GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXII N.° 82-83 JAN.-JUNHO 1961

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de *prévio* acordo entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

ANO XXII—N.º 82-83 GAZETA DE MATEMÁTICA JAN./JUNHO — 1961

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Variedade analítica real. Definição e exemplos.

por **Roberto Ramalho de Azevedo**

do Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife

1. Introdução.

Êste trabalho tem por objectivo familiarizar o leitor com a definição de variedade analítica real, através da apresentação de alguns exemplos, tratados com certo pormenor. É dirigido naturalmente àqueles que iniciam o estudo deste assunto. A idéia da presente nota surgiu numa das exposições de um Seminário, orientado pelo professor ALFREDO PEREIRA GOMES, sôbre Variedades Analíticas, realizado no 1.º semestre de 1959, no Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, como preparação para o estudo dos Grupos de LIE.

Adotaremos a definição de variedade analítica real baseada no conceito de carta, por nos parecer mais manejável e de compreensão mais rápida que a definição equivalente, apoiada sôbre a noção de feixe de funções, preferida por alguns autores.

Consideraremos conhecidas as noções fundamentais da Topologia Geral, bem como as estruturas vectorial e topológica de R^n, esta última definida pela métrica euclideana, com a qual R^n é um espaço separado, completo, conexo, localmente conexo e localmente compacto, mas não compacto. Tem sentido, entao, considerar em R^n as noções de função real de n variáveis reais, limite, continuidade, derivação parcial e direccional, diferencial, convergência de sucessões e séries, função analítica, etc., cuja conceituação se obtém mediante uma generalização natural dos conceitos homônimos para as funções reais de duas ou três variáveis, por demais conhecidos. Entretanto, por ser de especial importância no decorrer desta exposição, detalharemos o conceito de função analítica real num ponto a de R^n.

DEFINIÇÃO 1. *Diz-se que a função real* f, *definida em* R^n, *é* analítica *num ponto* $a \in R^n$, *se existe uma vizinhança* X *de* a *tal que, para qualquer ponto* $x \in X$, *se possa escrever* f(x) *como a soma de uma série de* TAYLOR *a* n *variáveis, isto é:*

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} d^i f(a)$$

onde:

$$d^i f(a) = \left[\sum_{j=1}^{n} (x_j - a_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right]^i f(a)$$

e:

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad a = (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

Convém salientar que a analiticidade, bem como os demais conceitos a que nos referimos acima são *locais,* no sentido de que são definidos na vizinhança de um ponto. A importância dêstes conceitos conduz-nos à tentativa de dar-lhes um sentido em espaços topológicos mais gerais que o R^n, mas que se comportam *localmente* como o espaço R^n. Veremos, no que segue, qual o instrumento adequado para êste mistér e nos concentraremos especialmente na noção de analiticidade, o que nos conduzirá à definição de variedade analítica real.

2. Variedade Topológica Real.

Consideremos um espaço topológico E (1) e seja U um aberto de E. Seja α um homeomorfismo de U sôbre um aberto X de R^n. Chama-se *carta de* U e denota-se por (α, U) ao par composto do homeomorfismo α e do conjunto aberto U. Seja p um ponto qualquer de E. Diz-se que (α, p) é uma *carta do ponto* p se existe uma vizinhança U de p tal que (α, U) é uma carta de U. O inteiro positivo n é a dimensão da carta.

Tomemos o ponto $p \in U \subset E$ e suponhamos que $\alpha(p) = x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$. Os números reais $x_1, x_2, \cdots, x_n$ se dizem as *coordenadas* de p na carta (α, U). Êste é um primeiro exemplo de uma noção do espaço R^n que se «transporta» para o espaço topológico E por meio do conceito de carta. Se p é um ponto genérico de U, êle será função de suas coordenadas, no sentido de que a cada ponto p corresponde um conjunto ordenado de n números reais, e reciprocamente. Esta correspondência define o que se chama um *sistema de coordenadas* do aberto U na carta (α, U). É claro que a cada carta de U corresponde um sistema de coordenadas em U, e recìprocamente.

Diz-se que um espaço topológico E é *localmente euclideano em* p se existe uma carta de p.

(1) No sentido de Bourbaki, «Topologie Genérale, Chap. 1».

Estamos agora em condições de definir uma variedade topológica real, primeiro estágio a considerar na definição de uma variedade analítica real.

Definição 2. *Uma variedade topológica real* T *é um espaço topológico separado e conexo, localmente euclideano em cada um de seus pontos.*

Cada ponto de T possui uma carta, isto é, cada ponto de T possui uma vizinhança homeomorfa a um aberto de R^n. Estas vizinhanças cobrem o espaço topológico considerado; diz-se então que a família das cartas sôbre T cobre T. Uma família de cartas que cobre um espaço topológico chama-se um *atlas* dêste espaço. Temos pois a:

Definição 2'. *Uma variedade topológica real* T *é um espaço topológico separado e conexo munido de um atlas.*

Prova-se que todas as cartas de um mesmo ponto p de uma variedade topológica real têm a mesma dimensão (2) Êste número se chama a *dimensão da variedade em* p.

Como T é um espaço topológico conexo, a dimensão da variedade é a mesma em todos os seus pontos. Com efeito, sejam U_i, $i = 1, 2, \cdots, m$ subconjuntos de T tais que cada U_i seja constituido por todos os pontos nos quais a variedade tenha dimensão i. Ora êstes conjuntos são abertos, pois se $p \in U_i$, então existe uma vizinhança de p contida em U_i, pela definição de carta de um ponto de uma variedade. Mas, sendo T conexo, não pode ser a reunião de abertos disjuntos não vazios. Logo, há apenas um dos conjuntos U_i que é não vazio, o que demonstra nossa asserção.

Diz-se que êste número comum a todos os pontos da variedade T é a *dimensão de* T.

(2) Ver Lefschetz, S., «Introduction to Topology», Princeton, pg. 124.

Um exemplo simples de variedade topológica real de dimensão 2 é o conjunto S_2 dos pontos de uma superfície esférica munido da topologia induzida pela de R^3, que lhe confere uma estrutura de espaço topológico separado e conexo. Além disso, S_2 é localmente euclideano em cada um de seus pontos; esta afirmação será comprovada adiante quando explicitarmos o atlas. Entretanto pode ver-se intuitivamente desde já que S_2 é uma variedade topológica real. Com efeito, se retirarmos de S_2 um semi-meridiano qualquer (incluindo os pontos extremos), pode deformar-se de uma maneira bicontínua e biunívoca (sem rupturas nem superposições) a parte restante de S_2 (que é um conjunto aberto na topologia indicada acima) de modo a obter um aberto do plano R^2; anàlogamente, se retirarmos de S_2 um semi-círculo equatorial (incluindo os pontos extremos) que não intercepte o semi-meridiano retirado antes, pode efectuar-se também uma deformação homeomórfica da parte restante de S_2 num aberto de R^2.

Impossível é transformar «globalmente» toda a superfície esférica num aberto de R^2 sem efetuar rupturas ou superposições. Basta meditar na impossibilidade de construir uma carta geográfica plana de toda a superfície da Terra.

Exige-se nas definições 2 e 2′ que o espaço topológico subjacente a uma variedade topológica real seja separado afim de evitar certos casos patológicos (³).

No exemplo da superfície esférica de há pouco, os pontos que não pertencem a nenhum dos dois semi-círculos máximos retirados de cada vez têm, em cada uma das cartas consideradas, coordenadas distintas. Vejamos como se relacionam estas coordenadas ou, em outras palavras, estudemos o problema da transformação de coordenadas em uma variedade topológica.

Consideremos, pois, as cartas (α, U) e (β, V) das vizinhanças U e V de um ponto fixo p da variedade topológica real T e seja q um ponto genérico de $W = U \cap V$. As restrições (α, W) e (β, W) das cartas acima definem, cada uma, um sistema de coordenadas para os pontos q de W.

Ponhamos:

$$\alpha(q) = x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\beta(q) = y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$$

onde $x \in X \subset R^n$ e $y \in Y \subset R^n$. Esta situação vem descrita na figura 1.

Seja $\Phi : X \to Y$ uma aplicação diferenciável tal que: $y = \Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ e consideremos as aplicações componentes de Φ, que são funções reais diferenciáveis de n variáveis reais:

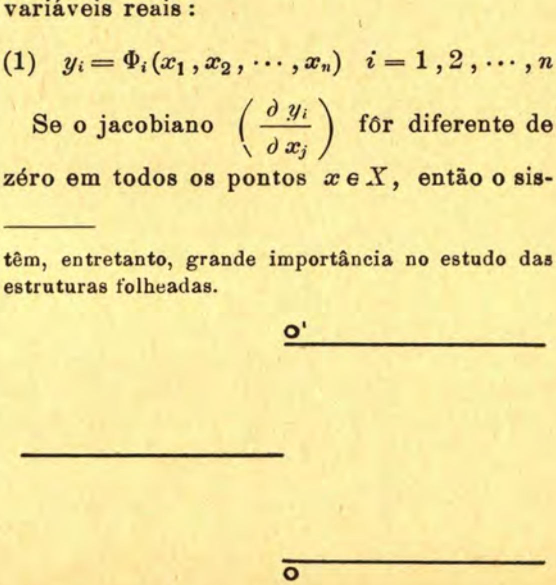
$$(1) \quad y_i = \Phi_i(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

Se o jacobiano $\left(\dfrac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)$ fôr diferente de zéro em todos os pontos $x \in X$, então o sis-

(³) Veja-se, por exemplo, o caso da «ramificação simples», em Reeb, G., «Estruturas folheadas», Notas de Matemática, n.º 12, Rio de Janeiro, pg. 3.

Chama-se ramificação simples ao espaço quociente $\dfrac{E \cup E'}{\rho}$, onde E e E' são dois exemplares de R e ρ é a relação de equivalência que identifica os pontos dos abertos $U = \{x \in E\,;\ x < 0\}$ e $U' = \{x' \in E'\,;\ x' < 0\}$. Os pontos de abcissa nula não são separados (figura ao lado).

As variedades topológicas reais não separadas têm, entretanto, grande importância no estudo das estruturas folheadas.



tema (1) acima é inversível e podemos escrever:

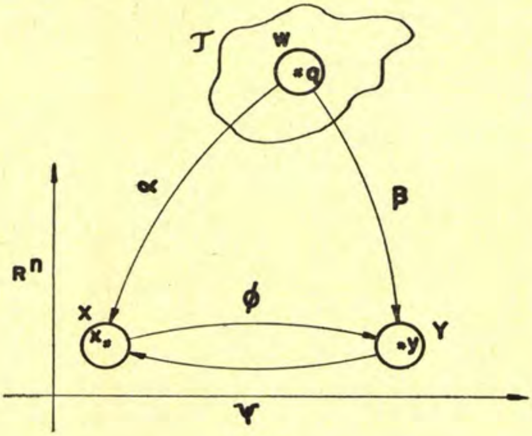


Fig. 1

(2) $x_i = \Psi_i(y_1, y_2, \cdots, y_n) \quad i = 1, 2, \cdots, n$

ou ainda que:

$$x = \Psi(y)$$

onde $\Psi : Y \to X$ é uma aplicação diferenciável ([4]).

Dessa maneira, Φ e Ψ são homeomorfismos diferenciáveis inversos um do outro e temos:

$$\alpha = \Psi \circ \beta \quad \text{e} \quad \beta = \Phi \circ \alpha$$

ou:

$$\Phi = \beta \circ \alpha^{-1} \quad \text{e} \quad \Psi = \alpha \circ \beta^{-1}.$$

Transportando para a variedade topológica T êstes resultados, diremos que os sistemas de equações (1) e (2) são as fórmulas de transformação de coordenadas na variedade, correspondentes às cartas (α, W) e (β, W).

3. Variedade Analítica Real.

Seja $p \in T$ e seja U uma vizinhança de p em T na qual estão definidos os homeomorfismos α e β de T em R^n. Diremos que as cartas (α, U) e (β, U) são *analiticamente relacionadas no ponto* $p \in U$ se as funções reais Φ_i e Ψ_i das equações (1) e (2) acima são funções analíticas respectivamente em $x = \alpha(p)$ e $y = \beta(p)$.

Quando as duas cartas são analíticamente relacionadas em todos os pontos em que ambas são definidas, dizem-se *analíticamente relacionadas*. Por abuso de linguagem, diz-se ainda que duas cartas são analiticamente relacionadas se não existe nenhum ponto de T em que sejam ambas definidas.

Usaremos a notação $(\alpha R \beta)_p$ para indicar que as cartas (α, U) e (β, U) são analíticamente relacionadas em p. Verifica-se sem dificuldade que R é uma relação de equivalência.

Chama-se *família analítica de cartas* àquela em que duas cartas quaisquer são analiticamente relacionadas. Um *atlas analítico* sôbre T é uma família analítica de cartas que cobre T. Diz-se que um atlas analítico sôbre T é *maximal* se qualquer carta sôbre T que é analiticamente relacionada a uma carta qualquer do atlas pertence ao atlas.

Definição 3. *Uma variedade analítica real é uma variedade topológica real cujo atlas é analítico e maximal.*

A *dimensão da variedade analítica* é a mesma que a da variedade topológica subjacente ([5]).

Se em vez de R^n, tivéssemos escolhido C^n, teríamos definido as variedades analíticas complexas. Outrossim, poderíamos ter definido as variedades p-vêzes ou indefinidamente diferenciáveis substituindo, em tudo que foi dito, a palavra *analítico* por qualquer

([4]) Ver Buck, C., «Advanced Calculus», Mc. Graw Hill, pg. 216.

([5]) Para as variedades analíticas reais, a demonstração de que todas as cartas de um mesmo ponto da variedade têm a mesma dimensão se faz directamente; ver por exemplo Cohn, P., «Lie Groups», Cambridge, pg. 12.

uma dessas. Convém observar que todos os exemplos que daremos a seguir de variedades analíticas serão, em particular, exemplos de variedades diferenciáveis (indefinidamente) pois uma função analítica é, a fortiori, indefinidamente diferenciável.

Dada uma variedade topológica, é muito difícil e por vêzes impossível exibir um atlas maximal sôbre esta variedade. Afim de remover êste obstáculo, demonstraremos a seguir um Teorema e seu Corolário que permitirão estabelecer uma correspondência biunívoca entre atlas analíticos e variedades analíticas, de modo que, dada uma variedade analítica, se possa falar no atlas desta variedade.

TEOREMA. *Seja* T *uma variedade topológica real munida de um atlas analítico* A. *Então existe um único atlas analítico maximal que contém* A.

Seja A' o conjunto de todas as cartas sôbre T analíticamente relacionadas a cada carta de A. Mostraremos que A' é o atlas procurado.

a) A' é um atlas analítico. Em primeiro lugar, é evidente que $A' \supset A$, de modo que A' cobre T. Sejam (α_1, U) e (α_2, V) duas cartas quaisquer de A' e seja $W = U \cap V$. Se W é vazio, as cartas são analíticamente relacionadas por definição. Caso contrário, seja $p \in W$. Como W é aberto, é uma vizinhança de p e, como A cobre T há uma carta (β, W) de p que pertence a A. Da definição de A' segue-se que $(\alpha_1 R \beta)_p$ e $(\alpha_2 R \beta)_p$, donde $(\alpha_1 R \alpha_2)_p$ por ser R uma relação de equivalência. De modo que as cartas (α_1, U) e (α_2, V) são analíticamente relacionadas num ponto qualquer p de W. Logo, o atlas A' é analítico.

b) A' é maximal. Seja (ρ, U) uma carta que é analíticamente relacionada a cada carta de A'. Como $A' \supset A$, (ρ, U) é analíticamente relacionada a cada carta de A e portanto pertence a A'.

c) A' é único. Seja A'' outro atlas analítico maximal contendo A. Então toda carta de A'' seria analíticamente relacionada a cada carta de A e pertenceria portanto a A'. Donde $A'' \subset A'$. Do mesmo modo se verificaria que $A' \subset A''$, logo $A' = A''$ e a unicidade está provada.

COROLÁRIO. *Sejam* A_1 *e* A_2 *dois atlas analíticos sôbre a variedade analítica* M. *Então há um atlas analítico maximal contendo* A_1 *e* A_2, *se e só se, para cada ponto* $p \in M$, *há uma carta de* A_1 *que é analíticamente relacionada em* p *a uma carta de* A_2.

A condição é necessária: com efeito, se existe o atlas A' nas condições do corolário, então cada carta de A' será analíticamente relacionada a todas as cartas de A_1 e de A_2, de modo que as cartas de A_1 e de A_2 serão analíticamente relacionadas.

A condição é suficiente: se para cada ponto $p \in M$, há uma carta de A_1 que é analíticamente relacionada a uma carta de A_2, então por ser R uma relação de equivalência, toda carta de A_1 é analíticamente relacionada a todas as cartas de A_2 e portanto o atlas A'', constituido por todas as cartas de A_1 e por todas as cartas de A_2 é analítico. Logo, pelo teorema anterior, existe um atlas analítico maximal único A' contendo A'', isto é, contendo A_1 e A_2 e o corolário está demonstrado.

Tendo em mente êstes resultados, podemos formular a seguinte

DEFINIÇÃO 3'. *Uma variedade analítica real é uma variedade topológica real munida de um atlas analítico.*

4. Exemplos de Variedades Analíticas Reais.

I) O espaço R^n ou qualquer um de seus subconjuntos abertos, evidentemente.

II) Um ponto ou um espaço discreto são variedades analíticas reais de dimensão zéro.

III) As curvas regulares no plano são variedades analíticas reais de dimensão 1. Estudemos em particular o caso da elipse de equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, com a topologia induzida pela topologia ordinária do plano. Há um atlas, a saber, a família das cartas abaixo:

$$(pr_x, \widehat{A'BA}), (pr_x, \widehat{A'B'A}),$$
$$(pr_y, \widehat{BAB'}), (pr_y, BA'B'),$$

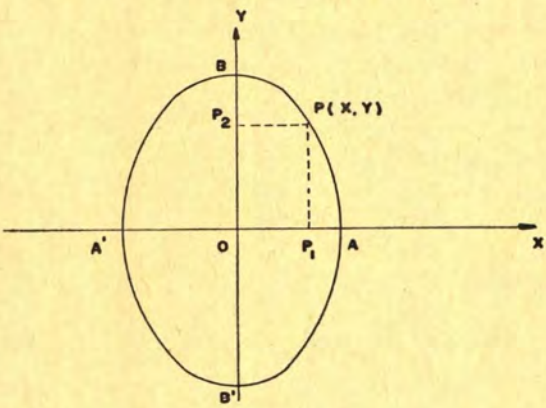


Fig. 2

onde pr_x e pr_y representam as projecções ortogonais sôbre os eixos OX e OY respectivamente; os arcos indicados da elipse são considerados sem os extremos, de modo que são conjuntos abertos na topologia escolhida. Nestas condições pr_x e pr_y são homeomorfismos de abertos da elipse sôbre abertos de R.

Vejamos que êste atlas é analítico; para isso, verifiquemos apenas que a 1.ª e a 3.ª cartas são analíticamente relacionadas, pois para as outras o procedimento será análogo. Fixemos idéias sôbre o ponto P da figura 2. Como $pr_x P = P_1$ e $pr_y P = P_2$, o ponto P terá por coordenadas x na carta $(pr_x, \widehat{A'BA})$ e y na carta $(pr_y, \widehat{BAB'})$. Na vizinhança $\widehat{AB}$ do ponto P, a equação da elipse nos fornece as relações:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},\ 0<x<a$$

e

$$x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2},\ 0<y<b,$$

que são funções analíticas de seus argumentos em $\widehat{AB}$.

IV) As curvas e superfícies regulares do espaço ordinário são variedades analíticas reais, de dimensões 1 e 2 respectivamente. Tomemos a superfície cilindrica de revolução de raio unitário da figura 3, cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x=\cos w \\ y=\operatorname{sen} w \\ z=z \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \leqq w < 2\pi \\ -\infty < z < +\infty. \end{cases}$$

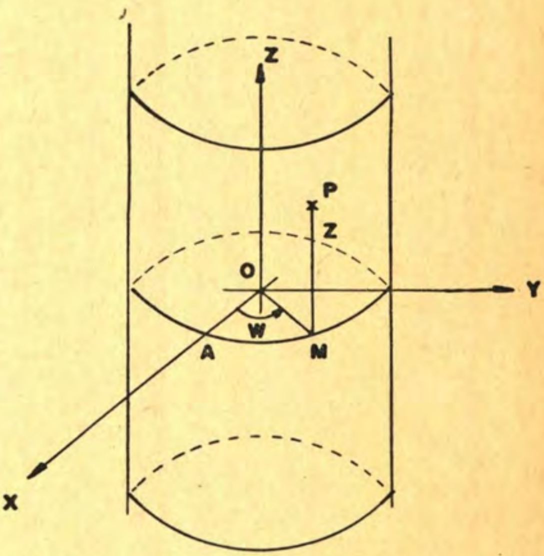


Fig. 3

É evidente que a superfície cilíndrica não se pode aplicar toda inteira sôbre o plano sem sofrer rupturas ou superposições. Entretanto isto pode ser obtido localmente, da maneira que indicaremos a seguir.

