do tipo arco simples em  $E_2$  ou  $E_3$ . E podemos tomar para sua representante qualquer das trajectórias da respectiva classe.

**TEOREMA 7.** *Trajectórias equivalentes tem o mesmo gráfico.*

Demonstremos que  $\Phi(I) \subset \Psi(K)$ , partindo para isso de um ponto  $p = \Phi(t) \in \Phi(I)$ .

Como  $\Phi \sim \Psi$ , podemos arranjar uma transformação topológica de  $I$  em  $K$ ,  $H_n$ , tal que

$$d(\Phi(t), \Psi[H_n(t)]) < \frac{1}{n}.$$

Consequentemente,  $p_n = \Psi[H_n(t)] \in \Psi(K)$  converge para  $p = \Phi(t)$  e, portanto, como  $\Psi(K)$  é um conjunto compacto de  $E_3$ ,  $p \in \Psi(K)$ . Logo,  $\Phi(I) \subset \Psi(K)$ . Trocando  $\Phi$  com  $\Psi$ , vem  $\Phi(I) = \Psi(K)$ .

O inverso deste teorema não é verdadeiro: dada uma trajectória (ou movimento)  $\Phi(t)$ ,  $t \in I$ , basta mudar a lei do movimento no tempo, para obter nova trajectória não equivalente mas com o mesmo gráfico.

Pode, no entanto, demonstrar-se o

**TEOREMA 8.** *Se  $\Phi(t)$ ,  $t \in I$  e  $\Psi(u)$ ,  $u \in K$ , forem duas transformações topológicas (biunívocas e bicontínuas) com o mesmo gráfico,  $\Phi(I) = \Psi(K)$ , então  $\Phi \sim \Psi$ .*

Na verdade, pondo  $H(t) = \Psi^{-1}[\Phi(t)]$ , vem  $\Psi[H(t)] = \Phi(t)$ , quer dizer,  $\Phi$  e  $\Psi$  são semelhantes topologicamente e, portanto,  $\Phi \sim \Psi$ .

Ora, chamemos *trajectória geométrica* à que é equivalente a uma transformação topológica,  $T(v)$ ,  $v \in I_0$ . O seu gráfico é um arco simples, visto ser a imagem topológica de um intervalo  $I_0$ . O teorema anterior diz-nos que: 1) as trajectórias geométricas com o mesmo gráfico, são todas equivalentes entre si; 2) há uma correspondência biunívoca entre a família dos arcos simples e a das classes de equivalência que tem como representante uma trajectória geométrica.

A estas classes chama Radó *variedades topológicas do tipo arco simples em  $E_3$* .

**LEMA.** *Se  $\Phi \sim \Psi$  é possível determinar uma sucessão  $\{\Phi^{(n)}\}$  convergente para  $\Phi$ , constituída por trajectórias semelhantes topologicamente a  $\Psi$ .*<sup>(1)</sup>

Na verdade, pondo  $\Phi^{(n)}(t) = \Psi[H_n(t)]$ , em que  $H_n$  é a transformação topológica utilizada no Teor. 7, vem

$d(\Phi, \Phi^{(n)}) \leq \frac{1}{n}$ , donde  $\Phi(t) = \lim_n \Phi^{(n)}(t)$ . E, por outro lado,  $\Phi^{(n)}$  é a transformada de  $\Psi$  por intermédio de  $H_n$ , portanto  $\Phi^{(n)}$  e  $\Psi$  são topologicamente semelhantes.

**TEOREMA 9.** *Trajectórias equivalentes têm o mesmo trajecto.*

Dadas as trajectórias  $\Phi \sim \Psi$ , comecemos por determinar a sucessão  $\{\Phi^{(n)}\}$  segundo o Lema.

Como  $\Phi^{(n)}(t) = \Psi[H_n(t)]$ , é imediato que  $L(\Phi^{(n)}; I) = L(\Psi; K)$ .

Em segundo lugar, pela semi-continuidade inferior de  $L(\Phi) = L(\Phi; I)$ , vem  $L(\Phi; I) - \delta < L(\Phi^{(n)}; I)$  para  $N < n$ , donde  $L(\Phi; I) \leq L(\Psi; K)$ .

Permutando  $\Phi$  com  $\Psi$ , resulta  $L(\Phi; I) = L(\Psi; K)$ . O inverso é falso.

**TEOREMA 10.** *Dada uma trajectória,  $\Phi(t) \in I$ , cujo gráfico não se reduz a um ponto, é sempre possível determinar uma outra equivalente à primeira, cujo parâmetro é o trajecto*<sup>(1)</sup>.

