sentadas as primeiras noções da Álgebra de Classes e a esse respeito dizem aqueles ilustres autores «... mas poucas pessoas sabem que existe uma Álgebra de Colecções (Álgebra de Boole), que é um instrumento de cálculo muito útil. Não é caso para admirar visto que a sua importância na Matemática só foi posta em evidência muito recentemente».

A Álgebra de Boole é, com efeito, um instrumento da maior utilidade não só no estudo da Lógica Racional como também em todos os ramos da Matemática.

Em *A survey of Modern Algebra*, a página 326, Birkhoff diz: «The most fundamental laws of Boolean Algebra on the reflexive, anti-symmetric, and transitive laws of inclusion. They evidently hold in any sistem for the subsets distinguished by some given property. Thus they hold for the subgroups (or the normal subgroup!) of any group, the subfields of any field, the subspaces of any linear space, and so on — even thought these do not form Boolean algebras».

É dificilmente justificável que os alunos de Matemática no 1.º ano das escolas superiores portuguesas não sejam iniciados no estudo da Álgebra de Classes com aplicação ao estabelecimento das leis gerais da Lógica Racional.

A correlação, entendimento e segurança que os alunos adquiririam no raciocínio, por um lado, e, por outro, a educação do espírito crítico, a economia do pensamento e clareza de ideias, só teriam, com isso, a ganhar.

Sobre arcos duma cónica cujos comprimentos têm um cociente constante

por **Duarte Leite**

É sabido que qualquer arco duma cónica não é rectificável: assim o comprimento dum arco de parábola depende duma função logarítmica, e de transcendentes elípticas o duma cónica centrada. Todavia é susceptível de expressão algébrica a diferença de comprimento de inúmeros arcos de uma cónica, e alem disto há uma infinidade de arcos seus rectificáveis. Indico os principais teoremas conhecidos na matéria.

Dadas duas elipses confocais, se por um ponto T da exterior forem tiradas as tangentes TP e TQ à interior, delimitando o arco PQ, demonstrou o Dr. Graves ser constante a diferença $(TP+TQ)-PQ$. Daqui advém que, tirando doutro ponto T' da elipse exterior as tangentes $T'P'$ e $T'Q'$ à interior, delimitando o arco $P'Q'$, será rectificável a diferença $PQ-P'Q'$, por igualar a diferença $(TP+TQ)-(T'P'+T'Q')$; e portanto também o será a diferença $PP'-QQ'$. Este teorema foi generalizado a duas curvas tais que a tangente em qualquer ponto da exterior faz ângulos iguais com duas tangentes tiradas à outra por esse ponto [1]. Como esta propriedade é comum a duas cónicas centradas confocais, o teorema é extensivo a duas hipérboles ou a uma elipse com uma hipérbole, contanto que satisfaçam a essa condição.

Demonstrou Mac Cullagh que, tirando do ponto T duma hipérbole as tangentes TP e TQ a uma elipse dos mesmos focos que a intersecta no ponto M, a diferença de comprimentos dos arcos PM e QM igualará a das tangentes TP e TQ [1]. Recìprocamente, se dum ponto R duma elipse forem tiradas as tangentes RS e RS' a uma hipérbole confocal, por ela intersectada no ponto M, será a diferença $SM-S'M$ igual a $RS-RS'$.

Dizem-se associados dois pontos P e Q, situados num quadrante de elipse, quando as normais neles à curva equidistam da seu centro. Considerando outro par de pontos associados P' e Q', e designando por D e D' as distâncias do centro às normais em P ou Q, e em P' ou Q', demonstra-se que a diferença dos arcos PQ e $P'Q'$, iguala a diferença das distâncias D e D' [2]. Se P' for um vértice A da elipse, o seu associado Q' será o outro vértice B no quadrante, e a diferença dos arcos AP e BQ igualará a distância comum D do centro às normais em P ou Q. Tal é o teorema de Fagnano.

