
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXIV

N.º 90-91

JAN.-JUNHO 1963

SUMÁRIO

Funções periódicas na recta e no plano complexo.
Funções duplamente periódicas; funções elípticas
por *Ruy Luis Gomes*

Quase grupos subtractivos
por *Jayme Machado Cardoso*

Introducción de la estadística en la enseñanza media
por *Sixto Rios*

Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores
Nucleares
(*Conclusão*)
por *José Gaspar Teixeira*

Decomposição de ideais em ideais primos:
teoria de Kummer-Dedekind
por *Ubiratan D'Ambrosio*

Matemáticas Superiores
Pontos de Exames de Frequência e Finais
Matemáticas Gerais

Boletim Bibliográfico

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.*

ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

REDACÇÃO

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

OUTROS COMPONENTES

EM PORTUGAL:

Coimbra: L. Albuquerque; **Lisboa:** Almeida Costa, A. Sá da Costa, J. J. Dionísio, J. Sebastião e Silva, J. Ribeiro Albuquerque, M. Teodora Alves, Fernando de Jesus, A. César de Freitas e Fernando Dias Agudo; **Porto:** Andrade Guimarães, Laureano Barros, L. Neves Real.

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — *Buenos Aires:* António Monteiro, L. A. Santaló; *Mendoza:* F. Toranzos; *San Luis:* Manuel Balanzat; **Brasil** — *Belo Horizonte:* Cristovam dos Santos; *Recife:* Luiz Freire, Manuel Zaluar, Newton Maia, Ruy Luís Gomes e José Morgado; *Rio de Janeiro:* Achille Bassi, Leopoldo Nachbin, Maria Laura Mousinho e Maurício Peixoto; *São Paulo:* Omar Catunda; **Espanha** — *Barcelona:* Francisco Sanvisens; *Madrid:* Sixto Rios Garcia; **Itália** — *Roma:* Emma Castelnuovo; **França** — *Paris:* Paul Belgodère; *Nancy:* A. Pereira Gomes; **Suissa** — *Zürich:* H. Wermus; **Uruguay** — *Montevideo:* Rafael La Guardia; **U. S. A.** — *Pennsylvania:* Maria Pilar Ribeiro; *Venezuela* — J. Gallego Diaz.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. fornece separatas dos artigos publicados, mediante acordo prévio entre o Autor e a Redacção.

COLECÇÃO «PROBLEMAS DA ACTUALIDADE CIENTÍFICA»

N.º 1 — A Exploração do Espaço Cósmico

por A. N. NESMEIANOV

A SAIR NA MESMA COLECÇÃO:

THE ROYAL SOCIETY OF LONDON

for the Promotion of Natural Knowledge, no seu tri-centenário

RADIAÇÕES, *seus problemas*

*

AUTOMAÇÃO, *seus problemas*

Esta colecção dirige-se ao público português com conhecimentos equivalentes aos adquiridos no ensino secundário.

EDIÇÕES DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Os sócios da S. P. M., assinantes da «Gazeta de Mat.» e da «Portugaliae Math.», beneficiam para estas obras do desconto de 20%.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, Lda — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

Funções periódicas na recta e no plano complexo. Funções duplamente periódicas; funções elípticas⁽¹⁾

por Ruy Luis Gomes

1. Caracterização do conjunto dos períodos de uma função sobre R .

DEFINIÇÃO 1. *Seja $f: R \rightarrow R$ uma aplicação de R em R .*

Diz-se que $T \in R$ é um período de f quando

$$f(x + T) = f(x)$$

para todo $x \in R$.

TEOREMA 1. *O conjunto dos períodos de f constitui um subgrupo do grupo aditivo R dos números reais.*

Chama-se a este subgrupo G — grupo dos períodos de f .

DEMONSTRAÇÃO.

1) $0 \in G$, visto que $f(x + 0) = f(x)$ para $\forall x \in R$.

2) $T \in G \Rightarrow -T \in G$, visto que a hipótese $T \in G$ permite escrever $f(x - T) = f[(x - T) + T] = f(x)$, $\forall x \in R$.

3) $T_1 \in G$ e $T_2 \in G \Rightarrow T_1 + T_2 \in G$, visto que a hipótese $T_1, T_2 \in G$ permite escrever $f(x + (T_1 + T_2)) = f[(x + T_1) + T_2] = f(x + T_1) = f(x)$ para $\forall x \in R$.

TEOREMA 2. *Se f é uma aplicação contínua de R em R , então G é um subgrupo fechado de R .*

DEMONSTRAÇÃO. Seja (T_n) uma sucessão de elementos de G , convergente para $T \in R$.

Precisamos de mostrar que $T \in G$, o que equivale a $f(x + T) = f(x)$ para $\forall x \in R$.

Ora como $f: R \rightarrow R$ é contínua tem-se $f(x + T) = f(x + \lim_n T_n) = \lim_n f(x + T_n) = f(x)$ para $\forall x \in R$.

Vamos agora caracterizar os subgrupos fechados de R .

TEOREMA 3. *Os únicos subgrupos fechados de R são: $\{0\}$, R e $\{nT\}$, em que $0 < T$ e $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.*

DEMONSTRAÇÃO. Que estes três subgrupos são fechados, é evidente; vejamos agora que não existe mais nenhum.

(1) Lição do Curso de Funções Especiais realizado no Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife.

Seja, então, G um subgrupo fechado de R e distingamos as duas hipóteses: a) G possui pelo menos um ponto de acumulação; b) G não possui nenhum ponto de acumulação.

a) Seja T um ponto de acumulação de G e representemos por (T_n) , $T_n \in G$, uma sucessão convergente para T . Sabe-se que é possível construir uma tal sucessão cujos elementos são todos distintos.

Como G é fechado, $T \in G$ e portanto $(T - T_n)$ é uma sucessão de elementos de G convergente para zero, o que nos permitirá concluir que G é denso em R e por conseguinte coincide com R .

Com efeito seja $\alpha > 0$ e consideremos o intervalo $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Como $(T - T_n) \rightarrow 0$, existe n tal que o período $0 < |T - T_n| = \tau < \varepsilon$.

Designemos por n_0 o número inteiro tal que

$$(n_0 - 1)\tau \leq \alpha + \varepsilon < n_0\tau.$$

O período $(n_0 - 1)\tau \in (\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$, de contrário

$$\tau = n_0\tau - (n_0 - 1)\tau > \alpha + \varepsilon - (\alpha - \varepsilon) = 2\varepsilon,$$

o que contradiz $\tau < \varepsilon$.

Como ε é arbitrário, está demonstrado que $\alpha \in G$ para $\alpha > 0$ e como G é um grupo, resulta finalmente $G = R$.

b) Nesta hipótese ou o conjunto dos períodos positivos é vazio e, então, $G = \{0\}$, ou não é vazio e, então, admite um primeiro elemento $T_0 > 0$.

Mas neste caso dado $T > 0$, $T \in G$, temos

$$T = nT_0 + T'$$

onde $1 \leq n$ e $0 \leq T' < T$, o que implica $T' = 0$, de contrário o período $0 \neq T' = T - nT_0 < T_0$, contra a hipótese de que T é o primeiro elemento positivo de G .

Consequentemente

$$T \in G \Rightarrow T = nT_0,$$

com n inteiro (positivo, nulo ou negativo).

2. Caracterização do conjunto dos períodos de uma função sobre R^2 (função de 2 variáveis).

DEFINIÇÃO 2. Seja $f: R^2 \rightarrow R$ uma aplicação do espaço vectorial R^2 em R . Diz-se que um vector $\vec{T} \in R^2$ é um período de f quando

$$f(\vec{x} + \vec{T}) = f(\vec{x}), \text{ para } \forall \vec{x} \in R^2.$$

TEOREMA 4. Os períodos de f formam um subgrupo G aditivo dos vectores de R^2 .

DEMONSTRAÇÃO. Como a do teorema 1.

TEOREMA 5. Se $f: R^2 \rightarrow R$ é continua, então G é um subgrupo fechado.

DEMONSTRAÇÃO. Como a do teorema 2.

Para caracterizar os subgrupos fechados de R^2 começamos por demonstrar o seguinte

TEOREMA 6. Se um grupo fechado G de R^2 possui um ponto de acumulação, então contém um subgrupo $\{ta\}$, onde $a \neq 0$ é um elemento de G e t um número real qualquer (1).

DEMONSTRAÇÃO. Se G possui um ponto de acumulação, zero é também ponto de acumulação e consequentemente existe uma sucessão (x_p) de pontos de G , tal que $x_p \neq 0$ e $\lim_p x_p = 0$.

(1) BOURBAKI — Topologie Générale, chapitre VII, § 1, 2 — Proposition 3.

Seja P um cubo aberto de centro zero. Resulta do axioma de Arquimedes que existe um inteiro positivo k_p tal que $k_p x_p \in P$, $(k_p + 1)x_p \notin P$. Como $k_p x_p \in \bar{P}$, que é um compacto, a sucessão $(k_p x_p)$ tem um valor de aderência a em $\bar{P}$. Vejamos que $a \neq 0$ e para isso demonstremos que $a \notin P$.

Ora de

$$\|(k_p + 1)x_p - a\| \leq \|k_p x_p - a\| + \|x_p\|$$

e das hipóteses

a valor de aderência de $(k_p x_p)$

$$\lim x_p = 0,$$

resulta que a é valor de aderência da sucessão $((k_p + 1)x_p)$.

Mas $(k_p + 1)x_p \in -P = -\bar{P}$, logo $a \in -P$, como queríamos provar.

Por outro lado, como $x_p \in G$ e G é um grupo fechado, vem $a \in G$.

Falta apenas verificar que $ta \in G$ para todo o número real t .

Designando, como é costume, por $[t]$ o maior inteiro menor ou igual a t , tem-se

$$\begin{aligned} \|[tk_p]x_p - ta\| &\leq \|[tk_p]x_p - tk_p x_p\| + \\ &+ \|tk_p x_p - ta\| = \|[tk_p] - tk_p\| \|x_p\| + \\ &+ |t| \|k_p x_p - a\| \leq \|x_p\| + |t| \|k_p x_p - a\|. \end{aligned}$$

Mas $x_p \rightarrow 0$ e a é um valor de aderência da sucessão (x_p) , resulta que ta é um valor de aderência de $([tk_p]x_p)$ e portanto pertence a G (visto G ser um grupo fechado).

Com base neste teorema pode agora demonstrar-se

TEOREMA 7. *Seja G um subgrupo fechado de R^2 , de rang r ; existe um subespaço vectorial máximo V contido em G . Se W é um subespaço suplementar qualquer de V , então $G \cap W$ não possui nenhum ponto de acumulação, e G é soma directa de V e de $G \cap W$ (1).*

DEMONSTRAÇÃO. Em primeiro lugar recordemos que se chama *rang* de uma parte A de R^2 a dimensão do subespaço vectorial gerado por A .

Dizer que G tem *rang* r é, pois, dizer que G gera um subespaço vectorial de dimensão r .

Mostremos que existe um subespaço máximo $V \subset G$.

Como todo o subespaço contido em G é um subconjunto de $\bigcup_{a \in M} Ra$, onde M é o conjunto dos elementos $a \in G$ tais que $Ra \subset G$, basta demonstrar que $\bigcup_{a \in M} Ra$ é um subespaço.

Ora se x, y pertencem a $\bigcup_{a \in M} Ra$, tem-se $x = ra$, $y = r'a'$ com $Ra \subset G$, $Ra' \subset G$, o que implica $\forall \alpha \beta \in R$, $\alpha x + \beta y = \alpha r \cdot a + \beta r' \cdot a' = b \in G$ e

$$\gamma b = \gamma \alpha r \cdot a + \gamma \beta r' \cdot a' \in G,$$

para todo $\gamma \in R$. Logo,

$$\alpha x + \beta y \in Rb \subset G,$$

isto é,

$$\alpha x + \beta y \in \bigcup_{a \in M} Ra, \text{ q. e. d.}$$

$$\text{Então } V = \bigcup_{a \in M} Ra.$$

Seja agora W um subespaço suplementar de V . Dado $x \in G$ vem

$$x = z + y, \quad z \in V \text{ e } y \in W.$$

Mas como $V \subset G$, resulta $y = x - z \in G$ e portanto

$$G = V + W \cap G.$$

Falta agora mostrar que $W \cap G$ é um subgrupo fechado que não admite nenhum ponto de acumulação.

Mas para isso basta atender a que $W \cap G$ é um grupo fechado (como intersecção de dois grupos fechados) que não pode conter

(1) BOURBAKI, op. cit. Teorema 2, p. p. 65.

nenhum espaço da forma Ra com $a \neq 0$, pois V é máximo.

Se p é a dimensão de V , tem-se $p \leq r$ e $W \cap G$ possui *rang* $r - p$.

O problema da caracterização do grupo G , está agora reduzido ao estudo dos grupos como $G \cap W$ que não admitem pontos de acumulação — *grupos discretos*.

Ora se um grupo discreto $G \in R^2$ tem *rang* zero reduz-se a $\{0\}$ e se tem *rang* um reduz-se a $\{na\}$, $a \neq 0$ e n inteiro, por força do que já demonstrámos para a recta R .

Resta considerar a hipótese — *rang* de $G = 2$ e para isso comecemos por demonstrar o

TEOREMA 8. *Sejam G um subgrupo discreto de R^2 , de *rang* 2, a_1, a_2 uma base de R^2 constituída por elementos de G e P o paralelogramo construído sobre a_1, a_2 .*

Então o conjunto $G \cap P$ é finito e constitui um sistema de geradores de G ; além disso todo elemento de G se pode exprimir como combinação linear, com coeficientes racionais, de a_1 e a_2 (1).

DEMONSTRAÇÃO. 1) $G \cap P$ é finito, visto que $G \cap P$ é compacto e discreto; 2) Seja x um ponto qualquer de G ; tem-se

$$x = t_1 a_1 + t_2 a_2, \quad t_1, t_2 \in R.$$

mas escrevendo

$$\begin{aligned} x &= [t_1] a_1 + [t_2] a_2 + x - [t_1] a_1 - [t_2] a_2 = \\ &= [t_1] a_1 + [t_2] a_2 + (t_1 - [t_1]) a_1 + (t_2 - [t_2]) a_2 = \\ &= x_1 + z_1, \end{aligned}$$

vê-se que

$$z_1 = (t_1 - [t_1]) a_1 + (t_2 - [t_2]) a_2 \in P,$$

pois

$$0 \leq t_i - [t_i] \leq 1.$$

Mas como

$$a_1, a_2 \in G \cap P \text{ e } z_1 = x - [t_1] a_1 - [t_2] a_2 \in G,$$

resulta de $a_1, a_2, z_1 \in G \cap P$ e de

$$x = [t_1] a_1 + [t_2] a_2 + z_1,$$

que os elementos de $G \cap P$ formam um sistema de geradores de G .

3) Mostremos finalmente que t_1, t_2 são racionais.

Escrevendo

$$\begin{aligned} mx &= [t_1 m] a_1 + [t_2 m] a_2 + \\ &+ mx - [m t_1] a_1 - [m t_2] a_2 \\ mx &= x_m + z_m, \quad m \text{ inteiro,} \end{aligned}$$

resulta que

$$z_m = (m t_1 - [m t_1]) a_1 + (m t_2 - [m t_2]) a_2 \in G \cap P,$$

pois $0 \leq m t_i - [m t_i] \leq 1$.

Mas como $G \cap P$ é finito e m inteiro qualquer, têm de existir inteiros distintos h, k tais que

$$z_h = z_k$$

o que implica

$$\begin{aligned} h t_i - [h t_i] &= k t_i - [k t_i] \\ (h - k) t_i &= [h t_i] - [k t_i] \end{aligned}$$

donde

$$t_i = \frac{[h t_i] - [k t_i]}{h - k},$$

q. e. d.

COROLÁRIO. *Existe uma base a'_1, a'_2 de R^2 tal que para todo $x \in G$*

$$x = m_1 a'_1 + m_2 a'_2$$

onde m_1, m_2 são inteiros.

DEMONSTRAÇÃO. Como os elementos de $G \cap P$ formam um sistema de geradores de G , dado $x \in G$, existem $b_1, \dots, b_q$ de $G \cap P$

(1) BOURBAKI, op. cit. Proposition 1, pp. 62.

tais que

$$x = \sum_{i=1}^q n_i b_i, \quad n_i \text{ inteiros.}$$

Mas pelo teorema anterior

$$b_i = t_1^{(i)} a_1 + t_2^{(i)} a_2,$$

com $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$ racionais.

Designando, então, por d um múltiplo comum dos denominadores de $t_1^{(i)}, t_2^{(i)}$, vem

$$x = \left(\sum_{i=1}^q n_i t_1^{(i)} \right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^q n_i t_2^{(i)} \right) a_2$$

$$x = m_1 a'_1 + m_2 a'_2$$

onde

$$a'_1 = \frac{a_1}{d}, \quad a'_2 = \frac{a_2}{d} \quad \text{e} \quad m_1 = d \sum_{i=1}^q n_i t_1^{(i)},$$

$$m_2 = d \sum_{i=1}^q n_i t_2^{(i)}$$

são inteiros.

Isto significa que G é um subgrupo do grupo gerado pelos elementos $\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}$, em

que d é um número inteiro conveniente.

Vamos, porém, demonstrar o

TEOREMA 9. *Todo grupo de $\mathbb{R}^2$ discreto e de rang 2 coincide com o grupo*

$$\{n_1 b_1 + n_2 b_2\}$$

em que b_1, b_2 são elementos independentes de G .

DEMONSTRAÇÃO (1). 1) *Existe um par de elementos independentes b_1, b_2 de G tal que o paralelogramo construído sobre b_1, b_2 tem área inferior ou igual à do paralelogramo construído sobre qualquer outro par de elementos independentes de G .*

Pelo teorema anterior dados dois elementos x_1, x_2 de G , tem-se

$$x_1 = x_{11} a'_1 + x_{12} a'_2$$

$$x_2 = x_{21} a'_1 + x_{22} a'_2,$$

onde x_{ik} são inteiros.

Ora

$$x_1 \wedge x_2 = \det(x_{ik}) \cdot a'_1 \wedge a'_2$$

e portanto o infimo das áreas dos paralelogramos construídos sobre os pares x_1, x_2 corresponde ao infimo dos $|\det(x_{ik})|$, que são sempre números inteiros. O infimo é, pois, um mínimo e um mínimo positivo se nos restringirmos aos pares de elementos independentes ($\det(x_{ik}) \neq 0$).

Seja, então, b_1, b_2 um par de elementos independentes tal que

$$|\det(x_{ik})| \geq \det(b_{ik}) \geq 1.$$

2) *O par b_1, b_2 gera o grupo G .*

Raciocinemos por absurdo, admitindo que existe $z \in G$ tal que na decomposição

$$z = z_1 b_1 + z_2 b_2$$

um dos coeficientes, z_1 , não é inteiro.

Somando a z um elemento conveniente de G

$$z' = n_1 b_1 + n_2 b_2, \quad n_1, n_2 \text{ inteiros,}$$

podemos obter um elemento u de G tal que em

$$u = z + z' = (z_1 + n_1) b_1 + (z_2 + n_2) b_2 =$$

$$= u_1 z_1 + u_2 z_2$$

se tenha

$$0 < u_1 < 1.$$

Consideremos agora o par de elementos independentes de G

$$u = u_1 b_1 + u_2 b_2 = (u_1 b_{11} + u_2 b_{21}) a'_1 +$$

$$+ (u_1 b_{12} + u_2 b_{22}) a'_2$$

$$b_2 = b_{21} a'_1 + b_{22} a'_2.$$

(1) BOURBAKI, op. cit. Exercice 1, pp. 72.

Teremos

$$u \wedge b_2 = u_1 \det(b_{ik}) a'_1 \wedge a'_2$$

com

$$u_1 \det(b_{ik}) < \det(b_{ik})$$

o que é absurdo.

Logo

$$G = \{n_1 b_1 + n_2 b_2\}.$$

Os resultados anteriores permitem-nos concluir que o conjunto dos períodos de uma função contínua em R^2 pertence a uma destas seis categorias:

- 1) $G = \{(0, 0)\}$;
- 2) $G = \{r(a, b)\}$, $r \in R$;
- 3) $G = \{n(a, b)\}$, n inteiro;
- 4) $G = \{n(a, b) + r(c, d)\}$, n inteiro e $r \in R$;
- 5) $G = \{n(a, b) + m(c, d)\}$, n e m inteiros;
- 6) $G = R \times R$.

DEFINIÇÃO 3. Quando $G = \{n(a, b)\}$, $(a, b) \neq 0$, diz-se que f é simplesmente periódica de período fundamental $\vec{T} = (a, b)$.

Quando $G = \{n(a, b) + m(c, d)\}$, onde $(a, b), (c, d)$ são linearmente independentes, diz-se que f é duplamente periódica, de períodos $\vec{T}_1 = (a, b)$, $\vec{T}_2 = (c, d)$.

3. Caracterização do conjunto dos períodos de uma função de variável complexa.

Como o plano complexo C é isomorfo a R^2 , podemos enunciar imediatamente o

TEOREMA 10. O conjunto dos períodos de uma aplicação contínua $f: C \rightarrow C$ é um subgrupo fechado de C .