Partiremos uma geratriz da superfície cilíndrica, aquela que passa pelo ponto A. Então o restante da superfície, que é um conjunto aberto na topologia induzida sôbre ela pela topologia ordinária do espaço R^3 pode ser transformado homeomorficamente sôbre um aberto do plano (w, z), w medido em radianos, como indica a figura 4. Nesta primeira carta, as coordenadas do ponto P, indicado na figura 3, seriam:

$$w_1 = w \quad \text{e} \quad z_1 = z.$$

Fig. 4

Obteriamos uma segunda carta, retirando da superfície cilíndrica uma outra geratriz, por exemplo, a geratriz oposta àquela que passa pelo ponto A; o restante da superfície seria transformado pelo homeomorfismo definido por:

$$w_2 = w - \pi \quad \text{e} \quad z_2 = z$$

num aberto do plano (w, z), indicado na figura 5.

Estas duas cartas constituem um atlas pois cobrem a superfície cilíndrica e são além disso analiticamente relacionadas, pois $w_2 = w_1 - \pi$ e $z_2 = z_1$ são funções analíticas, assim como suas inversas $w_1 = w_2 + \pi$ e $z_1 = z_2$.

V) Seja Z_2 o conjunto de todos os pontos do plano cujas coordenadas são números inteiros e consideremos o conjunto quociente $T^2 = R^2 / Z^2$, obtido de R^2 por identificação de todos os pontos do plano cujas coordena-

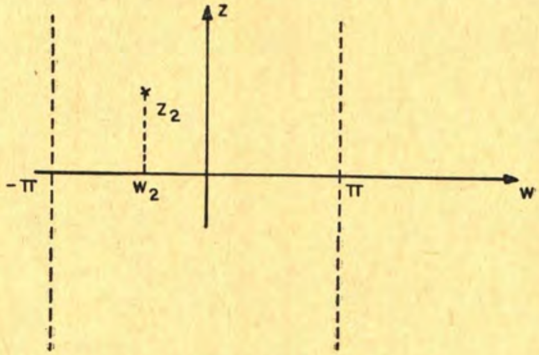


Fig. 5

das diferem por números inteiros. Na figura 6, todos os pontos marcados com um x se identificam ao ponto P do interior do quadrado de lado unitário $OABC$; o ponto P será escolhido como elemento representativo da classe de equivalência a que pertence. Por outro lado, escolheremos como elementos representativos das classes de equivalência dos pontos cujas abcissas são números inteiros aquêles situados sôbre o lado OA e dos pontos de ordenadas inteiras aquêles situados sôbre o lado OC. Dêsse modo o conjunto dos pontos do plano definido por $0 \leqq x < 1$ e $0 \leqq y < 1$ contém os elementos

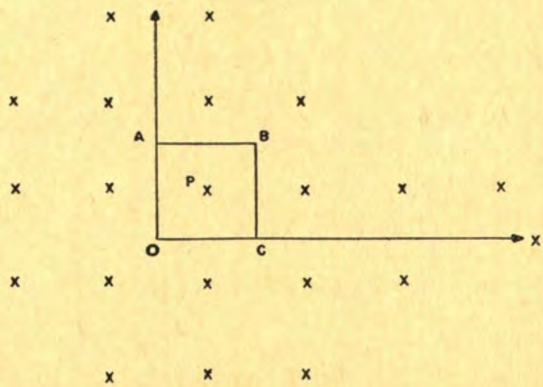


Fig 6

representativos de todas as classes de equivalência de R^2, módulo Z^2. Materialmente, concretiza-se T^2 tomando um quadrado de papel e efectuando as dobras indicadas nas figuras 7 a, 7 b e 7 c.

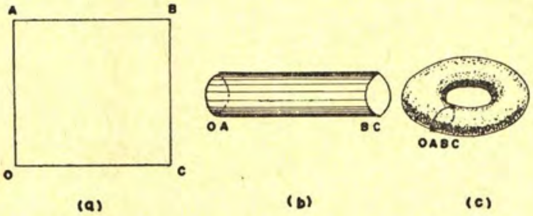


Fig. 7

A superfície obtida é, pois, o tóro ordinário cujas equações paramétricas são (ver figura 8):

$$\begin{cases} x = (R - \cos v) \cos u \\ y = (R - \cos v) \operatorname{sen} u \\ z = \operatorname{sen} u \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} 0 \leqq u < 2\pi \\ 0 \leqq v < 2\pi \end{cases}$$

onde R é a distância de O ao centro de qualquer das secções circulares obtidas por planos que contêm OZ.

Se se introduz em T^2 a topologia quociente, teremos um espaço topológico separado e conexo, que se chama tóro a duas dimensões (o tóro a 1 dimensão $T = R/Z$ é o círculo de raio igual a 1).

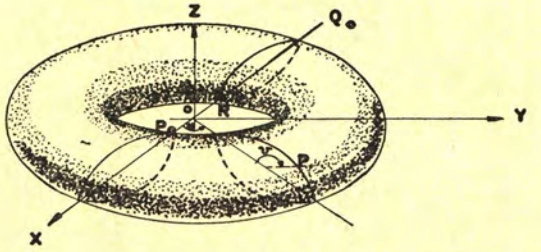


Fig. 8

Um conjunto aberto em T^2 é a imagem, pela aplicação canónica, da reunião de um conjunto aberto U de R^2 e de todos os outros conjuntos de R^2 cujos pontos possuem coordenadas que diferem das coordenadas dos pontos de U por números inteiros (ver figura 9).

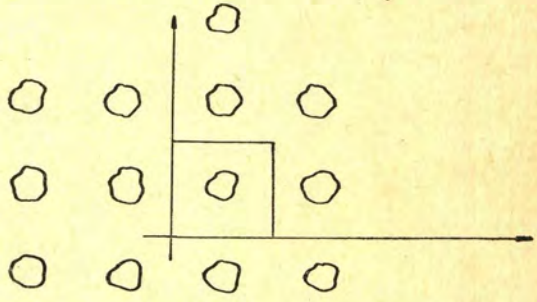


Fig. 9

Mostremos que T^2 é uma variedade analítica real de dimensão 2. Para isso explicitemos as cartas. A primeira seria obtida retirando do tóro (ver figura 8) uma circunferência vertical e outra horizontal passando por P_0, com o que a parte restante do tóro (que é um aberto na topologia quociente) seria transformada num aberto do plano (u, v) pelo homeomorfismo $u_1 = u$ e $v_1 = v$ (ver figura 10). As coordenadas do ponto P (ver figuras 8 e 10) seriam u_1 e v_1 nesta carta.

Obteríamos uma outra carta se retirássemos do tóro a circunferência horizontal e a vertical que passam por Q_0 e transformássemos

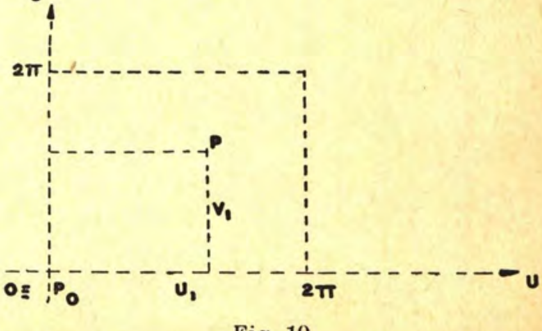


Fig. 10

o aberto resultante num aberto do plano (u, v), indicado na figura 11, por meio do homeomorfismo: $u_2 = u - \pi$ e $v_2 = v - \pi$.

Estas duas cartas formam um atlas sôbre T^2 pois é evidente que cobrem T^2 e são analìticamente relacionadas desde que as funções: $u_2 = u_1 - \pi$ $v_2 = v_1 - \pi$ bem como suas inversas $u_1 = u_2 + \pi$ e $v_1 = v_2 + \pi$ são funções analíticas.

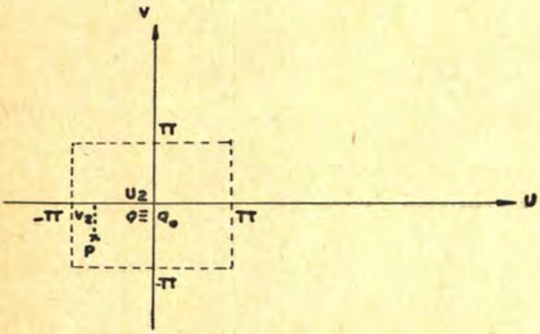


Fig. 11

VI) Um outro exemplo interessante de variedade analítica bidimensional é a faixa de MOEBIUS, que é o conjunto M, definido por:

$M = \{(x, y) \in R^2 ; -1 \leq x \leq 1, \; -1 < y < 1,$ onde se identificaram os pontos $(-1, y)$ aos pontos $(1, -y)\}$.

O que corresponde a considerar o quadrado $A B A' B'$ da figura 12 e nêle identificar os pontos A, B', C, etc., aos pontos A', B, C', etc, respectivamente.

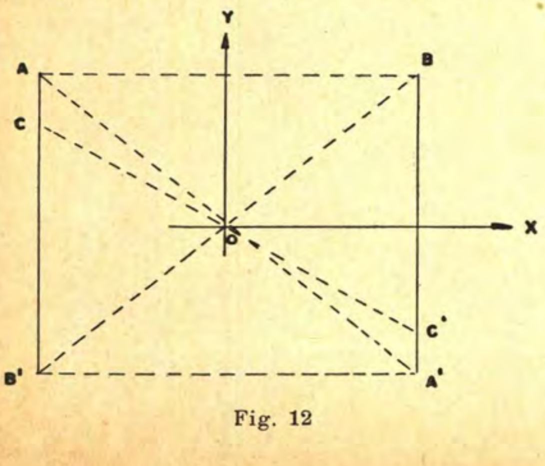


Fig. 12

Uma faixa de MOEBIUS se obtém, «concretamente» tomando-se um quadrado de papel e efectuando as deformações indicadas nas figuras 13 *a*, 13 *b*, e 13 c, A figura 13 *b* indica uma torsão efetuada de molde a inverter dos pontos A' e B e a figura 13 c é a superfície (faixa de MOEBIUS) que se obtém da identificação (colagem) dos lados $A B'$ e $A' B$ de tal maneira que A coincida com A' e B' com B. A linha l em 13 c indica a posição ocupada pelos lados $A B'$ e $A' B$ depois de identificados e a linha l' em 13 c indica o conjunto dos pontos correspondentes aos pontos de abcissa nula da figura 12. Se considerarmos a topologia induzida pela topologia ordinária do espaço R^3, observe-se que, ao retirar a linha l ou a linha l', obtém-se de cada vez um aberto na faixa de MOEBIUS. Se em cada um dos casos, desenrolarmos o aberto que resulta após a retirada de uma ou outra dessas linhas e o

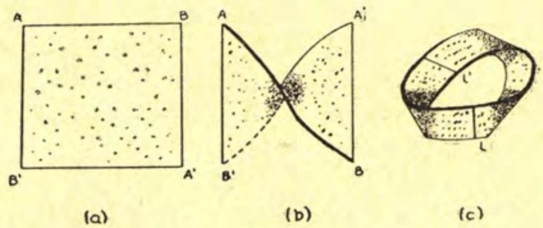


Fig. 13

aplicarmos sôbre o plano, teremos ainda um aberto do tipo indicado na figura 14.

As cartas estão indicadas abaixo:

a) Para $x \neq 1$ e $x \neq -1$, o que corresponde a retirar a linha l, temos: $\begin{cases} x_1 = x \\ y_1 = y \end{cases}$

b) Para $a \neq 0$, o que corresponde a retirar l', temos:

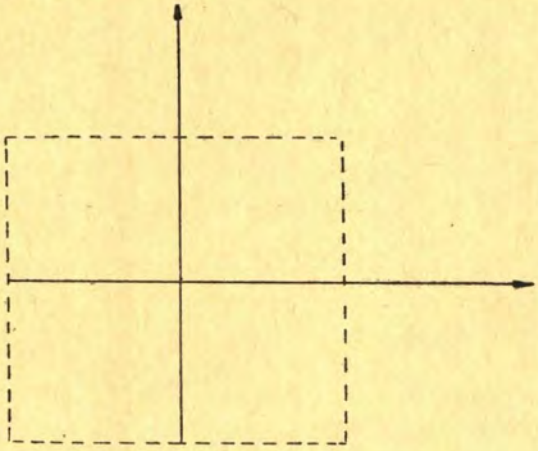


Fig. 14

$$\begin{cases} \text{se } x > 0 \begin{cases} x_2 = x - 1 \\ y_2 = y \end{cases} \\ \text{se } x < 0 \begin{cases} x_2 = x + 1 \\ y_2 = -y . \end{cases} \end{cases}$$

Donde:

$$\text{se } x > 0 \begin{cases} x_2 = x_1 - 1 \\ y_2 = y_1 \end{cases}$$

$$\text{e se } x < 0 \begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ y_2 = -y_1 \end{cases}$$

e estas funções, bem como suas inversas, são analíticas, com o que M é uma variedade analítica real bidimensional.

VII) Trataremos agora do espaço projectivo a 2 dimensões P_2, definido como o espaço quociente $P_2 = R_3^* / \Delta$, onde

$$R_3^* = R^3 - \{0\}$$

(espaço R^3 privado da origem) e Δ é a relação de equivalência seguinte: «se $x, y \in R_3^*$, x é equivalente a y (módulo Δ) se existe um número real λ tal que $y = \lambda x$».

Geometricamente, as classes de equivalência (módulo Δ) são retas de R^3, passando pela origem, mas destituidas dêste ponto. Ora, estas retas são caracterizadas pelos seus cossenos diretores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ou por números proporcionais a êstes, seus parâmetros directores x_1, x_2, x_3. Este sistema de parâmetros diretores de uma reta se pode identificar ao sistema de coordenadas homogêneas de um ponto do plano (observe-se que x_1, x_2 e x_3 não podem ser simultâneamente nulos pois a origem foi suprimida) e as retas do plano coordenado $x_1 O x_2$ para $x_3 = 0$) se identificam aos pontos do infinito do plano. Somos conduzidos por esta construção ao plano projectivo conhecido. Os abertos de P_2, na topologia quociente, são as imagens, pela aplicação canônica, de superfícies cônicas S, de vértice na origem e circunscrevendo abertos U de R_3^* (ver figura 15).

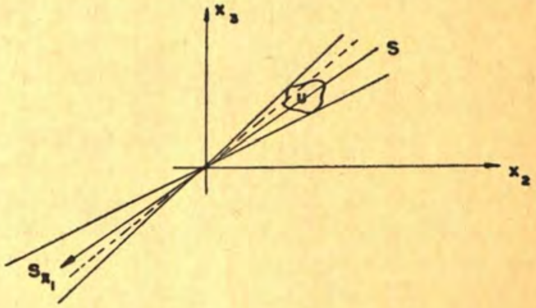


Fig. 15

Consideremos os abertos U, V e W de R_3^*, definidos por:

$$U = \{x \in R_3^* ; x_1 \neq 0\}, \ V = \{x \in R_3^* ; x_2 \neq 0\},$$
$$W = \{x \in R_3^* ; x_3 \neq 0\}$$

e sejam $\Phi(U)$, $\Phi(V)$ e $\Phi(W)$ as imagens de U, V e W pela aplicação canônica $\Phi : R_3^* \to P_2$. Êstes três conjuntos formam uma cobertura de P_2 e um atlas é obtido se pusermos:

$$\text{para } \Phi(U) \begin{cases} X_1 = \dfrac{x_2}{x_1} \\ Y_1 = \dfrac{x_3}{x_1} \end{cases},$$

$$\text{para } \Phi(V)\begin{cases} X_2 = \dfrac{x_1}{x_2}, \\ Y_2 = \dfrac{x_3}{x_2} \end{cases}$$

$$\text{para } \Phi(W)\begin{cases} X_3 = \dfrac{x_1}{x_3} \\ Y_3 = \dfrac{x_2}{x_3}. \end{cases}$$

Observemos que as funções $X_1 = \dfrac{1}{X_2}$ e $Y_1 = \dfrac{Y_2}{X_2}$ são analíticas para os pontos de $\Phi(U) \cap \Phi(V)$. Conclusão análoga obteríamos por consideração dos demais pares de cartas e P_2 é, pois, uma variedade analítica bidimensional.

VIII) Afastemo-nos dos exemplos geométricos e consideremos o conjunto $M(n, R)$ das matrizes quadradas de ordem n sôbre R. Há uma correspondência biunívoca entre $M(n, R)$ e R^{n^2} dada explicitamente por $\alpha_{ij} \longleftrightarrow x_{i+(j-1)n}$, que faz corresponder à matriz $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ o ponto de R^{n^2} cujas coordenadas são $(x_1, x_2, \cdots, x_{n^2})$. Introduz-se uma topologia em $M(n, R)$ exigindo que esta correpondência seja um homeomorfismo, o que equivale, por exemplo, a definir a distância de $(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ a $(\beta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ $\sqrt{\sum_{i,j} (\alpha_{ij} - \beta_{ij})^2}$. Nestas condições, $M(n, R)$ é, de facto, uma variedade analítica real de dimensão n^2.

IX) Estudemos agora uma aplicação do corolário da pg. 5. Para isso, consideremos a superfície esférica de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ em R^3 e definamos dois atlas analíticos sobre ela para em seguida concluir que êstes dois atlas definem a mesma estrutura de variedade analítica. A topologia da superfície esférica será sempre a topologia induzida pela de R^3.

Seja $P(u, v)$ um ponto genérico da superfície esférica onde u e v são parâmetros representando respectivamente a longitude e a latitude do ponto P, contadas a partir de P_0 (ver figura 16). As equações paramétricas da superfície esférica são pois:

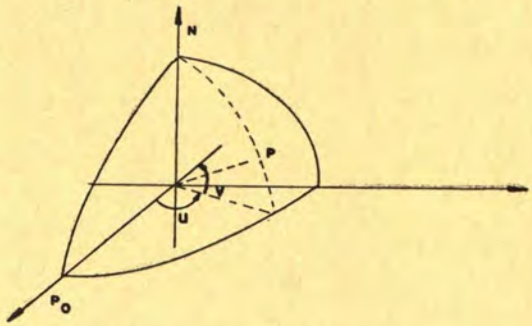


Fig. 16

$$\begin{cases} x = \cos v \cos u \\ y = \cos v \,\text{sen}\, u, \\ z = \text{sen}\, v \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} -\pi/2 \leq v \leq \pi/2 \\ 0 \leq u < 2\pi \end{cases}$$

onde os polos norte e sul têm por coordenadas respectivamente $N(0, \pi/2)$ e $S(0, -\pi/2)$. Esta restrição garante a biunivocidade da correspondência entre pontos da superfície esférica e pares de valores de u e v.

Definamos um primeiro atlas composto das duas cartas (α_1, U_1) e (α_2, U_2). U_1 é o que resta da superfície esférica quando dela se retira um semi-meridiano fechado (com os extremos) passando por P_0 e cujos extremos são os polos norte e sul; êste aberto pode ser transformado homeomorficamente num aberto do plano (u, v) como mostra a figura 17 e nesta carta as coordenadas dos pontos de U_1 serão dadas por:

$$u_1 = u \quad \text{e} \quad v_1 = v.$$

Seja U_2 o que resta da superfície esférica quando dela so retira um semi-círculo equatorial fechado de extremos $P_1(\pi/2, 0)$ e $P_2(3\pi/2, 0)$. Nestas condições, U_2 se pode transformar homeomorficamente num

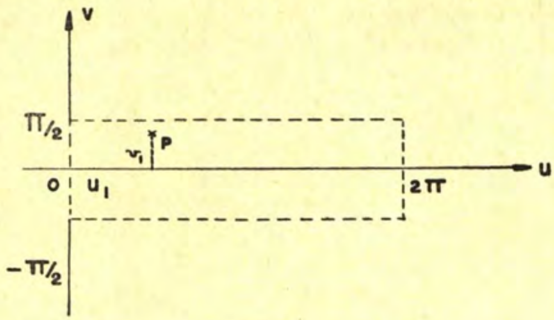


Fig. 17

aberto do plano (u, v), conforme figura 18, de tal modo que nesta nova carta as coordenadas dos pontos de U_2 sejam:

$$u_2 = u - \pi \quad \text{e} \quad v_2 = v .$$

E como $u_2 = u_1 - \pi$, $v_2 = v_1$, e suas inversas, são funções analíticas nos pontos em que são ambas definidas, o atlas considerado é analítico.