Combinando-o com o do Dr. Graves deduziu Rodolfo Guimarães que há inúmeros arcos elípticos rectificáveis, para o que basta haver entre as coordenadas rectangulares dos seus extremos certa equação do 5.º grau [3]. Tirem-se efectivamente pelo ponto P e pelo vértice A duma elipse E as tangentes, que se cruzam no ponto T e por este se trace outra elipse

(1) G. Salmon, *Traité de géométrie analytique* (*Sections coniques*), págs. 526-27 da ed. de 1870.

(1) *Op. cit.*, pág. 527.

(2) M. F. Frenet, *Recueil d'exercices de calcul infinitésimal*, págs. 372-74 da ed. de 1866.

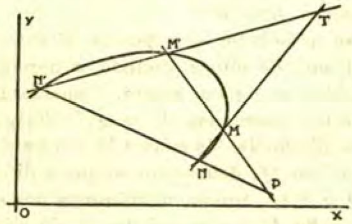
(3) *Jornal de ciências matemáticas e astronómicas*, vol. 7.º e *Semelhança e rectificação de arcos elípticos* (1877).

E' confocal com a primeira. Depois tire-se pelo vértice B do quadrante a tangente a E, que cruzará E' no ponto T', donde se tire a segunda tangente $T'M$ a E. O teorema do Dr. Graves mostra ser rectificável a diferença $AP-BM$, mas se Q for associado a P, o teorema de Fagnano também o mostra ser a diferença $AP-BQ$, e portanto digo o mesmo da diferença $BQ-BM=QM$. Adiante se verá que, alem destes arcos, há inúmeros outros numa elipse rectificáveis, independentes do sistema de pontos associados.

Há numa parábola inúmeros arcos rectificáveis, as coordenadas rectangulares de cujos extremos satisfazem a uma equação de segunda ordem. As tangentes nos extremos de um destes arcos cruzam-se noutra parábola coaxial com a primeira [1].

Deixando de parte as diferenças de arcos duma cónica susceptíveis de expressão algébrica, bem como os elípticos ou parabólicos que gozam desta propriedade, vou-me ocupar de achar numa cónica qualquer, sem recorrer a transcendentes, pares de arcos cujos comprimentos têm um quociente constante. É assunto sobre o qual nada me consta ter vindo a lume.

1. Considerando duas secantes MM' e NN' duma curva S, que se cruzam no ponto P, unam-se os pontos M e N, M' e N' em duas rectas que se cruzam no ponto T. Aplicando a este conjunto de rectas



o teorema de Menelaus, será [2] $M'N'\cdot MT\cdot NP=$ $=MN\cdot M'T\cdot N'P$, ou $\dfrac{M'N'}{MN}=\dfrac{M'T}{MT}\cdot\dfrac{M'N'-M'P}{MN-MP}$.

Supondo que as secantes MM' e NN' se aproximam indefinidamente, substituindo às cordas elementares MN e $M'N'$ os arcos ds e ds', e desprezando infinitésimos de segunda ordem, será

$$\frac{ds'}{ds}=\frac{M'P}{MP}\cdot\frac{M'T}{MT}.$$

Em coordenadas rectangulares de origem 0 sejam x e y, x' e y', X e Y as de M, N e P; ora como os segmentos MP e $M'P$ se proporcionam às suas projecções nos eixos das coordenadas, serão

$$\frac{M'P}{MP}=\frac{X-x'}{X-x}=\frac{Y-y'}{Y-y}$$

Supondo os arcos s' e s ligados pela relação linear $s'=ks+h$, onde k e h são constantes, será $ds'=k\,ds$, e designando por t e t' as tangentes MT e $M'T$, obtém-se as seguintes igualdades

$$(1)\qquad \frac{X-x'}{X-x}=\frac{Y-y'}{Y-y}=k\frac{t}{t'}.$$

A primeira é a equação da secante MM', na qual os pares de coordenadas dos seus extremos satisfazem à equação da curva S; e em função delas estão expressas as tangentes t e t'. Movendo-se a secante ao longo de S, de modo que os seus extremos descrevam arcos ligados por aquela relação linear, ela envolverá certa curva, percorrida pelo ponto de contacto P. Para deduzir das precedentes igualdades a equação entre X e Y desta envolvida, haverão de se eliminar de (1) as coordenadas de M e de M' mas, para tanto faz-se mistér uma relação entre essas coordenadas, ou escolher arbitràriamente as dum desses pontos. No que segue usarei dos dois processos de eliminação.

