

PROBLEMAS

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2397 (*Gaz. Mat.* n.º 31) — Se os números complexos z_1, z_2, z_3 , e z_4 são tais que

$$|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_4| = |z_4 - z_1|,$$

então $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$ e $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$ é um imaginário puro.

R: Como o módulo da diferença de dois complexos mede o comprimento do segmento de recta que tem para extremos as suas imagens no plano de Argand, o quadrilátero que tem para vértices as imagens de z_1, z_2, z_3 , e z_4 é um losango, em que z_1 e z_3 correspondem a vértices opostos, o mesmo sucedendo a z_2 e z_4 . Então $z_1 + z_3$ tem por imagem o simétrico da origem em relação ao ponto de cruzamento das diagonais do losango, $z_2 + z_4$ tem por imagem o mesmo ponto, sendo, por isso, $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$. Em virtude das diagonais do losango serem ortogonais, o argumento principal de $\frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_4}$, (diferença dos argumentos de $z_1 - z_3$ e $z_2 - z_4$) é igual a $\pm \frac{\pi}{2}$, o que significa que aquele cociente é um imaginário puro, c. q. d.

2398 (*Gaz. Mat.* n.º 31) — Mostre que é igual a 1 o determinante $|a_j^i|$, ($i, j = 1, 2, \dots, n$), assim

definido: $a_i^i = a_j^j = 1$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) e

$$a_j^{i-1} + a_{j-1}^i = a_j^i \quad (i, j = 2, 3, \dots, n).$$

R: Vamos proceder por indução. Para $n=2$, $|a_j^i| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$. Admitamos que para $n=p$ se tem ainda

$|a_j^i| = 1$ e vamos mostrar que, nesta hipótese, se tem também $|a_j^i| = 1$. Com efeito, conservando a_i^i e substituindo a_j^i por $a_j^i - a_{j-1}^i$ ($j > 1$), obtém-se um determinante $|b_j^i| = |a_j^i|$, em que $b_i^i = 1$ ($i = 1, 2, \dots, p+1$), $b_j^i = 0$ ($j = 2, 3, \dots, p+1$) e $b_j^i = a_j^{i-1}$ ($i, j = 2, 3, \dots, p+1$), em virtude de ser $a_j^{i-1} + a_{j-1}^i = a_j^i$. Baixando de ordem, encontra-se o determinante $|c_j^i| = |b_j^i|$ em que

$$c_j^i = 1 \quad (j = 1, 2, \dots, p) \text{ e}$$

$$c_j^i = b_{j+1}^i \quad (i = 2, 3, \dots, p; \quad j = 1, 2, \dots, p).$$

Substituindo neste determinante c_j^i por $c_j^i - c_j^{i-1}$, obtém-se finalmente o determinante $|d_j^i| = |c_j^i|$ em que

$$d_i^i = d_j^j = 1 \quad \text{e} \quad d_j^i = a_j^i \quad (i, j = 2, 3, \dots, p),$$

quer dizer, obtém-se o determinante $|a_j^i|$ para $n=p$, que, por hipótese é igual a 1, o que prova a veracidade do enunciado.

Soluções dos n.ºs 2397 e 2398 de José C. Morgado

As resoluções de problemas propostos devem ser enviados para a Redacção da «Gazeta de Matemática». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa folha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de criticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas criticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

83 — CASTELNUOVO, E.M.A. — *Geometria Inuitiva per le Scuole medie inferiori, com 414 disegni e 19 riproduzioni artistiche e oltre 750 esercizi e complementi* — Casa Editrice R. Carabba S. A. Lanciano—Roma. Preço 500 liras.

Desde há muito que os metodólogos, e até mesmo os que o não são, procuram que a matemática, por sua natureza árida quando apresentada sem ligação

com os factos da vida corrente, seja ensinada aos que principiam, numa forma atraente, enquadrando-a nos centros de interesse do aluno, levando-o à compreensão do facto matemático como representação adequada dos fenómenos de observação comum, e mostrando a sua necessidade e vantagem para a solução de tantos problemas que diariamente a vida nos põe. Um ensino que não tem em conta esses casos da vida diária, aparece ao aluno sem interesse e destituído de utili-

dade. Em geral a reacção de quem contacta pela primeira vez com um facto novo, na matemática, o qual lhe é apresentado sob uma forma puramente abstrata, é perguntar para que é que *aquilo* serve.

