Caracterização dos espaços topológicos regulares e normais por meio de coberturas

por J. Abdelhay (Rio de Janeiro)

Espaço topológico é qualquer conjunto E sobre o qual se fixou uma família de subconjuntos A gozando das seguintes propriedades: 1) o conjunto vazio $\dot{O}$ e o conjunto E pertencem a A; 2) toda união de conjuntos de A é um conjunto de A, toda intersecção de um número finito de conjuntos de A é um conjunto de A. Cada conjunto da família A chama-se *conjunto aberto* do espaço topológico E. Cada conjunto aberto contendo um ponto $x \in E$ diz-se uma *vizinhança* de x.

Dois conjuntos C' e C'' de um espaço topológico E dizem-se *separados* se for possível encontrar dois conjuntos abertos e disjuntos A' e A'' tais que $C' \leqslant A'$ e $C'' \leqslant A''$.

O complementar de um conjunto aberto do espaço topológico E diz-se *conjunto fechado de E*. Quando cada ponto de um espaço topológico E é separado de cada conjunto fechado que não o contém então diz-se que o espaço topológico E é *regular*. Diz-se que E é *normal* se cada par de conjuntos fechados e disjuntos de E for também um par de conjuntos separados de E.

Cobertura de um espaço topológico E é qualquer família C de conjuntos abertos de E tal que cada ponto de E pertence a algum membro do família C. Diz-se que uma cobertura C é *subordinada* a outra cobertura C' se cada membro de C estiver contido em algum membro da cobertura C'.[1]

Espaço pontualmente para compacto é um espaço topológico separado E satisfazendo à condição seguinte: para toda cobertura C de E e todo ponto x de E existem uma cobertura C' de E subordinada a C e uma vizinhança V de x tais que V só intercepta um número finito de membros de C'.[2] (Um espaço topológico E diz-se *separado* se e sòmente se dois pontos quaisquer do espaço E forem separados).

Espaço localmente para compacto: Seja E um espaço topológico separado e X um subconjunto de E. Diz-se que E é *para compacto em* X se para toda cobertura C de E tal que um dos membros contenha X existe uma cobertura C' de E subordinada a C e gozando da propriedade seguinte: para todo ponto x de X existe uma vizinhança de x que só intercepta um número finito de membros de C'. Um espaço topológico separado que seja para compacto em cada subconjunto fechado diz-se um *espaço localmente para compacto*.

Propriedades dos espaços regulares e normais: Seja X um subconjunto do espaço topológico E. Se cada vizinhança de x e o conjunto X tiverem uma intersecção não vazia diz-se que x é *ponto de aderência* para o conjunto X. O conjunto dos pontos de aderência para X chama-se *aderência de* X e para indicar este conjunto usa-se o símbolo $\overline{X}$. Demonstra-se que: (1) se E é separado e regular então para cada ponto $x \in E$ e cada vizinhança de x, V, existe uma vizinhança V' de x tal que $\overline{V'} \leqslant V$ (cfr. Topologie de Alexandroff e Hopf, pág. 70, n. 7, «Satz IV»). Demonstra-se também que: (2) se E é um espaço topológico separado e normal, então para cada conjunto fechado F de E e cada conjunto aberto A contendo F existe um conjunto aberto V contendo F e tal que $\overline{V} \leqslant A$ (cfr. Top. de Alexandroff e Hopf, pág. 71, «Satz V»).

Teorema 1: *A condição necessária e suficiente para que um espaço topológico separado seja regular é que ele seja pontualmente para compacto.*

Demonstração: (1) a condição é necessária; seja, com efeito, E um espaço topológico separado e regular e seja C uma cobertura de E. Seja x um ponto qualquer de E e indiquemos com A_λ os membros da cobertura C (λ varia num conjunto Λ de índices). Temos logo que o ponto x pertence a algum dos conjuntos A_λ, suponhamos, para fixar ideias, que x pertence a A_0. Sendo E regular, por hipótese, existe uma visinhança V de x tal que $\overline{V} \leqslant A_0$ (v. resultado (1) citado acima). Pois bem, consideremos o cobertura C' formada pelo conjunto A_0 e pelos conjuntos $A_\lambda \cap \complement \overline{V}$.[3] Esta cobertura é evidentemente subordi-

[1] Esta definição é de J. Dieudonné, vide «Une généralisation des espaces compacts», Journal de Mathematiques pures et appliquées.

[2] Esta bem como a definição de espaço localmente para compacto dada abaixo são noções diversas das que, com o mesmo nome, se encontram no trabalho de J. Dieudonné citado anteriormente.

[3] $A_\lambda \cap \complement \overline{V}$ significa a intersecção do conjunto A_λ com o complementar do conjunto $\overline{V}$.