Observo que é lícito supor nula a constante h sem prejuizo das conclusões. Se quisermos efectivamente achar dois arcos s' e s tais que $s'=k\cdot s$, basta igualar s à diferença doutros dois u e v, determinar u' e v' tais que $u'=ku+h$, e $v'=kv+h$; e então será $u'-v'=k(u-v)$, e portanto $ks=u'-v'=s'$.

Vou achar a equação dessa envolvida quando a curva S é uma cónica.

2. Se ela for uma parábola, com o vértice na origem das coordenadas e o parâmetro p no eixo das abcissas, serão $y^2=4px$, $y'^2=4px'$

$$\frac{y'-y}{2\sqrt{p}}=\frac{t}{\sqrt{x+p}}=\frac{t'}{\sqrt{x'+p}},$$

e as igualdades (1) tomarão esta forma

$$(2)\qquad \frac{X-x'}{X-x}=\frac{Y-y'}{Y-y}=k\sqrt{\frac{x+p}{x'+p}}.$$

---

[1] Se for $y^2=qx$ a equação da parábola, e forem y e y' as ordenadas dos extremos dum dos seus arcos, ele será rectificável quando satisfizerem a esta condição, onde n é uma constante positiva

$$2ny'=(n^2+1)\,y+(n^2-1)\sqrt{y^2+q^2}$$

As tangentes nos extremos cruzam-se na parábola de equação

$$16n^2y^2=8n\,(n+1)^2\,px-p^2\,(n^2-1)^2=O$$

[2] Na figura P está fora do segmento MM', mas fàcilmente se vê que no caso contrário subsistem esta e as seguintes igualdades.

Da primeira se deduz $y'=\dfrac{4pX-yY}{Y-y}$, e da segunda, posta na forma

$$(Y-y')^2(Y'^2+4p^2)=k^2(Y-y)^2(y^2+4p^2),$$

sai em seguida a equação da envolvida

$$(3)\qquad (Y^2-4pX)^2[(4pX-yY)^2+4p^2(Y-y)^2]= \\ =k^2(Y-y)^6(y^2+4p^2)$$

que define uma curva do 6.º grau em Y e do 4.º em X. Tomando na parábola o arco MM', cujos extremos têm por ordenadas quaisquer valores de y e y', e tirando pelos extremos as tangentes a esta curva [1], elas intersectarão na parábola o arco $NN'=k\cdot MM'$. Esta operação apenas exige cálculos algébricos. Caso seja $k=1$, baixa ao 5.º em Y o grau da curva.

Para sumir de (3) a coordenada y oferecem-se dois processos, dos quais consiste um em torná-la nula, o que converte (3) em $(Y^2-4pX)^2(Y^2+4X^2)=k^2Y^6$.

Se for $k=1$, e portanto iguais os arcos a comparar, baixa ao 4.º em Y o grau desta equação, como se vê em $(X-2p)Y^4-4p(2X-p)XY^2+16p^2X^3=0$.

Tirando pelos extremos dum arco PQ as tangentes a esta curva, elas intersectarão na parábola o arco $P'Q'=PQ$.

Outro processo de sumir de (3) a coordenada y consiste em estabelecer uma dependência entre as coordenadas x e x'. Exemplifico supondo

$$(4)\qquad k^2(x+p)=n^2(x'+p)\,,\quad \text{ou}\quad n^2x'=k^2x+p(k^2-n^2)$$

Das igualdades (2) se tiram

$$x'=(1-n)X+nx\,,\; y'=(1-n)Y+ny\,;$$

da primeira destas e de (4)

$$(5)\qquad (k^2-n^3)x=n^2(1-n)X-p(k^2-n^2)\,;$$

dambas

$$2nyY=(n-1)Y^2+4p(X+nx)\,,$$

e daquí a seguinte equação da envolvida, onde por x se deverá pôr a sua expressão em (5)