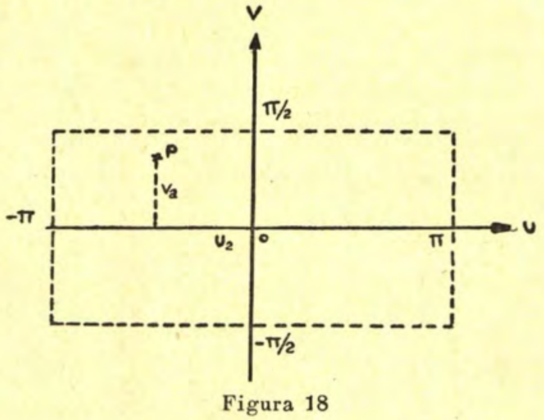


Figura 18

Definamos um outro atlas sôbre a superfície esférica, composto das cartas (β_1, V_1) e (β_2, V_2).

A carta (β_1, V_1) é constituida do aberto V_1, que se obtém da superfície esférica quando dela se retira o polo sul; β_1 é o homeomorfismo projeção estereográfica com centro no polo sul e transforma V_1 em todo o plano (sem os pontos do infinito). Se s_1 e t_1 são as coordenadas do ponto genérico $P(x, y, z)$ de V_1 nesta carta, teremos, conforme figura 19:

$$\frac{x}{s_1} = \frac{y}{t_1} = \frac{|OP'|}{|OP_1|} = \frac{|PP''|}{|OP_1|} = \frac{|P''S|}{|OS|} = 1 + z .$$

Donde:

$$(1) \qquad s_1 = \frac{x}{1+z} \quad \text{e} \quad t_1 = \frac{y}{1+z} .$$

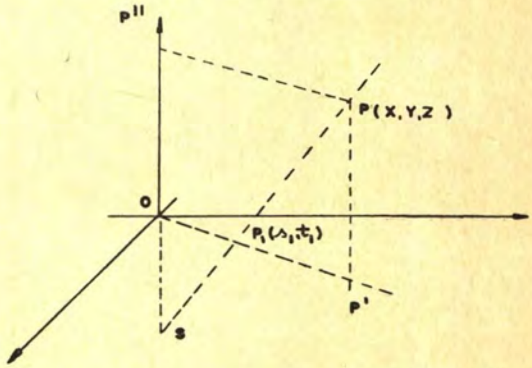


Figura 19

A carta (β_2, V_2) consta do aberto V_2, obtido pela supressão do polo norte na superfície esférica e do homeomorfismo β_2 que é a projeção estereográfica sôbre o plano XOY e com centro no polo norte. Se s_2 e t_2 são as coordenadas de $P(x, y, z)$, ponto genérico de V_2, nesta carta (ver figura 20):

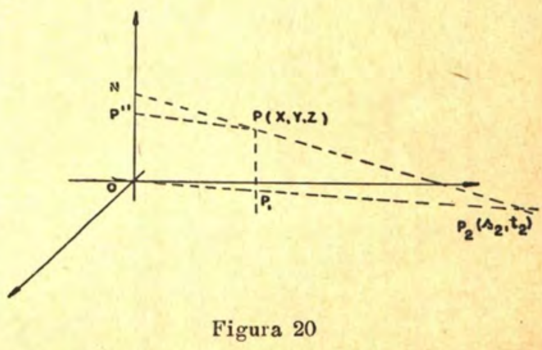


Figura 20

$$\frac{|P'P_2|}{|OP_2|}=\frac{s_2-x}{s_2}=\frac{t_2-y}{t_2}=\frac{|P'P|}{|ON|}=z.$$

Segue-se que:

$$(2)\qquad s_2=\frac{x}{1-z} \text{ e } t_2=\frac{y}{1-z}.$$

As equações (1), (2) e $x^2+y^2+z^2=1$ formam um sistema de cinco equações a sete variáveis, do qual podemos extrair relações entre s_1, t_1, s_2 e t_2, pela eliminação de x, y e z. Temos sucessivamente:

$$s_2^2+t_2^2=\frac{x^2+y^2}{(1-z)^2}=\frac{1-z^2}{(1-z)^2}=$$
$$=\frac{1+z}{1-z}=\frac{t_2}{t_1}=\frac{s_2}{s_1}$$

logo:

$$s_1=\frac{s_2}{s_2^2+t_2^2} \text{ e } t_1=\frac{t_2}{s_2^2+t_2^2}$$

que são funções analíticas dos seus argumentos, exceto para $s_2=t_2=0$, que é a projeção estereográfica do polo norte, o qual não pertence a ambos V_1 e V_2.

Anàlogamente obter-se-ia:

$$s_2=\frac{s_1}{s_1^2+t_1^2} \text{ e } t_2=\frac{t_1}{s_1^2+t_1^2}$$

que são também funções analíticas em todos os pontos que pertencem a $V_1 \cap V_2$, pois o único ponto singular corresponde a $s_1=t_1=0$, projeção estereográfica do polo sul, que não pertence a V_1.

Então o segundo atlas é também analítico. Resta-nos verificar que ambos definem a mesma estrutura de variedade analítica. Ora, as funções:

$$s_1=\frac{\cos v_1 \cos u_1}{1+\operatorname{sen} v_1};\quad t_1=\frac{\cos v_1 \operatorname{sen} u_1}{1+\operatorname{sen} v_1}$$
$$u_1=\operatorname{arctg}\frac{t_1}{s_1};\quad v_1=\operatorname{arcsen}\frac{1-(s_1^2+t_1^2)}{1+s_1^2+t_1^2}$$

são analíticas, exceto para o polo sul. Mas, para êste ponto, as funções abaixo o são:

$$s_2=\frac{\cos v_1 \cos u_1}{1-\operatorname{sen} v_1};\quad t_2=\frac{\cos v_1 \operatorname{sen} u_1}{1-\operatorname{sen} v_1}$$
$$u_1=\operatorname{arctg}\frac{t_2}{s_2};\quad v_1=\operatorname{arcsen}\frac{s_2^2+t_2^2-1}{s_2^2+t_2^2+1}.$$

X) Sôbre a parábola cúbica de equação $y=x^3$ (ver figura 21) com a topologia induzida pela de R^2, podemos definir dois atlas analíticos, os quais, no entanto, não definem

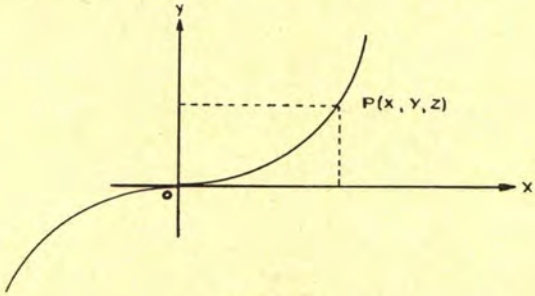


Figura 21

a mesma estrutura de variedade analítica sôbre a curva.

Ambos os atlas contêm apenas uma carta, as quais denotaremos por (α_1, U) para o primeiro e (α_2, U) para o segundo, sendo U toda a curva, α_1 e α_2 as projeções ortogonais sôbre os eixos OX e OY respectivamente.

A coordenada de um ponto genérico $P(x, y)$ da curva será $X_1=x$ na primeira carta e $X_2=y$ na segunda. De modo que:

$$X_2=X_1^3 \text{ e } X_1=X_2^{1/3}$$

e a segunda destas funções tem um ponto singular na origem. Então há duas estruturas distintas de variedade analítica a considerar.

BIBLIOGRAFIA

[1] Cohn, P., «Lie Groups», Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, 1957.

[2] Chevalley, C., «Theory of Lie Groups», Princeton University Press, 1946

[3] Hönig, C, «Álgebra Multilinear e Variedades Diferenciáveis», 1.º Colloquium Brasileiro de Matemática, São Paulo, 1957.

Soma aproximada de séries

por M. A. Fernandes Costa (1)

1. Cálculo da soma exacta de uma série.

O cálculo exacto da soma S de uma série convergente $\sum_0^\infty u_m$ faz-se por métodos analíticos que se reduzem, directa ou indirectamente, à definição

$$S = \lim S_n\,, \quad \text{com} \quad S_n = \sum_0^{n-1} u_m\,.$$

Podem ver-se alguns casos correntes em artigo anterior nesta revista [1].

Quando, porém, aqueles métodos não sejam eficazes há que recorrer a processos numéricos aproximados.

2. Cálculo aproximado de S.

Sendo $S = S_n + R_n$, com $S_n = \sum\limits_0^{n-1} u_m$, $R_n = \sum\limits_n^\infty u_m$, quando se tome S_n como valor aproximado de S comete-se um *erro sistemático* igual a R_n.

Pode obter-se um limite excedente de tal erro considerando uma *série majorante* de $\sum u_m$, ou seja uma série convergente $\sum \overline{u}_m$ cujos termos obedeçam à condição

$$|u_m| \leq \overline{u}_m$$

e que seja fàcilmente somável. Tem-se então

$$|R_n| \leq \overline{R}_n = \sum_n^\infty \overline{u}_m\,.$$

Assim, pretendendo-se S com um erro absoluto inferior a 10^{-k}, tomar-se-á um número n de termos que garanta

$$\overline{R}_n < \frac{1}{2} \cdot 10^{-k}\,,$$

tendo depois o cuidado, no cálculo efectivo de S_n, de não cometer erro superior a $\frac{1}{2} \cdot 10^{-k}$.

EXEMPLO

Número de termos a tomar para obter $\sum\limits_1^\infty 1/m^2$ com um erro inferior a 10^{-5}.

Fàcilmente se obtém uma boa majorante notando que

$$u_m = \frac{1}{m^2} < \frac{1}{m^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right) = \overline{u}_m$$

donde

$$\begin{aligned}\overline{R}_{n+1} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right);\end{aligned}$$

tem-se portanto

$$\overline{R}_{n+1} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-5} \text{ se } n \geq 2000\,.$$

Em [1, § 2] descrevem-se algumas técnicas para a obtenção de majorantes.

(1) Bolseiro do I. A. C. junto do Seminário de Cálculo Numérico e Máquinas Matemáticas.

3. Cálculo de S_n.

Regra geral, convirá calcular os sucessivos u_m determinando prèviamente as razões

$$\rho_m = u_m / u_{m-1}$$

e utilizando a relação

$$u_m = \rho_m \cdot u_{m-1} \,.$$

Este processo, particularmente útil no caso de séries de potências, simplifica e sistematiza os cálculos, prestando se ainda à introdução de verificações intermédias.

EXEMPLO

Calcular com seis decimais exactas (6 D)

$$I_0(x_p) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{x_p^2}{4}\right)^m$$

onde $x_p = p\dfrac{\pi}{8}$, para $p = 21$.

Utilizando uma majorante geométrica [1] fàcilmente se obtém a limitação

$$R_n < \frac{\left(\dfrac{1}{n!}\right)^2 \left(\dfrac{x_p^2}{4}\right)^n}{1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}\,\dfrac{x_p^2}{4}} \,.$$

Deduz-se daqui que, para assegurar 6 D, basta tomar 16 termos quando $p = 21$.

Obter-se-ão então em primeiro lugar as razões

$$\rho_m = \frac{u_m}{u_{m-1}} = \frac{1}{m^2}\,\frac{x_p^2}{4} =$$

$$= \frac{1}{m^2} \times 17{,}00192135 \quad (m = 1, 2, \cdots, 15)$$

e, a partir deles, os termos sucessivos pela relação

$$u_m = \rho_m \cdot u_{m-1} \,,$$

com $u_0 = 1$.

Uma boa verificação dos ρ_m é dada pela identidade

$$\sum_1^{15} \rho_m = \frac{x_p^2}{4} \sum_1^{15} \frac{1}{m^2}$$

onde se substituirá $\sum_1^{15} \dfrac{1}{m^2}$ pelo seu valor, obtido independentemente com suficiente número de decimais.

O quadro final de cálculo é o seguinte:

m	ρ_m	u_m
0		1,00000000
1	17.00192134	17,00192134
2	4,25048033	72,26633222
3	1.88910237	136,51849946
4	1,06262088	145,06729881
5	0,68007685	98,65691161
6	0,47227559	46,59325113
7	0,34697798	16,16683215
8	0,26565502	4,29480011
9	0.20990026	0,45229310
10	0,17001921	0,07689851
11	0,14051174	0,01080514
12	0,11806889	0,00127578
13	0,10060308	0,00012834
14	0,08674449	0,00001113
15	0,07556409	0,00000084
		538,107260

Caso se pretendesse o valor de $I_0(x_p)$ para sucessivos valores de p, por exemplo para $p = 1, 3, 5, \cdots, 21$, o labor exigido pelo emprego de um simples calculador de secretária seria já considerável.

Julga-se interessante expor o procedimento mecanográfico que se seguiu para resolver este mesmo problema, utilizando as seguintes máquinas de cartões perfurados: uma calculadora de programação externa, uma tabuladora e uma reprodutora [1].

---

[1] Uma calculadora de programação externa é uma máquina que se leva a cumprir determinado «programa» de cálculo mediante um painel de ligações. Uma máquina desse tipo dispõe de diversas memórias e de um ou mais acumuladores; as opera-

Sequência das operações:

a. Prepararam-se na reprodutora grupos G_p de 15 cartões detalhe $D_{p,m}$, contendo m e m^2 $(m=1,2,\cdots,15)$. Os cartões de cada grupo foram assinalados por p $(p=1,3,\cdots,21)$.

b. Fez-se preceder cada grupo G_p de um cartão mestre M_p, contendo:

$$p\,,\; p^2 \text{ e } K=\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{8}\right)^2=0{,}03855310963\,.$$

Sobre cada M_p calculou-se $\frac{1}{4}x_p^2=K\,p^2$; e, para cada cartão $D_{p,m}$ de G_p, calculou-se

$$\rho_m=\left(\frac{x_p^2}{4}\right):m^2\,,$$

perfurando ρ_m no próprio $D_{p,m}$.

Os valores de ρ_m foram, assim, obtidos por uma primeira passagem na calculadora.

c. Substituidos os M_p por $D_{p,0}$ contendo $u_0=1$, voltaram a introduzir-se os cartões na calculadora para obter os u_m pela relação $u_m=\rho_m\cdot u_{m-1}$, perfurando o valor de cada u_m sobre $D_{p,m}$.

Nota — Embora fosse dispensável, para os primeiros valores de p, levar m até 15, adoptou se procedimento uniforme a fim de evitar manipulação dos cartões.

d. Calcularam-se na tabuladora as somas

$$I_0(x_p)=\sum_{m=0}^{15}u_m(x_p)\,.$$

3. Séries lentamente convergentes.

Relativamente a séries de convergência lenta, torna-se por vezes eficaz a sua transformação em novas séries de igual soma mas de convergência acelerada.

3. 1. Transformação de Kummer.

Consiste em subtrair da série dada uma outra série de soma conhecida mas cujos termos tenham construção semelhante.

Sendo $S=\sum a_n$ uma série lentamente convergente, e $C=\sum c_n$ uma série de soma conhecida, com

$$\lim a_n/c_n=\gamma\neq 0\,,$$

tem-se

$$S=\sum_0^\infty a_n=\gamma\,C+\sum_0^\infty\left(1-\gamma\frac{c_n}{a_n}\right)a_n\,.$$

EXEMPLO

Volte a considerar-se a série $S=\sum 1/n^2$, que já no exemplo do § 2 se reconheceu ser lentamente convergente. Tem-se aqui $a_n=1/n^2$ e, tomando $c_n=1/n(n+1)$, vem $\gamma=1$, $\sum c_n=1$, donde

$$S=1+\sum\frac{1}{n^2(n+1)}\,.$$

Repetindo a transformação com

$$a_n=\frac{1}{n^2(n+1)} \quad\text{e}\quad c_n=\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

ções programadas repetem-se, em princípio, sobre os sucessivos cartões, sendo porém admissíveis certas alternativas denunciáveis por códigos intencionalmente perfurados nos cartões. Os resultados podem ser perfurados cartão a cartão ou apenas em certos cartões para o efeito introduzidos na localização própria.

A tabuladora é uma máquina que pode comparar-se a uma somadora com maior capacidade de acumulação e impressão, mas cuja maleabilidade é infinitamente superior graças a certos dispositivos de selecção.

A reprodutora serve para reproduzir a informação contida em determinado grupo de cartões sobre outro ou outros grupos de cartões segundo um critério de correspondência prefixado.

vem $\gamma = 1$, $\sum c_n = \frac{1}{4}$ e

$$\sum \frac{1}{n^2(n+1)} = \frac{1}{4} + \sum \frac{2}{n^2(n+1)(n+2)} .$$

Prosseguindo desta maneira, acha-se

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{p^2} + \\ + \sum_1^\infty \frac{p!}{n^2(n+1)\cdots(n+p)} .$$

A série do segundo membro, mesmo com p moderado, converge com rapidez apreciável.

3. 2. Transformação de Euler.

Pondo $a_n = E^n a_0$, com $E = 1 + \Delta$, acha-se

$$\sum_0^\infty (-)^n a_n = \sum (-)^n E^n a_0 = \frac{1}{1+E} a_0 = \\ = \frac{1}{2+\Delta} a_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\Delta\right)^{-1} a_0$$

e, daqui,

$$\sum_0^\infty (-)^n a_n = \frac{1}{2} \sum_0^\infty \frac{(-)^n}{2^n} \Delta^n a_0 .$$

Para séries de potências, use-se antes a transformação

$$\sum_0^\infty (-x)^n a_0 = \sum_0^\infty \frac{(-x)^n}{(1+x)^n} \Delta^n a_0 .$$

Note-se que a transformada de Euler não é necessàriamente de convergência mais rápida do que a série original. Servem de exemplo:

$$\sum_0^\infty \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \sum_0^\infty \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\sum_0^\infty (-)^n \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \sum_0^\infty \left(\frac{3}{8}\right)^n .$$

São condições suficientes para que a série transformada convirja mais ràpidamente do que a original:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqq r > \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad (-)^k \Delta^k a_n > 0 .$$

Com efeito tem-se, por um lado,

$$|R_n| = (a_n - a_{n+1}) + (a_{n+2} - a_{n+3}) + \cdots \\ = -\Delta a_n - \Delta a_{n+2} - \Delta a_{n+4} - \cdots$$

e, por ser $-\Delta a_{p+1} < -\Delta a_p$ (pois $\Delta^2 a_p > 0$),

$$|R_n| > \frac{1}{2}(-\Delta a_n - \Delta a_{n+1} - \Delta a_{n+2} - \Delta a_{n+3} - \cdots) \\ = \frac{1}{2} a_n \geqq \frac{1}{2} a_0 r^n .$$

Por outro lado, quanto ao resto da série transformada, tem-se

$$|R'_n| = (-)^n \left(\frac{\Delta^n a_0}{2^{n+1}} - \frac{\Delta^{n+1} a_0}{2^{n+2}} - \cdots\right) \\ = \frac{|\Delta^n a_0|}{2^{n+1}} + \frac{|\Delta^{n+1} a_0|}{2^{n+2}} + \cdots$$

Mas a sucessão $|\Delta^p a_0|$ é decrescente, porquanto

$$|\Delta^{p+1} a_0| - |\Delta^p a_0| = (-)^{p+1}(\Delta^p a_1 - \Delta^p a_0) - \\ -(-)^p \Delta^p a_0 = (-)^{p+1} \Delta^p a_1 = \\ = -(-)^p \Delta^p a_1 < 0 .$$

Então,

$$|R'_n| < \frac{|\Delta^n a_0|}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right) = \\ = \frac{|\Delta^n a_0|}{2^n} < \frac{a_0}{2^n} ,$$

pois $|\Delta^n a_0| < |\Delta^{n-1} a_0| < \cdots < a_0$.

Daqui vem

$$\left|\frac{R'_n}{R^n}\right| \leqq \frac{\dfrac{a_0}{2^n}}{\dfrac{1}{2} a_0 r^n} = \frac{2}{(2r)^n} .$$

A convergência torna-se tanto mais acelerada quanto maior for r.

EXEMPLO

Para se obter directamente a soma da série alternada

$$\sum_0^\infty (-)^n \frac{1}{n+1}$$

com um erro inferior a $1/10^5$ seriam necessários mais do que 1000 termos. Recorrendo à transformação de EULER, o problema simplifica-se, porém, extraordinàriamente.