O critério de utilidade que domina a aquisição de conhecimentos novos, tão vivo por toda a parte, tem que ser aproveitado para facilitar o ensino, em particular das partes mais abstractas das matemáticas. Por isso o seu ensino, pelo menos nos primeiros passos da iniciação deve ser feito o mais possível, com vista à aplicação imediata, e começar mesmo pela apresentação e resolução de problemas que o aluno conheça ou que sejam de fácil apreensão.

A escolha criteriosa dos exemplos que hão-de servir de base à exposição do assunto, criando o interesse pela *coisa*, é tarefa bem difícil que só aquele que muito contacta com o ensino vivo da matemática, pode avaliar.

Mais difícil ainda é encaminhar o aluno para a participação no trabalho criador levando-o progressivamente, a sentir a necessidade de um raciocínio puramente lógico. Partir do objecto concreto, interessando-o pelo trabalho, de modo a que o aluno tenha a impressão que é em boa parte devido a esforço próprio que é conduzido à descoberta das verdades matemáticas, e levá-lo por fim ao campo da justificação lógica dessas verdades.

Foi este o espírito e os fins que a autora se propôs, no livro que relatamos, e consegue-os em absoluto, estamos disso convencidos. É a sua autora, professora de matemática das escolas italianas, filha do matemático, professor Castelnuovo, e alia a um conhecimento seguro da matéria que trata, necessário a quem escreve em especial um livro didático, o conhecimento do material humano com que o professor tem de trabalhar, pela sua longa prática de ensino, e estudo das questões de pedagogia da matemática a que se dedica.

Na exposição dos assuntos, o método seguido opõe-se decididamente à rotina da maioria dos livros em uso, por quasi toda a parte e a autora não se julga diminuída por fazer apelo à intuição, que sem comprometer o rigor da exposição, facilita o estudo das questões a tratar. O próprio título do livro nos indica o uso e aplicação que a autora faz da intuição, para o que a geometria tanto se presta.

É um livro claro, cheio de boas gravuras e de muitos exercícios.

Eis portanto um livro cuja leitura é de aconselhar aos nossos professores, tanto mais que para o ensino

da geometria no 1.º ciclo dos nossos liceus, se determina o uso, pelos programas actuais, de método análogo ao seguido neste livro. Se bem que ele seja dirigido a alunos, cremos que ali, o nosso professor, encontrará muitas sugestões para o seu ensino.

José da Silva Paulo.

84 — ADAM, PEDRO PUIG — Curso de Geometria Métrica — Tomo II — Complementos — Madrid — 1948. Preço 80 pts.

Vem esta noticia um pouco atrasada em relação à data da publicação do livro, mas não porque não tenha sido grande a satisfação com que lemos este 2.º e último volume da obra do sr. Adam.

O primeiro tinha-nos feito desejar o breve aparecimento do segundo, o qual foi lido de um fôlego, logo que nos chegou às mãos, e só questões de ordem particular impediram que imediatamente dêssemos noticia dele.

Não desmerece este volume do anterior e é um digno complemento dele. Escrito da mesma forma clara e atraente sem perder nada do rigor que caracteriza toda a obra, trata este volume de trigonometria rectilínea e esférica, noções de geometria projectiva e cónicas.

Em apêndices são postas as questões da irresolubilidade de alguns problemas (problemas clássicos, irresolubilidade por radicais, transcendência de e e π), e indemonstrabilidade do postulado de Euclides.

Como o primeiro volume é este um excelente livro que dá termo a muitas questões enunciadas ou apontadas naquele, e está cheio de exercícios e notas que põe o leitor em contacto não só com todos os problemas clássicos, os mais variados mas também com os problemas actuais da geometria.

Aconselhamos vivamente a sua leitura a quem deseje ter uma ideia panorâmica segura do estado actual da geometria elementar.

É claro que, pelo seu formato, o livro não trata todas as questões de modo exaustivo, mas é verdade que fornece bibliografia que permite ao interessado aprofundar as questões de que o livro trata e dá, em geral, uma ideia suficientemente clara.

O livro que se destina a alunos que se preparam para admissão a Escolas Superiores espanholas, não deixa de ser útil aos professores.

José da Silva Paulo.

DIVULGAR A «GAZETA DE MATEMÁTICA» É CONTRIBUIR PARA O DESENVOLVIMENTO DA CULTURA MATEMÁTICA PORTUGUÊSA