to M à distância a do eixo Az (ponto que pode ser escolhido sobre Ax) possua um movimento de aceleração tangencial constante e igual a b. *b*) O movimento obtido na alínea precedente pode, em projecção sobre Oxy, obedecer à lei das áreas relativamente a O? Justificar a resposta e, não sendo afirmativa, dizer qual deveria ser a lei do movimento helicoidal para aquela condição ser satisfeita.

3215 — Um ponto material M de peso mg e massa m é obrigado a mover-se sobre a parábola perfeitamente polida $y^2=2ax$ cujo eixo Ox é vertical. Além do peso actua sobre o ponto uma força constante mF paralela a Oy. *a*) Escrever as equações do movimento de M sob a forma de Mac-Laurin. *b*) Escrever o integral da força viva expresso nas coordenadas do ponto e das suas primeiras derivadas. *c*) Sabendo que o ponto no instante $t=0$ se encontra na posição de ordenada $y=a$, calcular a velocidade que deve ser-lhe comunicada nesse instante para que atinja o vértice da parábola com velocidade nula.

3216 — Um disco circular vertical de centro C e raio b pode rolar sem escorregamento sobre um eixo horizontal AB. Um fio inextensível $ESDM$ está fixo em E à periferia do disco, aplica-se sobre ele, abandona-o horizontalmente em S e depois de passar através de um anel D perfeitamente polído cai verticalmente sustentando na extremidade um peso p. *a*) Sabendo que em C actua uma força horizontal F, calcular o seu valor de modo que o disco e o ponto estejam em equilíbrio (aplicar o teorema dos trabalhos ou das velocidades virtuais). *b*) Calcular as componentes da reacção que se desenvolve no ponto de contacto do disco com a horizontal AB.

I. S. T. — Mecânica Racional — Exame final — Outubro de 1950.

3217 — É dado um sólido S cujo elipsoide de inércia, em relação ao ponto fixo O do sólido, é de revolução. O sólido está animado dum movimento de Poinsot em relação ao ponto O. Escrever as equações de Euler e integrá-las, determinando as equações do movimento. R: *Seja* $Ax^2+Ay^2+Cz^2=1$ *a equação do elipsoide em relação ao ponto* O. *As equações de Euler serão:*

$$\frac{dp}{dt}+kqr=0,\quad \frac{dq}{dt}-kpr=0,\quad \frac{dr}{dt}=0,\left(k=\frac{C}{A}-1\right),$$

que, integradas, dão

$$p=c_2\operatorname{sen}\mu t+c_3\cos\mu t$$
$$q=c_3\operatorname{sen}\mu t-c_2\cos\mu t \qquad \mu=kc_1$$
$$r=c_1.$$

O sólido tem pois um movimento de rotação em torno do ponto O, *definido pelo vector* $\vec{\omega}=p\mathrm{I}+q\mathrm{J}+r\mathrm{K}$.

3218 — Um ponto P, de massa m, move-se sem atrito, sobre uma recta OP que, por sua vez, está animada duma rotação uniforme, num plano fixo (Oxy), em torno da origem O. Não há forças activas. Achar a força viva, escrever as equações de Lagrange e as equações canónicas de Hamilton. R: *Em coordenadas semi-polares* $(\vec{R}, \vec{S}, \vec{K})$ *será*

$$P-O=re^{i\omega t} \qquad \omega\to\text{rotação}$$

e a força viva toma a forma $2T=m(r'^2+r^2\omega^2)$

As equações do movimento serão então

$$F_R=m(r''-r\omega^2) \qquad rF_S=\frac{d}{dt}mr^2\omega^2.$$

3219 — Verificar que o ponto P definido pela equação

$$b_1(P-B_1)+b_2(P-B_2)+\cdots+b_n(P-B_n)=0$$

é o centro de gravidade dum sistema de massas $b_1, b_2\cdots b_n$ colocadas respectivamente nos pontos $B_1, B_2\cdots B_n$. R: *Da expressão corrente que define o centro de gravidade* $M(G-O)=\Sigma_i m_i(P_i-O)$ *resulta imediatamente* $\Sigma_i m_i(G-P_i)=0$, *igualdade equivalente à equação proposta.*

Soluções dos n.os 3217 a 3219 de J. Gaspar Teixeira

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

85 — SEMPLE, J. G., and ROTH, L. — **Introduction to Algebraic Geometry.** Oxford, at the Clarendon Press, 1949. xvi+446 pp. Price 30 s. net.

A nuestro juicio, el mérito principal de la obra que vamos a presentar reside en el hecho de contener un vasto y bien elegido material experimental de geometria algebraica. En tal sentido, lo consideramos de inestimable valor para el especialista de aquella disciplina. Dicho material encuentra su lugar, no solo en la parte expositiva del texto, sino también y especialmente en las numerosas notas y en los ejemplos y ejercicios, puestos al final de cada párrafo y de cada capítulo, seleccionados con el fino espíritu geométrico que poseen los autores, ambos distinguidos investigadores en el campo de la geometria algebraica.