Neste caso é simples obter a expressão teórica da transformação, porquanto (1)

$$a_n = \frac{1}{n+1} = n^{[-1]}$$

e, como

$$\Delta\, n^{[-1]} = -\, n^{[-2]},$$

logo se acha, por indução,

$$\Delta^k a_n = \Delta^k n^{[-1]} = (-)^k k!\, n^{[-(k+1)]} = \frac{(-)^k k!}{(n+1)(n+2)\cdots(n+k+1)}.$$

Tem-se então

$$\Delta^k a_0 = \Delta^k 0^{[-1]} = \frac{(-)^k}{k+1}$$

e, por conseguinte,

$$\sum_0^\infty (-)^n \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)2^n} = \sum_1^\infty \frac{1}{n\,2^n}.$$

Acelerar-se-ia a convergência fazendo

$$\sum_0^\infty (-)^n \frac{1}{n+1} = \sum_0^{n-1} (-)^k \frac{1}{k+1} + \sum_n^\infty (-)^k \frac{1}{k+1} = S_n + (-)^n \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-)^k}{2^k}\Delta^k a_n .$$

Na prática corrente não há necessidade de deduzir a expressão da transformada, estabelecendo-se logo o quadro de diferenças:

n	$10^4/(n+1)$	Δ	Δ^2	Δ^3
0	10000			
		-5000		
1	5000		3533	
		-1467		-2899
2	3333		634	
		-833		-301
3	2500		333	
		-500		-166
4	2000		167	
		-333		-72
5	1667		95	
		-238		-36
6	1429		59	
		-179		
7	1260			

Observe-se como, se tomarmos a soma dos quatro primeiros termos e aplicarmos a transformação à série resto, bastam as diferenças de a_4 até à 3.ª ordem (sublinhadas) para se obter S com erro inferior a $1/10^5$:

$$10^4 S = 5833 + \frac{1}{2}\left[2000 + \frac{1}{2}(333) + \frac{1}{4}(95) + \frac{1}{8}(36) + \cdots\right] \approx$$
$$\approx 5833 + 1000 + 83 + 12 + 2,$$

donde

$$S = 0{,}693\ldots$$

Uma boa verificação seria a que consiste no recálculo de S considerando por exemplo $S = S_5 + R_5$ e aplicando depois a transformação a R_5.

4. Uso da fórmula de Euler-Maclaurin.

Sabe-se que [2, pag. 161]

$$\sum_0^n f_k = \int_0^n f(x)\,dx + \frac{1}{2}(f_0 + f_n) + \frac{1}{12}(f_n' - f_0') - \frac{1}{720}(f_n''' - f_0''') + \cdots$$

Se $\lim\limits_{x\to\infty} f^{(m)}(x) = 0$, tem-se então

---

(1) $n^{[-r]}$ representa o polinómio factorial recíproco $1/(n+1)(n+2)\cdots(n+r)$. Veja-se, por exemplo, [2, pág. 47].

$$\sum_0^{\infty} f_k = \int_0^{\infty} f(x)\,dx + \frac{1}{2} f_0 - \frac{1}{12} f_0' + \\ + \frac{1}{720} f_0''' - \frac{1}{30240} f_0^{\mathrm{v}} + \cdots$$

EXEMPLO

Para a série que serviu de exemplo no § 2 tem-se

$$R_7 = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(m+8)^2}.$$

Como $f(x) = 1/(8+x)^2$, é aqui

$$f'(0) = -\frac{2}{8^3}, \quad f'''(0) = -\frac{24}{8^5},$$

$$f^{\mathrm{v}}(0) = -\frac{720}{8^7}, \cdots \int_0^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{8},$$

e portanto

$$R_7 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{64} + \frac{1}{12}\frac{1}{8^3} - \frac{1}{720}\frac{24}{8^5} + \cdots$$
$$= 0{,}125 + 0{,}0078125 + 0{,}0003255$$
$$- 0{,}0000010 + \cdots = 0{,}1331370,$$
$$S = S_7 + R_7 = 1{,}9956349 + 0{,}1331370$$
$$= 2{,}128772.$$

Verificar-se-á recalculando S a partir de $S_{10} + R_{10}$, por exemplo.

5. Outros métodos.

Caso $y = \sum a_j x^j$ convirja lentamente para $x = x'$, pode procurar-se uma equação diferencial (linear) que y satisfaça e obter, por métodos numéricos, o valor $y(x')$ da sua solução particular que obedeça às condições iniciais

$$y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1, \quad y''(0) = 2a_2, \cdots$$

Por exemplo,

$$y = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots$$

é a solução de

$$(1+x)\frac{dy}{dx} = 1$$

para a qual $y(0) = 0$.

Outros métodos de cálculo de soma de séries encontram-se nas referências [3] a [6].

REFERÊNCIAS

[1] Gaz. Matemática, n.º 11, págs. 4-7.
[2] K. S. Hunz, «Numerical Analysis», McGraw, 1957.
[3] Proc. Camb. Phil. Soc., **46** (1950), p. 436.
[4] Phil. Mag., **22** (1936), p. 754; **40** (1949), p. 188.
[5] Jour. Math. Physics, **28** (1950), p. 272.
[6] Nat. Bur. Stand. Jour. Res., **46** (1951), p. 56.

Um adendo a «uma demonstração por indução finita»

por Ruy Madsen Barbosa

Lemos no n.º 53, um interessante artigo do senhor H. Silva Lobo, onde prova pela indução finita as fórmulas:

1) $$\sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}$$

e

2) $$\sum_{p=0}^{n} p^2 \binom{n}{p} = n(n+1) \cdot 2^{n-2}$$

Acreditando fornecer um adendo positivo ao trabalho citado, ouso acrescentar a demonstração de $\sum \binom{n}{p} = 2^n$, também por indução finita, e efectuar uma modificação na demonstração da primeira fórmula, tornando-a mais rápida com o uso do símbolo somatório.

Vejamos:

Admitamos, por hipótese, que seja verdadeira a fórmula para n: $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

Verifiquemos a validade para $n+1$:

$$\sum_{p=0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n+1}{p} + 1.$$

Apliquemos a fórmula de STIFEL:

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n+1} \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right] + 1$$

ou

$$= \sum_{1}^{n+1} \binom{n}{p} + \sum_{1}^{n+1} \binom{n}{p-1} + 1$$

ou

$$= \sum_{1}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{1}^{n+1} \binom{n}{p-1} + 1$$

Tomando $p-1=k$ no segundo somatório temos:

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} + 1$$

ou

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} \binom{n}{p} = 2 \sum_{0}^{n} \binom{n}{p}$$

e lembrando a hipótese podemos escrever:

$$\sum_{0}^{n+1} \binom{n+1}{p} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1} \qquad \text{c. q. d.}$$

Basta, portanto, verificar a veracidade da fórmula para $n=1$, o que de facto se verifica, pois:

$$\sum_{0}^{1} \binom{n}{p} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} = 1 + 1 = 2$$

que confere com resultado obtido pela fórmula:

$$\sum_{0}^{1} \binom{n}{p} = 2^1 = 2.$$

Vejamos a modificação para $\sum_{0}^{n} p \binom{n}{p}$:

Admitamos que $\sum_{0}^{n} p \binom{n}{p} = n\,2^{n-1}$, por hipótese, válida para o número n, provemos que desta hipótese resulta válida para $n+1$:

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n+1} p \binom{n+1}{p}.$$

Aplicando a fórmula de STIFEL

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n+1} p \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right]$$

ou

$$= \sum_{1}^{n} p \binom{n}{p} + (n+1) \binom{n}{n+1} + \sum_{1}^{n+1} p \binom{n}{p-1}$$

Trocando no segundo somatório $p-1$ por k teremos:

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = \sum_{1}^{n} p \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} (k+1) \binom{n}{k}$$

ou

$$= \sum_{0}^{n} p \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} k \binom{n}{p} + \sum_{0}^{n} \binom{n}{k}$$

ou

$$= 2 \cdot \sum_{0}^{n} p \binom{n}{p} + 2^n,$$

e considerando a hipótese temos

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = 2 \cdot n \cdot 2^{n-1} + 2^n$$

ou finalmente:

$$\sum_{0}^{n+1} p \binom{n+1}{p} = 2^n (n+1) \qquad \text{c. q. d.}$$

Completa-se a demonstração verificando-se a validade da fórmula para $n=1$.

Uma interpretação da análise combinatória e algumas aplicações

por J. M. Gil

(Conclusão)

56 — Arranjos com elementos repetidos.

A mesma operação executada apenas p vezes, com $p < n$, dá origem a conjuntos ordenados de p elementos, eventualmente com elementos repetidos, quando muito p vezes. Chamamos a cada um destes conjuntos *arranjos completos* dos n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$, p a p.

57 — Representaremos o número destes arranjos por $\alpha_{n|p}$. É

$$\alpha_{n|p} = n \times n \times \cdots \times n \quad \text{ao todo } p \text{ factores}$$
$$= n^p .$$

58 — Propriedades de $\alpha_{n|p}$.

a) É imediato que

$$\alpha_{n|p} \cdot \alpha_{n|n-p} = \Pi_n .$$

b) Fórmulas de recorrência nos índices

1) $\alpha_{n|p} = n \cdot n^{p-1} = n \cdot \alpha_{n|p-1}$

2) $\alpha_{n|p} = n^p \cdot \dfrac{(n-1)^p}{(n-1)^p} = \left(\dfrac{n}{n-1}\right)^p \alpha_{n-1|p}$

3) $$\alpha_{n|p} = n \cdot \frac{n^{p-1}}{(n-1)^{p-1}} \cdot (n-1)^{p-1} =$$
$$= n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1|p-1}$$

4) $$\alpha_{n|p} = n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1|p-1}$$
$$= [(n-1)+1] \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1|p-1}$$
$$= (n-1) \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1|p-1} +$$
$$+ \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1|p-1}$$
$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1|p} +$$
$$+ \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} \alpha_{n-1|p-1}$$
$$= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{p-1} (\alpha_{n-1|p} + \alpha_{n-1|p-1})$$

59 — Combinações com elementos repetidos.

Numeremos $p + r + 1$ lugares consecutivos da seguinte maneira

$$|1||2||3|\cdots|p||e||f||1||2|\cdots|r-1| .$$

Escolhamos agora r destes lugares. Podemos tomá-los todos consecutivos ou constituir um certo número de blocos de lugares consecutivos. Preenchamos os lugares de cada bloco, com elementos a_l, sendo l igual ao número do primeiro lugar da esquerda do bloco. Obtemos assim agrupamentos de r elementos de entre

$$a_1, a_2, \cdots, a_p, a_e, a_f$$

podendo cada elemento ser repetido, até r vezes, em algum agrupamento.

60 — Estes conjuntos chamam-se *combinações completas* dos $p+2$ elementos $a_1, a_2, \cdots, a_p, a_e, a_f$, tomados r a r.

61 — Representaremos o número das combinações completas dos $p+2$ elementos, r a r, por $\Gamma_{p+2|r}$.

Este número é também o das possíveis escolhas de r lugares entre $p+2+r-1 = p+r+1$. Assim

$$\Gamma_{p+2|r} = \binom{p+r+1}{r}$$

e, fazendo $p+2=n$, vem

$$\Gamma_{n|r} = \binom{n+r-1}{r}$$

sem qualquer restricção dos valores relativos de n e r.

62 — Propriedades de $\Gamma_{n|p}$.

a) É

$$P_{p+q+1|p,q,1} = P_{p+q+1|p,q} =$$
$$= (q+1)\binom{p+q+1}{q+1} = (q+1)\,\Gamma_{p+1|q+1}$$

e, para $p+1=n$ e $q+1=r$

$$\Gamma_{n|r} = \frac{1}{r}\cdot P_{n+r-1|n-1,r-1}$$

b) Fórmulas de recorrência nos índices

1) $$\Gamma_{n|r} = \frac{1}{r}P_{n+r-1|n-1,r-1,1}$$
$$= \frac{1}{r}\cdot(n+r-1)\binom{n+r-2}{r-1}$$
$$\Gamma_{n|r} = \frac{n+r-1}{r}\Gamma_{n|r-1}$$

2) $$\Gamma_{n|r} = \frac{n+r-1}{r}\binom{n+r-2}{r-1}$$
$$= \frac{n+r-1}{r}\cdot\frac{r}{n-1}\binom{n+r-2}{r}$$
$$= \frac{n+r-1}{n-1}\binom{n+r-2}{r}$$
$$= \frac{n+r-1}{n-1}\Gamma_{n-1|r}$$

3) $$\Gamma_{n|r} = \frac{n+r-1}{n-1}\binom{n+r-2}{r}$$
$$= \frac{n+r-1}{n-1}\cdot\frac{n+r-2}{r}\binom{n+r-2}{r-1}$$
$$= \frac{(n+r-1)(n+r-2)}{(n-1)r}\Gamma_{n-1|r-1}$$

4) $$\Gamma_{n|r} = \binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-2}{r}$$
$$+ \binom{n+r-2}{r-1} = \Gamma_{n-1|r} + \Gamma_{n|r-1}$$

5) $$\sum_{s=0}^{k}\Gamma_{n|s} = \sum_{s=0}^{k}\binom{n+s-1}{s} = \binom{n}{k} =$$
$$= \Gamma_{n+1|k} \text{ ou } \sum_{s=0}^{k}\Gamma_{n|s} = \Gamma_{n+1|k}.$$

c) $$\Gamma_{p+1|r} = \binom{p+r}{r} = \binom{p+r}{p} = \Gamma_{r+1|p}$$

e para $p+1=n$

$$\Gamma_{n|r} = \Gamma_{r+1|n-1}.$$

d) $$\Gamma_{n|r} = \Gamma_{r+1|n-1} = \frac{n+r-1}{r}\Gamma_{r|n-1}$$
$$= \frac{n+r-1}{r}\cdot\frac{n}{n+r-1}\Gamma_{r|n}$$
$$= \frac{n}{r}\Gamma_{r|n}.$$

63 — Ocupação livre de caixas diferentes.

Consideremos p elementos indistinguíveis $a\,a$ a distribuir por n caixas diferentes, sem limitação do número de elementos que podem ficar em cada caixa. Estatìsticamente elementos de BOSE ou bosões.

A distribuição dos aa equivale à formação de blocos de aa, cada um deles constituído pelos elementos que ficam em cada caixa.

Precisamos dum processo de fraccionar o bloco inicial dos p elementos aa, supostos alinhados em, quando muito, n blocos. Basta-nos intercalar $n-1$ elementos iguais bb. Estes $n-1$ elementos bb separam, quando muito, n blocos; precisamente n blocos, quando cada b é elemento de separação dos aa. Quando a separação é feita por blocos de bb o número de blocos separados é inferior a n. Quer dizer: cada permutação dos elementos

$$\underbrace{a, a, \cdots, a}_{p\,aa}, \underbrace{b, b, \cdots, b}_{n-1\,bb}$$

corresponde a uma distribuição dos elementos aa pelas caixas. Tantas distribuições possíveis quantas as permutações, isto é,

$$D_{p\,|\,n} = \binom{n+p-1}{p} = \Gamma_{n\,|\,p}$$

com $D_{p\,|\,n}$ número de distribuições possíveis de p elementos por n caixas.

64 — Ocupação restringida de caixas diferentes.

Suponhamos que os p elementos indistinguíveis tem de ser distribuídos por n caixas diferentes, deixando, quando muito, um em cada caixa. Estatìsticamente estes elementos chamam-se fermiões, ou elementos de FERMI.

65 — Para fazer a distribuição, basta escolher as p caixas, que ficarão ocupadas; as restantes $n-p$ ficarão vazias. São possíveis tantas distribuições quantas as escolhas possíveis de p caixas de entre as n. Assim

$$D_{p\,|\,n,1} = \binom{n}{p}$$

é o número das distribuições possíveis de p fermiões por n caixas diferentes.

66 — Estudemos o caso geral da ocupação de caixas diferentes restringida a um número máximo, m, de elementos por caixa.

Representaremos por $D_{i\,|\,n,m}$ o número de distribuições possíveis de i elementos por n caixas, cada caixa com o maximo de m elementos.

Não é possível distribuir pelas n caixas mais do que $n \cdot m$ elementos. Assim $D_{i\,|\,n,m} = 0$ para $i > n \cdot m$.

Seja $D_{n,m}$ o número das distribuições possíveis de objectos indistinguíveis pelas n caixas, cada uma com o máximo de m objectos. É

$$D_{n,m} = \sum_{i=0}^{m \cdot n} D_{i\,|\,n,m}$$

considerando as caixas vazias como uma distribuição de zero objectos.

67 — Os valores de $D_{i\,|\,n,m}$ podem obter-se fàcilmente por uma multiplicação de polinómios.

Representemos as caixas por $x_1, x_2, \cdots, x_n$ e ponhamos em índices superiores o número de elementos que nelas podem ser colocados, assim

$$\begin{array}{ccccc} x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ x_2^0 & x_2^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^m \end{array}$$

Consideremos o caso das distribuições pelas duas caixas x_1 e x_2. As distribuições possíveis correspondem aos pares $x_1 x_2$ que se podem formar com as duas primeiras linhas do quadro. Os pares cuja soma dos índices superiores é a mesma correspondem à distribuição do mesmo número de elementos, precisamente igual a essa soma.

Os pares $x_1 x_2$ podem obter-se fàcilmente, considerando as expressões

$$x_1^0 + x_1^1 + x_1^2 + \cdots + x_1^m$$

e

$$x_2^0 + x_2^1 + x_2^2 + \cdots + x_2^m$$

como polinómios e multiplicando-os. Assim

$$(x_1^0 + x_1^1 + \cdots + x_1^m)(x_2^0 + x_2^1 + \cdots + x_2^m) =$$
$$= x_1^0 x_2^0 + \left|\begin{matrix} x_1^1 x_2^0 + \\ x_1^0 x_2^1 \\ \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} x_1^2 x_2^0 + \cdots + \\ x_1^1 x_2^1 \\ x_1^0 x_2^2 \end{matrix}\right. \left|\begin{matrix} x_1^m x_2^0 + \\ \cdots \\ x_1^0 x_2^m \end{matrix}\right.$$
$$+ \left|\begin{matrix} x_1^m x_2^1 + \cdots + x_1^m x_2^m = S_{0|x_1 x_2} + \\ \cdots \\ x_1^1 x_2^m \end{matrix}\right.$$
$$+ S_{1|x_1 x_2} + \cdots + S_{m|x_1 x_2} + S_{m+1|x_1 x_2} + \cdots + S_{2m|x_1 x_2}$$

com $S_{i|x_1 x_2} = \sum x_1^\alpha x_2^\beta$ e o somatório estendido a todos os pares ordenados de inteiros (α, β), tais que $\alpha + \beta = i$. Claro que é $D_{i|2,m}$ o número de parcelas de $S_{i|x_1 x_2}$.

É ainda

$$D_{i|2,m} = \sum_{j=0}^{m} D_{i-j|1,m}$$

com $D_{p|1,m} = 1$ para $p \leqq m$ e $D_{p|1,m} = 0$ para $p > m$.

68 — Façamos o produto dos n factores seguintes

$$(x_1^0 + x_1^1 + \cdots + x_1^m)(x_2^0 + x_2^1 + \cdots + x_2^m) \cdots$$
$$\cdots (x_n^0 + x_n^1 + \cdots + x_n^m) = S_{0|x_1 x_2 \ldots x_n} +$$
$$+ S_{1|x_1 x_2 \ldots x_n} + \cdots + S_{nm|x_1 x_2 \ldots x_n}$$

então

$$(x_1^0 + x_1^1 + \cdots + x_1^m) \cdots (x_n^0 + x_n^1 + \cdots + x_n^m)$$
$$(x_{n+1}^0 + x_{n+1}^1 + \cdots + x_{n+1}^m) = S_{0|x_1 x_2 \ldots x_n} x_{n+1}^0 +$$
$$+ S_{1|x_1 x_2 \ldots x_n} x_{n+1}^0 + \cdots + S_{nm|x_1 x_2 \ldots x_n} x_{n+1}^0 +$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= S_{0|x_1 x_2 \ldots x_{n+1}} + S_{1|x_1 x_2 \ldots x_{n+1}} + \cdots +$$
$$+ S_{(n+1)m|x_1 x_2 \ldots x_{n+1}}$$

com

$$S_{i|x_1 x_2 \ldots x_{n+1}} = \sum_{j=0}^{m} S_{i-j|x_1 x_2 \ldots x_n} x_{n+1}^j$$

e

$$S_{p|x_1 x_2 \ldots x_n} = 0 \text{ para } p > n\,m\,.$$

Consequentemente

$$(1) \qquad D_{i|n+1,m} = \sum_{j=0}^{m} D_{i-j|n,m}$$

para qualquer $n \geqq 1$.

69 — Claro que é ainda

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^m)^n = \sum_{i=0}^{mn} D_{i|n,m} x^i$$

em vez de efectuar as sucessivas multiplicações para obter os coeficientes $D_{i|n,m}$, podemos calcular estes por recorrência. Pois é, por aplicação sucessiva de (1)

$$D_{i|n,m} = \sum_{j_1=0}^{m} \sum_{j_2=0}^{m} \sum_{j_3=0}^{m} \cdots$$
$$\cdots \sum_{j_{n-1}=0}^{m} D_{i-j_1-j_2-\ldots-j_{n-1}|1,m}$$

e

$$D_{i-j_1-j_2-\ldots-j_{n-1}|1,m} = 1$$

porque são os coeficientes de $x_1^0 + x_1^1 + \cdots + x_1^m$ ou de $1 + x + x^2 + \cdots + x^m$. Então

	$D_{0\mid 1,m}$	$D_{1\mid 1,m} \cdots$	$D_{m\mid 1,m}$	$D_{m+1\mid 1,m} \cdots D_{2m\mid 1,m}$
	1	1 ···	1	0 ······· 0
$n=2$	1	2 3	□ ······	······ 2 1
$n=3$	1	3 6 ······	······	······

O elemento de cada linha é a soma de $m+1$ elementos da linha superior, contados para a esquerda do elemento colocado por cima dele, e incluindo aquele.