COROLÁRIO. O conjunto dos períodos de uma função analítica no plano complexo é um subgrupo fechado de C .

DEFINIÇÃO 4. Uma função $f: C \rightarrow C$ diz-se duplamente periódica quando o conjunto G dos seus períodos é da forma

$$G = \{n\omega_1 + m\omega_2\},$$

onde ω_1, ω_2 são números complexos independentes com relação a $R \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin R \right)$. Diz-se que

ω_1, ω_2 são os períodos fundamentais de f .

Quando $G = \{n\omega\}$ a função diz-se simplesmente periódica.

TEOREMA 11. Uma função f analítica no plano complexo e duplamente periódica reduz-se a uma constante.

DEMONSTRAÇÃO. Sejam ω_1, ω_2 os seus períodos fundamentais e designemos por P o paralelogramo construído sobre ω_1, ω_2 .

Como P é compacto e f é contínua em P , temos $|f(z)| \leq M$ em P .

Mas dado $z' \in C$ tem-se

$$z' = t_1 \omega_1 + t_2 \omega_2, t_1, t_2 \in R$$

e portanto

$$\begin{aligned} z' &= (t_1 - [t_1])\omega_1 + (t_2 - [t_2])\omega_2 + [t_1]\omega_1 + [t_2]\omega_2 \\ z' &= z + [t_1]\omega_1 + [t_2]\omega_2, z \in P, \end{aligned}$$

o que implica

$$|f(z')| = |f(z)| \leq M,$$

quere dizer f limitada em todo plano.

Então pelo teorema de Liouville f é constante no plano.

Em face deste resultado, para obter exemplos não triviais de funções duplamente periódicas será necessário considerar funções com pontos singulares.

É o que vamos agora fazer, começando por adaptar a noção do período a esta nova situação.

DEFINIÇÃO 5. Diz-se que $T \in C$ é um período de uma função f que admite pontos

singulares quando

$$f(z) = f(z + T)$$

para todo o ponto regular z de f .

TEOREMA 12. Seja f uma função meromorfa. O conjunto G dos seus períodos forma um grupo fechado de $\mathbb{C}$.

DEMONSTRAÇÃO. 1) G é um grupo.

Sejam $T_1, T_2 \in G$ e z um ponto regular de f .

Como $z + T_1$ é ponto regular e T_1, T_2 são períodos, vem

$$\begin{aligned} f(z + T_1 + T_2) &= f((z + T_1) + T_2) = \\ &= f(z + T_1) = f(z), \end{aligned}$$

logo $T_1 + T_2 \in G$.

Seja agora $T \in G$ e mostremos que $-T \in G$.

Por hipótese $f(z + T) = f(z)$ para tal ponto regular z .

Se $z - T$ não fosse regular, seria um polo e portanto para qualquer sucessão $z_n \rightarrow z$ teríamos

$$\begin{aligned} \infty &= \lim_n |f(z_n - T)| = \lim_n |f(z_n - T + T)| = \\ &= \lim_n |f(z_n)| = |f(z)|, \end{aligned}$$

o que é absurdo.

2) G é fechado. Seja $T = \lim T_n, T_n \in G$ e z regular.

Se $z + T$ for regular vem imediatamente (pela continuidade de f em $z + T$)

$$f(z + T) = f(\lim(z + T_n)) = \lim f(z + T_n) = f(z).$$

Se $z + T$ não fosse regular, então

$$\infty = \lim_n |f(z + T_n)| = \lim_n f(z) = f(z),$$

para z regular, o que é impossível.

Nota. Se f admite também pontos singulares essenciais, a demonstração de que G é um grupo continua válida, mas fica em aberto o problema de G ser fechado, pois podem existir sucessões $(z + T'_n)$ ao longo das quais $f(z + T'_n) \rightarrow f(z)$ e isso impossibilita o raciocínio por absurdo anteriormente feito.

DEFINIÇÃO 5. Diz-se função elíptica uma função meromorfa e duplamente periódica.

Quase grupos subtractivos

por Jayme Machado Cardoso *

Instituto de Matemática da Universidade do Paraná

Introdução

Um grupoide é um par constituído por um conjunto não vazio G e uma lei de composição interna $G \times G \rightarrow G$. Um grupoide G diz-se *quase grupo* se, quaisquer que sejam $a, b \in G$, existem, em G , soluções para as equações

$$ax = b \quad \text{e} \quad ya = b$$

e tais soluções são únicas.

Os grupoides associativos denominam-se *semigrupos*.

Uma parte S de um grupoide G denomina-se *subgrupoide* de G se for, também, grupoide relativamente à composição definida em G . Eventualmente um subgrupoide pode apresentar estrutura de semigrupo, de quase grupo ou, mesmo, de grupo (ver exemplo E3 abaixo).

Ordem de um grupoide finito é o número de seus elementos.

Chama-se *classe lateral à esquerda* (classe lateral à direita) de um subgrupoide S de

* Com os agradecimentos ao Prof. J. MORGADO, por correcções feitas no texto.

um grupoide G ao conjunto aS (respectivamente Sa) dos elementos as , com s em S e a elemento fixo de G .

Uma parte não vazia A de um grupoide G diz-se *ideal à direita* de G se $ax \in A$, com $x \in G$ e $a \in A$.

Definição e exemplos

O nosso objectivo é estudar grupoides G que satisfazem as seguintes condições:

(J1) Existe em G um elemento i , dito *identidade à direita*, tal que

$$ai = a,$$

$$(J2) \quad (ab)c = (ac)b,$$

$$(J3) \quad a(bc) = c(ba),$$

$$(J4) \quad aa = i,$$

quaisquer que sejam a, b, c em G .

Tais grupoides serão, por nós, denominados *grupoides subtractivos*.

Exemplos.

(E1) O conjunto dos reais com a operação de subacção é um grupoide subtractivo. O zero é identidade à direita. O conjunto dos inteiros é subgrupoide; o mesmo se diz para o conjunto dos fraccionários.

(E2) O conjunto $\{i, a, b\}$ com a composição definida pela tábua

	i	a	b
i	i	b	a
a	a	i	b
b	b	a	i

é um grupoide subtractivo que não possui subgrupoides próprios além do subgrupoide $\{i\}$.

(E3) O grupoide subtractivo de 4 elementos

	i	a	b	c
i	i	c	b	a
a	a	i	c	b
b	b	a	i	c
c	c	b	a	i

possui, além do subgrupoide $\{i\}$, um único subgrupoide próprio, $\{i, b\}$, que é grupo.

Algumas propriedades

PROPOSIÇÃO 1. Se i é identidade à direita de um grupoide subtractivo, então

$$i(rs) = sr,$$

quaisquer que sejam r e s no grupoide.

DEMONSTRAÇÃO. Pela J3, $i(rs) = s(ri)$ e pela J1, $ri = r$, c. q. d.

COROLÁRIO 1.1. Um grupoide subtractivo é comutativo se, e somente se, sua identidade é bilateral.

DEMONSTRAÇÃO. Seja G um grupoide com identidade i bilateral. Então, quaisquer que sejam a e b em G , tem-se

$$ab = i(ba) = ba.$$

Reciprocamente, se G é comutativo,

$$i(ab) = i(ba) = ab = (ab)i$$

qualquer que seja o elemento $x = ab = ba$ de G .

PROPOSIÇÃO 2. Se a, b, c, d são elementos quaisquer de um grupoide subtractivo, temos

$$\begin{aligned} (2.1) \quad & (ab)(cd) = (ac)(bd) \\ (2.2) \quad & = (db)(ca) \\ (2.3) \quad & = (dc)(ba) \\ (2.4) \quad & = (a(cd))b \\ (2.5) \quad & = (a(bd))c \\ (2.6) \quad & = (d(ca))b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2.7) & \quad = (d(ba))c \\
 (2.8) & \quad = a(b(dc)) \\
 (2.9) & \quad = d(b(ac)) \\
 (2.10) & \quad = a(c(db)) \\
 (2.11) & \quad = d(c(ab)).
 \end{aligned}$$

DEMONSTRAÇÃO. Limitar-nos-emos a verificar a (2.6).

Pela J3, $d(ca) = a(cd)$, donde

$$(d(ca))b = (a(cd))b$$

e, pela J2,

$$(a(cd))b = (ab)(cd).$$

PROPOSIÇÃO 3. Num grupoide subtrativo valem as «leis do corte», isto é, cada uma das igualdades

$$(3.1) \quad ax = bx$$

$$(3.2) \quad xa = xb$$

implica $a = b$.

DEMONSTRAÇÃO. Operando à direita da (3.1) com o elemento ix , vem

$$(ax)(ix) = (bx)(ix)$$

donde, pela (2.1),

$$(ai)(xx) = (bi)(xx)$$

e, como $ai = a$ e $xx = i$, resulta

$$ai = bi$$

ou, finalmente

$$a = b$$

Do mesmo modo, operando à esquerda da (3.2) com o elemento ix , vem

$$(ix)(xa) = (ix)(xb)$$

e, pela (2.2),

$$(ax)(xi) = (bx)(xi)$$

e, pela aplicação sucessiva da primeira parte desta proposição,

$$a = b.$$

PROPOSIÇÃO 4. Num grupoide subtrativo as equações

$$(4.1) \quad ax = b$$

e

$$(4.2) \quad yr = s$$

têm soluções únicas $x = ab$ e $y = s(ir)$.

DEMONSTRAÇÃO. $x = ab$ é solução de (4.1), pois

$$a(ab) = b(aa) = bi = b.$$

Também, $y = s(ir)$ é solução de (4.2), pois

$$(s(ir))r = (rr)(is) = i(is) = s(ii) = si = s.$$

A unicidade das soluções é consequência imediata das «leis do corte».

OBSERVAÇÕES. 1. A proposição 4 mostra que os grupoides subtrativos são quase grupos (com identidade à direita, cuja existência é garantida por J1) e, por este motivo, no que segue serão denominados *quase grupos subtrativos* e indicados abreviadamente por qgs.

2. Em outro trabalho [2], construímos, entre outras, uma estrutura que satisfaz J1 e J4 e na qual têm soluções as equações que intervêm na proposição 4, mas que não verifica J2 e J3. Várias proposições semelhantes às aqui apresentadas valem para esta estrutura (ver [3]).

COROLÁRIO 4.1. Num qgs a identidade à direita é única.

DEMONSTRAÇÃO. Com efeito, a identidade à direita é a solução (única) da equação $ax = a$.

PROPOSIÇÃO 5. Os qgs não possuem ideais próprios.

DEMONSTRAÇÃO. Realmente, suponhamos, por absurdo, que exista no qgs G um ideal próprio à direita A , e seja x um elemento

de G que não está em A . Mas

$$a(ax) = x$$

pertence à A , o que é contrário à hipótese.

Quase grupos subtrativos finitos

PROPOSIÇÃO 6. O qgs de 2 elementos é grupo.

DEMONSTRAÇÃO. Seja i a identidade à direita e a o outro elemento do qgs. A identidade i é bilateral, pois se tal não fosse teríamos

$$ia = i = ii,$$

e, pela lei do corte, $a = i$, que é contrário à hipótese.

PROPOSIÇÃO 7. Todo qgs finito com número par de elementos possui pelo menos um subquase grupo distinto de $\{i\}$ que é grupo.

DEMONSTRAÇÃO. Se o quase grupo é de ordem par, os elementos distintos da identidade à direita i são em número ímpar. Logo existe pelo menos um elemento x , no quase grupo, tal que $ix = x$. O conjunto $\{i, x\}$ é, pois, grupo.

Teorema de Lagrange

Vamos estabelecer para os qgs o teorema equivalente ao de Lagrange para grupos. Note-se que tal não se verifica para os quase grupos em geral (cf [4], p. 476).

LEMA 1. Se S é um subquase grupo de um qgs finito G , toda classe lateral à esquerda de S tem exactamente o mesmo número de elementos que S .

DEMONSTRAÇÃO. A transformação que leva cada seS ao as de aS é biunívoca. Assim, cada elemento $t = as$ de aS é a

imagem de um, e um só, elemento $s = at$ de S .

LEMA 2. Quaisquer que sejam a, s e s' em um qgs, tem-se

$$as = (as')(s's').$$

DEMONSTRAÇÃO. De facto, pela (2. 2),

$$(as')(s's') = (s's')(sa)$$

donde

$$(as')(s's') = i(sa) = as.$$

LEMA 3. Seja S um subquase grupo de um qgs G . Duas classes laterais à esquerda de S ou são idênticas ou são disjuntas.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que aS e bS têm um elemento comum $c = as' = bs''$ (s' e s'' em S). Então, bs contém todos os elementos

$$as = (as')(s's') = (bs'')(s's') = b(s''(s's))$$

de aS e, análogamente, aS contém todos os elementos de bS . Portanto, $aS = bS$.

OBSERVAÇÃO. Como a identidade i do qgs G pertence a todos seus subquase grupos, cada classe aS contém sempre o elemento $a = ai$. Então, G se esgota em suas classes laterais à esquerda. Em conclusão,

TEOREMA. A ordem de um qgs finito é múltiplo da ordem de qualquer de seus subquase grupos.

REFERÊNCIAS

- [1] BRUCK, R. H. *Contributions to the theory of loops*. Trans. Amer. Math. Soc. v. 60 (1946), p. 245-354.
- [2] CARDOSO, J. M. & CARNEIRO JR., D. *Non associative structures*. A aparecer em Math. Mag. v. 35 (1962).
- [3] CARDOSO, J. M. *On a right loop*. A aparecer em Math. Mag.
- [4] GARRISON, G. N. *Quasi-groups*. Annals Math. v. 41 (1940) p. 474-487.
- [5] HAUSMANN, B. A. & ORE, O. *Theory of quasi groups*. Amer. J. Math. v. 59 (1937), p. 983-1004

Introducción de la estadística en la enseñanza media

por Sixto Ríos

Quiero empezar esta conferencia leyendo un argumento de máxima autoridad. Se trata de una de las conclusiones de la bien conocida reunión de matemáticos de todo el mundo que tuvo lugar en 1959 en Royaumont, bajo los auspicios de la Organización Europea de Cooperación Económica (O. E. C. E.) con el fin de estudiar una reforma profunda de la enseñanza de las Matemáticas al nivel medio.

Tras la conclusión I, que se refiere a la aritmética, algebra y geometría, contiene una conclusión II relativa a la introducción de la Estadística en los planes de Enseñanza media que dice textualmente (*):

«II. El cálculo de probabilidades elemental debe ser considerado como una rama de las matemáticas susceptible de ser enseñada en las escuelas secundarias.

a) La inducción estadística debe ser considerada como una rama de las matemáticas aplicadas que interviene de un modo fundamental en los procesos de decisión conformes con el espíritu del «método científico» y del cual importantes sectores de las ciencias físicas y de las ciencias del comportamiento humano hacen un uso cada día mayor. Por otra parte el razonamiento estadístico adquiere una importancia creciente en el dominio de los asuntos y negocios públicos.

b) Una enseñanza elemental apropiada del cálculo de probabilidades y de la estadística debe formar parte del nuevo plan de estudios secundarios.

c) Cursos preparatorios especiales sobre estas materias deberán figurar en los programas de las escuelas normales y otras instituciones de formación del profesorado de enseñanza media.»

Esta conclusión relativa a la introducción y orientación de la enseñanza de la Estadística en los estudios medios, aprobada en una reunión internacional, en la que figuraban matemáticos abstractos tan poco sospechosos de «pasión» o «debilidad estadística», como Diendonné, Stone, Choquet, me va a permitir reducir mi exposición a algunas glosas y comentarios.

En la enseñanza a nivel medio como es la de las Escuelas Normales de Maestros, no puede ni debe llegarse a conocimientos especializados de ninguna rama científica y la selección de materias ha de hacerse por su valor formativo general y porque tales conocimientos puedan ser de utilidad en el mayor número de campos posibles de la actividad (científica, social, etc.) del hombre educado.

Probaremos cumplidamente cuán numerosos y diversos son tales campos en el caso de la Estadística y cómo desde el punto de vista formativo hay razones poderosas para su introducción en la enseñanza media, pues, como veremos, tales conocimientos han de contribuir de un modo decisivo a aumentar la formación matemática de los alumnos, su formación científica general y también su educación general.

Estas ideas han trascendido ya en algunos países a los libros de Matemáticas de texto

(*) *Mathematiques Nouvelles*, p. 129.

en la enseñanza media. Como botón de muestra citemos el magnífico libro norteamericano «General College Mathematics» publicado por los Profesores W. L. Ayres, C. G. Fry y H. Jonah, el cual no contiene nada de álgebra moderna aunque sí de topología, dedica 70 de sus 250 páginas a Probabilidades y Estadística incluyendo nociones elementales sobre inferencia estadística. En su interesante prólogo se lee: «Dedicamos bastante extensión a probabilidades y estadística porque un cierto conocimiento de estas cuestiones es indispensable a toda persona educada. Todo estudio de problemas sociales, situaciones económicas, posibilidades de mercados e investigación científica utiliza ordinariamente el lenguaje de la Estadística. Finalmente contiene el libro algunas lecciones de lógica y matemática moderna. Con esto esperamos desterrar la idea de que las matemáticas terminaron de hacerse en la época de Cristóbal Colón.»

Por otra parte, en Francia, en 1947, y en Inglaterra, en 1952, sendas comisiones presididas, la francesa primero, por el físico Langevin y, a su muerte, por el Prof. Fréchet, y la inglesa, por el eminente estadístico Prof. E. S. Pearson, han redactado ponencias razonando la necesidad urgente de la introducción de la Estadística en la Enseñanza media y concretando incluso en detallados programas las materias que deben ser estudiadas. En el Rapport de la Reunión de Royaumont se recogen datos de otros países, como EE. UU, Canadá, Suecia, Austria, que han incorporado la Estadística a sus programas de enseñanza media.

Campos de aplicaciones

De acuerdo con la línea de desarrollo que hemos trazado señalaremos los recintos principales en que encuentran hoy aplicación los métodos estadísticos.

La Estadística, que fué en sus comienzos una modesta auxiliar de la Economía política, ha penetrado ya con sus métodos en casi todas las ramas del conocimiento científico y aún de las Artes, con un poder arrollador y una velocidad de conquista que, como dice Kendall, recuerda las campañas de Atila y Alejandro Magno.

Como consecuencia del amplísimo programa de instrucción en los métodos de muestras desarrollado por los EE.UU durante la última gran guerra, que convirtió en expertos estadísticos a más de 6.000 matemáticos, ingenieros, etc., puede hablarse hoy de una ciencia de los sondeos estadísticos que ha creado métodos eficacísimos por su rapidez, precisión y bajo coste.

En los países que van en vanguardia, estos servicios oficiales de sondeos se dedican al estudio de problemas económicos, demográficos, sociales, etc. de vital importancia en la economía de las naciones, a saber: extensión de tierras cultivadas, de pastos, bosques, etc.; coeficientes de producción por área, producción total de sustancias alimenticias, coeficientes de natalidad y mortalidad en los diversos tipos de población, paro obrero, nivel de vida, presupuesto familiar, problemas de alojamiento, estudio de mercados, gustos de los individuos, opiniones públicas, etc.

Un problema de interés económico tan grande como la previsión de las cosechas agrícolas se puede resolver gracias a los métodos estadísticos. Se conoce, desde luego, la dependencia existente entre la cuantía de las cosechas y factores meteorológicos del año, que se ha podido precisar mediante el cálculo de coeficientes de *correlación*, gracias a observaciones reiteradas varios años en una extensa región.

El extenso programa de adiestramiento de estadísticos en EE.UU. a que antes he aludido, tuvo como causa inmediata importante la puesta en práctica en gran escala de los

métodos de control de calidad en las industrias y especialmente en la de guerra.

La fabricación en serie no permite, por su rapidez, el control 100 por 100 de las piezas producidas, lo cual, por otra parte, sería muy costoso. Vienen así los métodos de muestras a dar una solución a los problemas de mantener la producción dentro de los límites de tolerancia admitidos, habiendo permitido tales métodos, durante la última guerra y actualmente, importantísimas reducciones de gastos en la producción industrial.

He empezado a indicar aplicaciones de los métodos de muestras, pero no es posible proseguir siquiera la enumeración de tantas otras importantísimas.

Permítasenos, sin embargo, señalar algunos otros campos de aplicación de la Estadística. Progresos importantes se han hecho en Genética, en Biología y en Medicina, gracias al empleo de los métodos estadísticos. La nueva ciencia, Cybernética, construida por matemáticos y neurólogos, de tan trascendentales aplicaciones, utiliza la moderna teoría de procesos estocásticos y los mismo ocurre con la teoría de la información y la comunicación, tan importantes en el funcionamiento fiable de los satélites artificiales.

La economía y las ciencias sociales, en su estado actual, hacen uso extensivo de los métodos estadísticos y matemáticos, que han transformado a los economistas de historiadores filosófico-sociales en ingenieros.

La Agricultura, la Meteorología y otras ciencias resuelven sus problemas de previsión o pronóstico gracias a la Estadística.

En el campo clásico, los seguros con base estadística constituyen un importante servicio social y un éxito comercial. En Psicología y Pedagogía el análisis factorial trata de separar los factores diversos que intervienen en la inteligencia.