Essa representação de  $\Phi$ , em termos de

$$s = L(\Phi; [a, t]),$$

tem a forma

$x = \psi_1(s)$ ,  $y = \psi_2(s)$ ,  $z = \psi_3(s)$ ,  $K = [0, L]$ ,  $L = L(\Phi; I)$  e, é claro, que  $s = L(\Psi; [0, s])$ .

Note-se ainda que as funções  $\psi_i$  são lipschitzianas, pois  $|\psi_i(s') - \psi_i(s'')| \leq L(\Psi; [s', s'']) = |s' - s''|$ .

Em Mecânica utilizam-se correntemente as duas representações —  $\Phi$  em termos de tempo e  $\Psi$  em termos de trajecto — e o valor do teorema anterior é precisamente o de assegurar a existência da segunda.

Em geral, partem-se de  $\Phi$  e deluz-se, depois,  $\Psi$ ; mas também é frequente dar  $\Psi$  e uma lei horária  $s = H(t)$ , resultando depois  $\Phi$ , por via da homeomorfia  $H$ .

## 2. Curva rectificável. Comprimento.

Demos no parágrafo anterior a noção de trajectória, que fomos buscar à ideia primitiva de movimento dum ponto.

O gráfico repectivo aparece assim como um conjunto de  $E_3$ , mas interpretado como lugar das posições sucessivas do ponto móvel.

Ora, a família dos gráficos possíveis compreende: os arcos simples, isto é, as imagens topológicas de um intervalo; os arcos simples fechados, quer dizer, as imagens topológicas de uma circunferência, que podemos representar por  $x = \cos u$ ,  $y = \sin u$ ,  $z = 0$ ,  $0 \leq$

<sup>(1)</sup> Ver nota (2), pág. 246.

<sup>(1)</sup> Ver demonstração em T. Radó, obra citada, III. 3. 97.

$u \leq 2\pi$ ; de um modo geral, todas as curvas da geometria elementar.

Além disso, podemos demonstrar o

**TEOREMA 11.** *O gráfico de uma trajetória,  $C \subset E_3$ , tem medida- $J$  nula.*

Na verdade, se tomarmos uma decomposição  $\{I_j\}$ , de diâmetro suficientemente pequeno, podemos fazer com que

$$|\varphi_1(K)| < \varepsilon, |\varphi_2(K)| < \varepsilon,$$

para todo  $K \subset I_j, j=1, \dots, n$ , sendo  $\Phi[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$  uma representação de  $C$ .

Para isto, consideremos um ponto  $t_j \in I_j$  e de centro em  $\Phi(t_j)$  construamos o paralelepípedo de arestas:  $2\varepsilon$ , paralelamente aos eixos  $x$  e  $y$ ;  $2V(I_j)$ , paralelamente ao eixo dos  $z$ , designando por  $V(I_j)$  a variação absoluta de  $\varphi_3(t)$  em  $I_j$ .

Como  $C$  está contido necessariamente na reunião destes paralelepípedos, vem

$$J(C) \leq \sum_j 8\varepsilon^2 V(I_j) = 8\varepsilon^2 V(I),$$

donde  $J(C) = 0$ .<sup>(1)</sup>

Quere dizer, se um gráfico é plano, a sua medida- $J$ , como conjunto plano, é nula; se é empenado, a sua medida- $J$ , como conjunto do espaço, é nula também.

Nos gráficos está assim realizada uma das propriedades que constitui elemento fundamental da noção intuitiva de curva: a falta de espessura<sup>(2)</sup>.

Em conformidade com estes factos, chamaremos curva rectificável ou simplesmente curva,  $C$ , a todo conjunto de  $E_3$ , que seja o gráfico de uma trajetória de comprimento finito.

**TEOREMA 12.** *A condição necessária e suficiente para que um conjunto  $C \subset E_3$  seja uma curva rectificável, é que admita uma representação  $\Phi(t), t \in I$ , contínua e de variação total limitada.*

**TEOREMA 13.** *Seja  $C$  um arco simples de  $E_3$ . O menor trajecto de gráfico  $C$  é o de qualquer das suas trajectórias geométricas.*

Na verdade, consideremos ao lado da trajectória  $\Phi(t), t \in I$ , de gráfico  $C$ , a transformação topológica  $\Psi(v), v \in K$ , com o mesmo gráfico.

Como  $\Psi$  é biunívoca existe uma transformação  $H(t)$ , tal que  $\Phi(t) = \Psi[H(t)], t \in I$ .

