O teorema dos resíduos e o cálculo da soma de uma série

por João Farinha

1. São conhecidos os inestimáveis serviços que a teoria das funções de variável complexa presta no domínio real. Um exemplo típico e elementar é o da determinação do intervalo de convergência da série de Taylor de uma função $f(x)$; como se sabe, só o recurso à variável complexa permite, em certos casos, determiná-lo.

Vamos nesta nota mostrar como o teorema dos resíduos permite calcular fàcilmente a soma de uma série $\sum f(n)$, quando a função $f(z)$ satisfaz a certas condições; seguiremos nas suas linhas gerais, a via indicada por E. Phillips em *Functions of complex variable*.

2. Seja $f(z)$ uma função tendo os polos simples $a_1, a_2, \cdots a_k$ como únicas singularidades e $\varphi(z)$ uma função uniforme com os polos simples $z=m$ (m inteiro) e com os resíduos respectivos iguais à unidade positiva ou negativa. Admita-se ainda que $f(z)$ e $\varphi(z)$ não têm mais do que um número finito de singularidades comuns.

Consideremos um contorno simples C que contenha no seu interior todas ou algumas das singularidades de $f(z)$ e $\varphi(z)$. Supondo $f(z)\cdot\varphi(z)$ contínua sobre C é, pelo teorema dos resíduos,

$$\int_C f(z)\,\varphi(z)\,dz = 2\pi i \sum R\,.$$

Ora se forem $c_1, c_2, \cdots, c_k$ os resíduos de $f(z)$ em $a_1, a_2, \cdots, a_k$, os de $f(z)\cdot\varphi(z)$ são

$$c_1\,\varphi(a_1)\,,\ c_2\,\varphi(a_2)\,,\ \cdots,\ c_k\,\varphi(a_k)\,;$$

em $z=m$ o resíduo é $f(m)$ e vem, portanto

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\,\varphi(z)\,dz = \sum c_j\,\varphi(a_j) + \sum f(n)$$

igualdade que nos permite determinar $\sum f(n)$ uma vez conhecido o integral; a soma da série obter-se-à depois por uma passagem ao limite.

O problema simplifica-se extraordinàriamente se C é uma circunferência de centro na origem e

$$|z\cdot f(z)\cdot\varphi(z)| \to 0 \quad \text{quando} \quad |z| \to \infty\,;$$

nestas condições o primeiro membro tende para zero e a soma da série é $-\Sigma\, c_j\,\varphi(a_j)$.

Como função $\varphi(z)$ podemos tomar qualquer das seguintes:

$$\frac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}\,,\quad \pi\cot\pi z\,,\quad \pi\operatorname{cosec}\pi z \quad \text{e} \quad \frac{2\pi i\cos\pi z}{e^{2\pi i z}-1}$$

permitindo estas duas últimas o cálculo da soma de séries alternadas.

3. Como primeiro exemplo, calculemos $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n^2+a^2}$.

A função $f(z)=\dfrac{1}{z^2+a^2}$ é contínua sobre uma circunferência de centro na origem e raio $r=n+1/2$ (com $n>a$) e tem como polos simples $z=\pm ai$. Tomando $\varphi(z)=\dfrac{2\pi i}{e^{2\pi i z}-1}$, cujos polos são os números inteiros positivos e negativos, tem-se para resíduos em ai e $-ai$ os valores

$$\frac{\pi}{a}\,\frac{e^{2\pi a}}{1-e^{2\pi a}} \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{a}\,\frac{1}{1-e^{2\pi a}} \quad \text{e em} \quad z=m\,,\ \frac{1}{m^2+a^2}.$$

Como $|z\cdot f(z)\cdot\varphi(z)| \to 0$ com $\dfrac{1}{|z|}$, ou quando $n\to\infty$, o integral tende para zero e vem:

$$\lim_{n=\infty}\sum_{m=-n}^{n}\frac{1}{m^2+a^2} = -\frac{\pi}{a}\,\frac{e^{2\pi a}+1}{1-e^{2\pi a}} = \frac{\pi}{a}\coth\pi a$$

e visto ser

$$\sum_{-n}^{n}\frac{1}{m^2+a^2} = \frac{1}{a^2} + 2\sum_1^n\frac{1}{m^2+a^2}$$

tem-se finalmente

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\coth\pi a - \frac{1}{2a^2}\,.$$

Se tomassemos como contorno de integração o rectângulo de lados sobre as rectas $x=1/2$, $x=n+1/2$ e $y=\pm 1$, obtinha-se, depois de calcular os integrais curvilíneos ao longo dos lados

$$\sum_1^\infty\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\,.$$

Consideremos agora a série alternada

$$\sum_1^\infty(-1)^n\frac{1}{(4n)^2-1}\,.$$