70 — Desenvolvimento da potência $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$.

É

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^2 = x_1 x_1 + x_2 x_2 + \cdots + x_k x_k + \left| \begin{matrix} x_1 x_2 + \cdots + \\ x_2 x_1 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x_1 x_k + \\ x_k x_1 \end{matrix} + \left| \begin{matrix} x_2 x_3 + \cdots + \\ x_3 x_2 \end{matrix} \right| \begin{matrix} x_2 x_k + \cdots + \\ x_k x_2 \end{matrix} \left| \begin{matrix} x^{k-1} x_k \\ x_k x_{k-1} \end{matrix} \right.$$
$$= \sum P_{2\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

com o somatório estendido a todos os inteiros positivos $p_1, p_2, \cdots, p_k$, tais que $p_1+p_2+\cdots+p_k=2$.

71 — Ponhamos

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

com $p_1+p_2+\cdots+p_k=n$.

É

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n+1} = \left(\sum P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}\right) \cdot (x_1+x_2+\cdots+x_k).$$

Os termos $P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$,

$$P_{n\,|\,p_1+1,p_2-1,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1+1} x_2^{p_2-1} \cdots x_k^{p_k}, \cdots,$$
$$P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k-1}\, x_1^{p_1+1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k-1}$$

multiplicados respectivamente por $x_1, x_2, \cdots, x_k$ dão o mesmo termo do desenvolvimento de $(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n+1}$. Precisamente o de parte literal $x_1^{p_1+1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$. O coeficiente deste termo é assim

$$P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k} + P_{n\,|\,p_1+1,p_2-1,p_3\ldots p_k} + \cdots + P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k-1} = p_1 P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} + p_2 P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} + \cdots + p_k P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} =$$
$$= (p_1+p_2+\cdots+p_k)\, P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} = n \cdot P_{n\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k} = P_{n+1\,|\,p_1+1,p_2,\ldots,p_k}.$$

Consequentemente, atendendo à permutabilidade dos índices pp, é

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^{n+1} = \sum P_{n+1\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

com o somatório estendido a todos os inteiros $p_1, p_2, \cdots, p_k$ tais que $p_1+p_2+\cdots+p_k=n+1$.

72 — O número de termos do desenvolvimento

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_k}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

é o número de soluções inteiras, não negativas, da equação

$$p_1+p_2+\cdots+p_k=n.$$

Cada uma destas soluções constitui uma distribuição de n objectos indistinguíveis — as unidades de n — por k caixas diferentes, sem restricção do número de objectos que pode ficar em cada caixa. Ao todo temos $D_{n\,|\,k}=\Gamma_{k\,|\,n}$ distribuições e também $\Gamma_{k\,|\,n}$ termos no desenvolvimento.

73 — Em particular, para $k=2$ é

$$(x_1+x_2)^n = \sum P_{n\,|\,p_1,p_2}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} =$$

com $p_1+p_2=n$

$$= \sum_{p_1=0}^{n} \binom{n}{p_1} x_1^{p_1} x_2^{n-p_1}$$

e o número de termos do desenvolvimento

$$D_{n\,|\,2} = \Gamma_{2\,|\,n} = \binom{2+n-1}{n} = n+1 .$$

74 — Um polinómio completo, de grau n, a k variáveis, é a soma de $n+1$ polinómios homogéneos, a k variáveis, de graus $0, 1, \cdots, n$. É assim fácil contar o número $N_{n\,|\,k}$ de termos do polinómio

$$N_{n\,|\,k} = \sum_{i=0}^{n} \Gamma_{k\,|\,i}$$
$$= \Gamma_{k+1\,|\,n} = \binom{n+k}{n} .$$

75 — De

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum P_{n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_k}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_k^{p_k}$$

com o somatório estendido a todos os valores inteiros e positivos de $p_1, p_2, \cdots, p_k$, tais que $p_1+p_2+\cdots+p_k = n$ vem que

$$\left(1+\frac{x_2}{x_1}+\cdots+\frac{x_k}{x_1}\right)^n =$$
$$= \sum P_{n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_k} \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{p_2} \cdots \left(\frac{x_k}{x_1}\right)^{p_k}$$

e, fazendo

$$\frac{x_2}{x_1} = y \;\; \frac{x_3}{x_1} = y^2 \cdots \frac{x^k}{x_1} = y^{k-1}$$
$$(1+y+y^2+\cdots+y^{k-1})^n =$$
$$= \sum P_{n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_k}\; y^{p_2+2p_3+\ldots+(k-1)p_k}$$

76 — Com $p_2+2p_3+\cdots+k\,p_{k+1} = r$ e $p_1+p_2+\cdots+p_{k+1} = n$ é

$$(1+y+y^2+\cdots+y^k)^n =$$
$$= \sum_{r=0}^{nk} P_{n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}}\; y^r .$$

Confrontando com o § 69, onde

$$(1+x+x^2+\cdots+x^k)^n = \sum_{r=0}^{nk} D_{r\,|\,n,k}\, x^r$$

conclui-se que

$$D_{r\,|\,n,k} = \sum P_{n\,|\,p_1, p_2, \ldots, p_{k+1}}$$

com o somatório estendido a todos os inteiros positivos $p_1, p_2, \cdots, p_{k+1}$, tais que

$$p_1+p_2+\cdots+p_{k+1} = n$$

e

$$p_2+2p_3+\cdots+k\,p_{k+1} = r .$$

REFERÊNCIAS

B. J. Caraça, *Lições de Álgebra e Análise*, vol. I, 2.ª ed., Lisboa, 1945.

J. E. Freund, *Restricted Occupancy Theory*, A. Mathematical Monthly, 1956, pág. 20.

J. Morgado, *Reticulados*, Junta de Investigação Matemática, 1956.

J. D. Bankier, *Generalizations of Pascal's Triangle*, A. Mathematical Monthly, 1957, pág. 416.

L. E. Clarke e J. Singer, *On Circular Permutations*, A. Mathematical Monthly, 1958, pág. 609.

C. U. P., *Elementary Mathematics of Sets With Applications*, Mathematical Ass. of America, 1958.

J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, New-York, J. Wiley and Sons, Inc., 1958.

Report of Comission on Mathematics: Appendices, College Entrance Examination Board, New-York, 1959.

H. Pogorzelski, *Generalization of a Peano Symbol*, A. Mathematical Monthly, 1959, pág. 885.

Produtos Infinitos

por Graciano Neves de Oliveira

§ 1 — Consideremos o produto infinito

$$(1.1) \qquad \prod_0^\infty \omega_n$$

em que supomos $\omega_n > 0$. Seja

$$P_m = \prod_0^{m-1} \omega_n$$

teremos

$$\log P_m = \sum_0^{m-1} \log \omega_n .$$

Passando aqui aos limites para $m = \infty$ conclui-se que:

I. Se o produto (1. 1) é convergente e diferente de zero é convergente a série

$$(1.2) \qquad \sum_0^\infty \log \omega_n$$

e representando por P e S respectivamente os valores do produto infinito e da série tem-se

$$\log P = S .$$

Inversamente se a série (1. 2) é convergente é também convergente e diferente de zero o produto (1. 1).

II. Se o produto infinito é nulo ter-se-á

$$\sum_0^\infty \log \omega_n = -\infty$$

e inversamente.

III. Se o produto (1. 1) é divergente, diverge também a série (1. 2).

IV. Se a série (1. 2) diverge o prodruto (1. 1) é divergente ou nulo.

§ 2 — A consideração da série (1. 2) em correspondência com o produto (1. 1) permite tirar fàcilmente de propriedades conhecidas das séries outras para produtos infinitos. Assim como a condição necessária e suficiente de convergência da série (1. 2) é que seja

$$\left| \sum_m^{m+p} \log \omega_n \right| < \varepsilon$$

para $m > m_1(\varepsilon)$ segue-se que

I. A condição necessária é suficiente para que o produto (1. 1) convirja para um número superior a zero é que seja

$$(2.1) \qquad 1 - \delta < \omega_m \cdots \omega_{m+p} < 1 + \delta$$

para $m > m_1(\delta)$.

II. Desta condição segue-se imediatamente, fazendo $p \to +\infty$, que em produto infinito convergente e não nulo o resto de ordem m, $Q_m = \omega_m \cdots \omega_{m+p} \cdots$ tende para a unidade, quando m tende para o infinito.

III. Produto infinito em que seja $\omega_n < 1$ é sempre convergente.

De facto neste caso teremos $\log \omega_n < 0$ e portanto a série (1. 2) é convergente ou divergente para $-\infty$, isto é, (1. 1) é convergente, significativo ou nulo. Se for significativo dá-se o caso da série (1. 2) convergir. Portanto $\log \omega_n$ tende para zero ou seja ω_n tende para a unidade. Quer dizer, na hipótese posta o produto só pode ser significativo se ω_n tender para 1.

IV. Em qualquer produto infinito convergente e não nulo ω_n tende para a unidade.

É o que imediatamente se concluiu da igualdade (2. 1), fazendo $p = 0$.

§ 3 — Seguem-se agora alguns critérios de convergência para produtos infinitos de factor geral superior à unidade.

I. Se existe um número $k > 1$ tal que $\omega_{n+1}^k < \omega_n$, a partir de certa ordem, então $\prod \omega_n$ converge e é diferente de zero.

De facto de $\omega_{n+1}^k < \omega_n$ tira-se

$$\frac{\log \omega_{n+1}}{\log \omega_n} < \frac{1}{k} < 1$$

e pelo critério d'ALEMBERT convergirá a série (1. 2) e portanto o produto (1. 1).

II. Se existem os números $a > 1$ e $k < 1$ tais que $\omega_n < a^{(k^n)}$, a partir de certa ordem, então $\prod \omega_n$ converge e é diferente de zero.

Teremos

$$\log \omega_n < k^n \log a$$

e o segundo membro é termo geral duma série convergente pelo que $\sum \log \omega_n$ converge, ficando pois estabelecida a proposição.

III. Se existirem números positivos

$$\alpha, k_0, k_1, \cdots k_n \cdots$$

que façam, a partir de certa ordem,

$$\omega_{n+1}^{\alpha + k_{n+1}} < \omega_n^{k_n}$$

então $\prod \omega_n$ converge e é diferente de zero.

De facto daquela condição vem

$$\frac{\log \omega_{n+1}}{\log \omega_n} < \frac{k_n}{\alpha + k_{n+1}}$$

e o teorema de KUMMER sobre séries permite afirmar a convergência de $\sum \log \omega_n$. Converge pois o produto para um valor diferente de zero.

Em particular, fazendo $k_n = n$ tem-se que o produto converge se se verificar

$$\omega_{n+1}^{\alpha+n+1} < \omega_n^n$$

o que aliás também se conclui, aplicando o critério I.

§ 4 — Neste parágrafo e seguintes não suporemos já, salvo indicação em contrário, que $\omega_n > 1$.

Vamos provar que se a sucessão

$$\omega_0, \frac{1}{\omega_1}, \omega_2, \frac{1}{\omega_3}, \cdots$$

tende monotònicamente para a unidade $\prod \omega_n$ é convergente e significativo.

De facto nesta hipótese $\sum \log \omega_n$ é alternada decrescente de termo geral evanescente pelo que converge. Convergirá pois $\prod \omega_n$ que será diferente de zero.

§ 5 — Do teorema de CATALAN (¹) pode tirar-se a seguinte condição necessária de convergência para o produto $\prod \omega_n$:

Se $\prod \omega_n$ é convergente, diferente de zero, se $\omega_n > 1$ e se ω_n decresce, quando n cresce então

$$\lim \omega_n^n = 1 .$$

De facto a série $\sum \log \omega_n$ verificará a hipótese do teorema de CATALAN e portanto

(¹) Cuja demonstração se pode ver em VICENTE GONÇALVES, *Lições de Cálculo e Geometria*, pág. 10.

$$\lim n \log \omega_n = 0$$

donde

$$\lim \omega_n^n = 1 \, .$$

§ 6 — Suponhamos que $\prod \omega_n$ verifica a hipótese de convergência do § 3. I. Seja

$$Q_m = \omega_m \cdot \omega_{m+1} \cdots$$

pondo $\frac{1}{k} = h$ teremos

$$0 < \log Q_m = \log \omega_m + \log \omega_{m+1} + \log \omega_{m+2} + \\ + \cdots < \log \omega_m + h \log \omega_m + h^2 \log \omega_m + \cdots = \\ = \frac{1}{1-h} \log \omega_m = \log \omega_m^{\frac{1}{1-h}}$$

donde

$$1 < Q_m < \omega_m^{\frac{1}{1-h}} \, .$$

§ 7 — Se agora $\prod \omega_n$ satisfaz a hipótese do § 3. II. teremos

$$\log Q_m < (k^m + k^{m+1} + \cdots) \log a = \\ = \frac{k^m}{1-k} \log a = \log a^{\frac{k^m}{1-k}}$$

donde

$$1 < Q_m < a^{\frac{k^m}{1-k}} \, .$$

§ 8 — Consideremos um produto que cumpra a hipótese de § 4. Designemos o seu valor por P.

Teremos

$$\log P = \log \omega_0 + \cdots + \log \omega_n + \cdots$$

Como em série alternada decrescente de termo geral evanescente o erro que se comete, quando tomamos S_m (soma dos primeiros m termos) pela soma da série é em valor absoluto inferior ao módulo do primeiro termo desprezado temos

$$|\log P - \log P_m| < |\log \omega_m|$$

ou

$$(8.1) \qquad \left| \log \frac{P}{P_m} \right| < |\log \omega_m|$$

ou ainda designando por Q_m o resto de ordem m

$$|\log Q_m| < |\log \omega_m|$$

donde

$$-|\log \omega_m| < \log Q_m < |\log \omega_m|$$

supondo $\omega_m > 1$ teremos

$$\log \frac{1}{\omega_m} < \log Q_m < \log \omega_m$$

donde

$$\frac{1}{\omega_m} < Q_m < \omega_m$$

se tivéssemos suposto $\omega_m < 1$ chegar-se-ia a

$$\omega_m < Q_m < \frac{1}{\omega_m} \, .$$

Quer dizer o resto de ordem m está sempre entre os números ω_m e $\frac{1}{\omega_m}$.

§ 9 — Seja $\omega_n = 1 + u_n$. Suporemos $|u_n| < 1$, podendo no entanto u_n ser positivo ou não. Como se sabe diz-se que $\prod \omega_n$ é absolutamente convergente se $\prod (1 + |u_n|)$ convergir.

Seja

$$W_n = \begin{cases} \omega_n & \text{se } \omega_n > 1 \\ \dfrac{1}{\omega_n} & \text{se } \omega_n < 1 \end{cases} \cdot$$

I. Se $\prod W_n$ converge o produto infinito $\prod \omega_n$ é absolutamente convergente.

Designemos por P' o valor de $\prod W_n$ e seja

$$P'_m = W_0 \cdot W_1 \cdots W_{m-1}$$

e

$$P''_m = (1 + |u_0|) \cdot (1 + |u_1|) \cdots (1 + |u_{m-1}|) \, .$$

Sendo $u_n > 0$ será $1 + u_n = \omega_n > 1$ e portanto

(9. 1) $$1 + |u_n| = W_n .$$

Suponhamos agora $u_n < 0$. De

$$(1 - u_n)(1 + u_n) = 1 - u_n^2 < 1$$

vem

$$1 - u_n < \frac{1}{1 + u_n}$$

como $1 - u_n = 1 + |u_n|$ e $\dfrac{1}{1 + u_n} = W_n$

vem

(9. 2) $$1 + |u_n| < W_n$$

por (9. 1) e (9. 2) podemos escrever

$$P''_m \leq P'_m$$

e como P'_m nunca decresce, quando m cresce

$$P''_m \leq P'$$

como P''_m também nunca decresce, quando m cresce existirá o limite de P'_m e o produto considerado será absolutamente convergente.

§ 10 — Se $\prod\limits_0^m W_n \leq A$ então elevando os sucessivos factores de $\prod \omega_n$ a números positivos e decrescentes para zero $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, \cdots$ obtém-se um novo produto infinito convergente e não nulo ainda que $\prod \omega_n$ seja divergente.

De $\prod\limits_0^m W_n \leq A$ vem $\sum\limits_0^m \log W_n \leq \log A$ e como

$$\left| \sum_0^m \log \omega_n \right| \leq \sum_0^m |\log \omega_n| = \sum_0^m \log W_n$$

podemos escrever

$$\left| \sum_0^m \log \omega_n \right| \leq \log A .$$

Por um teorema de ABEL(¹) a série

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n \log \omega_n = \sum_0^\infty \log \omega_n^{\varepsilon_n}$$

converge e sendo S a sua soma tem-se

(10. 1) $$|S| \leq \varepsilon_0 \log A = \log A^{\varepsilon_0}$$

segue-se pois que converge o produto $\prod \omega_n^{\varepsilon_n}$. Representando por P o seu valor, atendendo a que é $S = \log P$ e a (10. 1) temos

$$|\log P| \leq \log A^{\varepsilon_0}$$

donde

$$\log A^{-\varepsilon_0} \leq \log P \leq \log A^{\varepsilon_0}$$

ou

$$A^{-\varepsilon_0} \leq P \leq A^{\varepsilon_0}.$$

§ 11 — Como se sabe demonstra-se que

I. Produto infinito absolutamente convergente é convergente.

II. O valor dum produto absolutamente convergente é independente da ordem dos termos.

III. Produto infinito absolutamente convergente em que seja $|u_n| < 1$ é sempre diferente de zero.

§ 12 — Se $\prod (1 + u_n)$ é absolutamente convergente também será convergente o produto $\prod W_n$.

Efectivamente pelas proposições I e III do § 11 o produto $\prod \omega_n$ será convergente e diferente de zero logo a série

(12. 1) $$\sum \log \omega_n$$

(¹) Cuja demonstração se pode ver em G. TOLSTOW, Fourierreihen, pág. 89.

será também convergente. Em virtude da convergência absoluta do produto $\prod \omega_n$ podemos alterar a ordem dos seus termos sem que o seu valor se modifique. Segue-se daí que a soma da série (12. 1) não depende da ordem dos termos, pois a sua soma em qualquer caso tem de ser o logaritmo do valor do produto $\prod \omega_n$. Logo esta série deverá convergir absolutamente, visto que no caso contrário (teorema de RIEMANN) a sua soma dependeria da ordem dos termos.

Converge pois

$$\sum |\log \omega_n|$$

e como

$$|\log \omega_n| = \log W_n$$

convergirá $\sum \log W_n$ e portanto $\prod W_n$.

Combinando esta proposição com a proposição I do § 9:

É condição necessária e suficiente de convergência absoluta dum produto infinito, que convirja o produto que dele se obtém, conservando os factores superiores à unidade e invertendo os inferiores.

§ 13 — Pode agora provar-se fàcilmente que se $\prod \omega_n$ é absolutamente convergente também $\prod \frac{1}{\omega_n}$ será absolutamente convergente (supõe-se $\omega_n > 0$).

De facto se $\prod \omega_n$ é absolutamente convergente pelo teorema do § 12 convergirá $\prod W_n$. E agora pelo teorema I do § 9 convergirá $\prod \frac{1}{\omega_n}$ absolutamente, pois que $\prod W_n$ também é o produto que se obtém de $\prod \frac{1}{\omega_n}$ por inversão dos factores inferiores à unidade e conservação dos restantes.

§ 14 — Qualquer produto extraido do produto absolutamente convergente $\prod \omega_n$ é também absolutamente convergente.

Sendo $\prod \omega_n$ absolutamente convergente será convergente a série $\sum \log W_n$ e portanto será absolutamente convergente a série $\sum \log \omega_n$.

Seja $\prod \omega'_n$ um produto extraido do dado. A série $\sum \log \omega'_n$ será uma série extraida de $\sum \log \omega_n$ e por consequência será absolutamente convergente. Convergirá pois $\sum \log W'_n$ com o que fica provada a proposição.

Pondo

$$S = \sum \log \omega_n$$

e

$$S' = \sum \log \omega'_n$$

teremos como se sabe das séries

$$|S'| < \overline{S}$$

em que $\overline{S}$ é a soma da série cujos termos são os módulos dos termos de $\sum \log \omega_n$.

Representando por P' o valor de $\prod \omega'_n$ e por P_1 o valor de $\prod W_n$ teremos

$$S' = \log P'$$

e

$$\overline{S} = \log P_1$$

podemos pois escrever

$$|\log P'| < \log P_1$$

donde

$$\log \frac{1}{P_1} < \log P' < \log P_1$$

e portanto

$$\frac{1}{P_1} < P' < P_1 .$$

§ 15 — Suponhamos $\prod \omega_n$ absolutamente convergente.