Citemos a título de curiosidad, interesantes

aplicaciones hechas por Yule y otros en las artes. Así, las estadísticas de longitudes de frases de ciertos literatos, han permitido determinar la paternidad de algunas obras anónimas. La frecuencia de las pinceladas en los cuadros ha sido utilizada para clasificar ciertas pinturas de autenticidad dudosa. La proporción de terminaciones femeninas ha permitido fechar las obras de Shakespeare, etc.

Entre las aplicaciones de la Estadística más recientemente cultivadas y desarrolladas destaca, por su importancia para la Economía y potencia de las naciones, la llamada Investigación Operativa, que, puede considerarse ya como una ciencia aplicada por el interés de los problemas que aborda y la unificación reciente de sus métodos.

Estos trabajos comenzaron en forma sistemática en 1940, durante la histórica batalla de Inglaterra. El Estado Mayor Inglés puso en las manos de un equipo de seis hombres de ciencia lograr el aprovechamiento máximo del sistema de defensa británico. Este grupo que comenzó con los problemas que planteaba la utilización óptima del radar, consiguió, sin modificar o aumentar los armamentos, duplicar la eficacia de la fuerza aérea inglesa, y salvar a su país de la inminente invasión alemana.

Tras el éxito rotundo de este equipo de I. O. se estableció una serie de grupos de Investigación operativa adscritos a diversas ramas de la actividad militar, que ocuparon a cerca de 400 hombres de ciencia procedentes de los más diversos campos de la investigación científica. Al terminar la guerra se comenzó a aplicar la Investigación Operativa al estudio de las actividades industriales, administrativas y gubernamentales y, en general de organismos extensos y complejos en que existe la necesidad de suministrar a los altos dirigentes una base cuantitativa para tomar decisiones en los múltiples problemas que se les presentan.

En este orden de ideas y en relación con los métodos de enseñanza, es interesante señalar aquí el proyecto de trabajo presentado por el Dr. Wall de la Fundación Nacional de Investigación Pedagógica de Londres al Coloquio de Royaumont. El Dr. Wall observa que aunque las investigaciones sobre Pedagogía de las matemáticas se han multiplicado en los últimos cincuenta años, se trata generalmente de estudios en pequeña escala de los que es difícil obtener consecuencias generales de interés. Muchas de las conclusiones que se obtienen, dice el Dr. Wall, vienen falseadas porque no tienen en cuenta más que uno o dos aspectos del problema, cuando los resultados de la enseñanza dependen de un complejo de variables interdependientes cuyo efecto conjunto difiere cualitativa y cuantitativamente de la acción de cada una de ellas aisladamente y de su suma.

Para remediar esta situación de ignorancia propone el Dr. Wall una triple investigación operativa a largo plazo para conocer objetivamente los resultados de las reformas en curso y en proyecto y, más concretamente, introducir en un sistema escolar en condiciones rigurosamente controladas, métodos, procedimientos o materiales nuevos para evaluar cuidadosamente los efectos tanto inmediatos como lejanos. Las conclusiones objetivas resultantes de tales investigaciones permitirían tomar decisiones de cambio de métodos antiguos a otros con un fundamento y lógica superiores a las que por desgracia ordinariamente se utilizan para hacer cambios de planes de enseñanza.

Vemos pues que si uno de los criterios para seleccionar materias que han de formar parte de los programas de enseñanza media, es que tales disciplinas tengan un gran número de aplicaciones posibles, las nociones fundamentales de la Estadística deben, desde luego, figurar en los programas de la enseñanza Media.

Influencia sobre la educación general del hombre culto.

El carácter de ciencia básica que tiene hoy la Estadística se debe tanto a los problemas importantes que resuelve como a la frecuencia con que algunos de sus más sencillos conceptos se encuentran en la vida diaria. Es una realidad que los medios más corrientemente utilizados por el hombre medio actual para adquirir información relativa al mundo exterior son la prensa, radio y televisión. Por tales vías recibe noticias y comentarios que le obligan a tener una idea clara, por ejemplo de la relación entre el índice de coste de la vida y el valor adquisitivo de su salario o sueldo, de cuestiones económico-sociales relativas a producción, importación y exportación, balanza de pagos entre distintos países, estadísticas demográficas, sanitarias, etc.

Todas estas cuestiones, tan frecuentemente tratadas en los diarios y que son de indudable interés general, implican un conocimiento de algunas nociones estadísticas elementales: promedios, porcentajes, números índices, gráficos sencillos en forma de diagramas, histogramas, etc. si pretendemos que no suenen en los oídos del hombre medio como palabras vacías de sentido, y si, además, tratamos de evitar que en algún momento quieran sorprenderle utilizándolas con fines propagandísticos no siempre correctos.

Por esto mismo creemos que el alumno que termina la enseñanza media (bachillerato o magisterio) debe ser capaz de comprender que una muestra adecuada de datos relativos a una población puede dar información sobre la población considerada, y esto con errores predecibles. Digamos de paso que es lamentable que ciertas encuestas, realizadas sin los requisitos estadísticos básicos por organismos con más deseos de propaganda o apetencias económicas que preocupación por la verdad estadística, pueden llevar al ciu-

dadano culto a confusión. Ello se evitaría con una modesta, pero adecuada, preparación estadística en la enseñanza media.

He aquí algunos ejemplos de incorrecciones inconscientes o conscientes, a veces con fines de propaganda, que frecuentemente se cometen en la utilización de las ideas estadísticas más elementales.

a) A pesar de la sencillez de la idea de porcentaje, es frecuente encontrar noticias de prensa como esta: Al aumentar la producción diaria de una fábrica en 2,5% el aumento semanal (6 días) resulta ser el 15%.

b) La idea de promedio es también sencillísima y, sin embargo, resulta curioso observar cuán pocas personas dan la respuesta correcta a la siguiente cuestión: Si Vd. conduce un coche una distancia de 20 km. a una velocidad de 80 km. por hora, y después otros 20 kilómetros a 90 por hora, ¿cual es la velocidad media?

c) Se dice frecuentemente en la prensa que la proporción de muertos de cancer aumenta constantemente, pero para que tal afirmación tenga un sentido claro y no pueda interpretarse como un retroceso de la medicina en tal tratamiento, deben tenerse en cuenta, entre otros, los siguientes factores: 1.º el diagnóstico es actualmente más preciso, de modo que muchos casos que hace unos años se habrían atribuido a «causa desconocida» se incluyen actualmente en el concepto de cancer. Asimismo la recopilación de datos estadísticos es hoy más completa que hace años e incluso se practican en algunos países diagnósticos «post mortem» de fallecidos por «causa desconocida». Además, el progreso extraordinario en la curación de otras enfermedades y la higiene han dado como resultado una disminución en la mortalidad infantil, y por ser el cancer una enfermedad principalmente de viejos no es

raro que haya aumentado la correspondiente tasa de mortalidad.

d) La seguridad relativa de los viajes aéreos es un tema de gran actualidad y sobre el que se hace mucha propaganda periodística. Los que desean demostrar que el riesgo es muy pequeño, hacen estadísticas en que figura el número de accidentes por pasajero y kilómetro recorridos. En cambio los que quieren exagerar el riesgo presentan las estadísticas de accidentes por pasajero y hora de vuelo. Tanto uno como otro punto de vista son excesivamente simplistas, ya que es muy diferente el riesgo de un vuelo según sea con o sin escalas, por encima del mar, o no, etc.

e) La consideración abusiva del promedio sin tener en cuenta la dispersión, que fué en otros tiempos grave defecto de la Estadística, puede hacerse patente con el siguiente problema interesante para los automovilistas: es un hecho bien conocido que el consumo de gasolina por kilómetro depende de la velocidad del automovil, disminuye al aumentar la velocidad hasta un mínimo y luego vuelve a aumentar con la velocidad. Si la velocidad de consumo mínimo es 70 km. por hora, el que un conductor haya tenido esta velocidad media durante un largo viaje no permitirá afirmar de modo alguno que habrá hecho el mínimo consumo de esencia.

f) Con una mezcla de malicia e ignorancia se ha dicho a veces que «la Estadística demuestra que si Pedro se come un pollo y Juan ninguno, esto equivale a que ambos coman medio pollo». La sencilla idea de dispersión sirve para dejar definitivamente a un lado a los que, por esta anécdota, consideran a la Estadística como una gran mentira.

h) Dice Bernard Shaw en una novela: «El uso del paraguas aumenta el perímetro

torácico, prolonga la vida y confiere inmunidad para las enfermedades, pues se puede probar con estadísticas que las personas que usan paraguas son más gruesas y saludables y viven más tiempo que las otras.» No hace falta gran perspicacia para comprender que causa de esta diferencia no es el paraguas, sino la riqueza y alimentación de las personas que lo poseen.

Ya nadie toma en consideración a los que hablan de las mentiras de la Estadística. Incurren en errores aquellos que aplican la Estadística sin conocerla suficientemente o los que carecen de un mínimo de sentido común o de conocimientos técnicos del problema práctico que tratan de resolver.

Todo esto pone de manifiesto un hecho importante: la Estadística no es un conocimiento demasiado especializado, sino que afecta a la actividad cotidiana de todo hombre culto. Y de ahí el interés de incluirla en la enseñanza media y elemental.

Influencia sobre la educación científica.

En la enseñanza media el modo de pensar cuantitativo se desarrolla especialmente mediante el estudio de las Matemáticas y las ciencias de la Naturaleza (Física, Química, Biología, etc.), en cuyo estudio sigue predominando la tendencia determinista de la mecánica de Newton. Mas esto va resultando claramente anticuado en vista de la evolución científica de la Ciencia Natural en los últimos cincuenta años.

El estudio de nuevos fenómenos físicos, cada vez más complejos, y de los fenómenos biológicos, sociales, etc. impuso la sustitución de tal punto de vista determinista por el probabilístico. Por ejemplo, al tratar de estudiar la evolución de una masa gaseosa no es posible, mediante las ecuaciones del movimiento de Newton, seguir las trayectorias individuales de los millones de moléculas que integran la masa, ni por otra parte,

este estudio tendría interés. Lo que interesa es el conocimiento del fenómeno colectivo, lo cual se hizo, naturalmente por métodos estadísticos, que condujeron a la teoría cinética de los gases. Después surgieron la termodinámica estadística y la mecánica cuántica.

Este paso de leyes físicas, basadas sobre la noción de causalidad a las teorías estadísticas, se debe, principalmente, a la influencia de la interpretación de Boltzman, de la segunda ley de la Termodinámica que puede considerarse como una ley esencialmente estadística.

Posterioridades contribuciones, como el principio de incertidumbre de Heisenberg, han revolucionado las leyes de la Física clásica y han contribuido a construir el edificio sobre la concepción estadística de la Naturaleza. Como ha dicho Maxwell: la «verdadera lógica del Universo es el Cálculo de Probabilidades». Es interesante observar que los físicos han ido desarrollando sus métodos estadísticos con independencia de los de otros campos, y sus métodos han ido penetrando en muy diversos procesos y teorías, tales, como por ejemplo, el estudio de la radioactividad, la energía atómica y la radiación cósmica mediante los procesos estocásticos, en el comportamiento de las células fotoeléctricas, en la teoría de los metales, etc.

Las brillantes victorias conseguidas en la Física y más tarde en la Biología, llevaron a los matemáticos a enfrentarse con un nuevo tipo de problemas conocidos genéricamente con el nombre de procesos de decisión.

En la vida corriente nos enfrentamos a a cada paso con situaciones en que se nos presentan varios cursos de acción posibles y, de la elección apropiada de uno de ellos o decisión acertada, depende el éxito posterior. Puede decirse que cualquier acción humana implica una elección y que el medio ambiente limita las posibilidades de varia-

ción; pero rara vez se reducen a uno los caminos posibles. Tales situaciones complejas tienen una importancia singular en el Director de una Empresa, de un ejército o de una gran administración, cuyas decisiones pueden tener consecuencias transcendentales. Se trata, en definitiva, de partir de un conocimiento generalmente imperfecto del futuro y de una valoración de las consecuencias de los distintos actos posibles, para llegar a elegir un curso de acción particular. Puede decirse que la decisión será óptima si conduce a las consecuencias que consideramos como más deseables, de acuerdo con el sistema de valoración adoptado.

En los últimos 25 años matemáticos de primera fila, al lado de economistas, sociólogos e ingenieros han buscado trajes flexibles, hechos a medida, para los nuevos y complejos problemas del comportamiento humano individual y colectivo y la cosecha empieza a ser óptima.

Sus raíces científicas profundas se encuentran muy lejos del cálculo infinitesimal y las Matemáticas que manejaban los economistas del siglo XIX. Son la Teoría de la probabilidad, la teoría de juegos de estrategia, el cálculo operacional, los espacios abstractos que representan un conjunto de ideas nuevas cuya fecundidad está lejos de agotarse.

No hay que olvidar que con los planes de desarrollo en proyecto estamos tratando de que España evolucione rápidamente hacia una industria moderna. Ello exige una adecuada formación matemática en extensos sectores de nuestra juventud. Pero como ha dicho el matemático inglés Hamersley, «las matemáticas que se utilizan en las aplicaciones industriales son de un tipo distinto de las que se cultivan corrientemente en los círculos académicos. Lo fundamental es la construcción de nuevos modelos y el empleo de computadores».

Todo esto apoya la introducción en la enseñanza media de esta nueva matemática

de lo aleatorio si queremos tener una juventud capaz de apoyar nuestro desarrollo económico.

Influencia sobre la formación matemática de los alumnos.

Es indudable que la enseñanza media de la Matemática, la Física, la Biología, etc. deberá dejarse influenciar por estos progresos si no queremos que choquen violentamente tales enseñanzas con lo que después el hombre aprenderá en la vida.

En este periodo la matemática resulta antipática a muchísimos alumnos porque frecuentemente los profesores la presentan en forma descarnada, quizá con ejercicios, incluso demasiados, pero pocos reales sin gracia y sin contenido humano.

A veces el alumno supera al profesor como en cierta ocasión en que a un muchacho se le propuso el famoso problema de la regla de tres para calcular la cantidad de tapia que construirían 50 obreros e hizo observar a su maestro que tantos obreros se estorbarían mutuamente.

No hay que olvidar que con la manera corriente de enseñar la matemática y con el contenido de los programas de enseñanza media, el alumno saca la impresión de que ha aprendido una gran pila de teoremas que no tienen ninguna aplicación a la práctica ni a otros estudios.

Según mi experiencia no llega al 0,01% el número de alumnos que al terminar la enseñanza media tiene una idea clara del papel de la Matemática en el estudio de los fenómenos naturales y de las tres fases fundamentales de conceptualización o abstracción, de desarrollo lógico y de desconceptualización o traducción de los resultados abstractos a la realidad. Como dice nuestro llorado maestro Puig Adam de quien tanto tenemos todos que aprender «la ausencia de cultivos de estas fases supone un concepto restringido

de actividad matemática que hay que evitar, pues no se remedia a posteriori con la adición circunstancial de los llamados problemas y ejercicios de aplicación. Se hace necesario prevenir el mal desde el origen mismo de la enseñanza de las Matemáticas, atacando el problema genético de la formación de las abstracciones y añadiendo el sentido posterior de readaptación suficiente de las abstracciones formadas a la realidad concreta». Y añado yo, si queremos que la matemática sea formativa en la enseñanza media no la hagamos como si estuviéramos preparando a los alumnos para escuchar disertaciones de Profesores de una Facultad de Ciencias Matemáticas. Pues bien, este aspecto de una formación matemática completa que evite que esta se reduzca a la fase central operatoria reclama justamente la inclusión en la enseñanza del Cálculo de Probabilidades. Porque, en efecto, la exposición del Cálculo de Probabilidades suministra un gran número de modelos matemáticos de situaciones experimentales fácilmente realizables en una clase con sencillo material de urnas con bolas y es sumamente educativo ver también el ajuste de estos mismos modelos a las observaciones estadísticas de fenómenos reales de la Demografía, Física, Técnica, etc.

Desde el punto de vista matemático hay interés fundamental en introducir nociones de inferencia estadística para que el alumno aprenda a distinguir claramente la diferencia entre la estructura de las verdades de la matemática ligadas entre sí y deducidas unas de otras y de los axiomas por razonamientos lógicos y la manera de establecer las leyes de los fenómenos naturales mediante inducciones a partir de una muestra de un número finito de experimentos.

Cuando se habla del valor formativo de las matemáticas se insiste mucho sobre el aspecto de su influencia en la formación de espíritus lógicos y desapasionados. Cuando se dice esto se piensa en la Matemática como

la ciencia deductiva por excelencia, en que el rigor exige que cada teorema resulte por una cadena de razonamientos lógicos de otros anteriores o de los axiomas de partida.

Pero conviene no olvidar que en el mundo complejo en que vivimos los razonamientos lógico deductivos forman una parcela relativamente pequeña.

El gran matemático Pólya ha escrito recientemente un libro en dos tomos «Patterns of plausible Inference» cuyo estudio debía ser obligatorio para todo profesor de enseñanza media. Separa Pólya el *razonamiento deductivo*, típico de la matemática y la Lógica, del *razonamiento plausible*, al cual pertenecen «la evidencia inductiva del físico, la evidencia circunstancial del abogado, la evidencia documental del historiador y la evidencia estadística del economista».

De hecho, en la investigación, los matemáticos utilizan también los razonamientos plausibles y por ello son tan importantes en la enseñanza los métodos heurísticos. Justamente introduce Pólya en su libro una importante interpretación de la noción de probabilidad que permite precisar las reglas de los razonamientos *plausibles*. Es notable ver cómo un matemático de primera fuerza analiza el material de los razonamientos plausibles en Matemáticas, con el mismo espíritu de observación, con que un naturalista estudiaría las funciones fisiológicas de un ser vivo para «abrir la puerta que conduce a la inducción investigando inductivamente». Este ensayo cuyas repercusiones en la Metodología de las matemáticas son transcendentales apoya de un modo decisivo la inclusión del Cálculo de Probabilidades en el plan de estudios de enseñanza media, justamente por su valor formativo en este campo amplísimo del razonamiento plausible.

Por otra parte teorías de naturaleza abstracta como la combinatoria, el álgebra de conjuntos, el álgebra de Boole, encuentran

una exposición más natural que justifica su explicación si se hace simultáneamente con la noción de probabilidad.

Análogas consideraciones podríamos hacer de la geometría analítica de la recta, que puede introducirse en forma más natural, agradable y útil al alumno presentándola como necesaria para la expresión de las leyes físicas lineales y las correlaciones lineales en los fenómenos biológicos, sociales, etc.

Una objeción a la inclusión de la Estadística en los planes de estudio podría ser el que estos ya se encuentran bastante recargados. A nuestro juicio la solución no está en crear una nueva asignatura con el nombre de Estadística, sino en hacer una distribución adecuada de materias en los programas de matemáticas, teniendo en cuenta para romper la inercia de la tradición su importancia en el estado actual del desarrollo científico y social. Creemos que no hay duda para preferir las nociones básicas de la Estadística a multitud de teoremas, corolarios y

escolios que abundan en los libros que suelen estudiar los escolares de matemáticas. He aquí un botón de muestra de teoremas (que desgraciadamente recordamos haber estudiado a los doce años): Teorema. Si se resta de un número el cubo de las decenas de su raíz cúbica exacta o entera por defecto y se divide la diferencia por el triplo del cuadrado de dichas decenas, la parte entera del cociente es igual o mayor que la cifra de las unidades de la referida raíz. Demostración:

Escolio 1.º. En la práctica se acostumbra, al dividir $N - (d \cdot 10)^3$ por $3(d \cdot 10)^2$, o sea, $3d^2 \cdot 100$, suprimir los dos ceros del divisor y las dos últimas cifras de la derecha en el dividendo. Por tanto, es dividir las centenas de $N - (d \cdot 10)^3$ por $3d^2$.

¿Es que alguien puede sostener que los escolares de doce años se forman mejor y más completamente estudiando estos y análogos teoremas que adquiriendo y manejando nociones como las de promedio, dispersión, probabilidad, correlación lineal, etc.?

Problemas de Matemática na Teoria dos Reactores Nucleares

por José Gaspar Teixeira

(Conclusão do PROBLEMA I)
Fluxos Neutrónicos

7. Problemas de valores próprios

Sob o ponto de vista matemático, no cálculo dos fluxos e densidades neutrónicas dum RN surgem naturalmente dois problemas fundamentais que conduzem à determinação dos valores próprios — e correspondentes funções próprias — de dois operadores diferenciais diferentes.

O primeiro problema fundamental resulta naturalmente da

7.1. *Seporabilidade das variáveis de espaço e energia na distribuição neutrónica estacionária.*

O estado de criticalidade de um RN é definido pelas condições de criticalidade que determinam relações entre as constantes nucleares e as propriedades geométricas — forma e dimensões — do RN.

Nas condições de criticalidade intervém o chamado factor de criticalidade que toma,

nestas e apenas nestas condições, o valor um (1).

Então a distribuição dos fluxos neutrónicos é estacionária, isto é, independente do tempo.