En cambio, la exposición teórica aparece en forma que, tanto en la ordenación como en la fundamentación, no está a cubierto de los reproches que pudiera dirigirle un crítico no muy exigente; como consecuencia, creemos que un principiante, que no posea mas conocimientos previos que los elementales de geometria proyectiva y álgebra que los autores suponen en el Prefacio, ha de tropezar con grandes dificultades para la buena comprensión de muchas de las cuestiones tratadas en el libro. Por todo ello, mas que una Introducción a la Geometria algebraica (en el sentido, p. ej., de *Einführung in die algebraische Geometrie* de van der Waerden, o de la obra de Hodge-Pedoe: *Methods of Algebraic Geometry*, cuyo único tomo aparecido hasta ahora fué reseñado en el n.° 37 de esta Revista), el libro ha de considerarse como una visión panorámica de la misma, desde un punto de vista principalmente intuitivo.

El método seguido es el llamado algébrico-geométrico de la geometria algebraica clásica; los aspectos transcendente y topológico quedan fuera del objecto de la obra. El rigor no parece haber sido la preocupación fundamental de los autores; estos admitem explicitamente en el Prefacio que, en lo relativo al lenguaje, han procedido con «a certain degree of informality», principio liberal que han extendido generosamente, y no siempre de modo explícito, a la demostración de una gran parte de los teoremas.

Por encima de las observaciones precedentes, queda, sin embargo, el substancioso contenido intuitivo y la cuidadosa y detallada información que contiene el libro, destinado a prestar grandes servicios aún a aquellos, y nos sentimos inclinados a escribir «especialmente aquellos», que se ocupan de geometria algebraica desde el punto de vista abstracto al que se debe¡ conviene no olvidarlo! el renacer del interés universal por esta interesante y siempre viva rama de la matemática.

Damos a continuación un detalle de las principales cuestiones tratadas en los distintos capítulos. El Cap. I es de introducción y en el se da, de una parte, la estructura del espacio proyectivo S_n junto con las principales propiedades de sus transformaciones proyectivas y de las figuras elementales ligadas a ellas; por outra parte, se establecen los conceptos de variedad algebraica irreducibles, correspondencias algebraicas y variedades racionales. En el Cap. II se estudian las propiedades proyectivas de las curvas planas algébricas: polaridad, elementos singulares, subadjuntas, género aparente, ... ; y se consideran las curvas racionales y elípticas, dándose algunas nociones sobre las curvas de géneros 2, 3 4. Las transformaciones cuadráticas planas constituyen el objeto del Cap. III, se utilizan luego para la resolución de las singularidades y para la definición de los puntos infinitamente próximos. También se definen en él, el género de una curva y se da la multiplicidad de intersección de dos curvas en un punto múltiple. El Cap. IV, titulado Correspondencias racionales, contiene las correspondencias (m, n) en las variedades racionales de dimensión 1, correspondencias entre planos y variedades de dos dimensiones, la regla de Zeuthen y sus aplicaciones, fórmulas de Plücker y Cayley, asi como la determinación de los caracteres principales de las curvas definidas como intersección de superficies. El theorema $Af+B\varphi$ de Noether y sus aplicaciones es el tema del Cap. V. En los Cap. VI, VII, VIII se estudian los sistemas lineales de curvas planas y de superficies en S_3 y su interpretación como representaciones planas de las superficies racionales y como representaciones en S_3 de las variedades racionales de tres dimensiones.

De modo natural aparecen entonces las transformaciones cremonianas generales del plano y algunas particulares del espacio S_3. De dichas transformaciones se hace aplicación a la resolución de singularidades puntuales y lineales de las superficies. El contenido de estos capítulos es de fundamental importancia en geometria algebraica. El Cap. IX está dedicado a los caracteres proyectivos de las curvas y superficies de S_n; se estudian especialmente las superficies regladas y las racionales, al mismo tiempo se dan algunos invariantes numéricos de las superficies tales como: el género aritmético, el invariante de Zeuthen-Segre y el de Castelnuovo-Enriques. La geometria de los espacios reglados de S_3 y S_4 y sus diversas representaciones puntuales en espacios proyectivos de mas dimensiones, constituyen el objecto del Cap. X.

En el Cap. XI se expone brevemente la Geometria numerativa. Se establecen las fórmulas fundamentales del cálculo de Schubert y se estudian problemas numerativos referentes a cónicas y cuádricas. Se enuncia el principio de la conservación del número y se establecen las condiciones para su validez siguiendo el análisis del principio debido a Severi.

Los dos últimos capítulos, XII y XIII, están dedicados a la geometria algebraica propiamente dicha de las curvas y superficies, es decir a la geometria birracional sobre una curva y sobre una superficie. En el XII se estudia la geometria sobre una curva; se definen, para los grupos de puntos, la equivalencia y las series lineales. La serie canónica se define, siguiendo a Enriques, mediante la serie jacobiana. Se hacen aplicaciones al estudio de las correspondencias con valencia y a la determinación de la fórmula de Cayley-Brill para el número de coincidencias en una correspondencia.