Seja

$$P = \prod \omega_n$$

$$P' = \prod W_n$$

e

$$S = \sum \log \omega_n = \log P$$

$$S' = \sum \log W_n = \log P'$$

teremos evidentemente

$$|S| < S'$$

ou

$$|\log P| < \log P'$$

donde

$$\frac{1}{P'} < P < P' .$$

§ 16 — Se $\prod \omega_n$ é simplesmente convergente e diferente de zero, será simplesmente convergente a série $\sum \log \omega_n$, pois senão convergiria $\sum \log W_n$ e o produto seria absolutamente convergente contra a hipótese. Pode pois (teorema de Riemann) por alteração conveniente da ordem dos termos fazer $\sum \log \omega_n = \log \left(\prod \omega_n \right)$ assumir qualquer valor prèviamente dado. Logo:

Se um produto é simplesmente convergente e diferente de zero pode dele obter-se, alterando a ordem dos termos outro produto que tenha qualquer valor positivo.

§ 17 — Sabemos que o estudo da convergência dum produto infinito se pode fazer de vários modos por intermédio duma série.

Assim a série

$$(17.\ 1) \qquad \begin{aligned} &P_1 + (P_2 - P_1) + \cdots + \\ &+ (P_n - P_{n-1}) + \cdots \end{aligned}$$

em que é $P_m = \prod_0^{m-1} \omega_n$ é convergente quando e só quando o for $\prod \omega_n$, pois que a soma dos primeiros m termos da série é igual a P_m.

Sabe-se também que $\prod \omega_n$, com $\omega_n = 1 + u_n$, é convergente sempre que o for a série

$$(17.\ 2) \qquad u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$$

Dado pois o produto $\prod \omega_n$ poderemos, em certos casos, determinar a sua natureza pelo estudo das séries (17. 1) e (17. 2). Ao contrário do que acontece nestes casos na aplicação prática dos critérios de convergência de produtos infinitos que demos atrás não há que considerar série alguma. Como dissemos o estudo da natureza dum produto infinito pode fazer-se por intermédio duma série. Inversamente o estudo da natureza duma série pode fazer-se também por intermédio dum produto infinito. Assim se provarmos que $\prod \omega_n$ é convergente fica provada a convergência da série (17. 1) e no caso de ser $u_n > 0$ fica assegurada a convergência da série (17. 2) por um teorema conhecido.

Damos agora um exemplo duma série cuja convergência se pode provar por meio de um produto infinito.

Seja

$$(17.\ 3) \qquad \sum_0^\infty \frac{(2n+3)^{\frac{1}{2^n}} - (n+1)^{\frac{1}{2^n}}}{(n+1)^{\frac{1}{2^n}}}$$

o termo geral pode escrever-se

$$u_n = \frac{(2n+3)^{\frac{1}{2^n}}}{(n+1)^{\frac{1}{2^n}}} - 1 .$$

Consideremos o produto infinito

$$(17.\ 4) \qquad \prod_0^\infty (1 + u_n) = \prod \left(\frac{2n+3}{n+1} \right)^{\frac{1}{2^n}}$$

é fácil ver que é $\frac{2n+3}{n+1} > 1$ para $n > -1$

e portanto o factor geral do produto (17. 4) é superior à unidade. Por consequência o termo geral da série (17. 3) é positivo.

Podemos escrever sucessivamente:

$$2n < 3n, \quad 2n+3 < 3(n+1)$$

donde

$$\frac{2n+3}{n+1} < 3$$

e daqui

$$\left(\frac{2n+3}{n+1}\right)^{\frac{1}{2^n}} < 3^{\frac{1}{2^n}}$$

e pela proposição II do § 3 podemos afirmar que o produto (17. 4) converge o mesmo acontecendo pois à série (17. 3).

NOTA — *Todos os teoremas a que nos referimos sem dar a demonstração se podem encontrar em* VICENTE GONÇALVES, *Curso de Álgebra Superior (1944), excepto os teoremas de* CATALAN *e* ABEL *mencionados respectivamente nos §§ 5 e 10.*

MOVIMENTO MATEMÁTICO

«SESIONES DE MATEMÁTICA» DA U. M. A.

Integradas nas comemorações do 150.º aniversário da independência da Argentina, tiveram lugar em Buenos Aires e La Plata, de 22 a 27 de Setembro de 1960, promovidas pela Unión Matemática Argentina, «Sesiones de Matemática» que congregaram um numeroso grupo de cientistas.

Do Brasil foram especialmente convidados, e apresentaram trabalhos: LEOPOLDO NACHBIN e ELON LAGES LIMA (do IMPA), CANDIDO DA SILVA DIAS, MÁRIO SCHONBERG e CHAIM HÖNING (da Universidade de S. Paulo), K. T. CHEN (do ITA), A. PEREIRA GOMES e JOSÉ MORGADO (do I. F. M.).

Entre os matemáticos estrangeiros assinalamos ainda a presença de ANTÓNIO MONTEIRO, CHARLES EHRESMANN, A. ZYGMUND, S. LEFSCHETZ, P. ALEXITS e S. EILENBERG.

FUNDAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA

No momento em que transitava pelo Congresso Nacional o Projecto de Lei que cria a Fundação da Universidade de Brasília, a Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência promoveu no Rio de Janeiro, em Outubro de 1960, uma «Mesa redonda» de cientistas afim de discutir e assentar as linhas gerais da organização da futura Universidade, destinada a constituir, no Brasil, novo padrão de trabalho universitário.

Para tratar das questões relativas ao Instituto Central de Matemática da Universidade de Brasília, foram convocados para esta «Mesa Redonda» os Profs. LEOPOLDO NACHBIN (do IMPA) e A. PEREIRA GOMES (do IFM.).

Pròximamente, a «Gazeta de Matemática», publicará um esquema da estrutura da Universidade de Brasília.

NOTICIÁRIO

Em Setembro de 1960 foi criado, na Universidade de S Paulo, o *Instituto de Pesquisas Matemáticas*, com as seguintes finalidades: *a*) promover e estimular o estudo e pesquisas nos domínios da Matemática Pura e Aplicada; *b*) colaborar para a formação de pesquisadores e pessoal docente superior no sector da Matemática.

— Realizar-se-á, em Julho de 1961, o *3.º Colóquio Brasileiro de Matemática*, com a participação de todas as instituições universitárias brasileiras dedicadas às Ciências Matemáticas, e para o qual estão sendo convidados alguns matemáticos estrangeiros interessados no desenvolvimento científico deste país.

— O Conselho Nacional de Pesquisas designou, para exercer as funções de membro do Conselho Orientador do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) do Rio de Janeiro, com mandato de três anos, o Prof. A. PEREIRA GOMES do I. F. M. da Universidade do Recife.

— No I. F. M. da Universidade do Recife, teve início em Outubro de 1960 um seminário de Estatística Matemática sobre «Análise de Variância», dirigido pelo Prof. M. ZALUAR NUNES, com a colaboração do Prof. JOSÉ MORGADO.

M. Z. e P. G.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de frequência — 19-1-1961.

5346 — Considere os seguintes conjuntos de números complexos:

$$C_1 = \{z : z^6 - 2z^3 + 1 = 0\}$$
$$C_2 = \{z : z^5 + 2z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0\}$$

Como são constituídos os conjuntos

$$C_1 \cup C_2 \,, \quad C_1 \cap C_2 \quad \text{e} \quad C_2 - C_1 \,?$$

5347 — Determine as raízes de índice 4 de um complexo sabendo que uma delas é $3 + 4i$.

Designando por $[A\ B\ C\ D]$ o quadrado de vértices nas imagens das raízes, seja $[A'\ B'\ C'\ D']$ o quadrado que resulta do primeiro por uma rotação de $+\frac{\pi}{4}$ em torno da origem.

Diga qual o complexo cujas raízes de índice 4 são representadas por A', B', C', D'.

5348 — Mostre que $(\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x)$ é um infinitésimo com x de parte principal $\frac{1}{2}x$ e aproveite o resultado para calcular

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + 2x)^5}{\operatorname{cosec} x - \operatorname{cotg} x}\,.$$

5349 — Sabendo que $\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

a) — Verifique que a sucessão

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

é decrescente e

$$v_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \log n \quad (n = 2, 3, \cdots)$$

é crescente.

b) — Mostre que as duas sucessões convergem para o mesmo limite, compreendido entre 0 e 1.

F. R. Dias Agudo

F. C. L. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — Janeiro 1961.

Ponto 1

5350 — 1 *a*) Intervalo de convergência da série

$$\sum_1^\infty (-1)^n \frac{(2x+1)^n}{n(n+3)}$$

1 *b*) Natureza nos extremos e soma no extremo inferior.

2 *a*) Calcular

$$\lim_n 3n^2 \left[\log(n+2) - \log n - \frac{2}{n}\right].$$

2 *b*) Prove que sucessão limitada de t. g. u_n tem algum sublimite u'. Se u_n decresce, caracterize u' relativamente ao conjunto $\{u_n\}$; justifique.

3) Discuta a natureza das séries dos termos de sinal constante em série convergente.

4 *a*) Se $f(x)$ é contínua entre 0 e $\alpha > 0$ e $f(+\infty) = \infty$, prove que este limite é qualificado.

4 *b*) Calcule a soma da série

$$\sum_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^n}$$

e prove que é descontínua de ambos os lados da origem.

Ponto 2

5351 — 1 *a*) Calcule o raio de convergência R da série

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n 1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n+1)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n+2)^2} x^n$$

1 *b*) Natureza para $x = R$.

1 *c*) Natureza para $x = -R$.

2) Defina convergência uniforme de uma sucessão. Estude deste ponto de vista

$$u_n(x) = \frac{n}{x^2 + n}\,.$$

3) Discuta (justificando) a natureza de

$$\prod_{1}^{\infty} [1 + (-1)^n a_n] \quad \text{com} \quad a_n \downarrow 0 .$$

4) Prove que função contínua em conjunto limitado e fechado

a) é limitado

b) tem valores máximo e mínimo.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — Curso de Engenharia — 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — Fevereiro de 1961.

5352 — 1) Estudar e resolver o sistema de equações lineares (nas incógnitas: x, y, z, t)

$$\begin{cases} x + 3y - 2z - 2t = 0 \\ 2x - y - z = 0 \\ x - y + 2z - 2t = 0 \\ y + 2z - 3t = 0 . \end{cases}$$

Achar as soluções que satisfazem também à equação $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 1 = 0$.

2) Mostrar que, sendo $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vectores linearmente independentes, e $\vec{w}$ um vector que *não é* combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, então os três vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são linearmente independentes.

3—a) Determine a equação cartesiana de um plano que passe pelo eixo dos xx (de um certo referencial orto-normal) e faça 60° com o plano coordenado XOY desse mesmo referencial.

b) Calcular os cosenos directores do eixo do plano obtido.

c) Escrever equações cartesianas de uma recta do plano obtido, que seja paralela ao plano XOY, e diste dele 4 unidades.

4—a) Exprimir o *máximo divisor comum* dos polinómios $A = X^4 + X + 1$ e $B = X^3 - 1$ como combinação linear de A e B, recorrendo ao algoritmo de Euclides.

b) Decompor em factores primos sobre R o polinómio de $R[X]$, $f = (X^4 - 81)(X^3 - 27)(X^3 + 2X - 3)$. Justificar.

5) Seja L o conjunto dos pares ordenados (a, b) de números reais a e b. Definindo entre esses pares uma *adição* pela regra: $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ — e uma *multiplicação* pela regra: $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$, averiguar se L fica ou não dotado de uma *estrutura de corpo*.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — Curso de Engenharia — 1.º exame de frequência — 2.ª chamada — Fevereiro de 1961.

5353 — 1) Calcular a e C de modo que o sistema de equações lineares (nas incógnitas: x, y, z, t)

$$\begin{cases} x + y + 4t = 3 \\ y - z + 3t = a \\ x - 2y + 3z - 5t = 0 \\ 3x - y + 4z = 5 \end{cases}$$

seja *duplamente indeterminado.*

2) Mostrar que três vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ são *linearmente dependentes* sempre que uma das seguintes condições se verifique: a) um deles seja nulo; b) dois deles sejam iguais.

3—a) Calcular a distância do ponto $A(1-1, 2)$ à recta r de equações paramétricas $x = 1 - 2\lambda$, $y = 3\lambda$, $z = 4$. $(\lambda \in R)$. Supõe-se orto-normal o referencial adoptado).

b) Escrever depois a equação da esfera, tangente ao plano XOY, cujo centro é a intersecção da recta r com o plano XOZ.

4) Decompor em elementos simples de $C(X)$ a fracção racional $\dfrac{-12X^2 + 4}{(X^2 + 1)^3}$.

5—a) Seja L o conjunto dos vectores cujas duas primeiras componentes x_1 e x_2 satisfazem à equação $5x_1 - x_2 = 1$. Averiguar se L tem a estrutura de *espaço vectorial sobre R* (em relação às operações: *adição* e *multiplicação por um número real*, definidas para vectores quaisquer).

b) Resolver o mesmo problema para o conjunto M dos vectores cujas duas primeiras componentes x_1 e x_2 obedecem à condição $x_1 - 3x_2 = 0$.

F. C. P. — Matemáticas Gerais — Curso de Engenharia — Exercício de revisão — Março de 1961.

5354 — 1) Seja λ um número real, e C o conjunto das somas $\lambda + \varepsilon$, onde ε designa um número positivo arbitrário.

a) Mostrar que C é limitado inferiormente, mas não é limitado;

b) Calcular $\inf C$, justificando a resposta.

2) Classificar as seguintes séries:

a) $\sum_{1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}-1}$ (usando critérios de comparação);

b) $\sum_{1}^{\infty} a_n$, com $\begin{cases} a_{2n-1} = \dfrac{2}{5 \times 3^n} \\ a_{2n} = \dfrac{1}{4 \times 3^n} \end{cases}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(recorrendo ao critério de D'Alembert).

3) Definindo *soma* de duas sucessões reais $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ mediante a regra: $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$, e *produto* (de uma sucessão real $\{a_n\}$) *por um número real* λ, mediante a regra: $\lambda\{a_n\}=\{\lambda a_n\}$, averiguar se o conjunto $\mathcal{F}$ das sucessões reais *fundamentais* (ou de Cauchy) fica dotado da *estrutura de espaço vectorial sobre* R.

4) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \cdots, \{c_n\}$ sucessões reais em número finito; chamando *envolvente superior* dessas sucessões à sucessão real $\{s_n\}$, cujo termo de ordem n se calcula pela igualdade: $s_n = \mathrm{Max}\cdot(a_n, b_n, \cdots, c_n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ — averiguar se a envolvente superior de sucessões reais *convergentes* (em número finito) é ainda uma sucessão convergente, indicando (no caso afirmativo) o respectivo limite.

5) Mostre que, se é convergente a série de termos reais $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, onde $r \neq 0$, também converge a série $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\,|x|^n$, para todo o número real x tal que $|x|<|r|$.

Indicação: Notar que é convergente, e portanto *limitada* a sucessão real $\{a_n r^n\}$.

NOTA — Na elaboração dos precedentes enunciados, teve-se em conta o facto seguinte, que fortemente condiciona, desde 1958, o ensino da cadeira de Matemáticas Gerais na Faculdade de Ciências do Porto: em virtude da carência de pessoal docente e salas de aula, tornou-se impossível proporcionar aos numerosíssimos alunos inscritos nessa cadeira (1200, no corrente ano lectivo) *as* duas *aulas práticas por semana prescritas por lei, sendo* uma *apenas dada em cada turma. (E mesmo assim, cada turma comporta por vezes 60 alunos).*

A. Andrade Guimarães

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.ª prova prática de informação — 8-2-1961.

I

5355 — Determine o parâmetro $\alpha > 0$ por forma que a recta $y = x + 1$ seja tangente à circunferência *c*) $x^2 + y^2 - 2x - 2\alpha y + \alpha^2 - 1 = 0$.

Considere uma translacção do sistema de eixos coordenados xOy para um sistema $x'O'y'$ de modo que O' seja o centro da circunferência *c*). Escreva, no novo sistema, a equação da elipse de centro em O', de excentricidade $1/2$ e cujo semi-eixo maior é o raio de *c*) e está sobre $O'x'$.

Qual a equação da elipse no primitivo sistema de eixos coordenados?

R: *A circunferência tem o centro no ponto* $(1, \alpha)$ *e raio igual a* $\sqrt{2}$. *Para que* $y = x + 1$ *seja tangente a* c) *é necessário que a distância do centro de* c) *à recta seja igual a* $\sqrt{2}$. *Então,* $\sqrt{2} = \frac{|\alpha - 1 - 1|}{\sqrt{2}}$, *donde* $|\alpha - 2| = 2$ *e* $\alpha = 4$ *ou* $\alpha = 0$. *Como se pede* $\alpha > 0$, *a solução é* $\alpha = 4$.

As fórmulas de translação são $x = x' + 1$ *e* $y = y' + 4$. *A equação da elipse no sistema* $x'O'y'$ *obtém-se fàcilmente pois* $a = \sqrt{2}$ *e* $c = ae = \frac{\sqrt{2}}{2}$ *donde* $b^2 = a^2 - c^2 = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. *A equação é* $\frac{x'^2}{2} + \frac{2y'^2}{3} = 1$.

No sistema xOy *a equação da elipse é* $\frac{(x-1)^2}{2} + \frac{2(y-4)^2}{3} = 1$.

II

5356 — 1) Sendo a, b, k, números reais, mostre que, com $a > b$ e $k > 0$, se tem $ak > bk$.

2) Determine os módulos e os argumentos principais das raízes da equação $x^6 - 2x^3 + 1 = 0$.

R: 1) *Sendo* $a > b$, *considerem-se entre* b *e* a *os números racionais* r *e* $s > r$, *e determinem-se depois* k_1 *e* k_2 *por forma que*

$$1 < \frac{k_2}{k_1} < \frac{s}{r} \quad ou \quad s k_1 > r k_2 .$$

Como $r = b_2, s = a_1$, *vem* $a_1 k_1 > b_2 k_2$ *e portanto* $ak > bk$.

2) *Fazendo* $x^3 = y$ *vem* $y^2 - 2y + 1 = 0$, *equa-*

ção que tem uma raiz dupla $y=1$. *Então* $x=\sqrt[3]{y}=$ $=\sqrt[3]{1}$.

$$x_0 = \cos 0 + i \operatorname{sen} 0 = 1$$

$$x_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

todas raízes duplas.

III

5357 — 1) Sendo $B \subset A$, prove a relação.

$$A \cup (B \cap C) = A.$$

2) Dado o conjunto $A=\left\{\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right), \left]\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right], \left(2+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right\}(n=1,2,\cdots)$ indique, justificando todas as respostas:

a) pontos interiores, pontos exteriores, pontos de acumulação e pontos fronteiros de A;

b) limites de Weierstrass de A; Tem o conjunto elemento mínimo? E elemento máximo?

c) O conjunto A é aberto? É fechado?

R: 1) *Se*

$$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow \begin{cases} x \in A \\ \textit{ou} \\ x \in B \cap C \therefore \textit{ se } x \in B \cap C \Rightarrow x \in B \\ \textit{e como } B \subset A \Rightarrow x \in A. \end{cases}$$

Em qualquer dos casos pois,

$$\textit{Se } x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A.$$

Reciprocamente,

$$\textit{Se } x \in A \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C).$$

2 a) *Pontos interiores: todos os pontos de*

$$\left]\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right[.$$

Pontos exteriores:

$$R - \left\{\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right), \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right], \left(2+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)\right\}.$$

Pontos de acumulação:

$$\left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right], 1, 2.$$

Pontos fronteiros:

$$\left(1-\frac{(-1)^n}{n}\right), \frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \left(2+\frac{(-1)^n}{n^2}\right).$$

b) $l=\frac{1}{3}$ *e* $L=\frac{9}{4}$. *Não tem elemento mínimo e tem elemento máximo* $\frac{9}{4}$.

c) *O conjunto não é aberto porque não é só constituído por pontos interiores. Também não é fechado porque não contém todos os seus pontos próprios de acumulação* $\left(\textit{falta } \frac{1}{3}\right)$.

IV

1) Mostre que $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{n^{2\alpha}-(n^2-1)^\alpha}{n^{2(\alpha-1)}} = \alpha$.

2) Estude a série $\sum \dfrac{x^n}{n^\beta}$.