Ora, escolhendo uma cadeia  $\{v_k\}$  de  $K$ , de diâmetro suficientemente pequeno, corresponder-lhe-á uma poligonal  $\mathcal{P}_v$ , tal que  $p(\mathcal{P}_v) > L(\Psi) - \delta$ .

Por outro lado, se dois dos  $v_k$  forem as imagens dos extremos  $a, b$  de  $I$ , como é legítimo supôr, e se para cada um dos restantes  $v_k$  escolhermos<sup>(1)</sup> um  $t'_k$ , tal que  $t'_k = H^{-1}(v_k)$ , os pontos  $\{t'_n\}$ , uma vez dispostos por ordem de grandeza crescente entre  $a$  e  $b$ , determinarão uma cadeia  $\{t_k\}$  de  $I = [a, b]$ . Seja então  $\mathcal{P}$  a poligonal correspondente inscrita em  $\Phi(t)$  e consideremos ao mesmo tempo um lado  $\Psi[v_k, v_{k+1}]$  de  $\mathcal{P}_v$ .

De duas uma: ou  $\Psi(v_k), \Psi(v_{k+1})$  são também dois vértices consecutivos de  $\mathcal{P}$  ou, por exemplo,  $\Psi(v_k) = \Phi(t_j)$  e  $\Psi(v_{k+1}) = \Phi(t_{j+p})$ . Neste último caso, o comprimento do lado  $\Psi[v_k, v_{k+1}]$  de  $\mathcal{P}_v$  é menor ou igual à soma dos comprimentos dos lados

$$\Phi[t_j, t_{j+1}], \Phi[t_{j+1}, t_{j+2}], \dots, \Phi[t_{j+p-1}, t_{j+p}]$$

de  $\mathcal{P}$ . Em qualquer hipótese se tem, pois,  $p(\mathcal{P}) \geq p(\mathcal{P}_v) > L(\Psi) - \delta$ , donde  $L(\Phi) > L(\Psi) - \delta$  ou finalmente  $L(\Phi) \geq L(\Psi)$ .

Chamando a  $L(\Psi)$  comprimento do arco  $C$ , como é natural e está de acordo com o procedimento da geometria elementar, o teorema anterior exprime o facto intuitivo: o comprimento de um arco simples é o menor trajecto de quantos têm esse arco como gráfico.

Em consequência, estabeleceremos a

**DEFINIÇÃO.** *Comprimento de uma curva,  $C$ , é o infimo dos trajectos que a têm por gráfico.*

**TEOREMA 14.** *O comprimento é igual a zero quando, e só quando,  $C$  se reduz a um ponto.*

**TEOREMA 15.** *Se  $x' = f_1(x, y, z), y' = f_2(x, y, z), z' = f_3(x, y, z)$  representam uma transformação isométrica de  $E_3$  em  $E'_3$ ,*

$$C, [x = \varphi_1(t), y_1 = \varphi_2(t), z_1 = \varphi_3(t)]$$

e

$C', [x' = f_1[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], y' = f_2[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], z' = f_3[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]]$ , têm o mesmo comprimento.

Podemos ainda verificar que o comprimento de uma circunferência é  $2\pi r$ .

Na verdade, pelo teorema anterior, podemos sempre supôr que a circunferência está no plano  $x, y$  e tem o centro na origem.

E sendo assim, admite a representação

$$\Psi[x = r \cos u, y = r \sin u; 0 \leq u \leq 2\pi],$$

que conduz a  $L(\Psi) = 2\pi r$ .

(1) Basta até supôr, como se verifica pela demonstração, que uma, apenas, das funções  $\varphi_i, i=1, 2, 3$  tem variação total limitada.

Osgood demonstrou, em 1903, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 4, pág. 107, com um exemplo conhecido desde então por curva de Osgood, que, se nenhuma das funções for de variação total limitada, o gráfico pode ter medida exterior positiva.

(2) T. Radó diz: «Primarily, a curve is thought of as a point set with certain properties of slenderness» [obra cit. II, 5.2].

(1)  $H^{-1}(v_k)$  representa a imagem completa inversa de  $v_k$ .

E como a transformação  $\Psi$  é biunívoca, à parte o ponto  $x=r, y=0$ , que é imagem de  $0$  e  $2\pi$ , podemos aplicar o raciocínio de Teor. 13 e, portanto,  $L(\Phi) \geq 2\pi r$ .