Ora, no mais simples dos modelos conhecidos de RN (2) — o reactor homogéneo e nú, expresso analiticamente pela aproximação da teoria do transporte, denominada teoria da difusão — a distribuição neutrónica estacionária verifica as condições enunciadas no *Primeiro Teorema Fundamental* da TRN (3):

A distribuição neutrónica estacionária, $\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega)$, dum reactor nú e homogéneo é separável nas variáveis espaço e energia

$$\Phi(\mathbf{x}, E, \Omega) = \varphi(E) \cdot \psi(\mathbf{x}, \Omega),$$

sendo a distribuição espacial $\psi(\mathbf{x}, \Omega)$ a solução fundamental da equação ondulatória

$$A) \quad \Delta \psi(\mathbf{x}, \Omega) + B^2 \psi(\mathbf{x}, \Omega) = 0,$$

isto é, a função de onda $\psi(\mathbf{x}, \Omega)$ é solução positiva sobre o núcleo do reactor e nula sobre a fronteira extrapolada (4).

Aqui surge o primeiro problema de determinação de valores próprios — os da equação A).

Com efeito, o anulamento da solução de A) sobre a fronteira extrapolada determina, em primeiro lugar, os valores admissíveis de B^2 ; a cada valor admissível B_n^2 corresponde,

por sua vez, um *modo* ou seja, uma função própria, ψ_n , tal que

$$A_1) \quad \Delta \psi_n(\mathbf{x}, \Omega) + B_n^2 \psi_n(\mathbf{x}, \Omega) = 0,$$

e um *factor de criticalidade*, c_n .

É evidente que o RN divergirá se alguns dos factores de criticalidade for superior à unidade, pois que à menor excitação o *modo* correspondente crescerá além de todo o limite. Por esta razão o maior dos factores de criticalidade deve ser considerado como o verdadeiro factor crítico, e a reacção em cadeia será auto-mantida ou divergente, segundo esse factor iguale ou exceda a unidade.

Por outro lado, correspondendo o maior factor de criticalidade ao modo de ordem mais baixa e ao menor dos valores B_n^2 , como é fácil provar (1), será efectivamente este o verdadeiro factor crítico do reactor.

Como, para reactores da mesma forma, a valores B_n^2 crescentes correspondem dimensões igualmente crescentes, conclue-se que o único reactor fisicamente realizável é o correspondente ao menor valor próprio B^2 . E assim o problema da determinação dos valores próprios da equação A) tem por objectivo a fixação das dimensões geométricas do reactor.

Observe-se que o *Primeiro Teorema Fundamental* é válido apenas em modelos de reactores constituídos por meio homogéneo infinito, em que as dimensões finitas do reactor são introduzidas postulando o anulamento dos fluxos neutrónicos sobre uma superfície convexa bem definida (na prática o Teorema é válido nos reactores uniformes nas regiões longe da fronteira (2)).

Além disso, o teorema poderá ser válido para a teoria do transporte, mas não se

(1) No estado sub-crítico o factor é inferior à unidade e no sobre-crítico superior à unidade.

(2) Cf. WEINBERG — Symposium of the A. M. S. 1959.

(3) Cf. WEINBERG and WIGNER — *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, p. g. 382

(4) A fronteira extrapolada dum reactor define-se teoricamente como a superfície convexa sobre a qual se anula o fluxo neutrónico, tendo em consideração o facto de a corrente neutrónica proveniente do exterior do reactor ser nula. Na prática é uma superfície fechada, exterior ao reactor, distando da fronteira física deste cerca de $0,71 \lambda_{tr}$.

(1) Cf. WEINBERG and WIGNER, op. cit., pag. 203.

(2) Cf. WEINBERG — Symposium of the A. M. S. 1959, pag. 7.

conhece ainda neste caso uma formulação apropriada, equivalente às referidas condições de fronteira para a equação ondulatória.

Observe-se ainda que as características intrínsecas dos materiais de constituição e estrutura de um reactor se determinam, em primeira fase, pela teoria do reactor homogéneo e nú, como teoria das propriedades multiplicativas dos meios infinitos; por esta razão a teoria do reactor nú tem o nome de *Teoria Assintótica dos Reactores* e é fundamental na TRN.

O segundo problema fundamental refere-se à

7.2. Separabilidade da variável tempo na distribuição neutrónica não estacionária.

Como vimos, a equação de BOLTZMANN para um RN pode escrever-se

$$B) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = B \Phi$$

onde o operador B — linear e independente do tempo — se decompõe em duas parcelas, já indicadas em 5)

$$\begin{aligned} B_1 &= -v(\Omega \cdot \text{grad}) \\ B_2 &= -v \Sigma(\mathbf{x}, E) + \\ &+ v \int dE' \int d\Omega' \Sigma(\mathbf{x}, E' \rightarrow E, \Omega' \rightarrow \Omega). \end{aligned}$$

Recordemos que a linearidade de B resulta de se desprezar as colisões entre neutrões, e a independência no tempo, de serem lentas as variações no reactor originadas quer pelas operações das barras de comando quer pelas reacções nucleares, como a subida da temperatura.

Ora, associado a um operador linear há um problema de valores próprios, neste caso,

$$B_1) \quad B \psi_n = \nu_n \psi_n$$

de forma que, se as soluções ψ_n constituírem

um espaço completo, a solução geral de B) pode escrever-se

$$3) \quad \Phi(\mathbf{x}, E, \Omega, t) = \sum a_n \psi_n(\mathbf{x}, E, \Omega) e^{\nu_n t},$$

com a_n constantes arbitrárias dependentes de condições iniciais.

No caso afirmativo, o comportamento dinâmico do reactor nas condições independentes do tempo (por exemplo em seguida a uma operação das barras de comando) seria determinado pela expressão anterior.

Na realidade, infelizmente, B não pertence à classe dos operadores caracterizados por possuírem um conjunto completo de funções características, e em alguns casos tem pelo menos um espectro contínuo com indicações de possuir um «carácter patológico»⁽¹⁾.

Interesse especial tem, porém, o maior valor característico de B e prova-se⁽²⁾ que o valor de ν_n de maior parte real, ν , é de facto real e que a correspondente função própria, ψ , é igualmente real e tem o mesmo sinal para todos os valores das respectivas variáveis, isto é, é uma função positiva. A ψ dá-se o nome de *solução persistente* e a ela corresponde uma distribuição exponencial,

$$\Phi_0 = \psi(\mathbf{x}, E, \Omega) e^{\nu t},$$

a *distribuição persistente* ⁽³⁾.

Na realidade, o operador B não pertence à classe dos operadores normais: a parte B_1 é anti-hermítica, precisamente como os operadores da mecânica quântica, mas a parte B_2 não tem características algumas deste

(1) WEINBERG and WIGNER, op. cit., pag. 408.

(2) BIRKHOFF and VARGA — Reactor Criticality and Non-negative Matrices (WAPD-166), 1957.

(3) Existindo neutrões retardados, a *distribuição persistente* desdobra-se na soma de várias exponenciais da variável t . Cf. WEINBERG — Symposium of the A. M. S., pag 5

tipo. Assim, nem as características do espectro de B nem a «completicidade» das respectivas funções próprias estão convenientemente estabelecidas. WEINBERG e WIGNER estabeleceram⁽¹⁾ certas propriedades para B baseadas em certas condições de natureza física. BIRKHOFF e VARGA⁽²⁾ notaram que B pertence a certa classe de operadores estudados por FROBENIUS⁽³⁾ PERRON e JENTZSCH.

Os resultados destas e outras subseqüentes investigações, que constituem algumas das mais brilhantes investigações matemáticas estimuladas pela TRN, foram apresentadas no Simpósio da AMS.

Tais resultados respondem, porém, apenas a algumas questões significativas: apenas as relacionadas com o maior valor próprio. As características do espectro neutrónico, a extensão das suas componentes discreta e contínua e, sobretudo a possibilidade e unicidade do desenvolvimento de uma função arbitrária $\Phi(x, E, \Omega, 0)$ em série $\sum$, são problemas ainda não resolvidos. WIGNER⁽⁴⁾ formula duas perguntas em relação com este assunto. «Primeiramente, a questão da unicidade que não intervém no problema equivalente em mecânica quântica, dadas as relações de ortogonalidade entre as funções próprias. Em segundo lugar, a necessidade de um critério prático, para decidir se uma solução singular da equação de valores próprios B_1 pertence ao espectro contínuo. A teoria das distribuições deve ser um instrumento mais sólido para o estabelecimento de um critério utilizável e eficiente».

Em face do que acabamos de expor e transcrever, consideramos que outro objectivo fundamental de uma actividade de aperfeiçoamento de conhecimentos de matemática aplicada à TRN, é o estudo dos

OPERADORES LINEARES VALORES E FUNÇÕES PRÓPRIAS

8. Aplicações

Um exemplo em que as soluções singulares de B_1 formam um espectro contínuo, refere-se a um dos mais simples problemas da teoria de transporte: a difusão dos neutrões monoenergéticos em geometria plana. Neste caso, o fluxo é independente das variáveis t e, por exemplo, y e z . Além disso, como o fluxo é identicamente nulo excepto para um único valor de E , a energia deixa de ser na realidade uma variável de Φ . Finalmente a dupla variável Ω pode ser substituída por $\mu = \Omega_x$, coseno do ângulo das direcções da velocidade com o eixo dos x , pois que o fluxo não depende do ângulo azimutal. Admitindo a hipótese suplementar de a difusão ter simetria esférica, e medindo a secção eficaz total em unidades apropriadas, a equação de transporte toma a forma⁽¹⁾

$$(1) -\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} - \Phi(x, \mu) + \frac{1}{2} s \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu = 0$$

em que s é a relação das secções eficazes de difusão e total.

Admitindo que

$$\Phi(x, \mu) = \psi(\mu) e^{\nu x}$$

temos

$$(2) \mu \nu \psi(\mu) + \psi(\mu) = \frac{1}{2} s \int_{-1}^1 \psi(\mu) d\mu,$$

e, como o segundo membro é constante,

$$\psi(\mu) = \frac{c}{1 + \mu \nu}.$$

Evidentemente, existe a condição de compatibilidade

$$c = \frac{1}{2} s \int_{-1}^1 \frac{c}{1 + \mu \nu} d\mu = \frac{cs}{2\nu} \log \frac{1 + \nu}{1 - \nu}$$

que se escreve também

$$\frac{s}{2\nu} \log \frac{1 + \nu}{1 - \nu} = 1,$$

(1) WEINBERG and WIGNER — *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, pag. 406.

(2) G. BIRKHOFF and VARGA. *Reactor Criticality and Non-negative Matrices* (WAPD-166), 1957, op cit.

(3) FROBENIUS — S-Ber. Akad. Wiss. Berlin 1912, pag. 456.

(4) Symposium of the A. M. S., pag. 95.

(1) Symposium of the A. M. S., pag. 96.

equação cujas raízes $\pm v_0$ constituem o espectro discreto da equação (2). As correspondentes funções características são respectivamente

$$\frac{e^{v_0 x}}{1 + \mu v} \quad \frac{e^{-v_0 x}}{1 - \mu v},$$

a primeira válida para os grandes valores de $-x$ e a segunda para os grandes valores de x .

Evidentemente estas duas funções não constituem um espaço completo de funções de μ , nos termos das quais todas as funções de μ definidas no intervalo $(-1, 1)$ possam exprimir-se linearmente.

Para $-1 < v < 1$ ou para v complexo, as funções próprias são funções regulares de μ no intervalo $-1 < \mu < 1$.

Se houver um espectro contínuo, ele existirá apenas numa das regiões reais $v < -1$ ou $v > 1$. Para estes valores de v as soluções próprias tornam-se singulares mas podemos adoptar

$$\psi_\lambda(\mu) = \frac{c_1}{\mu - \lambda + i\varepsilon} + \frac{c_2}{\mu - \lambda - i\varepsilon} \quad \lambda = -\frac{1}{v}$$

e considerar $\frac{c}{1 + \mu v}$ como limite de ψ_λ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

A nova equação de compatibilidade é agora

$$-\frac{1}{\lambda}(c_1 + c_2) = \frac{1}{2}s \left\{ c_1 \left(\log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} - i\pi \right) + c_2 \left(\log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} + i\pi \right) \right\}$$

ou

$$\left(sk + \frac{2}{\lambda} \right) (c_1 + c_2) = i\pi s (c_1 - c_2) \quad k = \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda}.$$

Fazendo $c_1 + c_2 = -\pi s$, temos

$$c_1 = \frac{i}{\lambda} + \frac{is}{2} \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} - \frac{\pi s}{2}$$

$$c_2 = -\frac{i}{\lambda} - \frac{is}{2} \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} - \frac{\pi s}{2},$$

$$(3) \quad \psi_\lambda(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \pi s \frac{\lambda - \mu}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} + \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{s}{2} \log \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \right) \frac{2\varepsilon}{(\mu - \lambda)^2 + \varepsilon^2} \right\},$$

e podemos tomar esta função como correspondente ao espectro contínuo. Nos integrais da forma

$$(4) \quad \varphi = \int g(\lambda) \psi_\lambda(\mu) d\lambda$$

a primeira fracção de (3) transforma-se num termo

preponderante e a segunda fracção conduz à função δ de DIRAC.

Então (4) mostra que (1)

$$(5) \quad \Phi(x, \mu) = -\pi s P \int_{-1}^1 \frac{g(\lambda)}{\mu - \lambda} e^{-x/\lambda} d\lambda + 2\pi \left[\frac{1}{\mu} - \frac{1}{2} s \log \frac{1+\mu}{1-\mu} \right] g(\mu) e^{-x/\mu}$$

é solução de (1) onde $g(\lambda)$ é uma função arbitrária que tende para zero com λ . O fluxo total que corresponde a $\Phi(x, \mu)$ de (5) é (2)

$$(5a) \quad \Phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu = \pi \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{\mu} g(\mu) e^{-x/\mu}.$$

A solução geral de (1) será então (5) mais as duas funções características do espectro discreto com coeficientes arbitrários.

WIGNER, que apresenta resumidamente este exemplo, observa ainda que a expressão usual do fluxo devido a uma fonte plana isotrópica (3) pode decompor-se numa parte assintótica que corresponde a um espectro discreto e a um integral envolvendo a exponencial e^{-v^*x} de x em que v percorre todo o espectro contínuo. Deve notar-se porém que a possibilidade de tal decomposição do fluxo total em exponenciais de x não prova que existe uma solução da equação homogênea que corresponda separadamente a cada exponencial. O exemplo precedente mostra como, mesmo no caso duma simplicidade trivial, é difícil o reconhecimento do espectro contínuo.

Encontra-se na literatura uma variedade de casos interessantes nos quais os operadores relacionados com B da equação de BOLTZMANN tem em parte, ou não tem em parte, espectros contínuos (4). Da mesma forma, o espectro confinado no caso anterior ao eixo real, pode ou não ter valores no plano complexo.

O problema espectral é tratado no Symposium AMS por HABETLER e MARTINO, WING e CARLSON (método S_n e harmônicas esféricas). Em geral o problema de completude das funções características e da unicidade dos desenvolvimentos não foi satisfatoriamente resolvido. A situação é ainda mais obscura no que res-

(1) Cf. WIGNER — Symposium of the A. M. S. 1959 pag. 97.

(2) O primeiro e último termo de (5) anulam-se depois da integração sobre μ .

(3) Veja p. ex. WEINBERG e WIGNER, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors*, equat. (9 26), (9 27) e (9 29).

(4) G. WING — J. Math. Mech. vol. 7 (1958) pp 757; LEHNER e WING — Comm. Pure Appl. Math. vol. 8 (1955) pg. 217 e G. WING, in Symposium of the A. M. S. 1959.

peita às aproximações das equações de BOLTZMANN. Assim, por exemplo, o aparecimento dos fluxos neutrónicos negativos na solução do problema de MILNE em harmónicas esféricas, mostra que o teorema da positividade de BIRKHOFF e VARGA não é válido neste caso das soluções aproximadas (1).

9. Métodos de aproximação

Terminaremos estas considerações subordinadas ao problema que constitui a primeira parte enunciada no início deste artigo — Densidades e Fluxos Neutrónicos — com um resumo do exposto por WIGNER (Symposium of the A. M. S. — pg. 100). Com a divulgação destes pontos de vista queremos promover o estudo de outro ramo da matemática fundamental à TRN:

RESOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES ÀS DERIVADAS PARCIAIS

Nos parágrafos anteriores são encarados os problemas gerais da teoria matemática das equações dos RN ou os da determinação das respectivas soluções rigorosas. Na prática, os métodos de aproximação desempenham um papel tão importante como o das soluções rigorosas, que merecem uma atenção especial. Devido à grande variedade de métodos de aproximação, estas observações serão, em extensão, ainda mais resumidas que as dos capítulos anteriores.

Quer nos agrade ou não, é evidente que o cálculo automático desempenha um papel de importância crescente na resolução das equações do reactor. Mas a acção no nosso espírito proveniente das soluções obtidas por calculadores electrónicos é menos nítida, até porque, as máquinas electrónicas dão-nos informações experimentais, do mesmo tipo portanto que as obtidas nas experiências críticas.

Os calculadores dão-nos resultados obtidos com menor esforço e mais rapidamente que as experiências críticas, mas não nos auxiliam na visualização dos factores que determinam o resultado final, muito mais que as mesmas experiências. Por esta razão, os resultados obtidos por máquinas de cálculo são menos aptos a orientarem-nos no sentido de uma atitude superior à obtida através dos métodos analíticos de cálculo, e mesmo menos aptos que os métodos menos mecanizados dos cálculos numéricos. O papel que os calculadores poderão vir a desempenhar no campo dos reactores nucleares e em muitos outros campos, dependerá não só do uso que deles soubermos fazer não só na obtenção dos resultados finais como também na explicação dos mesmos resultados. Certamente grandes progressos poderão obter neste campo com os calculadores automáticos (1).

Entre os métodos de aproximação não numéricos a eficiência dos métodos variacionais é talvez mais surpreendente (2). Estes métodos servem para determinar os valores próprios dos operadores lineares. Como a variável tempo pode ser eliminada de quasi todas as equações dos reactores, transformando-as num problema de valores característicos, o método variacional pode ter largas aplicações na teoria dos reactores. O seu uso tem sido limitado ao máximo invocando-se o facto de o operador de BOLTZMANN não ser nem auto-adjunto nem normal. Está ainda por provar se esta limitação tem razão de ser. A causa da grande precisão do princípio variacional nos problemas simples da

(1) No Symposium de AMS falaram sobre calculadores, EHRLICH, VARGA, RICHMYER e CARLSON.

(2) Veja GREULING e MARVIN, *Graphical method of obtaining crit. cal masses of water-tamped boilers*. Los Alamos Report 493. Veja ainda WEINBERG e WIGNER, op. cit. pag. 531 e «Papers» n.ºs 36 e 627 da 2ª Conf. de Genebra (1958).

(1) Veja, WEINBERG e WIGNER, op. cit. (fig. 9.6 pag. 262).

mecânica quântica reside no facto de toda a função positiva e com um único máximo em todo o seu domínio de existência poder ter uma boa aproximação por outra função com características idênticas. Assim $\frac{1}{1+x^2}$ pode ser aproximada por $e^{-\alpha x^2}$ com $\alpha = 0,5$ a mais de 98 %. Com isto queremos significar que o coseno do ângulo destas duas funções no espaço de HILBERT é superior a 0.98. O princípio variacional torna-se menos efectivo na mecânica quântica para problemas relativos a várias partículas, pois devido ao princípio de exclusão, a função de onda não pode ser positiva em todo o domínio. Na teoria do reactor, por outro lado, o fluxo correspondente ao maior valor característico, de acordo com o teorema BIRKHOFF-VARGA, é sempre positivo, o mesmo se verificando quanto ao fluxo adjunto. Por esta razão, pelo menos, o princípio variacional é mais adoptável aos problemas da teoria do transporte que aos da mecânica quântica. Parece porém, que isto é aplicável apenas à própria equação de BOLTZMANN e não às suas aproximações. Como se disse, as soluções das equações aproximadas são em geral «não positivas em todo o domínio». BROOKS e CALAME⁽¹⁾ utilizaram o princípio variacional, aplicando-o directamente à equação de BOLTZMANN e não às equações dos métodos de aproximação. Desta forma preservaram as vantagens da positividade das verdadeiras soluções.

O segundo método a ser mencionado é o da teoria da difusão. Sabe-se que esta teoria dá uma boa distribuição do fluxo nas regiões suficientemente afastadas das superfícies de separação de meios diferentes. A dificuldade está em que nos reactores heterogéneos todos

os pontos estão demasiadamente próximos das superfícies de separação de meios diferentes. Parece razoável, porém, que uma conveniente modificação das usuais condições de fronteira possa permitir não só uma aceitável representação dos fluxos assintóticos longe das fronteiras, mas possa ainda reproduzir as variações do fluxo, próximo das mesmas fronteiras. Esta sugestão já foi apresentada por DAVIDSON⁽¹⁾. O cálculo de INÖNÜ do efeito rápido pode servir de exemplo de como isto se pode fazer. O efeito rápido foi sempre considerado o processo por excelência para o qual a teoria da difusão é inaplicável pois o efeito dá-se num meio que é pequeno em relação ao livre percurso médio. É certo que o cálculo do efeito rápido pela teoria da difusão com as condições de fronteira mais simples conduz a resultados francamente inaceitáveis. Mas quando INÖNÜ introduz 0,71 do livre percurso médio como a distância de extrapolação linear a situação muda completamente. É certo que 0,71 do livre percurso médio é um elemento estranho à teoria da difusão. Mas a proposta é precisamente a de introduzir tais elementos estranhos na teoria da difusão, na base dum conhecimento de soluções rigorosas relativas a casos simples. A prescrição de INÖNÜ aplica-se ao caso dum meio multiplicativo rodeado de um meio completamente absorvente, uma vez que se supõe o moderador em torno do elemento de combustível capaz de retirar aos neutrões rápidos, por meio de uma simples colisão, a sua faculdade de provocar ulteriores cisões rápidas. Um simples cálculo mostra que a condição de fronteira de INÖNÜ é equivalente a revestir o elemento de combustível com uma película infinitamente delgada cuja secção eficaz de difusão seja infinitamente ele-

(1) BROOKS e CALAME não puderam apresentar no Symposium considerações novas sobre este assunto.