$$16n^2pxY^2=[(n-1)Y^2+4p(X+nx)]^2$$

Se n for uma constante, não poderá ser a unidade, aliás do primeiro membro de (2) se concluiria $x'=x$. Com n constante, a precedente equação define uma curva do 4.º grau em Y e do 2.º em X. Duas tangentes a elas tiradas pelos extremos do arco MN cujas abcissas satisfazem à condição (5), intersectarão na parábola o arco $M'N'=k\cdot MN$. Caso seja $n=-1$, a citada condição torna-se em $x'=k^2x-p(1-k^2)$, e a equação da envolvida em

$$4p^2(1-k^2)^2(X+p)=(1+k^2)^2(4pX-Y^2)Y^2$$

3. Se a curva S for uma elipse, com o centro na origem das coordenadas e os semi-eixos a e b ao longo de abcissas e ordenadas, serão

$$a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2=a^2y'^2+b^2x'^2,$$

$$\frac{a^2b^2-a^2yy'-b^2xx'}{ab(xy'-x'y)}=\frac{t}{\sqrt{a^2-e^2x^2}}=$$

$$=\frac{t'}{\sqrt{a^2-e^2x'^2}}\,,\quad a^2e^2=a^2-b^2$$

de sorte que as igualdades (1) tomam esta forma

$$(6)\qquad \frac{X-x'}{X-x}=\frac{Y-y'}{Y-y}=k\frac{\sqrt{a^2-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-e^2x'^2}}.$$

Delas se elimina y' recorrendo à primeira, entre x' e y', da qual se deduz esta equação

$$x'^2[a^2(Y-y)^2+b^2(X-x)^2]-2a^2(Y-y)(xY-yX)x'+ \\ +a^2(xY-yX)^2-a^2b^2(X-x)^2=0.$$

Uma das raízes dela é x e à outra convém dar a forma seguinte

$$(7)\qquad x'=x-2(X-x)\frac{a^2y(Y-y)+b^2x(X-x)}{a^2(Y-y)^2+b^2(X-x)^2}.$$

Substituindo esta expressão de x' no primeiro membro das igualdades (6), obtém-se estoutra

$$(8)\qquad \frac{a^2b^2-a^2Y^2-b^2X^2}{a^2(Y-y)^2+b^2(X-x)^2}=k\frac{\sqrt{a^2-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-e^2x'^2}}\,,$$

e fazendo igual operação no segundo membro desta, chegar-se-á à equação da envolvida, que me dispenso de escrever, e define uma curva do 8.º grau em Y ou X, na qual figuram as coordenadas x e y, que haverá de eliminar. Isto feito, tomando na elipse um arco MN, e tirando pelos seus extremos duas tangentes a esta curva, elas irão intersectar na elipse o arco $M'N'=k\cdot MN$. Se for $k=1$, e daí iguais os arcos em comparação, baixará ao 6.º o grau da curva em Y e ao 7.º em X.

Para sumir de (8) as coordenadas x e y' oferecem-se dois processos, dos quais consiste um em supor $x=a$, e $y=0$, o que faz nascer MN do vértice de abcissa positiva, e converte (7) em

$$x'=a\frac{a^2Y^2-b^2(X-a)^2}{a^2Y^2+b^2(X-a)^2}.$$

A equação (8) desenvolve-se então da maneira seguinte

$$(a^2b^2-a^2Y^2-b^2X^2)^2[a^4Y^4+b^4(X-a)^4+ \\ +2a^2(2a^2-b^2)Y^2(X-a)^2]=k^2[a^2Y^2+b^2(X-a)^2]^4\,.$$

---

[1] Por um ponto se podem tirar várias tangentes à curva, mas tendo escolhido uma delas a partir de M, a que parte de M' determina-se acompanhando o movimento da secante.