R: 1) $$\lim_{n=\infty} \frac{n^{2\alpha}-(n^2-1)^\alpha}{n^{2(\alpha-1)}} =$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{n^{2\alpha}\left[1-\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^\alpha\right]}{n^{2\alpha}\cdot n^{-2}} =$$

$$= \lim n^2\left[1-\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^\alpha\right] = \lim_{n=\infty} n^2 \cdot \alpha \frac{1}{n^2} = \alpha.$$

2) $$\lim_{n=\infty} \frac{\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)^\beta}}{\dfrac{|x|^n}{n^\beta}} = |x| \lim_{n=\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^\beta = |x|.$$

Se $|x|<1$ *a série é absolutamente convergente. É divergente quando* $|x|>1$. *O comportamento da série para* $|x|=1$ *estuda-se do seguinte modo:*

$$|x|=1\begin{cases} x=1 \Rightarrow \sum \dfrac{1}{n^\beta} \begin{cases} \textit{absolutamente convergente} \\ \textit{com } \beta>1; \\ \textit{divergente com } \beta\leqslant 1; \end{cases} \\ x=-1 \Rightarrow \sum \dfrac{(-1)^n}{n^\beta} \begin{cases} \textit{absolutamente convergente} \\ \textit{com } \beta>1; \\ \textit{simplesmente convergente} \\ \textit{com } 0<\beta\leqslant 1; \\ \textit{divergente com } \beta\leqslant 0. \end{cases} \end{cases}$$

Quanto à convergência uniforme da série, pode garantir-se que (para qualquer valor de β*) a série é uniformemente convergente em qualquer intervalo*

$[-r, r]\ (r < 1)$. *Mas pode-se ir mais além, aplicando o teorema de* Abel:

Com $\beta > 1$, *a série converge em* $x = 1$ *e* $x = -1$ *e então é uniformemente convergente em* $[-1, 1]$. *Com* $0 < \beta \leqslant 1$, *a série converge em* $x = -1$ *e então e uniformemente convergente em qualquer intervalo* $[-1, r]\ (r < 1)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 21-2-1961.

I

5358 — 1) Defina as médias aritmética, geométrica e harmónica e apresente as relações que as ligam. Mostre que o conceito geral de média abrange, como casos particulares, aquelas médias (dispensa-se a demonstração no caso da média geométrica).

2) Deduza a fórmula de Moivre e utilize-a para achar os valores de n que tornam real o complexo $(1+i)^n$.

3) Defina as operações lógicas sobre conjuntos e demonstre que $U-(A\cup B)=(U-A)\cap(U-B)$, onde U é o conjunto universal.

R: 2) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$(1+i)^n=(\sqrt{2})^n\left(\cos n\frac{\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}\right)$$

Para que $(1+i)^n$ *saia real é preciso que*

$$\mathrm{sen}\,\frac{n\pi}{4}=0$$

ou $\dfrac{n\pi}{4}=k\pi$, *donde* $n=4k$ (k *inteiro positivo, negativo ou nulo*).

3) *Se* $x \in U-(A\cup B) \Rightarrow x\in U$ *e* $x \notin A\cup B \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x\in U \text{ e } x\notin A \Rightarrow x \in U-A \\ x\in U \text{ e } x\notin B \Rightarrow x\in U-B\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\in(U-A)\cap(U-B).$$

Recìprocamente,

$$\text{Se } x\in(U-A)\cap(U-B)\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x\in U-A \\ \text{e} \\ x\in U-B\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x\in U \text{ e } x\notin A \\ \text{e} \\ x\in U \text{ e } x\notin B\end{matrix}\right\}\Rightarrow x\in U \text{ e}$$

$$x\notin A\cup B\Rightarrow x\in U-(A\cup B).$$

II

5359 — 1) Deduza as fórmulas $\log(1+u)=\eta u\ (\eta\to 1$ quando $u\to 0)$ e $(1+v)^\alpha=1+\alpha\tau v$ $(\tau\to 1$ quando $v\to 0)$.

Indique os pontos de acumulação do conjunto $\{u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots\}$ com $u_n=\left(1-\dfrac{\alpha}{n}\right)^n$ e

$$v_n=\frac{(n+1)^{1/3}-n^{1/3}}{\beta\, n^{-2/3}}\ (\beta>0).$$

Em que caso a sucessão $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots$ tem limite? Porquê?

2) Defina convergência absoluta de uma série e demonstre que $\sum\limits_0^\infty (a_n-a_{n+1})\,x^n$ $(a_n \geqslant a_{n+1}$ e $a_n\to a$ (finito)) é absolutamente convergente em $[-1, 1]$. Calcule a soma da série quando $x=1$ e mostre que, para $x=-1$, vem $|R_n|\leqslant a_n-a_{n+1}$.

Prove que a série é uniformemente convergente em $[-1, 1]$.

Considere a função $g(x)=\sum\limits_0^\infty (a_n-a_{n+1})\,x^n$ e estude a sua continuidade em $[-1, 1]$.

3) Defina a função $\Gamma(x)$ e prove que $\Gamma(x+1)=x\,\Gamma(x)$.

R: 1) *Os pontos de acumulação do conjunto são* $e^{-\alpha}$ *e* $\dfrac{1}{3\beta}$, *limites de* u_n *e* v_n, *respectivamente. A sucessão* $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots$ *tem limite quando* $e^{-\alpha}=\dfrac{1}{3\beta}$ *ou* $\alpha=\log 3\beta$.

2) *A série* $\sum\limits_0^\infty (a_n-a_{n+1})\,x^n$ *é uma série de potências visìvelmente convergente para* $x=1$ *(série de* Mengoli *com* $a_n\to a$ *finito) e* $x=-1$. *Ainda mais, é absolutamente convergente para esses valores de* x. *Aplicando uma propriedade bem conhecida das séries de potências,* $\sum\limits_0^\infty (a_n-a_{n+1})\,x^n$ *converge absolutamente em qualquer ponto mais próprio da origem: converge pois absolutamente em* $[-1, 1]$.

Para $x=1$ *a soma da série é* a_0-a *e para* $x=-1$, *se a série é alternada decrescente, vem* $|R_n|\leqslant a_n-a_{n+1}$.

Como a série converge para $x=1$ *e* $x=-1$, *o teorema de* Abel *permite concluir que ela é uniformemente convergente em* $[-1, 1]$.

O teorema de Arzelà *diz que a condição necessária e suficiente para que* $g(x)$ *seja contínua num ponto de* *continuidade dos termos é que a convergência da série seja quási-uniforme nesse ponto. Ora* $g(x)$ *é uniformemente convergente em* $[-1, 1]$ *e portanto é uniformemente convergente em cada ponto deste intervalo e, como a convergência uniforme é uma modalidade de convergência quási-uniforme, é evidente que* $g(x)$ *é contínua em* $[-1, 1]$.

III

5360 — 1) A função $f(x)$ tem derivada finita em $]a, b[$. Mostre que $f(x)$ é contínua em $]a, b[$ e que assume aí todo o valor compreendido entre os seus limites de Weierstrass l e L.

Supondo que $w(a) = w(b) = 0$, que pode concluir àcerca de $f(a+0)$ e $f(b-0)$? Porquê?

Estude a continuidade e derivabilidade de $h(x) = \begin{cases} x^2 & (x < -1 \text{ e } x > 0) \\ 1 & (x = 0) \\ -x & (-1 \leqslant x < 0) \end{cases}$ e apresente a representação geométrica de $h(x)$.

2) Enuncie e demonstre a regra de primitivação por partes.

3) Seja $\varphi(x)$ regular em $]-\infty, +\infty[$ e $\varphi(-\infty) = \varphi(+\infty)$. Prove que, havendo apenas um ponto daquele intervalo em que $\varphi'(x)$ se anula, um dos extremos de $\varphi(x)$ coincide com $\varphi(-\infty)$ (ou $\varphi(+\infty)$).

R: 1) *A função* $h(x)$ *é descontínua apenas em* $x = 0$ *pois* $\lim_{x=+0} h(x) = \lim_{x=-0} h(x) = 0 \neq h(0) = 1$.
Quanto à derivabilidade, tem-se $h'(x) = 2x$ $(x < -1$ *e* $x > 0)$; $h'(0) = \pm\infty$ *pois* $h'_d(0) = \lim_{x=+0} \frac{x^2-1}{x} = -\infty$ *e* $h'_e(0) = \lim_{x=-0} \frac{-x-1}{x} = +\infty$; $h'(-1)$ *não existe pois* $h'_d(-1) = \lim_{x=-1+0} \frac{-x-1}{x+1} = -1$ *e* $h'_e(-1) = \lim_{x=-1+0} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência extraordinário — 10-3-1961.

I

5361 — 1) Defina raiz índice n do número real $b > 0$ e prove que ele tem uma (e uma só) raiz n positiva.

2) Indique a fórmula de Moivre generalizada e empregue-a para escrever a expressão que dá as raízes índice n da unidade positiva. Fazendo

$$w_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n},$$

mostre que as raízes índice n da unidade são $1, w_n, w_n^2, \cdots w_n^{n-1}$ e que $1 + w_n + w_n^2 + \cdots + w_n^{n-1} = 0$.

3) Defina produto cartesiano de dois conjuntos A e B. Prove que um intervalo de R^2 pode interpretar-se como produto cartesiano de dois intervalos de R.

II

5362 — 1) Defina limite máximo e limite mínimo de uma sucessão.

Demonstre que é finito ou nulo o número de termos u_n que excede um número superior ao limite máximo.

Sendo $\lim u_n = -\infty$, diga em que condições existe $\lim u_n$.

Prove que se $\frac{y_{n+1}}{y_n} \to A$ $(y_n > 0)$, então $\sqrt[n]{y_n} \to A$.

Calcule

$$\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n\, e^{-\log n}}}.$$

2) Enuncie o teorema de Kummer e deduza o critério de Raabe.

Se $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 + \frac{k}{n}$, a série $\sum a_n$ é convergente ou divergente? Porquê?

Diga em que consiste a multiplicação de séries. Que particularidades notabilizam o produto de Cauchy?

3) Prove que produto infinito de termos positivos é convergente ou divergente com a série dos seus termos. Estude a natureza de

$$\prod_1^\infty \left[1 + \left(1 + \frac{\log n}{n}\right)^n\right].$$

R: 1) *Como* $\lim_{n=\infty} \frac{\log(n+1)}{(n+1)\, e^{-\log(n+1)}} \cdot \frac{n\, e^{-\log n}}{\log n} = \lim_{n=\infty} \frac{e^{\log(n+1)}}{e^{\log n}} = 1$, *vem* $\lim_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{\log n}{n\, e^{-\log n}}} = 1$.

2) *De* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 + \frac{k}{n}$, *tira-se* $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{k}{n^2}$ *e o critério de* Gauss *permite concluir imediatamente que* $\sum a_n$ *é sempre divergente.*

3) *Considerando a série dos termos* $\sum\left(1 + \frac{\log n}{n}\right)^n$,

fàcilmente se vê que é divergente pois $\sqrt[n]{\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^n} \to 1+0$. *O produto infinito, que é de termos positivos, diverge também.*

III

5363 – 1) Que se entende por função contínua num conjunto fechado? Enuncie os teoremas de DINI, WEIERSTRASS e CANTOR e demonstre o segundo.

2) Deduza a regra para elasticiar um produto de funções.

3) Prove que duas funções com a mesma derivada finita diferem por uma constante.

Enuncie o teorema de CAUCHY para as funções regulares e mostre que ele inclui o teorema de LAGRANGE.

Enunciados e soluções de Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITESIMAL

Academia Militar — CÁLCULO INFINITÉSIMAL — 6.ª cadeira — 3.º exame de frequência — 1960-1961.

5364 – 1 Teorema fundamental do cálculo integral.

2 – *a*) Quando é que se diz que a expressão diferencial

$$X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz$$

é uma diferencial exacta?

b) Mostre que

$$\left[x\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}} + k\right] dx + y\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,dy + \\ + z\,(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\,dz$$

com k constante, é uma diferencial exacta e determine uma das suas funções primitivas.

3 – Calcule

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\;dy$$

sendo D o domínio limitado pela elipse.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

4 – Determine o volume da parte da esfera

$$x^2+y^2+z^2=2$$

que é interior ao paraboloide

$$x^2+y^2=z\,.$$

5 – *a*) Teorema de RIEMANN-GREEN.

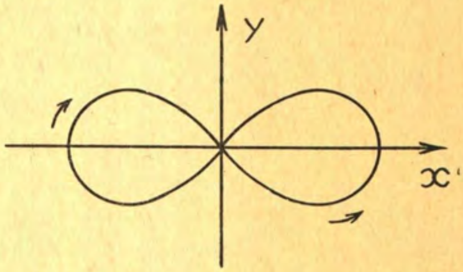
b) Por recurso ao teorema a que se refere a alínea anterior calcule o valor do integral curvilíneo

$$\int_{(C)} x\,y\,dx + x\,y\,dy$$

sendo (C) a lemniscata

$$(x^2+y^2)^2 - x^2 + y^2 = 0$$

percorrida no sentido figurado.



Academia Militar – CÁLCULO INFINITESIMAL – Algumas questões saídas nos primeiros exames de frequência da 6.ª cadeira no ano lectivo de 1960-1961.

5365 – 1) Mostre que a função

$$f(x,y,z) = \sqrt{y^4+z^4} - \frac{x^2\,y}{z}$$

é homogénea e verifique com ela o teorema de EULER.

2) Verifique se as funções

$$u = \log(x+y)$$
$$v = x^2+y^2+2\,x\,y+1$$

são ou não funcionalmente dependentes. Caso afirmativo determine a relação que há entre elas.

3 — *a*) Plano tangente e normal a uma superfície num ponto ordinário.

b) Mostre que as equações

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$$
$$z = r\,\mathrm{cotg}\,\alpha$$

são equações paramétricas duma superfície cónica de revolução de vértice na origem e semi-abertura α.

4) Determine a menor e a maior distância do ponto $P(1,1,1)$ à superfície

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4z.$$

5) A parábola $y^2 = x + 1$ divide o círculo limitado pela circunferência $x^2 + y^2 = 3$ em duas regiões. Determine a área da região de menor área.

A. César de Freitas

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. — Mecânica Racional — **1.º Exame de Frequência — Janeiro de 1961.**

I

5366 — *a*) Campos projectivos: sua definição. Prove que um campo projectivo fica determinado pelo seu valor em três pontos não colineares.

b) Prove que se um campo projectivo se anula num ponto, existe uma recta passando por esse ponto tal que o campo se anula em qualquer ponto da recta referida. (Utilize o facto de que todo campo projectivo é campo de momentos).

II

5367 — *a*) Equivalência de sistemas de vectores. Prove que todo sistema de vectores é equivalente a um sistema constituído por um vector e um binário.

b) Considere dois sistemas de vectores, S_1 e S_2, ambos equivalentes a um vector único (um para cada sistema).

Sejam $\overline{R}_1$ e $\overline{R}_2$ os seus vectores soma, e A_1 e A_2 dois pontos quaisquer dos respectivos eixos centrais. Mostre que o momento do sistema $S_1 + S_2$ em relação a um ponto qualquer O se pode escrever com a forma

$$\overline{M}_0 = (\overline{R}_1 + \overline{R}_2) \wedge (O - A_1) + \overline{R}_2 \wedge (A_1 - A_2)$$

Mostre, a partir desta expressão, que o automomento do sistema $S_1 + S_2$ é

$$V = R_2 \wedge (A_1 - A_2) / R_1$$

e conclua daí que a condição necessária e suficiente para que o sistema $S_1 + S_2$ seja equivalente a um vector único é que os dois eixos centrais sejam complanares.

III

5368 — Considere num plano $X^1 O X^2$ com a métrica habitual $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2$ um sistema de coordenadas polares.

a) Calcule as componentes contravariantes do tensor métrico nestas coordenadas.

b) Determine as componentes contravariantes em coordenadas polares do vector grad U em que U é uma função da distância polar y^1.

b) Calcule o laplaceano de U, usando as definições seguintes:

$$\mathrm{grad}\, U = \left(a_i = \frac{\partial U}{\partial y^i}\right)$$

$$\mathrm{div}\,(a) = \sum_{k=1}^{2} \frac{D\, a^k}{D\, y^k}$$

$$\mathrm{lap}\, U = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\, U).$$

IV

5369 — Considere um invariante U e o sistema de 2.ª ordem $a(i,k) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^i\, \partial x^k} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^k\, \partial x^i}$.

Determine a sua lei de transformação e diga que conclusão se pode tirar do resultado.

V

5370 — Prove que $\dfrac{D(a^i b_k)}{D x^r} = \dfrac{D a^i}{D x^r} b_k + a^i \dfrac{D b_k}{D x^r}$.

5371 — As coordenadas vectoriais de um sistema de vectores em relação à origem O das coordenadas são

$$\overline{R} = \overline{e}_1 + \alpha\, \overline{e}_2 - \overline{e}_3$$
$$\overline{M}_0 = (\beta - 1)\, \overline{e}_1 - \overline{e}_3$$

Determine um sistema de vectores equivalentes ao primeiro, formado por um vector e um binário cujo momento seja perpendicular ao plano

$$P = A + \lambda\,(\overline{e}_1 - \overline{e}_3) + \mu\,(\overline{e}_1 + \overline{e}_3).$$

Analise em particular os casos em que os parâmetros α e β se anulam.

Enviado por António R. S. Neto

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame final — 2.ª chamada — 11-10-1960.

5372 — 1) Dada uma superfície de revolução por uma geratriz torsa e o eixo, determine o cone das normais num paralelo dado.

2) Dada uma superfície regrada por duas directrizes rectilínias, não complanas, e uma recta do infinito (ou plano director) fixe um ponto numa das directrizes próprias. Determine o plano tangente nesse ponto.

3) No espaço projectivo a três dimensões considere os pontos $[\xi_0', \xi_1', \xi_2', \xi_3']$ e $[\xi_0'', \xi_1'', \xi_2'', \xi_3'']$. Escreva as equações da recta que os une. Justifique.

4) Considere três pontos A, B e C de um espaço euclideano a duas dimensões, tais que $\overrightarrow{AB}$, e AC são ortogonais. Verifique o teorema de Pitágoras para esses três pontos.

(Obs: A distância entres dois pontos é o comprimento do vector por eles definido).

F. C. L. — Geometria Descritiva — 2.ª frequência — 1960.

5373 — 1) Dada uma forma bilinear em R_3

$$3\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3 - 2\,x_1\,y_2 + 2\,x_1\,y_3$$

determine a redução da forma quadrática associada e verifique que a forma bilinear é não degenerada.

2) Dado em P_4 (espaço projectivo a 4 dimensões) o subespaço

$$\xi_0 + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 = 0$$

determine as equações do subespaço intersecção deste com o hiperplano de coordenadas pluckerianas $\{1, 0, 0, 1, 1\}$, directamente e por dualidade. Verifique as dimensões.

3) Dado um cone pelo seu traço horizontal e vértice, determine um plano tangente comum ao cone e a uma esfera, plano que tenha o ponto de contacto com a esfera sobre uma circunferência dada de nível.

4) Dado um cone pela directriz circular e o vértice (não de revolução), fixe um plano que o corte segundo uma elipse e determine um ponto da secção de tangente paralela ao $\beta_{2,4}$.

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame final — 1.ª chamada — 2-7-1960.

5374 — 1) Coloque dois cilindros, de traço horizontal circular, de modo que a sua intersecção seja um arrancamento. Determine os planos limites, um ponto da intersecção e a tangente nesse ponto.

2) Dados dois pontos P e Q determine um plano que passe por P, esteja a uma distância dada de Q e faça um ângulo de 45° com o plano horizontal. Condição de possibilidade.

Sugestão — Observe que o plano pedido é tangente a um cone de concordância *conveniente* de uma esfera, cone de eixo vertical.

3) Prove que um subespaço projectivo de dimensão $n \geqslant 3$, contém com cada três pontos não colineares o plano por eles definido. Como relaciona a parte imprópria do subespaço com a totalidade das partes impróprias dos planos em causa?

4) No espaço R_n, cuja multiplicidade associada tem a métrica euclidiana, determine o hiperplano que passa pelo ponto $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ e é perpendicular à recta $\dfrac{x_1 - a_1}{p_1} = \cdots = \dfrac{x_n - a_n}{p_n}$. Recorda-se que dois subespaços lineares são perpendiculares se e só se os vectores das respectivas submultiplicidades associadas o são.

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame final — 2.ª chamada — 5-7-1960.

5375 — 1) Dada uma superfície de revolução, determine um plano tangente à superfície, que passe por um ponto dado Q e tenha o ponto de contacto sobre um meridiano, cuja plano faz um ângulo de 45° com a Linha de Terra.

2) Dado um cone de 2.ª ordem, não circular, fixe um plano, que o corte segundo uma curva com uma assíntota. Determine essa assíntota.

3) A multiplicidade vectorial $\mathfrak{M}$ pode escrever-se como soma $(\mathfrak{M}', \mathfrak{M}'')$ de dois submultiplicidades de intersecção nula (só o vector nulo). Mostre que a

decomposição $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' + \mathfrak{a}''$ de um vector qualquer $\mathfrak{a} \in \mathfrak{M}$, com $\mathfrak{a}' \in \mathfrak{M}'$ e $\mathfrak{a}'' \in \mathfrak{M}''$ é unívoca.