(1) DAVIDSON — *Neutron transport theory*, Oxford, Clarendon Press 1957, pag. 98

(2) INÖNÜ — J. Nucl. Sci. Eng. 5 (1959) pag. 248.

vada por forma que o produto da espessura pela secção eficaz de difusão macroscópica seja finita, nomeadamente $0,71 - 0,33 = 0,38$. A solução do problema da difusão com tal elemento dispersivo entre o meio multiplicativo e o completamente absorvente que o rodeia, apresenta para o interior do meio multiplicativo (o elemento de combustível) o mesmo fluxo que o calculado por INÖNÜ. Considerando a variação de fluxo neutrónico nas vizinhanças da fronteira entre dois meios diferentes, verifica-se que é pouco provável que a introdução de uma superfície dispersiva explique adequadamente em todos os casos as perturbações no fluxo dessa vizinhança. Ainda preferível, em geral, é o considerar-se em adição à superfície dispersiva uma superfície absorvente, positiva ou negativa. De facto, para dividir a absorção res-

ponsável pela variação do fluxo entre os dois meios, será necessário atribuir parte da absorção superficial a um, parte ao outro meio, isto é, será necessário introduzir duas superfícies absorventes. Juntamente com a superfície dispersiva, dever-se-ia reproduzir desta forma o efeito das perturbações junto das fronteiras em termos da teoria da difusão.

10. Conclusão

O objectivo destas observações é o de exprimir a ideia de que a ciência dos reactores pode ser altamente auxiliada pela atenção dos matemáticos por estes problemas; mas também a convicção de que os matemáticos encontrarão muito interessantes problemas na ciência dos reactores.

Decomposição de ideais em ideais primos: teoria de Kummer-Dedekind

por Ubiratan D'Ambrosio

Faculdade de Filosofia, Ciências, Letras de Rio Claro, S. P., Brasil

O. O teorema fundamental da teoria dos ideais estabelece a decomposição única de ideais não triviais num produto de ideais primos [1, pág. 45](+), isto é,

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{P}_2^{e_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{P}_g^{e_g}.$$

Como se verifica, a demonstração do teorema não nos dá nenhum processo de determinar efectivamente tal decomposição.

Para efectuar a decomposição, sendo $\mathfrak{A} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$ basta conhecer a decomposição dos ideais principais (α_i) , pois $\mathfrak{A}$ se

obtem como m. d. c. destes [1, pág. 43], que pode ser calculado com facilidade a partir das decomposições de $(\alpha_1), (\alpha_2), \dots, (\alpha_r)$. [2, pág. 110].

Para decompor (α) , observamos que $(\alpha) | N(\alpha)$, e sendo $N(\alpha)$ racional inteiro, temos $N(\alpha) = p_1^{a_1} \cdot \dots \cdot p_g^{a_g}$. Então só entram na decomposição de (α) os ideais primos $\mathfrak{P}$ que entram na decomposição dos (p_i) ; efectuando então a decomposição dos números primos racionais(++) em ideais primos, obtemos os ideais primos do corpo.

(+) Os números em colchetes referem-se à bibliografia. A notação adotada é em geral a usada em [1].

(++) Por números primos racionais queremos dizer ideais principais gerados por números primos racionais.

Exponemos em 1. e 2. a teoria da decomposição conforme foi desenvolvida por Dedekind, generalizando os estudos de Kummer, que se restringiu a corpos ciclotômicos. Não desenvolveremos a teoria em toda sua generalidade, explicitando as restrições e indicando o desenvolvimento mais geral em 3.

1. Consideremos o corpo $Q(\theta)$, extensão de grau n do corpo Q , dos números racionais. Suponhamos que a base natural $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ seja uma base inteira de $Q(\theta)$, o que nem sempre acontece. Conforme veremos em 3. os resultados aqui obtidos podem ser estendidos aos casos em que isso não se dá.

Todo α inteiro do corpo pode ser escrito então como $\alpha = c_0 + c_1\theta + \dots + c_{n-1}\theta^{n-1}$, com os c_i racionais inteiros.

Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ a equação do corpo de θ .

Seja p um primo racional, com decomposição $(p) = \mathfrak{P}_1^{e_1} \dots \mathfrak{P}_g^{e_g}$ onde os $\mathfrak{P}_i$ são ideais primos em $Q(\theta)$.

Seendo $N((p)) = \{N(\mathfrak{P}_1)\}^{e_1} \dots \{N(\mathfrak{P}_g)\}^{e_g}$, e $N((p)) = p^n$, temos $p^n = \{N(\mathfrak{P}_1)\}^{e_1} \dots \{N(\mathfrak{P}_g)\}^{e_g}$, e então $N(\mathfrak{P}_i) = p^{f_i}$, com $f_i \leq n \cdot e_i$ é chamado grau de $\mathfrak{P}_i$ e e_i é chamado ordem de ramificação de $\mathfrak{P}_i$. Assim, $n = e_1 f_1 + \dots + e_g f_g$.

DEFINIÇÃO. Consideremos o ideal $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}/(p)$ e $\mathfrak{A} \neq (1)$ e sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ inteiros do corpo. Diremos que $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ são linearmente independentes mod $\mathfrak{A}$ quando $\sum_{m=1}^k x_m \gamma_m \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}$, com x_m racionais inteiros implica $x_m \equiv 0 \pmod{p}$ ($m=1, 2, \dots, k$). Caso contrário $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ serão ditos linearmente dependentes mod $\mathfrak{A}$.

Observemos que a independência linear dos inteiros $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ fica estabelecida

uma vez fixado $\mathfrak{A}$, pois o número primo p fica univocamente determinado por $\mathfrak{A}^{(+)}$.

TEOREMA. Sendo $N(\mathfrak{A}) = p^f$, o número máximo de inteiros do corpo linearmente independentes mod $\mathfrak{A}$ é igual a f .

Observemos de início que $1 \leq f \leq n$. De facto, $\mathfrak{A}/(p)$ logo $(p) = \mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$; então $N((p)) = N(\mathfrak{A}) \cdot N(\mathfrak{B})$, logo $p^n = p^f \cdot N(\mathfrak{B})$. Como $\mathfrak{A} \neq (1)$, $1 \leq f \leq n$.

Para a demonstração do teorema utilizaremos dois lemas.

LEMA 1. Sendo f' o número máximo de inteiros do corpo linearmente independentes mod $\mathfrak{A}$, temos $1 \leq f' \leq f$.

DEMONSTRAÇÃO. 1 é linearmente independente mod $\mathfrak{A}$, pois $x \cdot 1 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}$ implica $x \equiv 0 \pmod{p}$. De facto, se assim não fosse, isto é, se $x \not\equiv 0 \pmod{p}$, existiriam racionais inteiros u e v , tais que $u x + v \cdot p = 1$ e então, como $\mathfrak{A}|(x)$ e $\mathfrak{A}|(p)$, teríamos $\mathfrak{A}|(1)$, o que é absurdo, pois $\mathfrak{A} \neq (1)$. Logo $f' \geq 1$.

Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{f'}$ inteiros do corpo linearmente independentes mod $\mathfrak{A}$. Então $y_1 \gamma_1 + y_2 \gamma_2 + \dots + y_{f'} \gamma_{f'}$ com $0 \leq y_i < p$ formam $p^{f'}$ classes de restos incôngruas

mod $\mathfrak{A}$, pois se $\sum_{i=1}^{f'} y'_i \gamma_i \equiv \sum_{i=1}^{f'} y''_i \gamma_i \pmod{\mathfrak{A}}$, com $0 \leq y'_i, y''_i < p$, então $\sum_{i=1}^{f'} (y'_i - y''_i) \gamma_i \equiv 0$

(mod $\mathfrak{A}$) e $y'_i - y''_i \equiv 0 \pmod{p}$, e $\sum_{i=1}^{f'} y'_i \gamma_i$ e

$\sum_{i=1}^{f'} y''_i \gamma_i$ coincidiriam. Como o número de clas-

(+) De facto, se existissem, p e q tais que $\mathfrak{A}/(p)$ e $\mathfrak{A}/(q)$, sendo p e q primos entre si existiriam r e s tais que $pr + qs = 1$ e $\mathfrak{A}|(1)$, contra a hipótese.

ses incôngruas mod $\mathfrak{A}$ é $N(\mathfrak{A})$ [1, pág. 51], temos $p^{f'} \leq p^f$, e daí $f' \leq f$.

Notemos que não é possível concluir que $f' = f$, pois não se pode afirmar que $y_1 \gamma_1 + y_2 \gamma_2 + \dots + y_{f'} \gamma_{f'}$ dão todas as classes de restos mod $\mathfrak{A}$ quando $0 \leq y_i < p$. Isto acontece efectivamente, como veremos a seguir.

LEMA 2. *Sejam $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{f'}$ linearmente independentes mod $\mathfrak{A}$, onde f' é o número máximo de inteiros do corpo nessas condições. Então cada inteiro do corpo pode ser escrito como $\gamma = \sum_{m=1}^{f'} x_m \gamma_m \pmod{\mathfrak{A}}$, com x_m racionais inteiros univocamente determinados mod p .*

DEMONSTRAÇÃO. $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{f'}, \gamma$ são linearmente dependentes mod $\mathfrak{A}$, isto é, pode-se ter $y_1 \gamma_1 + \dots + y_{f'} \gamma_{f'} + y \gamma \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}$ com nem todos $y_1, y_2, \dots, y_{f'}, y$ divisíveis por p . Mais explicitamente, é $y \not\equiv 0 \pmod{p}$. Então existe um único racional inteiro z tal que $zy \equiv -1 \pmod{p}$. Logo

$$-zy\gamma \equiv zy_1\gamma_1 + \dots + zy_{f'}\gamma_{f'} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}$$

e fazendo $x_i = zy_i$, temos $\gamma \equiv x_1 \gamma_1 + \dots + x_{f'} \gamma_{f'} \pmod{\mathfrak{A}}$. A representação é única, pois se $\gamma \equiv u_1 \gamma_1 + \dots + u_{f'} \gamma_{f'} \pmod{\mathfrak{A}}$, então $(x_1 - u_1) \gamma_1 + \dots + (x_{f'} - u_{f'}) \gamma_{f'} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{A}}$ e pela independência linear de $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{f'}$ temos $x_i \equiv u_i \pmod{p}$ ($i = 1, \dots, f'$).

Então os $p^{f'}$ números $y_1 \gamma_1 + \dots + y_{f'} \gamma_{f'}$, com $0 \leq y_i < p$, formam um sistema de representantes das classes de restos mod $\mathfrak{A}$, pois são incongruos mod $\mathfrak{A}$ (lema 1) e todo inteiro do corpo é cômruo a um deles (lema 2). Como o número de classes de restos mod $\mathfrak{A}$ é $N(\mathfrak{A})$, temos $p^{f'} = p^f$, e $f' = f$, o que demonstra o teorema.

2. Voltemos ao problema da determinação dos ideais primos que aparecem na de-

composição $(p) = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{P}_2^{e_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{P}_g^{e_g}$. Faremos, neste parágrafo $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ e $e_1 = e$.

Seja f o número máximo de potências de θ linearmente independentes mod $\mathfrak{P}$, isto é, o corpo $Q[\theta]/\mathfrak{P}$ é extensão de grau f do corpo Z/p . Pelo teorema demonstrado em 1. sabemos que f é o grau do ideal $\mathfrak{P}$ em (p) . Podemos tomar como as f potências de θ linearmente independentes mod $\mathfrak{P}$ as f primeiras. De facto, $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{f-1}, \theta^f$ são linearmente dependentes e θ^f é combinação linear de $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{f-1}$, bem como $\theta^h, \forall h > f$. Logo, $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{f-1}$ são linearmente independentes mod $\mathfrak{P}$.

Seja $L(\theta) = b_0 + b_1 \theta + b_2 \theta^2 + \dots + b_{f-1} \theta^{f-1} + b_f \theta^f \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$, com os b_i racionais inteiros, nem todos divisíveis por p , em particular com $b_f \not\equiv 0 \pmod{p}$, e como estamos trabalhando num corpo, podemos tomar $b_f = 1$.

Consideremos o polinómio $L(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_{f-1} x^{f-1} + x^f$, com coeficientes em Z/p .

Como $f \leq n$, podemos dividir $f(x)$ por $L(x)$, e reduzir mod p , obtendo $f(x) \equiv L(x) \cdot G(x) + H(x) \pmod{p}$. (').

Observemos que se vale (') temos

$$f(x) - L(x) \cdot G(x) - H(x) = p \cdot \Phi(x),$$

onde $\Phi(x)$ é um polinómio com coeficientes em Z e então $f(\theta) - L(\theta) \cdot G(\theta) - H(\theta) = p \cdot \Phi(\theta)$, com $\Phi(\theta) \in Q[\theta]$. Mas $\mathfrak{P}/(p)$, logo $(p) \subset \mathfrak{P}$ e $p \cdot \Phi(\theta)$ é um elemento de $\mathfrak{P}$, e então $f(\theta) \equiv L(\theta) \cdot G(\theta) + H(\theta) \pmod{\mathfrak{P}}$.

Sendo $f(\theta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ e $L(\theta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$, temos $H(\theta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$, com grau de $H(x)$ menor que f . Mas então, sendo $H(x) = r_0 + r_1 x + \dots + r_{f-1} x^{f-1}$ temos $r_i \equiv 0 \pmod{p}$ ($i = 0, 1, \dots, f-1$), pois o número máximo de potências de θ linearmente independentes mod $\mathfrak{P}$ é f . Então $H(x) \equiv 0 \pmod{p}$, e $f(x) \equiv L(x) \cdot G(x) \pmod{p}$.

Façamos $(p, L(\theta)) = \mathfrak{A}$. Vamos ver que $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$.

É imediato que $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}$, pois $p \in \mathfrak{P}$ e $L(\theta) \in \mathfrak{P}$.

Para demonstrar que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{A}$, tomemos um qualquer $\beta \in \mathfrak{P}$. Temos $\beta = B(\theta)$, onde $B(x)$ é um polinómio com coeficientes em Z . Dividindo $B(x)$ por $L(x)$, e reduzindo mod p , obteremos $B(x) \equiv L(x) \cdot G'(x) + H'(\theta) \pmod{p}$, com grau de $H'(\theta)$ menor que f . Então $B(\theta) \equiv L(\theta) \cdot G'(\theta) + H'(\theta) \pmod{\mathfrak{P}}$. Como $\beta \in \mathfrak{P}$, temos $B(\theta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$ e $L(\theta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$. $\therefore H'(\theta) \pmod{\mathfrak{P}}$, logo $H'(\theta) \equiv 0 \pmod{p}$. Então $B(x) \equiv L(x) \cdot G'(x) \pmod{p}$, isto é, $B(x) = L(x) \cdot G'(x) + p \cdot \Phi(x)$ e $B(\theta) = L(\theta) \cdot G'(\theta) + p \cdot \Phi(\theta)$, com $G'(\theta)$ e $\Phi(\theta)$ inteiros do corpo. Isto equivale a dizer que um elemento qualquer de $\mathfrak{P}$ pode ser escrito como $\beta = \mu \cdot L(\theta) + \nu \cdot p$, com $\mu, \nu \in Q[\theta]$, logo $\beta \in \mathfrak{A}$, ou seja $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{A}$. Então $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$.

Se a ordem de ramificação de $\mathfrak{P}$ em (p) for maior que 1, temos $\mathfrak{P}/L(\theta)$ e $\mathfrak{P}^2/L(\theta)$. De facto, $\mathfrak{P} = (p, L(\theta))$. Se $\mathfrak{P}^2/L(\theta)$, como $\mathfrak{P}^2/(p)$, $\mathfrak{P}^2$ dividiria $\mathfrak{P}$, o que só é possível se $\mathfrak{P} = (1)$.

Sendo $f(x) = L(x) \cdot G(x) \pmod{p}$ temos $f(\theta) = L(\theta) \cdot G(\theta) \pmod{\mathfrak{P}^2}$, pelo visto anteriormente, e como $f(\theta) \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}^2}$, temos $\mathfrak{P}^2/L(\theta) \cdot G(\theta)$. Mas $\mathfrak{P}^2/L(\theta)$, logo $\mathfrak{P}/G(\theta)$.

Como $n \geq 2 \cdot f$, de $f(x) = L(x) \cdot G(x) \pmod{p}$ temos que grau de $G(x)$ é $\geq f$. Então dividindo $G(x)$ por $L(x)$ temos $G(x) \equiv L(x) \cdot G_2(x) + H_2(x) \pmod{p}$ e

$$G(\theta) \equiv L(\theta) \cdot G_2(\theta) + H_2(\theta) \pmod{\mathfrak{P}}$$

e análogamente ao que foi feito para $f(x)$, temos $H_2(x) \equiv 0 \pmod{p}$. Logo

$$f(x) \equiv \{L(x)\}^2 \cdot G_2(x) \pmod{p}.$$

Assim sucessivamente, teremos

$$f(x) \equiv \{L(x)\}^e \cdot G_e(x) \pmod{p},$$

com grau de $G_e(x)$ igual a $n - e \cdot f$.

Considerando agora $\mathfrak{P}_2$, seja f_2 o número máximo de potências de θ linearmente independentes mod $\mathfrak{P}_2$, e $L_2(\theta) = d_0 + d_1 \theta +$

$+ d_2 \theta^2 + \dots + d_{f_2-1} \theta^{f_2-1} + \theta^{f_2} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}_2}$, com $d_i \in Z/p$.

Sendo $n - e \cdot f \geq f_2$, podemos repetir o processo para $G_e(x)$, obtendo

$$G_e(x) \equiv \{L_2(x)\}^{e_1} \cdot G_{e_1}(x) \pmod{p}$$

e

$$\mathfrak{P}_2 = (p, L_2(\theta)).$$

Assim $f(x) \equiv \{L(x)\}^e \cdot \{L_2(x)\}^{e_1} \cdot G_{e_1}(x) \pmod{p}$.

Sucessivamente, chegaríamos a

$$f(x) \equiv \{L(x)\}^e \cdot \{L_2(x)\}^{e_1} \cdot \dots \cdot \{L_g(x)\}^{e_g} \cdot G_g(x) \pmod{p}.$$

Mas $G_g(x)$ tem o grau 0 pois $n = e \cdot f + e_2 \cdot f_2 + \dots + e_g \cdot f_g$, e podemos tomá-lo igual a 1.

Ainda, os ideais $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}_2, \dots, \mathfrak{P}_g$ são distintos. De facto, se $\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}_k$, teríamos $L_i(\theta) \in \mathfrak{P}_k$, logo $L_i(\theta) = A(\theta) \cdot p + B(\theta) \cdot L_k(\theta)$, com $A(\theta)$ e $B(\theta)$ elementos de $Q[\theta]$ e então $L_i(\theta) \equiv L_k(\theta) \cdot B(\theta) \pmod{p}$, e $L_i(x) \equiv L_k(x) \cdot B(x) \pmod{p}$, e $L_i(x)$ não seria irredutível mod p .

Podemos então enunciar o importante resultado devido a Kummer (para corpos ciclotómicos) e generalizado por DEDEKIND:

«A decomposição de p em ideais primos de $Q(\theta)$ pode ser determinada pela decomposição de $f(x)$, equação do corpo de θ , em polinómios $L_i(x)$, irredutíveis mod p , com coeficientes em Z/p , cada ideal sendo dado por $\mathfrak{P}_i = (p, L_i(\theta))$; sendo

$f(x) \equiv \{L_1(x)\}^{e_1} \cdot \{L_2(x)\}^{e_2} \cdot \dots \cdot \{L_g(x)\}^{e_g} \pmod{p}$ temos $(p) = \mathfrak{P}_1^{e_1} \cdot \mathfrak{P}_2^{e_2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{P}_g^{e_g}$, grau $L_i(x) = f_i = \text{grau } \mathfrak{P}_i$ ».

3. Vamos indicar o desenvolvimento da teoria sem a condição imposta no início de 1. de ser a base natural uma base inteira. Não faremos o desenvolvimento geral neste número, limitando-nos a apresentar o problema.

ÖYSTEIN ORE, usando congruências de funções com relação à potência de um número primo, estendeu o método obtendo uma teoria da decomposição válida sem excepção. [3, pág. 58].

1.4 - Aplicaremos a teoria desenvolvida na decomposição de um número primo racional num corpo quadrático $Q(\sqrt{a})$.

Distinguiremos dois casos: $a \equiv 2, 3 \pmod{4}$ e $a \equiv 1 \pmod{4}$.