Outro processo de sumir de (8) as coordenadas x e y consiste em relacioná-las com x' e y'. Exemplifico supondo

$$(9)\quad k\sqrt{\frac{a^2-e^2x'^2}{a^2-e^2x^2}}=n,\ \text{ou}\ n^2x'^2=k^2x^2+(n^2-k^2)\frac{a^2}{e^2}.$$

Das igualdades (6) se tiram $x'=(1-n)X+nx$, $y'=(1-n)Y+ny$, da primeira destas e de (9)

$$(10)\qquad (n^4-k^2)x^2+2n^3(1-n)Xx+$$
$$+n^2(1-n)^2X^2-\frac{a^2}{e^2}(k^2-n^2)=0,$$

e de ambas

$$(11)\quad a^2Yy+b^2Xx=\frac{n-1}{2n}(a^2Y^2+b^2X^2)+\frac{n+1}{2n}a^2b^2.$$

Daqui, fazendo $\frac{n-1}{2n}(a^2Y^2+b^2X^2)+\frac{n+1}{2n}a^2b^2=Z$ sai a equação $b^2(a^2Y^2+b^2X^2)x^2-2b^2XZx+$ $+Z^2-a^4b^2Y^2=0$ e resultante dela e de (10) será uma equação do 8.º grau em qualquer das variáveis, que define a envolvida e evito desenvolver. Simplifico-a supondo $n^2=k$, o que permite deduzir de (10) a fórmula

$$Xx=\frac{n-1}{2n}X^2+\frac{n+1}{2n}\frac{a^2}{e^2}$$

e converte (11) em

$$b^2Y^2\left[a^2X^2-\left(\frac{n-1}{2n}X^2+\frac{n+1}{2n}\frac{a^2}{e^2}\right)^2\right]=$$
$$=a^2X^2\left[\frac{n-1}{2n}Y^2-\frac{n+1}{2n}\frac{1-e^2}{e^2}b^2\right]^2$$

que define uma curva do 6º e 4º grau, que é a envolvida. Duas tangentes a ela tiradas pelos extremos dum arco MN, cujas abcissas satisfazem à condição $x'^2=kx^2+(1-k)\frac{a^2}{e^2}$, intersectarão na elipse o arco $M'N'=k\cdot MN$.

4. Se a curva S for uma hipérbole, com o centro na origem das coordenadas e os semi-eixos a e b ao longo de abcissas e ordenadas, serão

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2=b^2x'^2-a^2y'^2,$$
$$\frac{a^2b^2+a^2yy'-b^2xx'}{ab(xy'-x'y)}=\frac{t}{\sqrt{e^2x^2-a^2}}=$$
$$=\frac{t'}{\sqrt{e^2x'^2-a^2}},\ a^2e^2=a^2+b^2,$$

mas sendo a sua equação a mesma da elipse com a simples mudança de b^2 em $-b^2$, mantém-se para a primeira cónica os resultados adquiridos para a segunda, uma vez feita tal mudança. É pois possível numa hipérbole marcar arcos cujos comprimentos tem um cociente constante, e por meio de operações algébricas.

5. Dado numa cónica centrada um arco PQ, tirem-se as tangentes pelos seus extremos até o ponto de cruzamento T, pelo qual se faça passar outra cónica confocal com a primeira: e marque-se nesta um arco $P'Q'$ tal que as tangentes pelos seu extremos se cruzem na segunda. Diz o teorema do Dr. Graves que é rectificável a diferença $PQ-P'Q'$, mas marcando na cónica um arco $P'M=PQ$, essa diferença converte-se em $P'M-P'Q'=Q'M$. Há pois numa cónica centrada uma série infinda de arcos rectificáveis; e na elipse ela é diferente da descoberta por Rodolfo Guimarães.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Axiomática de Peano

Demonstração das propriedades da adição e multiplicação pelo método de indução

por *J. da Silva Paulo*

0. Introdução

Trata a Aritmética do estudo das propriedades dos números e a sua construção pode fazer-se de vários modos de acordo com a maneira como é introduzido o conceito de número, mas em todos eles ordenando devidamente as proposições que formam o corpo da teoria. Para essa ordenação deve ter-se em conta que no desenvolvimento duma teoria dedutiva, como é a Aritmética, o reconhecimento da verdade duma proposição, isto é a sua demonstração, se obtem como consequência lógica de outras, anteriormente reconhecidas verdadeiras. A demonstração faz-se assim à custa de todas ou parte das proposições que antecedem aquela cuja verdade se quer reconhecer, e, por isso, torna-se evidente que tem de existir uma ou mais