$\delta = f(\varepsilon)$. O n.º relativo a limites à direita e limites à esquerda mantém estes erros.

Quanto ao § IV, relativo à continuidade, tudo se passa afinal no mesmo plano do § II. Destacamos no entanto: o título do n.º 17 — *definição intuitiva de continuidade* — e respectivas considerações; as observações que seguem a definição analítica de continuidade, pag. 72; tudo quanto diz sobre continuidade à esquerda e à direita.

6 — Em conclusão, parece-nos que a obra, objecto desta crítica, não satisfaz para ser utilizada como livro único de ensino. Não podemos deixar de repetir neste momento algumas das afirmações feitas de início. Recai, não só sobre o Autor, mas também sobre a Comissão que apreciou os livros em concurso, a alta responsabilidade de terem fornecido a professores e estudantes um mau instrumento de trabalho que não preenche devidamente as condições exigíveis em livros desta índole. Admira-nos sobretudo que nenhum dos professores da Comissão de Apreciação tivesse sentido a gravidade dos erros e defeitos que apontamos (ou outros que não referimos). E não há dúvida de que pelo menos a Comissão, colectivamente, não a sentiu, pois de contrário seria obrigada como está expresso em disposições legais, a propor ao Autor as modificações convenientes.

Que essas modificações apareçam brevemente, ou pelo menos na próxima edição deste trabalho, para bem do Ensino da Matemática no nosso país.

LAUREANO BARROS

PROBLEMAS

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2399 (*Gaz. Mat.* n.º 31) — Mostre que (1)

$$\sum_{p=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{p}{n^{p-1}} (n!)^{(p-1)/n} = \left(\frac{e}{e-1}\right)^2.$$

R: *Pretende-se calcular a soma da série cujo termo geral é* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n^{p-1}} (n!)^{(p-1)/n}$. *Ponhamos*

$$\varphi(n) = \left(\frac{p}{n^{p-1}}\right)^n (n!)^{p-1}.$$

Sabe-se que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varphi(n)}$ *e estes limites são iguais.*

Ora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} \left[p \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(p-1)} \right] = p \left(\frac{1}{e}\right)^{p-1}.$$

Para determinar a soma da série $\sum\limits_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{1}{e}\right)^{p-1}$, *notemos que a série geométrica* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} x^p$, *convergente no intervalo aberto* $(-1, 1)$, *tem por soma* $\frac{x}{1-x}$ *e a série* $\sum\limits_{p=1}^{\infty} p x^{p-1}$, *obtida da anterior por derivação termo a termo, é uniformemente convergente em* $(-1, 1)$ *e, por isso, a sua soma pode calcular-se derivando* $\frac{x}{1-x}$. *Como a derivada de* $\frac{x}{1-x}$ *no ponto* $\frac{1}{e}$ *é precisamente* $\left(\frac{e}{e-1}\right)^2$, *fica provado o que se pretendia.*

2543 (*Gaz.. Mat.* nº 34) — Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{p=1}^{n} (p!)^{r/p} \Big/ \sum_{p=1}^{n} p^r \right) = e^{-r}.$$

R: *Seja* $f(n) = \varphi(n)/\psi(n)$; *Sabe-se que, se existe* $\lim\limits_{n\to\infty} [(\varphi(n) - \varphi(n-1))/(\psi(n) - \psi(n-1))]$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)$ *e estes limites são iguais. Fazendo então* $\varphi(n) = \sum\limits_{p=1}^{n} (p!)^{r/p}$ *e* $\psi(n) = \sum\limits_{p=1}^{n} p^r$, *vem*

$$\frac{\varphi(n) - \varphi(n-1)}{\psi(n) - \psi(n-1)} = \left(\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}\right)^r.$$

Sabe-se ainda que, se existe $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\theta(n+1)}{\theta(n)}$, *também existe* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\theta(n)}$ *e estes limites são iguais (caso seja* $\theta(n) \geqslant 0$*).* *Pondo* $\theta(n) = n!/n^n$, *tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\theta(n+1)}{\theta(n)} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = e^{-1},$$

donde se conclui que $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = e^{-r}$, *c. q. d.*

Solução dos 2 problemas anteriores de José C. Morgado J.or

(1) É este o enunciado correcto do problema e não o publicado, por engano, no n.º 31 da revista.