No 1.º caso, uma base inteira é $1, \sqrt{a}$ e o discriminante do corpo é $d = 4a$. A equação do corpo de $\sqrt{a}$ é $f(x) = x^2 - a$.

Consideremos um primo racional $p \neq 2$. Então a decomposição de $f(x) \pmod{p}$ se faz do seguinte modo:

i) $(a/p) = +1$ (+). $f(x) \equiv (x - x_1) \cdot (x - x_2) \pmod{p}$ e sendo $x_1 = -x_2$ tem-se $f(x) \equiv (x - x_1) \cdot (x + x_1) \pmod{p}$. Então $L_1(x) = x - x_1$ e $L_2(x) = x + x_1$, logo $L_1(\sqrt{a}) = \sqrt{a} - x_1$ e $L_2(\sqrt{a}) = \sqrt{a} + x_1$ e $\mathfrak{P}_1 = (p, x_1 - \sqrt{a})$ e $\mathfrak{P}_2 = (p, x_1 + \sqrt{a})$.

ii) $(a/p) = -1$. $f(x)$ não se decompõe mod p , isto é, (p) é um ideal primo de $Q(\sqrt{a})$, com grau $f = 2$.

iii) $(a/p) = 0$. Então $f(x) \equiv x^2 \pmod{p}$ e $L_1(x) = L_2(x) = x$, logo $g = 1$, $f = 1$, $e = 2$ e $L(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. Então $\mathfrak{P} = (p, \sqrt{a})$.

Se $p = 2$, teremos:

iv) se $a \equiv 3 \pmod{4}$, ou $a \equiv 1 \pmod{2}$, $x^2 - a \equiv 0 \pmod{2}$ se decompõe em $(x - 1) \cdot (x + 1) \pmod{2}$, e sendo

$-1 \equiv +1 \pmod{2}$, $L_1(x) = L_2(x) = (x + 1)$, logo $g = e = 1$ e $L(\sqrt{a}) = (\sqrt{a} + 1)$. Então $\mathfrak{P} = (2, \sqrt{a} + 1)$.

(+) (a/p) é o símbolo de LEGENDRE, $+1$ se a é resto quadrático mod p , -1 se a é não-resto quadrático mod p e $=0$ se a é múltiplo de p .

v) se $a \equiv 2 \pmod{4}$, isto é, $a \equiv 0 \pmod{2}$, $x^2 - a \equiv 0 \pmod{2}$ se decompõe em $x \cdot x \pmod{2}$, logo $g = 1$, $e = 2$ e $L(x) = x$ e $L(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$. Então $\mathfrak{P} = (2, \sqrt{a})$.

No 2.º caso, isto é, $a \equiv 1 \pmod{4}$, uma base inteira é $1, \frac{1 + \sqrt{a}}{2}$ e o discriminante do corpo é $d = a$.

A equação do corpo de $\frac{1 + \sqrt{a}}{2}$ é $f(x) = x^2 - x + \frac{1 - a}{2}$.

Seja $p \neq 2$, primo racional. Então $f(x)$ se decompõe mod p do seguinte modo:

vi) $(a/p) = +1$. Fazendo $f(x) \equiv (2x - 1)^2 - a \pmod{p}$, $f(x) \equiv (2x - 1 - x_1) \cdot (2x - 1 + x_1) \pmod{p}$. Então $L_1\left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2}\right) =$

$= \left(2 \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2}\right) - 1 - x_1\right) = (\sqrt{a} - x_1)$ e $L_2\left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2}\right) = (\sqrt{a} + x_1)$. Logo $\mathfrak{P}_1 = (p, x_1 - \sqrt{a})$ e $\mathfrak{P}_2 = (p, x_1 + \sqrt{a})$.

vii) $(a/p) = -1$. $f(x)$ não se decompõe mod p , logo (p) é um ideal primo de $Q(\sqrt{a})$.

viii) $(a/p) = 0$. $f(x) \equiv (2x - 1)^2 \pmod{p}$. Então $g = 1$, $e = 2$ e $L(x) = (2x - 1)$, logo $L\left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2}\right) = \sqrt{a}$, e $\mathfrak{P} = (p, \sqrt{a})$.

Se $p = 2$, fazemos $f(x) = x^2 - x + \frac{1 - a}{4}$. Então,

ix) se $a \equiv 1 \pmod{8}$, logo $\frac{1 - a}{4}$ é par, $f(x) \equiv x^2 - x \pmod{2}$ e se decompõe em $x \cdot (x - 1)$, logo $L_1\left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2}\right) = \frac{1 + \sqrt{a}}{2}$ e $L_2\left(\frac{1 + \sqrt{a}}{2}\right) = \frac{1 - \sqrt{a}}{2}$ e $\mathfrak{P}_1 = \left(2, \frac{1 + \sqrt{a}}{2}\right)$

e $\mathfrak{P}_2 = \left(2, \frac{1 - \sqrt{a}}{2}\right)$.

$x)$ se $a \equiv 5 \pmod{8}$, logo $\frac{1-a}{4}$ é ímpar, $f(x)$ não se decompõe mod 2, e (p) é ideal primo em $Q(\sqrt{a})$.

5. Um problema de fundamental importância para a decomposição de ideais é saber se na decomposição do ideal (p) em $Q(\theta)$ alguns factores ideais $\mathfrak{P}_i$ aparecem repetidos ou se todos são distintos. Em outros termos, se é algum $e_i > 1$. No caso de serem todos os $e_i = 1$, (p) diz-se *não ramificado*. Caso contrário, diz-se *ramificado*.

A resposta ao problema é dada pelo seguinte teorema, devido a DEDEKIND [5]:

«Dado o número primo racional p , a condição necessária e suficiente para que exista um ideal primo $\mathfrak{P}$ cujo quadrado divida p é que p divida d , sendo d o discriminante do corpo».

Notemos que num corpo quadrático o teorema se verifica facilmente mediante os resultados de 4.

De facto, (p) é o quadrado de um ideal primo nos casos iii, iv, v e viii, e somente nesses casos. E nestes casos, e somente nestes, p/d .

Vamos, partindo da decomposição feita em 2., demonstrar este teorema, seguindo em linhas gerais o desenvolvimento de ZOLATA-REFE [6]. Naturalmente as observações feitas em 3. quanto à generalidade da decomposição mantêm-se para a demonstração que faremos, isto é, nos restringiremos a números primos de 1.^a espécie em $Q(\theta)$. No entretanto, logo a seguir generalizaremos a demonstração.

No corpo $Q(\theta)$, extensão de grau n de Q , considerado o inteiro $\alpha = g(\theta)$, representaremos os conjugados de α por $\alpha^{(i)} = g(\theta^{(i)})$, onde os $\theta^{(i)}$ são os conjugados de θ .

Norma de α é o número racional inteiro

$$N(\alpha) = g(\theta) \cdot g(\theta^{(1)}) \cdot \dots \cdot g(\theta^{(n-1)}).$$

LEMA 1. Sendo f_i o grau de $L_i(x)$ e $\psi(x)$ um polinómio com coeficientes em Z , vale

$$N(L_i(\theta)) = (-1)^{n f_i} \cdot p^{f_i} \cdot \psi(\lambda_1) \cdot \dots \cdot \psi(\lambda_{f_i}).$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $L_i(x) = (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_{f_i})$. Então $N(L_i(\theta)) = L_i(\theta) \cdot L_i(\theta^{(1)}) \cdot \dots \cdot L_i(\theta^{(n-1)}) = (\theta - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\theta - \lambda_{f_i}) \cdot (\theta^{(1)} - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\theta^{(1)} - \lambda_{f_i}) \cdot \dots \cdot (\theta^{(n-1)} - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (\theta^{(n-1)} - \lambda_{f_i}) = (-1)^{n f_i} \cdot f(\lambda_1) \cdot \dots \cdot f(\lambda_{f_i})$. Mas sendo $f(x) \equiv \{L_1(x)\}^{e_1} \cdot \dots \cdot \{L_g(x)\}^{e_g} \pmod{p}$, isto é, $f(x) = \{L_1(x)\}^{e_1} \cdot \dots \cdot \{L_g(x)\}^{e_g} + p \cdot \psi(x)$, com $\psi(x)$ um polinómio com coeficientes em Z , temos

$$f(\lambda_1) \cdot \dots \cdot f(\lambda_{f_i}) = p^{f_i} \cdot \psi(\lambda_1) \cdot \dots \cdot \psi(\lambda_{f_i})$$

e portanto

$$N(L_i(\theta)) = (-1)^{n f_i} \cdot p^{f_i} \cdot \psi(\lambda_1) \cdot \dots \cdot \psi(\lambda_{f_i}).$$

COROLÁRIO. $N(L_i(\theta)) \equiv 0 \pmod{p^{f_i}} (+)$.

LEMA 2. Condição necessária e suficiente para que $p/N(\alpha)$, onde $\alpha = g(\theta)$, é que $g(x)$ contenha como factor ao menos uma das funções $L_i(x) \pmod{p}$.

DEMONSTRAÇÃO. Suponhamos que $f(x)$ e $g(x)$ não tenham factores comuns mod p . Então é possível determinar polinómios $\Phi(x)$ e $\psi(x)$ tais que $g(x) \cdot \Phi(x) - \psi(x) \cdot f(x) \equiv 1 \pmod{p}$. Então $g(x) \cdot \Phi(x) - \psi(x) \cdot f(x) = 1 + p \cdot \chi(x)$, com $\chi(x)$ com coeficientes racionais inteiros, e daí

$$g(\theta) \cdot \Phi(\theta) = 1 + p \cdot \chi(\theta), \dots, g(\theta^{(n-1)}) \cdot \Phi(\theta^{(n-1)}) = 1 + p \cdot \chi(\theta^{(n-1)})$$

e multiplicando membro a membro $N(\alpha) \cdot N(\Phi(\theta)) = 1 + p \cdot m$ onde m é um número racional inteiro. Logo, $N(\alpha) \cdot N(\Phi(\theta)) \equiv 1 \pmod{p}$ isto é, $N(\alpha)$ não é divisível por p , e a condição é necessária.

(+) Isto decorre, também, do facto de ser $\mathfrak{P}_i = (L_i(\theta), p)$ e $N(\mathfrak{P}_i) = p^{f_i}$, pois $N(\mathfrak{P}_i)/N(L_i(\theta))$.

Seja agora $g(x) \equiv L_i(x) \cdot \Phi(x) \pmod{p}$. Então, sendo $\psi(x)$ polinómio com coeficientes em Z temos

$$g(x) = L_i(x) \cdot \Phi(x) + p \cdot \psi(x),$$

logo

$$g(\theta) = L_i(\theta) \cdot \Phi(\theta) + p \cdot \psi(\theta), \dots, g(\theta^{(n-1)}) = L_i(\theta^{(n-1)}) \cdot \Phi(\theta^{(n-1)}) + p \cdot \psi(\theta^{(n-1)})$$

e multiplicando $N(x) = N(L_i(\theta)) \cdot N(\Phi(\theta)) + p \cdot m$, $m \in Z$, e sendo $N(L_i(\theta)) \equiv 0 \pmod{p}$, temos $N(x) \equiv 0 \pmod{p}$.

TEOREMA. *Condição necessária e suficiente para que $f(x)$ admita factores múltiplos mod p é que p/d .*

Sabemos que uma base de $Q(\theta)$ é a base natural $1, \theta, \theta^2, \dots, \theta^{n-1}$ e que seu discriminante é o quadrado do determinante de VANDERMONDE [1, pág. 17]

$$V(\theta, \theta^{(1)}, \dots, \theta^{(n-1)}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \theta & \theta^{(1)} & \dots & \theta^{(n-1)} \\ \theta^2 & \theta^{(1)2} & \dots & \theta^{(n-1)2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \theta^{n-1} & \theta^{(1)n-1} & \dots & \theta^{(n-1)n-1} \end{vmatrix}$$

Então

$$D(1, \theta, \dots, \theta^{(n-1)}) = (\theta^{(1)} - \theta)^2 \cdot (\theta^{(2)} - \theta)^2 \cdot \dots \cdot (\theta^{(n-1)} - \theta)^2 \cdot (\theta^{(2)} - \theta^{(1)})^2 \cdot \dots \cdot (\theta^{(n-1)} - \theta^{(1)})^2 \cdot (\theta^{(n-1)} - \theta^{(n-2)})^2$$

e $D = J^2 \cdot d$. Supondo que p seja de 1.ª espécie, temos que p/d é equivalente a p/D .

Suponhamos que $p \nmid D$ e que $f(x)$ admita $L_i(x)$ como factor múltiplo mod p , isto é, que $e_i \geq 1$; então $f(x) = \Phi(x) \cdot \{L_i(x)\}^{e_i} + p \cdot \psi(x)$ com $\Phi(x)$ e $\psi(x)$ polinómios com coeficientes em Z . Derivando temos

$$f'(x) = \Phi'(x) \cdot \{L_i(x)\}^{e_i} + e_i \{L_i(x)\}^{e_i-1} \cdot L_i'(x) \cdot \Phi(x) + p \cdot \psi'(x),$$

isto é

$$f'(x) \equiv \chi(x) \cdot L_i(x) \pmod{p}$$

onde

$$\chi(x) = \Phi'(x) \cdot \{L_i(x)\}^{e_i-1} + e_i \{L_i(x)\}^{e_i-2} \cdot L_i'(x) \cdot \Phi(x),$$

e pelo lema 2, temos $N(f'(\theta)) \equiv 0 \pmod{p}$. $f'(\theta)$ é denominado *diferente de θ* , e é um elemento de $Q(\theta)$ [7, pág. 11].

Sendo

$$f(x) = (x - \theta) \cdot (x - \theta^{(1)}) \cdot \dots \cdot (x - \theta^{(n-1)})$$

temos

$$f'(x) = (x - \theta^{(1)}) \cdot \dots \cdot (x - \theta^{(n-1)}) + (x - \theta) \cdot (x - \theta^{(2)}) \cdot \dots \cdot (x - \theta^{(n-1)}) + \dots + (x - \theta) \cdot (x - \theta^{(1)}) \cdot \dots \cdot (x - \theta^{(n-2)}),$$

logo

$$f'(\theta) = (\theta - \theta^{(1)}) \cdot \dots \cdot (\theta - \theta^{(n-1)}) \cdot \dots \cdot f'(\theta^{(n-1)}) = (\theta^{(n-1)} - \theta) \cdot \dots \cdot (\theta^{(n-1)} - \theta^{(n-2)}),$$

e $N(f'(\theta)) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot D$. Mas, então, como $N(f'(\theta)) \equiv 0 \pmod{p}$, temos p/D , contra a hipótese inicial. Logo, se $p \nmid D$, temos $e_i = 1$, isto é, $f(x)$ não contém factores múltiplos mod p .

Seja agora p/D . Suponhamos que

$$e_i = 1, (i = 1, 2, \dots, g),$$

isto é, que $f(x) \equiv L_1(x) \cdot L_2(x) \cdot \dots \cdot L_g(x) \pmod{p}$. Então $f(x) = L_1(x) \cdot \dots \cdot L_g(x) + p \cdot \Phi(x)$ e

$$f'(x) = L_1'(x) \cdot L_2(x) \cdot \dots \cdot L_g(x) + \dots + L_1(x) \cdot \dots \cdot L_g'(x) + p \cdot \Phi'(x)$$

logo $f'(x)$ não contém como factor nenhum $L_i(x)$, e pelo lema 2, $p \nmid N(f'(\theta))$, e portanto $p \nmid D$, contra a hipótese. Então, se p/D , $f(x)$ deve conter factores múltiplos mod p , o que demonstra completamente o teorema.

Como a ordem de ramificação de $L_i(x)$ em $f(x)$ é a ordem de ramificação de $\mathfrak{P}_i$ em (p) , temos demonstrado o teorema enunciado no início deste parágrafo, mas apenas para números primos racionais de 1.^a espécie em $Q(\theta)$.

Vamos agora completar a demonstração para números primos racionais quaisquer.

Se p/d , temos p/D , independentemente de ser p de 1.^a ou de 2.^a espécie, e a demonstração feita subsiste, logo a condição suficiente do teorema de DEDEKIND fica completamente demonstrada. No entanto, para demonstrar que a condição é necessária, este raciocínio falha se p é primo de 2.^a espécie.

Para demonstrar a condição necessária, isto é, se $\mathfrak{P}^2/(p)$, então p/d , utilizaremos o seguinte

LEMA. Sendo $Q(\theta)$ extensão de grau n de Q , e γ um inteiro de $Q(\theta)$, temos $|T(\gamma)|^p \equiv T(\gamma^p) \pmod{p}^{(+)}$.

DEMONSTRAÇÃO. Sendo $T(\gamma) = \gamma^{(1)} + \dots + \gamma^{(n)}$, temos $|T(\gamma)|^p = \{\gamma^{(1)} + \dots + \gamma^{(n)}\}^p \pmod{p}$. Mas $T(\gamma^p) = \{\gamma^{(1)p} + \dots + \gamma^{(n)p}\}^p$, logo $|T(\gamma)|^p \equiv T(\gamma^p) \pmod{p}$.

Seja $\mathfrak{P}^2/(p)$; então $(p) = \mathfrak{P}^2 \cdot \Omega$. Seja α um inteiro do corpo tal que $\mathfrak{P} \cdot \Omega/\alpha$ e $\mathfrak{P}^2 \cdot \Omega \nmid \alpha$; existem inteiros assim pois $\mathfrak{P} \cdot \Omega/\mathfrak{P}^2 \cdot \Omega$. Então temos $\alpha \neq 0$ (senão $\alpha \in \mathfrak{P}^2 \cdot \Omega$) e $p \nmid \alpha$ (senão $\mathfrak{P}^2/x$). Também p/α^2 , pois $(p)/\mathfrak{P}^2 \cdot \Omega/\mathfrak{P}^2 \cdot \Omega^2/(\alpha^2)/(\alpha^2)$. Sendo $p \geq 2$, e ω um inteiro do corpo, temos sempre $\alpha^2/(\alpha \cdot \omega)^p$, logo $p/(\alpha \cdot \omega)^p$, ou seja $(\alpha \cdot \omega)^p/p$ é inteiro do corpo. Então $T((\alpha \cdot \omega)^p/p) = T((\alpha \cdot \omega)^p)/p$ é racional inteiro, ou seja, $T((\alpha \cdot \omega)^p) \equiv 0 \pmod{p}$. Mas sendo $\alpha \cdot \omega$ inteiro do corpo, pelo lema te-

mos $T((\alpha \cdot \omega)^p) \equiv \{T(\alpha \cdot \omega)\}^p \pmod{p}$ e daí $\{T(\alpha \cdot \omega)\}^p \equiv 0 \pmod{p}$. Mas como $T(\alpha \cdot \omega)$ é racional inteiro, é $T(\alpha \cdot \omega) \equiv 0 \pmod{p}$.

Seja agora $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ uma base inteira de $Q(\theta)$. Então $\alpha = h_1 \cdot \Omega_1 + \dots + h_n \cdot \Omega_n$, com os h_i inteiros racionais, nem todos divisíveis por p , senão p/α . Logo

$$T(\alpha \cdot \Omega_i) = T\left(\sum_1^n h_i \cdot \Omega_i \cdot \Omega_i\right) = \sum_1^n h_i \cdot T(\Omega_i \cdot \Omega_i),$$

e então

$$\sum_1^n h_i \cdot T(\Omega_i \cdot \Omega_i) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Sendo h_i e $T(\Omega_i \cdot \Omega_i)$ racionais inteiros, e pelo menos um $h_i \not\equiv 0 \pmod{p}$, temos

$$|T(\Omega_i \cdot \Omega_i)| \equiv 0 \pmod{p},$$

e como $|T(\Omega_i \cdot \Omega_i)| - d$ resulta $d \equiv 0 \pmod{p}$, o que demonstra o teorema.

BIBLIOGRAFIA

- [1] FURQUIM DE ALMEIDA, FERNANDO, *Teoria dos Números Algebricos*, Primeiro Colloq. Bras. de Matem., C. N. Pq., S. Paulo, 1957.
- [2] LANDAU, EDMUND, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, vol. III (1927), New York, 1955.
- [3] FRICKE, ROBERT, *Lehrbuch der Algebra*, vol III, Braunschweig 1928.
- [4] DEDEKIND, RICHARD, *Über den Zusammenhang zwischen der Theorie der Ideale und der Theorie der höheren Kongruenzen* (1878), Gesammelte Mathem. Werke, vol. I, Braunschweig, 1930.
- [5] DEDEKIND, RICHARD, *Über die Diskriminanten endlicher Körper* (1882), Gesam. Mathem. Werke, vol. I, Braunschweig, 1930.
- [6] ZOLOTAREFF, G., *Sur la théorie des Nombres Complexes*, I, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, tome VI, pag. 51, 1880.
- [7] HILBERT, DAVID, *Théorie des Corps de Nombres Algébriques*, (1897), Paris, 1913.

(+) $T(\gamma)$ é o traço de γ , inteiro do corpo, definido como $T(\gamma) = \gamma^{(L)} + \dots + \gamma^{(n)}$, onde $\gamma^{(i)}$ são os conjugados de γ . [1, pag. 4].

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. T. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2 de Outubro de 1962.

5564 — Estabeleça a fórmula de Moivre para o cálculo das raízes de índice n de um complexo.