Como consequência, o comprimento de um arco simples fechado, isto é, topologicamente equivalente a uma circunferência, pode calcular-se à maneira da geometria elementar: decompõe-se  $C$  num número  $n$  de arcos simples sem pontos interiores comuns, traçam-se as respectivas cordas e toma-se depois o supremo dos perímetros dos polígonos (inscritos) resultantes.

Os últimos resultados justificam inteiramente as definições de *curva rectificável* e de *comprimento*.

E acontece ainda que na família dos sub-arcos de um arco simples ou simples fechado,  $C$ , o comprimento

se comporta como numa medida (linear): não-negativa aditiva, nula apenas quando o arco se reduz a um ponto. Trata-se de uma consequência imediata da aditividade da  $L(\Psi; I)$  como função do sub-intervalo  $I \subset I_0$ , sendo  $\Psi(u)$ ,  $u \in I_0$ , uma trajectória geométrica sobre  $C$ .

E a definição de curva aqui adotada exclui o caso patológico das curvas de Peano<sup>(1)</sup>, Hilbert ou de Osgood, cujo gráfico enche um quadrado ou pelo menos não tem medida nula.

(1) Dada por Peano em 1890 e que marcou um momento decisivo na separação dos dois conceitos, até então identificados, de curva-trajectória e curva-conjunto do  $E_2$ .

## Um teorema sobre a estrutura dos divisores de um grupo

por F. Dias Agudo

Consideremos o grupo  $G_8$  constituído pelas matrizes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

e que, como facilmente se vai concluir, é isomorfo do grupo das rotações do quadrado.

Da transformação linear  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  resulta que que às matrizes de  $G_8$  corresponderão, respectivamente, as seguintes transformações de coordenadas no plano:

$$I \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = y \end{pmatrix} \quad a \begin{pmatrix} x' = x \\ y' = -y \end{pmatrix} \quad b \begin{pmatrix} x' = -x \\ y' = y \end{pmatrix} \quad c \begin{pmatrix} x' = -x \\ y' = -y \end{pmatrix}$$

$$d \begin{pmatrix} x' = y \\ y' = x \end{pmatrix} \quad e \begin{pmatrix} x' = y \\ y' = -x \end{pmatrix} \quad f \begin{pmatrix} x' = -y \\ y' = x \end{pmatrix} \quad g \begin{pmatrix} x' = -y \\ y' = -x \end{pmatrix}$$

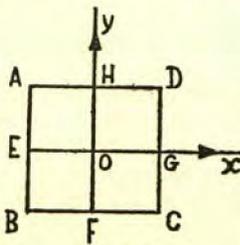


Fig. 1

e  $g$  a simetria em relação a  $AC$ , resultados que fa-

de modo que (fig. 1):  $I$  será a «rotação» identidade;  $a$  a simetria em relação a  $EG$ ;  $b$  a simetria em relação a  $HF$ ;  $c$  a rotação de  $180^\circ$  em torno de  $O$ ;  $d$  a simetria em relação a  $BD$ ;  $e$  a rotação de  $90^\circ$  no sentido directo em torno de  $O$ ;  $f$  a rotação de  $270^\circ$  no sentido directo em torno de  $O$

cilmente nos permitiam construir a tábua de multiplicação do grupo  $G_8$ .

Posto isto, procuremos representar gráficamente a estrutura dos sub-grupos de  $G_8$ .

Designando por  $\epsilon$  nm dos números  $\pm 1$ , temos  $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix} = I$  [é o caso da matriz  $I$ , com  $\epsilon=1$ , e  $c$ , com  $\epsilon=-1$ ];  $\begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix} = I$  [caso das matrizes  $a$  e  $b$ ];  $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \epsilon^2 & 0 \\ 0 & \epsilon^2 \end{pmatrix} = I$  [matrizes  $d$  e  $g$ ]; e  $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -\epsilon^2 & 0 \\ 0 & -\epsilon^2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix}^4 = I$  [matrizes  $e$  e  $f$ ], o que nos permite concluir que

$$I; \{I, a\}; \{I, b\}; \{I, c\}; \{I, d\}; I, g\};$$

$$e \quad \{I, e, e^2, e^3\} \equiv \{I, e, c, f\} \equiv \{I, f, f^2, f^3\}$$

são sub-grupos de  $G_8$ .

As relações

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 \delta_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \delta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$$

onde  $\epsilon_i, \delta_i, \epsilon, \delta$ , representam também qualquer dos números  $\pm 1$ , mostram, por outro lado, que as 4 matrizes  $I, a, b, c$  (em que os elementos nulos se encontram na 2.ª diagonal) constituem um outro sub-grupo (o grupo de Klein) de  $G_8$ .