El teorema de Riemann-Roch se deduce a partir del teorema de reducción de Noether y se aplica luego para estabelecer el teorema de Clifford y, en el estudio de las curvas en S_n, para dar las fórmulas de postulación de una curva. En el Cap. XIII se hace un estudio muy somero de la geometria sobre una superficie, las cuestiones tratadas tales como: sistemas lineales de curvas, curvas excepcionales, caracteres virtuales de las curvas, sistemas jacobiano y canónico, curvas adjuntas, teorema de Riemann-Roch, ... aparecen solo iniciadas y gran parte de los resultados enunciados se basan sobre otros cuya demostración, por la dificultad intrínseca de la cuestión, excede los límites que los autores se han señalado para la presente obra y, en consecuencia, se ha de en buscar las memorias originales o tratados que se indican.

G. Ancochea (Madrid)

86 — COXETER, H. S. M. — **Regular Polytopes** — Methuen & C.º Ltd. — London — 1948. Preço 50 s. net.

O livro em referência é um livro atraente para todo aquele a quem a geometria, e em especial o estudo dos poliedros, seja motivo de agrado.

O título no entanto precisa desde já ser esclarecido. O que é um *politopo*? Um *politopo* é uma figura geométrica formada por porções de recta, de planos ou de hiperplanos. Assim no espaço a duas dimensões toma os nomes particulares de polígono, rede, árvore etc.; no espaço a três dimensões o de poliedro etc. Shläfi que escreveu uma grande monografia sobre o assunto chamava-lhes polyschema.

Diz o autor que o seu livro se pode considerar uma continuação dos «Elementos de Euclides», porquanto os fundamentos dos assuntos tratados se encontram na literatura grega de há cerca de 2.000 anos. No entanto deve notar-se que o estudo de assuntos como os do Cap. V, o Kaleidoscópio, só teve início no século passado. Apesar disso a afirmação é verdadeira pois parece que os «Elementos» tiveram como fim principal o estudo dos poliedros regulares aos quais era atribuido significado esotérico.

Recentemente a revivescência destes estudos é em grande parte devida aos aprofundados trabalhos da cristalografia que chegou a descobrir que muitos poliedros aparecem na natureza como cristais. O trabalho de F. Klein «Vorlesunger über Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen füften Grades»(1) veio tambem por em evidência a necessidade e vantagem de tais estudos embora sob aspecto diverso.

O desenvolvimento da Topologia Combinatória é também causa de tal aprofundamento. A «Analise Situs» cujas primeiras manifestações nos aparecem com problemas curiosos como o problema das pontes de Königsberg, da coloração dos mapas, do problema das gares, etc, e para cujo estudo tantos matemáticos notáveis como Poincaré concorreram, é ainda uma das causas deste florescimento dos estudos que o livro encerra.

Tem o livro, a grande qualidade, para os que se iniciam nestes trabalhos, de pôr e tratar as questões desde o início, dando todas as noções necessárias à boa compreensão do assunto, ainda que elas sejam muito elementares. É um livro que o aluno do primeiro ano das nossas escolas superiores, pode começar a ler com a certeza de o entender e com ele ir até à fronteira do conhecimento actual do assunto. É muito claro e as demonstrações, se nem sempre são dum rigor lógico extremo, tem no entanto a vantagem de serem bastante simples e compreensíveis à primeira leitura. A maior dificuldade que o leitor encontrará, julgo, que será a da nomenclatura e a das notações que apresentam no entanto nítidas vantagens sobre as anteriores.

O trabalho é resumo da actividade do autor desde 1923, em que publicou a sua «Dimensional Analogy» e de que este, é o desenvolvimento.

Aos que se interessam por tais estudos aconselhamos vivamente a leitura deste livro.

Para se ter ideia resumida dos assuntos tratados se dão a seguir os títulos dos capítulos:

I — Polígonos e poliedros, II — Sólidos regulares e quase-regulares, III — Grupo das rotações, IV — «Tesselations» e «Honeycombs», V — O Caleidoscópio, VI — Poliedros estrelados, VII — Politopos ordinários em espaços a mais de três dimensões, VIII — Trùncaturas, IX — A demonstração de Poincaré da Fórmula de Euler, X — Formas, vectores, e coordenadas, XI — Polígonos de Petrie generalizados, XII — Secções e projecções, XIV — Politopos estrelados.

No fim de cada capítulo dá-nos sempre o autor um desenvolvimento histórico do assunto, o qual estabelece as ligações com os trabalhos anteriores; e no final do livro apresenta bibliografia abundante que permite desenvolver aquelas partes da matéria que mais possam interessar cada qual.

Está ainda o livro cheio de belíssimas gravuras que muito esclarecem e elucidam o leitor facilitando o trabalho.

É um livro que, segundo cremos, será acessível até ao leigo com curiosidade das coisas da matemática em geral e daqueles capítulos da geometria, em particular, desde que tenha um mínimo de preparação.

Um só senão a apontar, o preço, que se justifica, ainda assim, dada a qualidade do trabalho tipográfico e das gravuras.

J. da Silva Paulo

(1) Existe uma tradução inglesa intitulada: *Lectures on the Icosahedron*. London 1917 — tradução de G. G. Morris.