Designando por Z a imagem de um complexo z , represente no plano d'ARGAND o conjunto

$$C = \{Z: 4\sqrt{2} < |z| \leq 32 \wedge 0 \leq \arg z < \pi/4\}$$

e indique qual o seu transformado por meio da relação $z = w^5$.

5565 — Determine a operação do plano que passa por $P(1, -1, 1)$ e é perpendicular ao plano $2x + 3y = 4z + 1$ e paralelo à recta $x = z + 3 = \frac{y+1}{2}$

Qual o polo do plano dado em relação à quádriga $2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz = 4$?

R: $11x - 6y + z = 18$; $P(12, 8, -14)$.

5566 — Determine

a) $\lim_{n \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1 - e^{hx}} \right)$

b) A área do plano xOy caracterizada por $x \geq 3$ e $0 \leq y \leq \frac{1}{x^2 - 1}$

R: $\frac{1}{2}$; $\log \sqrt{2}$.

5567 — Designe por D e J transformações (ou operadores) definidas por $Df(x) = f'(x)$ e $Jf(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt$.

Mostre que D e J são transformações lineares e que $DJ = JD$.

Designando por $\sum_{i=0}^{\infty} a_i D^i = a_0 + a_1 D + a_2 D^2 + \dots$ o operador que aplicado à função $f(x)$ origina a série $a_0 f(x) + a_1 f'(x) + a_2 f''(x) + \dots$ (suporte convergente) e tendo presente a teoria das séries de TAYLOR, estude a possibilidade de representar $f(x+h)$ por $e^{hD} f(x)$.

Enunciados e soluções dos n.ºs 5564 a 5567 de F. R. Dias Agudo

I. S. G. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º exame de frequência — (1.ª chamada) — 13-3-1963.

I

5568 — 1) Sejam $A, B, C, \dots$ subconjuntos de um conjunto fundamental U . Mostre que a relação « $\subseteq$ » definida por « $A \subseteq B \iff A \cup B = B$ », é reflexiva, antisimétrica e transitiva.

2) Dados os números reais positivos $[A_1, A_2]$ e $[r]$, prove que $[A_1, A_2] \cdot [r] = [A_1 r, A_2 r]$. Aproveite esta propriedade para mostrar que $[1]$ é o elemento unidade de R .

3) Considere o número complexo $z = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta + i}$ e mostre que $|z| = |\cos \theta|$. Determine θ por forma que a imagem de z esteja sobre a recta $y = -x$.

R: 1) Como $A \cup A = A$ tem-se, evidentemente, $A \subseteq A$ (reflexividade). Tendo-se $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, vem $A \cup B = B \wedge B \cup A = A$ e, como $A \cup B = B \cup A$, resulta $A = B$ (antisimetria). Finalmente, $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \iff A \cup B = B \wedge B \cup C = C$ e, como $A \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = B \cup C = C$, vem $A \subseteq C$ (transitividade).

$$3) \quad z = \frac{1}{\operatorname{tg} \theta + i} = \frac{\operatorname{tg} \theta - i}{\operatorname{tg}^2 \theta + 1} = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sec^2 \theta} - \cos^2 \theta i = \operatorname{sen} \theta \cos \theta - \cos^2 \theta i.$$

$$|z| = \sqrt{\operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta} = |\cos \theta|.$$

Sendo $\alpha = \arg z$, vem $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} = -\cot \theta$ e, portanto, terá de ser $\cot \theta = 1$, isto é, $\theta = \frac{\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

II

5569 — 1) Se u_n e v_n têm limites finitos u e v , e se $u > v$, mostre que, a partir de uma certa ordem, $u_n > v_n$.

Calcule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) (n\sqrt{e} - 1) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)}.$$

2) Sendo $r_n = n\sqrt{a_n}$, prove que $S) \sum a_n$ ($a_n \geq 0$) é convergente se $\bar{r} < 1$ e divergente se $\bar{r} > 1$.

Dada a série $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \dots$ ($1 < \alpha < \beta$), verifique que $\bar{p} = +\infty$ ($p_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$) mas que ela é convergente. Aproveite o resultado para mostrar que a condição $\bar{p} < 1$ garante a convergência de S) mas que a condição $\bar{p} > 1$ não implica a divergência de S).

R: 1) Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\sqrt{1 + \frac{1}{n+1}} - 1\right] [n\sqrt{e} - 1] \log \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) (n\sqrt{e} - 1) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{\left(\frac{1}{2} \zeta' \frac{1}{n+1}\right) \left(\xi' \frac{1}{n+1}\right) \left(\eta' \frac{1}{n+1}\right)}{\left(\frac{1}{2} \zeta' \frac{1}{n}\right) \left(\xi' \frac{1}{n}\right) \left(\eta' \frac{1}{n}\right)} = 1, \text{ vem}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) (n\sqrt{e} - 1) \log \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = 1$$

2) A série $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\beta} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\beta} + \dots$ é majorada pela série $\frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \dots$, que é convergente, e portanto a primeira também é convergente. No entanto, $p_{2n-1} \rightarrow +\infty$.

III

5570 — Dada a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & (x < -1) \\ |x| & (-1 \leq x \leq 1) \\ 2 & (x > 1) \end{cases}$$

resolva os seguintes problemas:

- 1) Esboce a imagem de $f(x)$.
- 2) Estude a continuidade e derivabilidade de $f(x)$.
- 3) Quais são os extremantes de $f(x)$? Porquê?
- 4) É aplicável o teorema de ROLLÉ em $[-1, 1]$? Porquê?

5) Determine a partir de $f(x)$ uma função contínua $F(x)$ que satisfaça as relações $F'(x) = f(x)$ e $F(0) = 0$.

R: 2) Descontinua em $x = -\infty$ e em $x = 1$. Derivável em todos os pontos, excepto $x = -1$, $x = 0$ e $x = 1$.

3) $x = -1$ é maximizante, pois $f'_d(-1) = 1$ e $f'_d(-1) = -1$; $x = 0$ é minimizante porque $f'_d(0) = -1$ e $f'_d(0) = 1$.

4) Não é aplicável o teorema de Rolle em $[-1, 1]$ porque, embora $f(x)$ seja contínua nesse intervalo, não possui derivada em $x = 0$.

$$5) \quad F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + 2x + 1 & (x < -1) \\ -\frac{x^2}{2} & (-1 \leq x \leq 0) \\ \frac{x^2}{2} & (0 < x \leq 1) \\ 2x - \frac{3}{2} & (x > 1) \end{cases}$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º Exame de frequência — (2.º chamada) — 20-3-1963.

I

5571 — 1) A, B e C designam conjuntos. Prove que $A \subseteq B \wedge A \subseteq C \iff A \subseteq (B \cap C)$.

2) Sendo $a_1, a_2, \dots, a_n$ números reais positivos, mostre que:

$$a_1 a_2 \dots a_n = 1 \implies a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n.$$

Utilize esta propriedade para provar que, sendo $x_1, x_2, \dots, x_n$ números reais positivos,

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

3) Calcule os números complexos z tais que z^7 e $\frac{1}{z^2}$ sejam conjugados.

R: 1) Esta proposição sobre conjuntos é transformável na seguinte proposição da lógica matemática:

$$(x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in A \implies x \in C) \iff \\ \iff [x \in A \implies (x \in B \wedge x \in C)].$$

Fazendo $x \in A = p$, $x \in B = q$ e $x \in C = r$, vem

$$(p \implies q) \wedge (p \implies r) \iff [p \implies (q \wedge r)]$$

ou

$$(\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \Leftrightarrow [\sim p \vee (q \wedge r)],$$

proposição que é verdadeira pois exprime a propriedade distributiva da adição lógica em relação à multiplicação lógica.

$$2) \quad \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

e, como $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = 1$, vem imediatamente

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq 1 \quad \text{ou} \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n.$$

Como $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \dots \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} \cdot \frac{x_n}{x_1} = 1$, vem logo

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \dots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n.$$

3) Sendo $z = \rho(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$, vem

$$z^7 = \rho^7(\cos 7\alpha + i \operatorname{sen} 7\alpha)$$

e $\frac{1}{z^2} = \rho^{-2}[\cos(-2\alpha) + i \operatorname{sen}(-2\alpha)]$. Para z^7 e $\frac{1}{z^2}$ serem complexos conjugados têm de se cumprir as condições:

$$\rho^7 = \rho^{-2} \quad 7\alpha - 2\alpha = 2k\pi$$

isto é,

$$\rho = 1 \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{2k\pi}{5}.$$

$$z = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{5} \quad (k=0, 1, 2, 3, 4).$$

II

5572 - 1) Sejam $\bar{u} = \overline{\lim} u_n$ e $\underline{u} = \liminf u_n$ ($\bar{u}$ e $\underline{u}$ finitos). Prove que, dado $\varepsilon > 0$, então $u_n < \bar{u} + \varepsilon$ para todo o valor de n suficientemente grande e $u_n > \underline{u} - \varepsilon$ para uma infinidade de valores de n . Enuncie uma proposição análoga em que intervenha $\underline{u}$.

Indique os sublimites e os valores de $\bar{u}$ e $\underline{u}$ para a sucessão

$$u_n = n^2 \log \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) + \cos \frac{n\pi}{3}.$$

2) Mostre que a série $\sum \alpha_n x^n$, sendo divergente para $x = x_0$, diverge em qualquer ponto $x = x_1$ mais afastado da origem. Sendo λ o seu raio de convergência e $f(x)$ a sua soma, prove que $f(x)$ é contínua em $]-\lambda, \lambda[$.

R. 1) Como $n^2 \log \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right) = n^2 \log \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = n^2 \cdot \frac{1}{n^2} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$, basta achar os sublimites de $v_n = \cos \frac{n\pi}{3}$ para se obterem facilmente os sublimites de u_n . Ora.

$v_{3k} = \cos k\pi$ tem sublimites -1 e 1

$v_{3k+1} = \cos \left(k\pi + \frac{\pi}{3} \right)$ tem sublimites $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

$v_{3k+2} = \cos \left(k\pi + \frac{2\pi}{3} \right)$ tem sublimites $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

e os sublimites de u_n são 0 , $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, e 2 . $\bar{u} = 2$ e $\underline{u} = 0$.

III

5573 - 1) Calcule $P \frac{x^2 + x - 1}{x^3(x^2 + 2)}$.

2) Sendo c um extremante interior de $g(x)$ em $[a, b]$ e existindo $g'(c)$, prove que $g'(c)$ é nula ou infinita de duplo sinal.

$$R: 1) \quad \frac{x^2 + x - 1}{x^3(x^2 + 2)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{x^3} + \frac{S_0}{x^2 + 2}.$$

Cálculo de a_0 , a_1 e a_2 :

$R_0(x) = \frac{-1 + x + x^2}{2 + x^2}$ e, fazendo a divisão ascendente do numerador pelo denominador, obtém-se $a_0 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{3}{4}$.

Cálculo de S_0 :

$$R_\Delta(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^3} = \frac{(x-3) + \Delta}{-2x + x\Delta}, \quad \text{com } \Delta = x^2 + 2.$$

Como $x-3$ não é divisível por $-2x$, determine-se a_0 por forma que $(x-3-x_0\Delta)_{x=0} = 0$. Vem imedia-

$$\text{tamente } a_0 = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad S_0 = \frac{x-3 + \frac{3}{2}(x^2+2)}{-2x} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}.$$

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^3(x^2 + 2)} = -\frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^2} + \frac{3}{4x} - \frac{3}{4} \frac{x}{x^2 + 2} - \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 + 2}$$

$$P \frac{x^2 + x - 1}{x^3(x^2 + 2)} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4x^2} - \frac{1}{2x} + \frac{3}{4} \log |x| - \frac{3}{8} \log (x^2 + 2).$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª Cadeira —
2.º exame de frequência (1.ª chamada) — 17-6-963.

I

5574 — 1) Demonstre que uma série de potências é série de TAYLOR da sua própria soma.

Escreva o desenvolvimento em série de TAYLOR da função $\frac{1}{x^2 + 2x + 5}$ segundo as potências de $x + 1$. Indique o intervalo em que é válido o desenvolvimento.

2) Determine a por forma que as assíntotas da curva representativa da função $y = \frac{ax^2 + 1}{x - 1}$ se interceptem num ponto de ordenada 2.

R: 1) $\frac{1}{x^2 + 2x + 5} = \frac{1}{(x + 1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{x + 1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x + 1}{2}\right)^{2n}$. O desenvolvimento é válido para todos os valores de x que façam $\left(\frac{x + 1}{2}\right)^2 < 1$, isto é, $-3 < x < 1$.

2) A curva admite as assíntotas $X = 1$ e $Y = aX + a$ e portanto terá de ser $2 = a + a$ ou $a = 1$.

II

5575 — 1) Quando se diz que $f(x, y)$ é diferenciável em $P(a, b)$? Enuncie e demonstre uma condição suficiente de diferenciabilidade.

2) Considere o polinómio real $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$. Atribuindo a x n valores distintos $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, construa-se a tabela

x	x_0	x_1	$\dots$	x_{n-1}
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$\dots$	$f(x_{n-1})$

e seja $I(x)$ o polinómio interpolador para estes n pares de valores. Prove que $f(x) = I(x) + a_0(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$.

R: 2) Como se sabe, $f(x) = I(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$ e, como $f^{(n)}(x) = n! a_0$, vem imediatamente o resultado pretendido.

III

5576 — 1) Determine k por forma que a característica da matriz $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ k & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ seja igual a 2.

2) Mostre que o sistema homogéneo

$$\begin{aligned} x + y - z - u &= 0 \\ 2x - 2y - u &= 0 \\ x - 3y + z &= 0 \\ 4x - 2z - 3u &= 0 \end{aligned}$$

tem soluções não nulas. Determine um sistema fundamental de soluções e aproveite-o para apresentar a solução geral do sistema.

R: 1) Com $k \neq 0$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & k \\ k & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & k-3 \\ 0 & k & 1 & 5-3k \end{bmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & k & 1 & -1 \\ 0 & 2-k & 0 & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-3k \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & k & -1 \\ 0 & 0 & 2-k & k-2 \\ 0 & 0 & 0 & 6-3k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Só com $k=2$ a característica da matriz é 2. É fácil verificar que com $k=0$ a característica da matriz é 3.

A matriz do sistema é

$$2) A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \text{ e o determinante principal é } \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}.$$

O sistema tem soluções não nulas porque é indeterminado (grau de indeterminação $d=2$).

Para determinar um sistema fundamental de soluções (duas soluções independentes) considere-se o sistema constituído pelas equações principais:

$$\begin{aligned} x + y - z - u &= 0 \\ 2x - 2y - u &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $z=1$ e $u=0$, obtém-se a solução $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}, z=1, u=0$ e, tomando $z=0$ e $u=1$, deriva-se $x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{4}, z=0, u=1$.

As soluções $((x^1)) = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} 1 0\right)$ e $((x^2)) = \left(\frac{3}{4} \frac{1}{4} 0 1\right)$ são independentes e a solução geral pode escrever-se na forma

$$((x)) = \alpha ((x^1)) + \beta ((x^2))$$

isto é

$$x = \frac{1}{2} \alpha + \frac{3}{4} \beta$$

$$y = \frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{4} \beta$$

$$z = \alpha$$

$$u = \beta.$$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.ª Cadeira —
2.º exame de frequência (2.ª chamada) — 22-6-963.

I

5577 — 1) Deduza a regra de CAUCHY para o levantamento de uma indeterminação da forma ∞/∞ .

$$\text{Calcule } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + \log x}{x^2 + \log x}.$$

2) Mostre que uma condição suficiente de convergência de $f(x)$ em $x=c$ é que $f'(x)$ seja crescente neste ponto.

Determine a e b por forma que a assíntota da curva representativa de $y = \frac{ax^2 + bx + \log x}{x}$

seja paralela a $y=x$ e passe pelo ponto $(1, 2)$.

$$\begin{aligned} \text{R: } 1) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} + \log x}{x^2 + \log x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} 2x + 1/x}{2x + 1/x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2} 2x^2 + 1}{2x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2(e^{x^2} 2x^3 + e^{x^2} 2x)}{4x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{x^2} x^2 + e^{x^2}) = +\infty. \end{aligned}$$

2) A assíntota da curva representativa de $y(x)$ e $y = ax + b$ e portanto terá de ser $\begin{cases} a = 1 \\ 2 = a + b \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1. \end{cases}$

II

5578 — 1) Demonstre que uma condição necessária e suficiente para que $f(x, y)$ (diferenciável) seja homogênea é que verifique a identidade de EULER.

Supondo que $f(x, y)$ (diferenciável) satisfaz à igualdade $f(tx, ty) = \varphi(t) f(x, y)$, prove que $f(x, y)$ é homogênea. Qual é o seu grau de homogeneidade?

2) Dada a tabela

x	$\sin x$
a	$\sin a$
$a+1$	$\sin(a+1)$

, escreva a

fórmula interpoladora de GREGORY-NEWTON com resto. Mostre que um limite superior do erro que se comete ao proceder a uma interpolação é 0,5.

R: 1) De $f(tx, ty) = \varphi(t) f(x, y)$ vem $f_x(tx, ty)x + f_y(tx, ty)y = \varphi'(t) f(x, y)$ e, fazendo $t=1$, $x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \varphi'(1) f(x, y)$. Esta última igualdade mostra que $f(x, y)$ é homogênea de grau $\varphi'(1)$.

$$2) \quad \sin x = \sin a + (x-a)[\sin(a+1) - \sin a] + \frac{\sin(\xi + \pi)}{2!} (x-a)(x-a-1).$$

$$\text{Ora } |R(x)| = \left| \frac{\sin(\xi + \pi)}{2!} (x-a)(x-a-1) \right| < \frac{1}{2!} (a+1-a)^2 = 0,5$$

III

5579 — 1) Demonstre que uma condição necessária para que a matriz A tenha inversa é que seja quadrada. Existindo inversa, prove que esta matriz é única.

Mostre seguidamente que a condição necessária e suficiente para que A tenha inversa é que seja regular.

2) Deduza a regra de Cramer para a resolução de um sistema de equações lineares possível determinado. Como pode utilizar a mesma regra para a resolução de um sistema possível indeterminado?

Enunciados e soluções dos n.ºs 5568 a 5579 de Fernando de Jesus

F. C. Porto — MATEMÁTICAS GERAIS — (Exame final)
— Cursos de Engenharia Civil e Química — Junho 1963.

Ponto n.º 1

I

5580 — Defina, com precisão, os seguintes conceitos utilizados no Curso:

1) — Complemento algébrico de um elemento de um determinante;

2) — Dimensão de um espaço vectorial.

3) — Limite (numérico) de uma sucessão real.

4) — Convergência uniforme de uma sucessão de funções [reais, da variável real, com o mesmo domínio].

5) — Parâmetros directores de uma recta.

6) — *Fracções simples* [numa indeterminada, sobre um corpo K de números].

7) — *Diâmetro e centro* de uma cónica.

8) — *Números de Rôlle* de uma equação [algébrica, inteira, de coeficientes reais].

II

5581 — 1 — a) Resolver o sistema de equações lineares (nas incógnitas x, y, z, t)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4t = 10 \\ 2x - y + z - t = 1 \\ 3x + y + 4z + 3t = 11 \\ -2x + 6y + 4z + 10t = 18 \end{cases}$$

b) Escrever o sistema anterior como igualdade de matrizes, uma das quais seja o produto de uma matriz conveniente pela matriz-coluna

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

2 — No espaço $K[X]$ dos polinómios numa indeterminada sobre um corpo K de números, considerar a correspondência $f \rightarrow f'$ que a cada polinómio $f \in K[X]$ associa o respectivo derivado $f' \in K[X]$: seja D essa correspondência.

a) Mostrar que D é um operador linear sobre $K[X]$.

b) Mostrar que, fixado um número natural n , a totalidade dos polinómios $f \in K[X]$ tais que $D^n f = 0$, constitui um subespaço vectorial de $K[X]$.

3 — Considerar a recta r , de equações cartesianas

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

e o ponto $A(1, -2, 0)$.

a) Determinar a equação cartesiana do plano que passa por A e é perpendicular à recta r .

b) Achar a distância do ponto A à recta r .

c) Determinar equações cartesianas da recta p , que passa por A , é perpendicular a r , e encontra esta recta.

(Eixos rectangulares)

4 — a) Calcular todos os valores do parâmetro real λ que tornam degenerada a cónica de equação

$$(1) \quad x^2 - y^2 + 2\lambda xy - 4\lambda x + \lambda^2 = 0$$

b) Para um valor não nulo de λ encontrado em a), determinar um ponto comum às rectas em que (1) degenera.

c) Determinar a polar da origem (das coordenadas) em relação à cónica associada a (1) no plano projectivo (supondo (1) não degenerada).

d) Mostrar que para todos os valores de λ admissíveis na alínea c), a polar aí encontrada passa por um ponto fixo do plano projectivo, que deverá ser determinado.

5 — Derivar as seguintes funções reais:

a) $|x - 1| \mid R$ (Desenhar o gráfico)

b) $\text{Arc tg } ch x \mid R$

c) $\log(1 + 2^x) \mid R$

6 — Seja $f(x) \mid I$ uma função real contínua num intervalo fechado $I = [a, b]$, $a < b$; designaremos por $\|f\|$ o máximo da função $|f(x)| \mid I$. (Leia-se: $\|f\|$ = norma de f).

Designaremos por $[f]$ a classe das funções reais contínuas em I , que diferem de f por uma constante, isto é, a classe das funções $\bar{f}(x) \mid I$ tais que, para todo o $x \in I$, é $\bar{f}(x) = f(x) + k$, com k constante real.

(Notar que o gráfico de cada função $\bar{f}$ pode deduzir-se do gráfico de f mediante uma translação).

a) Justificar a existência do máximo de $|f(x)| \mid I$.

b) Mostrar que sendo

$$\inf_{\bar{f} \in [f]} \|\bar{f}\| = 0$$

(isto é, sendo nulo o ínfimo do conjunto das normas de todas as funções $\bar{f}$ que constituem a classe $[f]$) então f é uma função constante.

F. C. Porto — MATEMÁTICAS GERAIS — (Exame final)
— Cursos de Engenharia Civil e Química — Junho 1963.

Ponto n.º 3

I

5582 — Defina os seguintes conceitos utilizados no Curso:

1) — *Elemento simples* do corpo $K(X)$ (das fracções racionais numa indeterminada sobre o corpo numérico K).

2) — *Vectores* (livres) *complanares*.

3) — *Majorante*, *minorante*, *supremo*, *ínfimo* de um

conjunto de números reais (convenientemente limitado).

4) — *Soma e resto de ordem n de uma série numérica real.*

5) — *Convergência pontual de uma série de funções, (reais, da variável real) com o mesmo domínio.*

6) — *Forma linear sobre um espaço vectorial.*

7) — *Superfície regrada. Exemplos.*

8) — *Direcção conjugada de um diâmetro; assintota de uma cónica.*

II

5583 — 1 — a) Escrever uma expressão geral dos complexos cujos afijos pertencem à circunferência de equação

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0.$$

Indicação: começar por re-escrever a equação, de modo a evidenciar o centro e o raio da circunferência.

b) Determinar, de entre esses complexos, o que tem módulo máximo.

2 — Considerar, no espaço vectorial real R^3 , os vectores:

$$u_1 = (2, 3, -1)$$

$$u_2 = (-1, 2, 0)$$

$$u_3 = (3, 0, 4)$$

a) Averiguar se esses vectores constituem uma base de R^3 .

b) Justificar a existência de um único operador linear A , sobre R^3 , tal que $A u_1 = e_1$, $A u_2 = e_2$, $A u_3 = e_3$, sendo $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$, e estudar a invertibilidade desse operador.

c) Indicar (justificando a resposta) o número de soluções da equação (na incógnita vectorial $x \in R^3$) $Ax = 0$.

3 — a) Determinar o lugar geométrico dos centros das circunferências

$$x^2 + y^2 + 2(1 - \lambda)x - 4\lambda^2 y - 1 - (1 - \lambda)^2 = 0$$

(onde λ é um parâmetro real arbitrário).

b) Classificar a linha obtida, e determinar os respectivos eixos de simetria.

4 — Classificar as seguintes séries reais:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{n!}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{\sqrt{n}}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)!}$$

5 — Determinar a equação cartesiana do cilindro, de geratrizes paralelas à recta

$$r \begin{cases} x - 3z = 1 \\ y = -2z \end{cases}$$

que admite como directriz a linha de equações

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7 \\ x - z = 1. \end{cases}$$

6 — a) Desenhar o gráfico da função real $G(x) | R$, onde $G(x)$ designa a distância do número real x ao mais próximo número inteiro.

b) Mostrar que é uniformemente convergente em R a série de funções reais

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(2^n \cdot x)}{2^n}.$$

c) Pondo, para cada $x \in R$,

$$H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G(2^n \cdot x)}{2^n},$$

mostrar que é contínua em R a função real $H(x) | R$.

Enunciados dos n.ºs 5580 a 5583 de A. Andrade Guimarães

NOTA — Na elaboração dos precedentes enunciados, teve-se em conta o facto seguinte, que fortemente condiciona, desde 1958, o ensino da cadeira de Matemáticas Gerais na Faculdade de Ciências do Porto, em virtude da carência de pessoal docente e salas de aula, tornou-se impossível proporcionar aos numerosíssimos alunos inscritos nessa cadeira (1450, no corrente ano lectivo) as duas aulas práticas por semana, prescritas por lei, sendo uma apenas dada em cada turma. (E mesmo assim, cada turma comporta por vezes 60 alunos).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

150 — MANUEL BALANZAT — El Numero Natural y sus Generalizaciones — Fascículo 1.º — Publicaciones de Matematicas y Fisicas. San Luis — 1953 — Argentina.

Trata-se do 1.º volume de uma obra originada pelos cursos que o autor professou na Faculdade de Ciências da Educação da Universidade Nacional de Cuyo desde 1943.

O autor quíz fazer, e conseguiu, um livro que pudesse servir como obra de consulta aos professores do ensino secundário que tanto necessitam conhecer com profundidade e rigor lógico a teoria dos números.

O fascículo que contém só as três primeiras partes das sete em que o autor dividiu o seu trabalho tem uma introdução histórica sobre o desenvolvimento do conceito de número, e método axiomático. O 1.º capítulo da 1.ª parte, desenvolve uma teoria elementar de conjuntos, tratando, simplesmente aquelas partes da teoria indispensáveis à boa compreensão e fundamentação da teoria, referindo-se convenientemente às operações sobre conjuntos, relações num conjunto e conjuntos ordenados. No capítulo 2.º estuda a *teoria geral das operações*, quer dizer a Álgebra Abstrata, mas só na medida em que as noções e desenvolvimentos introduzidos servem o estudo da teoria dos números que se faz no livro.

A Segunda Parte estuda, no capítulo III, a Teoria de PEANO; no capítulo IV a Teoria de DEDEKIND; no capítulo V, o número natural deduzido da teoria dos conjuntos finitos; no capítulo VI, as operações com um número finito de termos.

A Terceira Parte refere-se aos números inteiros e aos números racionais.

Nas partes restantes e que constam de fascículo que ainda não conhecemos, trata-se, segundo informa o autor no prefácio, do estudo dos números reais, complexos e hipercomplexos.

O livro é de uma clareza extraordinária e é um bom livro de consulta, onde os assuntos tratados o são por forma a esclarecer completamente a matéria estudada e onde não se presuppõe quaisquer conhecimentos especiais de matemática superior, sendo tratadas no próprio livro as que são necessárias ao desenvolvimento e estudo da teoria, como as de Álgebra Abstrata e Teoria dos Conjuntos.

É um livro que devia figurar na estante do professor do ensino secundário que deseja conhecer com segurança os fundamentos da aritmética e ter um bom texto de referência.

J. S. P.

151 — F. LE LIONNAIS — Les Grands Courants de la Pensée Mathématique — Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard — Paris.

A presente 2.ª edição do bem conhecido livro correnado e apresentado por F. LE LIONNAIS, é uma reprodução integral da 1.ª edição que saiu logo após a segunda grande guerra e teve então merecido sucesso. É constituído por uma série de artigos da autoria de vários matemáticos franceses que pretendiam dar então uma panorâmica das principais correntes do pensamento matemático. É um livro que se lê com agrado, quasi como um romance. Não é de facto nem um tratado nem um livro de filosofia da matemática, mas um livro ameno que consegue interessar e fornecer uma visão satisfatória, mesmo para o leigo, de alguns ramos da matemática quanto às ideias fundamentais que a estruturam.

Eis a lista de autores e de alguns artigos que compoem o livro:

A definição em Matemática — E. BOREL.

A arquitectura das Matemáticas — N. BOURBAKI.

A analogia em Matemática — R. DELTHEIL.

Simetria e dissimetria na Matemática e na Física — A. LAUTMAN.

Caminhos intuitivos que conduzem a alguns órgãos essenciais da Matemática — G. BOULIGAND.

O número natural e suas generalizações — M. FRECHET.

O último teorema de Fermat — T. GOT.

A História dos números misteriosos: π , e , C , i — P. DUBREIL.

O problema do infinito: transfinitos e alefas — H. EYRAND.

Do espaço a três dimensões aos espaços abstractos — M. FRECHET.

Viagem na quarta dimensão — A. SAINTE-LAGÜE.

Sobre a curvatura do espaço e a possibilidade de a conceber por meios elementares — R. THIRY.

Sobre a noção de função, artigos de: G. VALIRON, P. MONTEL, J. DESANTI, A. DENJOY, A. LENTIN, R. FORTET e P. SERVIEN.

Sobre a epopeia das matemáticas, artigos de: P. GERMAIN, P. BRUNET, E. CARTAN, Mme. M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. GODEAUX, L. PERRIN, J. DIEUDONNÉ, R. WAVRE, A. WEIL e R. GODEMENT.

Sobre a filosofia das matemáticas, artigos de: J. ULLMO, R. DUGOS, M. BOLL e J. REINHART, PAUL MOUY, P. LABERENNE, R. QUENEAU, L. BROGLIE, M. JANET, T. KAHAN, F. LE LIONNAIS, A. BUHL, A. SPEISER, H. MARTIN, M. ROY, M. LURITZ, J. CHAPELON, L. BRUNSCHVIG, G. BOULIGAND e J. DIEUDONNÉ.

J. S. P.

152 — BRONSTEIN, I. N. e SEMENDIAEV, K. A. — Aide-mémoire de mathématiques — Editores Eyrolles, Paris.

Trata-se de uma tradução francesa do livro russo *Spravochnik po matematike*, que, segundo os autores se destina a fornecer sob forma fácil os conhecimentos fundamentais de matemática necessários aos engenheiros e estudantes do ensino técnico superior. Não lhe falta, no entanto, o rigor compatível com o reduzido volume do livro e a extensão dos conhecimentos que pretende (e consegue) recordar.

Não se pode perder de vista que se trata, como o próprio título indica, de um repositório de definições, formulas e tabelas respeitantes aos mais importantes ramos da matemática, e nunca um tratado ou simples livro de estudo.

É sob esse aspecto um livro muito útil para quem necessita de rapidamente recordar uma formula, um processo de cálculo ou mesmo um teorema. Não é no entanto um livro teórico em que os teoremas venham demonstrados e as formulas deduzidas, mas apesar disso todos os assuntos tratados nos quais se incluem questões de Matemáticas Elementares, Algebra, Geometria Analítica, Cálculo Infinitesimal e Cálculo das Probabilidades, são-no por forma correcta e segura.

Um resumo do índice dá-nos indicação das principais questões abordadas: Tábuas de funções elementares e curvas representativas; cálculo aproximado; transformações idênticas; equações; complementos de álgebra; planimetria e estereometria; trigonometria rectilínea, esférica e hiperbólica; geometria analítica plana e no espaço; geometria diferencial; elementos de análise matemática, cálculo diferencial e integral, equações diferenciais, complementos de análise; cálculo vectorial; análise harmónica; princípios da teo-

ria das probabilidades e teoria dos erros; fórmulas empíricas e interpolação.

No final apresenta bibliografia referente a cada um dos capítulos mas trata-se de livros russos, portanto de difícil acesso aos nossos técnicos e estudantes visto que na sua maioria não estão traduzidos.

J. S. P.

153 — ALBERTO E SAGASTUME BERRA, GERMÁN FERNÁNDEZ — Álgebra y Cálculo Numérico — Editorial Kapelusz — Buenos Aires.

O livro em referência é um livro de texto para os cursos que os autores, professores da Universidade de La Plata, realizam na Faculdade de Ciências e Engenharia daquela Universidade, e pretende facultar ao aluno que se inicia uma sólida base de consulta e treino.

É um espesso volume de 710 páginas que trata sob uma forma clássica mas exaustiva quasi todos os capítulos da Álgebra e do cálculo numérico. Sob a forma de exposição adoptada o livro é rigoroso e completo mas usando forma clara e acessível como convém a um livro destinado ao ensino universitário dos primeiros anos. É um precioso livro de apoio e referência. Os títulos dos capítulos fornecem-nos uma breve ideia dos assuntos tratados:

Cap. I — O número inteiro. Cap. II — O número racional. Cap. III — O número real. Cap. IV — Logaritmos. Cap. V — O número complexo. Cap. VI — Combinatória; Binómio de Newton. Cap. VII — Séries numéricas. Cap. VIII — Aproximações numéricas. Cap. IX — Escalas e abacos cartesianos. Cap. X — Régua de cálculo. Cap. XI — Abacos de pontos alinhados. Cap. XII — Polinómios. Cap. XIII — Equações algébricas. Cap. XIV — Equações quadráticas, cúbicas e quárticas. Cap. XV — Noções sobre números algébricos; construções geométricas. Cap. XVI — Limites das raízes. Cap. XVII — Separação das raízes. Cap. XVIII — Aproximação das raízes. Cap. XIX — Interpolação. Cap. XX — Vectores e Espaços Vectoriais. Cap. XXI — Determinantes e matrizes. Cap. XXII — Sistemas de equações lineares. Cap. XXIII — Resolução numérica de sistemas de equações lineares.

O livro é, como referimos, um excelente livro de consulta que continuará sempre a servir o aluno. A sua boa bibliografia final faculta complementos de pormenor aos assuntos tratados.

J. S. P.

**154 — RUY MADSEN BARBOSA — Um curso moderno
Elementar de Análise Combinatória — Araquara
— São Paulo — Brasil — Preço 500 cruzeiros.**

Os nossos leitores já conhecem o Prof. Ruy Madsen Barbosa pela sua colaboração na nossa Revista. Professor da Universidade de Araquara tem-se dedicado a vários ramos da Matemática e em especial ao Cálculo das Probabilidades e Estatística — A sua tese de doutoramento versa precisamente sobre as Probabilidades como Algoritmo Demonstrativo do Cálculo Combinatório.

O presente livro apresenta o estudo da Análise Combinatória sob um aspecto moderno, baseado na Teoria dos Conjuntos. É um livro destinado ao ensino secundário, e portanto de nível elementar, onde as questões são tratadas com cuidados pedagógicos que levam muitas vezes a pôr de parte as demonstrações completas, mas de não simples apresentação, para se tratarem os assuntos sob uma forma intuitiva que não exclua rigor e correção. Algumas demonstrações são mesmo substituídas por simples justificações ou verificações, como convém tantas vezes no ensino ministrado a classes de iniciação.

Começa o livro por dar no Cap. I os elementos algébricos da Análise Combinatória definindo os factoriais e potências factoriais, os coeficientes binomiais, os números policotónicos e estudando as suas propriedades. No Cap. II trata do triângulo aritmético de Tartaglia, como o autor o denomina, reservando o nome de triângulo de Pascal para o triângulo aritmético generalizado. No Cap. III define dicotomias, combinações, permutações e arranjos a partir das noções de subconjunto e aplicação bijectora. Trata ainda neste capítulo das policotomias simples, simples rotuladas, ordenadas e ordenadas rotuladas, das subpolicotomias, cruzamentos e recobrimentos de um conjunto.

No Cap. IV, como preliminar para a determinação das fórmulas que permitem calcular o número de permutações, arranjos, combinações, policotomias e elementos de um cruzamento sucessivo de dicotomias, estuda as árvores e as regras básicas de contagem a usar no cálculo combinatório. A introdução do produto cartesiano de dois conjuntos e o estudo das árvores facilitam muito a compreensão por parte dos alunos dos problemas, por vezes delicados, da análise combinatória.

No Cap. V deduzem-se finalmente as fórmulas usadas no cálculo combinatório. No Cap. VI estuda as disposições circulares, permutações cíclicas, composição de permutações, permutações figuradas e inversões. A noção de grupo é aqui introduzida mostrando-se que as permutações formam um grupo que, em

geral, não é abeliano. No Cap. VII são apresentadas as noções de conjunto-depósito e cela, como preliminar para o tratamento das combinações e arranjos com repetição, cujas fórmulas são deduzidas em seguida. Trata ainda, aqui do problema das misturas, considerando como mistura todo o sub-conjunto de um conjunto-depósito. A seguir estuda os problemas dos Fermiões (Homenagem a Fermi), dos Bosões (designação derivada do nome do matemático Chandra Bose), dos Maxwells, e das partições e composições de números chamando partição simples de ordem k de um número n à representação de n sob a forma de soma k parcelas não nulas, e composição a uma partição ordenada. Os capítulos IX e X tratam dos desenvolvimentos polinomiais e finalmente o cap. XI expõe a dedução de algumas fórmulas de somas. Soma dos n primeiros números naturais, dos quadrados factoriais dos primeiros n números naturais, e da soma dos quadrados factoriais generalizados.

Pela descrição dos assuntos abordados se observa que o autor procurou dar rapidamente (o livro tem 184 páginas) uma visão de conjunto dos principais problemas que, actualmente, se estudam na Análise Combinatória. É uma visão elementar mas tanto quanto possível completa destas questões.

Trata-se de um livro útil para quem deseje iniciar-se nas formas actuais de introduzir no ensino a Combinatória. Uma excelente bibliografia no final de cada capítulo permite completar e esclarecer ampliando os conhecimentos fornecidos pelo livro.

O livro pode ser adquirido por intermédio da Comissão de Redação e Publicação da Faculdade de Ciências e Engenharia da Universidade de Araquara. C. P. 174 — Araquara.

J. S. P.

**REGISTO DE LIVROS RECEBIDOS PARA
RECENSÃO:**

La Mathématique Moderne à l'usage du Physicien et de l'ingénieur — por MARC BLANC-LAPIERRE — Editions Eyrolles. Paris.

Les Fonctions de la variable complexe — por A. KAUFMANN e R. DOURIAUX — Editions Eyrolles. Paris

Conjuntos ordenados y Ramificados — por RODOLFO A. RICABARRA — Instituto de Matematica, Universidad Nacional del Sur — Bahia Blanca.

Les systèmes avec ou sans attente et les processus stochastiques — por P. LE GALL — Dunod — Paris.

L I T E R A T U R A M A T E M Á T I C A R E C E N T E

Editor — GAUTHIER-VILLARS, Paris

Mémoires des Sciences Mathématiques

J. BASS — *Les fonctions pseudo-aléatoires.*

F. POLLACZEK — *Theorie analytique des problèmes stochastiques.*

C. TRAYNARD — *Fonctions abéliennes et fonctions Theta de deux variables.*

SAINT-GUILHEM — *Les Principes de l'analyse dimensionnelle.*

Cahiers Scientifiques

J. FAVARD — *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome III.*

Deuxième Congrès de l'Association Française de Calcul et de Traitement de l'Information.

BOURGNE et AZRA — *Écrits et mémoires mathématiques d'Erariste Galvis.*

MICHEL CARVALHO — *Monographie des Treillis et algèbre de Boole.*

MARKOUCHEVITCH — *Fonctions d'une variable complexe — Problèmes Contemporains.*

LINNİK — *Décomposition des lois de probabilités.*

Editor — MASSON ET C.^{ie}, Paris

P. GERMAIN — *Mécanique des Milieux Continus.*

J. PÉREZ — *Mécanique Physique.*

DURAND — *Solutions numériques des équations algébriques. Tome II.*

J. BASS — *Éléments de Calcul des Probabilités.*

HOCQUENGHEM et JAFFARD — *Mathématiques. Tome I.*

Editor — PRESSES UNIVERSITAIRES DE FRANCE

MICHEL DAVID — *Précis de Mathématiques.*

Editor — AKADÉMIAI KIADÓ — BUDAPEST

Deuxième Congrès Mathématique Hongrois.

F. RIESZ — *Oeuvres Complètes.*

MEDGYESSY — *Decomposition of Superpositions of Distribution Functions.*

Editor — WALTER DE GRUYTER, Berlin

P. LORENZEN — *Formale Logik.*

Editor — IZDATELSTVO AKADEMII NAUK SSSR — MOSKVA

LAWRENTJEW, JUSCHKEWITSCH, GRIGORJAN — *LEONHARD EULER.*

Editor — CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge

L. G. SLATER — *Confluent Hypergeometric Functions.*

D. G. NORTHOTT — *An Introduction to Homological Algebra.*

P. J. HILTON & S. WYLIE — *Homology Theory — An introduction to Algebraic Topology.*

E. A. MAXWELL — *Advanced Algebra, part I.*

SNELI & MORGAN — *New Mathematics — A unified course, I and II.*

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics

G. L. WATSON — *Integral Quadratic Forms.*

Editor — VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

M. A. NEUMARK — *Normierte Algebren.*

OTAKAR BORŮVKA — *Grundlagen der gruppoid-und gruppentheorie.*

Mathematische Monographien

GERHARD RINGEL — *Färbungsprobleme auf flächen und graphen.*

Mathematische Forschungsberichte

A. N. KOLMOGOROFF und W. M. TICHOMIROV — *Arbeiten zur Informationstheorie III.*

A. W. POGORELOW — *Einige untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im grossen.*

H. HORNICH — *Existenzprobleme bei linearen partiellen Differentialgleichungen.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1964 (4 números) 50 escudos

Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.º 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.º 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta

indicar o nome, a morada e o local de cobrança. As assinaturas são renovadas automaticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 15, da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40\$00
N.ºs 16 a 49, cada número	12\$50
N.º 50	60\$00
N.ºs 51 a 75 { cada número simples	17\$50
N.ºs 76 a 91 { " " duplo	35\$00
N.ºs 76-77	60\$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento
de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35\$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º - Esq.º - LISBOA - 2 — Telefone 369449