4) Mostre que se dois vectores $\mathfrak{a}$ e b são linearmente dependentes então é $P(\mathfrak{a}, b)^2 = Q(\mathfrak{a}) \cdot Q(b)$. Será verdadeira a inversa?

F. C. L. — Geometria Descritiva — Exame final — 1.ª chamada — 8-10-960.

5376 — 1) Dada uma superfície de revolução por uma geratriz torsa e o eixo, fixe um paralelo. Determine o cone de concordância ao longo desse paralelo.

2) Dada uma superfície regrada por três directrizes rectilíneas não complanares duas a duas, fixe um ponto numa delas. Determine a normal à superfície nesse ponto.

3) Dados os pontos $[1, 1, 3]$ e $[2, 1, 5]$ de um espaco projectivo a duas dimensões, determine as coordenadas pluckerianas da sua recta união.

4) Sejam $A(a_1, \cdots, a_n)$ e $B(b_1, \cdots, b_n)$ dois pontos dum espaço euclidiano. Suponha que estas coordenadas foram determinadas em relação a um referencial $O_0(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \cdots, \mathfrak{n}_n)$ em que $\mathfrak{n}_1, \cdots, \mathfrak{n}_n$ formam um sistema de vectores ortonormados.

Escreva e justifique a equação genérica de um hiperplano perpendicular à recta definida por A e B.

(Obs: Dois subespaços dizem-se perpendiculares se as submultiplicidades o são).

F. C. L. — Geometria Descritiva — 1.ª frequência — 1961.

5377 — 1) Verifique que os vectores $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 1\,1)$ formam uma base de multiplicidade vectorial a três dimensões, a que pertencem.

Obtenha um sistema equivalente, usando o vector $(1, 2, 1)$.

2) Mostre que a dimensão da soma de duas submultiplicidades de uma mesma multiplicidade vectorial é a soma das dimensões se e só se dois vectores quaisquer, não nulos, um de cada submultiplicidade foram linearmente independentes.

3) Considere um plano definido por um ponto e por uma recta do $\beta_{2,4}$. Determine o ângulo desse plano com um plano de nível dado.

Nota – Resolva, de preferência, sem LT.

4) Considere duas rectas enviezadas, uma das quais de topo. Efectue uma rotação de modo que o segmento que mede a distância entre as rectas dadas, apareça em verdadeira grandeza na sua projecção horizontal.

Faça um relatório esquemático do 3.º e 4.º problemas.

M. Alzira Santos

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

139 — Edouard Lucas — **Récréactions Mathématiques** — Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 8 N. F. cada volume.

Trata-se de uma reedição, nova tiragem da 2.ª edição, do célebre livro de Eduardo Lucas, *Recreações Matemáticas*. O livro é bem conhecido e o seu elogio está feito. Publicado pela primeira vez em 1891, é esta portanto a 3.ª edição de que agora aparece o 1.º volume, saindo os restantes 2.º, 3.º e 4.º à razão de um por mês. O livro estava esgotado há muito e esta reedição que é uma reprodução fotográfica da anterior, traz, àqueles que se interessam pelos jogos e recreações matemáticas, um livro clássico indispensável por um preço acessível. Este primeiro volume cujo sumário é o seguinte: as travessias, as pontes, os labirintos, as rainhas, o solitário, a numeração, o aneleiro, o jogo do 15, tem ainda um índice bibliográfico, segundo ordem cronológica, dos principais livros, memórias e extractos de correspondências, que foram publicados sobre aritmética de posição e geometria de situação (como lhe chama Lucas).

É um belo e útil livro que não perdeu a sua actualidade e originalidade digno de figurar em qualquer biblioteca matemática e em especial nas das Escolas Técnicas e Liceus.

J. S. P.

140 – Edouard Lucas – **Théorie des Nombres, Tome Premier** – Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 25 N. F.

Outro livro reimpresso pela Livraria Blanchard de que só muito excepcionalmente se conseguia exemplar à venda. Esta reedição com prefácio de M. G. Bouligand, é uma reprodução fotográfica da 1.ª edição de 1880. Lucas é conhecido por muitos trabalhos sobre a Teoria dos Números em especial sobre a Teoria dos Números Primos. Muitos resultados interessantes foram devidos ao seu talento de calculador e a sua morte prematura não lhe permitiu concluir esta obra que se ficou pelo Tomo I. Não só resultados mas um método para a determinação da primogeneidade de grandes números se perdeu com a sua morte. O presente livro foi para a sua época um livro avançado e ainda hoje tem originalidade e interesse.

Eis os títulos dos principais capítulos:

Números inteiros; Números Racionais; A Divisibilidade Aritmética.

É um livro que completa uma biblioteca matemática.

J. P.

141 — Claude Gaspar Bachet — **Problèmes Plaisants et délectables qui se font par les nombres** — — Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris 6.e, 9 N. F.

A Livraria Blanchard está reeditando uma série de livros de matemática franceses desde há muito esgotados e que fazem falta em qualquer livraria matemática em especial nas bibliotecas escolares. Está neste caso o livro do Sieur de Meizirac que esta livraria dá agora à estampa em reimpressão da 5.ª edição, aumentada com um prefácio de J. Itard que muito valoriza o livro. Ele só por si já era, no seu ramo, um livro apreciado e citado por todos os livros de recreações matemáticas posteriores. É um belíssimo livro que se aconselha vivamente a quem se interessa por estes assuntos, tanto mais que o seu custo é relativamente baixo.

J. P.

142 — Edouard Lucas — **Recherches sur l'Analyse Indéterminée et l'Aritmétique de Diophante** — Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris 1961, 8 N. F.

A livraria Blanchard continua a reedição de obras clássicas francesas esgotadas, de grande interesse para o estudioso que necessite ou goste de ler os originais de trabalhos fundamentais. De Edouard Lucas publicaram-se já, como noticiámos, as Recreações Matemáticas de que lemos o vol. I, mas das quais, sabemos, já foram publicados os restantes volumes; a Teoria dos Números e agora as «Recherches sur l'Analyse Indéterminée». Como todos os trabalhos de de Lucas é este escrito numa linguagem clara num estilo *parfois lyrique*, como diz o prefaciador desta edição J. Itard. É dos primeiros trabalhos de Lucas publicado «Bulletin de la Société d'émulation du Département de l'Allier». Trata-se de um trabalho de Análise Diofantina, como indica o título mas a matemática aqui utilizada é elementar. Estamos longe, quando a este ponto, de questões mesmo da teoria dos números que para se abordarem necessitam de conhecimentos profundos de análise. O assunto está ao alcance dos alunos dos primeiros anos da licenciatura, e trata da resolução das equações indeterminadas do terceiro e quarto graus. Aborda equações que foram tratadas por Fermat, Euler e Lagrange mas de que se ignorava, então, a solução geral, dando uma solução mais simples das equações de Lagrange.

$$x^4 - 2\,y^4 = \pm\, z^2$$

e

$$x^4 + 8\,y^4 = z^2\,.$$

Apresenta demonstrações muito simples dos teoremas de Fermat sobre triângulos rectângulos cujos lados são expressos por números inteiros e sobre as respectivas áreas.

É um livro curioso que sob uma forma elementar trata delicados problemas de análise indeterminada.

J. S. P.

143 — A. Monjallon — **Introduction aux Mathématiques Modernes** — Librairie Vuibert, Paris, Boulevard Saint-Germain, 1960, 20 N. F.

Estão os franceses desde há tempo publicando livros elementares sobre as Matemáticas Modernas, e não podia deixar de ser assim; a influência dos trabalhos de Bourbaki tinha de se fazer sentir até no ensino elementar em França, já que por toda a parte no mundo ela se exerce hoje e com intensidade crescente, em face dos apelos que a técnica faz cada vez mais à lógica e aos modernos métodos da matemática.

Estes novos livros tem a limpidez e clareza dos livros franceses, haja em vista os de Lucienne Felix de que demos notícia ùltimamente. Não foge à regra o de A. Monjallon. É um óptimo livro de iniciação às matemáticas modernas, muito simples, muito claro e cheio de exemplos comesinhos e acessíveis. O sumário do índice dará ideia dos assuntos tratados:

Cap. I. *Os conjuntos*, noções, existência, propriedades.

Cap. II. *A propósito de conjuntos*, relações fundamentais entre conjuntos, conjuntos especiais.

Cap. III. *Operações sobre conjuntos*, intersecção, reunião e complemento; dualidade.

Cap. IV. *Relações*, ordinárias e matemáticas. Propriedades. Extensão da noção de relação.

Cap. V. *Funções*, aspectos fundamentais. Tipos especiais de funções.

Cap. VI. *Da linguagem matemática*, proposições, leis da álgebra das proposições, quantificadores.

Cap. VII. *Um pouco de axiomática*, sistema matemático, modelos, regras de demonstração, sistemas dedutivos.

Cada capítulo termina com bastantes exercícios onde o leitor encontra ainda matéria que lhe faz aprofundar a exposição do texto.

Em resumo um bom livro para iniciação, apesar de ter em alguns pontos, como por exemplo, na teoria das relações exemplos que se podem prestar a crítica, mas cuja análise trás melhor conhecimento das questões tratadas.

J. P.

144 — Proceedings of the International Congress of Mathematicians 1958 — Cambridge University Press, 1960, Cambridge, 65 sh.

Este volume é o repositório oficial dos trabalhos apresentados no Congresso Internacional dos Matemáticos, realizado em Edinburgo em Agosto de 1958.

Às listas dos matemáticos que constituiram os diversos comités e subcomités do Congresso e das entidades que o subvencionaram, segue-se a descrição dos diversos programas científicos distribuidos da forma indicada:

19 conferências de 1 hora por convite do Comité de Organização;

37 conferências de 1/2 hora por convite do Comité de Organização.

Pequenas comunicações distribuidas pelas seguintes secções:

Secção I	— Lógica e fundamentos:	23 com.
Secção II A	— Álgebra:	106 »
Secção II B	— Teoria dos números:	
Secção III A	— Análise Clássica:	174 »
Secção III B	— Análise Funcional:	
Secção IV	— Topologia:	39 »
Secção V A	— Geometria algébrica:	59 »
Secção V B	— Geometria diferencial:	
Secção VI	— Probabilidade e Estatística:	53 »
Secção VII A	— Matemáticas Aplicadas:	126 »
Secção VII B	— Física Matemática:	
Secção VII C	— Análise numérica:	
Secção VIII	— História e Educação:	25 »

Ainda na introdução são publicados o relatório apresentado pelo Secretário de Congresso, os discursos de abertura e de encerramento do prof. Hodge, Presidente do Congresso, as apreciações dos trabalhos que levaram o Comité de Prémios a homenagear o Dr. Klaus F. Roth (Universidade de Londres) e o Prof. René Thom (Universidade de Estrasburgo).

O volume contém efectivamente as conferências dos Profs. Alexandrov «Desenvolvimento recente da Teoria das Superfícies», Bogolicbov e Vlarimirov «Sobre alguns problemas matemáticos da teoria quântica dos campos», H. Cartan «Sobre as funções de várias variáveis complexas: os espaços analíticos», C. Chevalley «A Teoria dos grupos algébricos», W. Feller «Sobre novas relações entre probabilidade e análise clássica», L. Garding «Problemas sobre equações de derivadas parciais lineares», A. Grothendieck «Teoria coomológica das variedades abstratas algébricas», Hirzebruch «Variedades complexas», Kleene «Lógica Matemática: operações construtivas e não-construtivas», Lanczos «Problemas generalizados de condições de fronteria», Pontrjagin «Métodos de regulação óptima», Roth «Aproximações racionais dos números algébricos», M. Schiffer «Problemas de extremo e métodos variacionais na representação conforme», Temple «Linearização e deslinearização», Thom «Das variedades trianguladas às variedades diferenciaveis», Uhlenbeck «Alguns problemas fundamentais na física estatística», Wielandt «Via do desenvolvimento nas estruturas dos grupos finitos», E. W. Beth «Resultados correctos para os sistemas formais», Kreisel «Lógica ordinal e a caracterização dos conceitos informativos de prova», Markov «Insolubilidade do problema da homeomorfia», G. Higman «Os métodos do anel de Lie na teoria dos grupos finitos nilpotentes», B. Linnik «Sobre os problemas de divisores e suas relações com os problemas aditivos binários», Roquette «Alguns problemas fundamentais sobre os campos abelianos de funções», Shimura «Funções automorfas e correspondências modulares», Arnold «Algumas questões de aproximação e representação de funções», L. Bers «Espaços de superfícies de Riemann», H. Grauert «As superfícies de Riemann da teoria das funções de muitas variaveis», M. Heins «Funções de característica limitada e representações de Lindelöf», Lions «Problemas mixtos abstractos», Menchov «Sobre a convergência das séries trigonométricas», Minakshisundaram «Álgebras de Hilbert», Bela-Nagy «Conjuntos espectrais e dilatações normais de operadores», R. Bott «Aplicação da teoria de Morse à topologia dos grupos de Lie», A. Kosinski «Sobre alguns problemas relacionados com a topologia das variedades», Papakyriakopoulos «A teoria das variedades tri-dimensionais desde 1950», S.-S. Chern «Geometria diferencial e Geometria integral», Matsusaka «A polarização das variedades algébricas e algumas das suas aplicações», MILNOR e KERVAIRE «Números de BERNOULLI, grupos de homotopia e um teorema de ROHLIN», NAGATA «Sobre o XIV problema de HILBERT», NIJENHUIS «Aspectos geométricos das operações diferenciais formais sobre campos de tensores», P. SAMUEL «Relação de equivalência na geometria algébrica», B. Segre «Sobre as geometrias de GALOIS», H.-C. WANG «Alguns aspectos geométricos de conjuntos de espaços dos grupos de LIE», K.-L. CHUNG «Parâmetro contínuo das cadeias de MARKOV», GNEDENKO «Sobre teoremas limites da teoria das probabilidades», RÉNYI «Métodos probabilísticos na teoria dos números», L. SAVAGE «Tendencias recentes nos fundamentos da estatística», H. LEHMER «Métodos da variável discreta na análise numérica», HOFMANN «Sobre um trabalho de EUCLIDES que é atribuído a ALBERTUS MAGNUS» KUREPA «Alguns princípios da educação matemática».

*

* *

Esta obra não é um livro didático. Vista no seu conjunto tem o alto interesse de traduzir a síntese do desenvolvimento da Matemática durante um período de quatro anos, expressa através de trabalhos apresentados em Congresso Internacional, onde se reuniram cêrca de dois mil e quinhentos matemáticos.

Pelo que aqui se expõe e pelo que daqui se depreende, fàcilmente se julgará do desenvolvimento em ritmo cada vez mais acelerado das Ciências de uma maneira geral e da Matemática em particular, não falando já das consequentes implicações nas diversas actividades da vida corrente possível nos nossos dias.

Quem como nós vive bastante afastado da realidade científica da época actual, pode servir-se destes «Proceedings» como duma janela aberta sobre o Mundo das Matemáticas.

J. G. T.

145 — JEAN FERRANDON — **Cours de Mécanique — Collection École Nationale Supérieure des Télécommunications** - Eyrolles Editeur. Paris 46 N F.

Este curso de Mecânica destina-se aos alunos--engenheiros que terminaram as classes de Matemáticas Especiais (os que frequentam portanto os primeiros anos da Universidade); contribue portanto com um complemento de conhecimentos científicos com vista às aplicações práticas da mecânica. Esta orientação no sentido da técnica distingue particularmente a obra de FERRANDON das restantes de carácter essencialmente teórico. Torna-se assim de grande utilidade aos engenheiros que terão de utilizar métodos e resultados de mecânica no exercício da sua profissão.

Como objectivo duma tal actividade é a realização dum dispositivo material, o Autor na apresentação dos problemas tem em atenção três etapas sucessivas: estabelecimento dum esquema de cálculo a partir do dispositivo a estudar orientando-se pelas suas características essenciais; estudo mecânico desse esquema de cálculo por meio de princípios e teoremas gerais expostos; extensão dos resultados obtidos ao dispositivo real.

O Autor insiste sobre a importância da primeira etapa. Esta operação é facilitada se se consideram, com as aproximações requeridas pelas aplicações técnicas, os sistemas materiais redutíveis a corpos rígidos e a meios contínuos deformáveis, sólidos ou fluídos, sujeitos a transformações contínuas.

É assim que a mecânica dos sistemas de corpos indeformáveis e a mecânica dos sistemas de corpos contínuos e deformáveis constituem as duas partes da obra que se desdobra desde a exposição sintética dos princípios ao limiar das aplicações técnicas.

O leitor encontrará, neste livro, desde o estudo da dinâmica dos fenómenos naturais, da resistência das estruturas, do funcionamento e da navegação de foguetões até o da propagação por ondas e vibrações.

As teorias gerais são exemplificadas com exercícios resolvidos que lhes precisam o sentido e o alcance e por problemas relacionados com questões técnicas de actualidade.

Assim concebida, a obra de FERRANDON, constitue um valioso elemento de trabalho.

Para os nossos estudantes das disciplinas de mecânica racional o curso tem real interesse.

É certo que por um lado começa por um capítulo que, regra geral, só é considerado a meio dos programas das nossas escolas — «a mecânica dos sistemas de corpos indeformáveis»: admitem-se já sólidos conhecimentos de cinemática dos pontos e sistemas de pontos materiais e geometria das massas. Mas em contra partida o aluno encontra problemas e questões, resolvidos sob a forma de aplicação, que se enquadram em assuntos de grande interesse prático.

São assim expostos: casos de movimento de rodas em contacto com solos rugosos, de automóveis em rampa e foguetões em aceleração; estudo dos mecanismos diferenciais, das hélices com duas, três e mais pás. No estudo dos choques temos o caso da aterragem de um avião; no das oscilações, o das pulsações próprias dum veículo com suspensão por amortecedores, o das pulsações próprias de sistemas giroscopicos, o da estabilidade de um regulador de velocidade, pulsações próprias na flutuação etc. De forma equivalente se desenvolve o estudo dos sistemas materiais contínuos e deformáveis o que constitue a segunda parte do livro e o ocupa desde a página 115 até a 350. A terceira parte consta de 56 questões propostas e desenvolve-se até à página 370.

J. G. T.

146 — Marie-Antoinette Tonnelat — **Les Principes de la Théorie Électromagnétique et de la Relativité**, Masson et Cie. Editeurs — Paris.

Este livro apresenta uma exposição completa e precisa dos princípios fundamentais sobre que assenta a teoria de electromagnetismo, e Relatividade restrita e Relatividade geral.

Foi escrita com espírito didático, destinando-se a estudiosos com conhecimentos correspondentes à licenciatura em física e desejosos de se iniciarem nas teorias clássicas actuais.

O objectivo da obra é insistir sobre os motivos que conduziram à edificação destas teorias e sobre as experiências mais acessíveis que permitiram verificar-lhes a validade. É por isso que a Autora prefere dar uma exposição lógica das ideias de base em vez de introduzir uma axiomática a priori.

Neste espírito são primeiramente apresentadas sumàriamente (noventa páginas) as ideias directrizes da teoria electromagnética de Maxwell: os primeiros quatro capítulos recordam os princípios fundamentais da electrostática, da magnetostática e do electromagnetismo. As fórmulas são apresentadas no formalismo vectorial clássico e o Leitor não necessita de conhecimentos de cálculo tensorial.

Na segunda parte (capítulos V a X, cento e sessenta páginas), expõem-se os princípios e o desenvolvimento da Relatividade restrita.

A Autora expõe algumas das dificuldades de ordem experimental que conduziram a diversas tentativas e sugestões de novas teorias e levaram Einstein há 56 anos a edificar a Relatividade restrita. É neste momento que naturalmente indica o formalismo matemático apropriado à teoria: o formalismo quadri-dimensional de um espaço de métrica hiperbólica normal, ou seja o espaço-tempo de Minkowski; ao mesmo tempo desenvolve as novas cinemática e dinâmica, teoria de Maxwell linear e teoria electromagnética não linear.

A Relatividade Restrita não é apenas uma teoria do campo pròpriamente dita mas constitue a base em que deve repousar a teoria clássica ou quântica do campo. A teoria electromagnética de Maxwell, muito antes de 1905, era já relativista: o seu formalismo deveria apresentar-se plenamente concordante com os princípios da Relatividade Restrita.

Isto significa que já no século XIX existiu totalmente edificada uma teoria clássica e relativista do campo electromagnético. Pelo contrário só em 1916 se estruturou uma teoria clássica e relativista do campo de gravitação.

Terminando a segunda parte, a Autora expõe as principais consequências experimentais da teoria e respectiva verificação: efeito Döppler (experiências Ives e Stilwell), vida média dos mesões, choque relativista entre partículas, energia nuclear.

A terceira parte do livro (capítulos XI a XIII, noventa páginas) é consagrada à Relatividade geral.

A lei de Coulomb — construída sobre o modelo da de Newton — integra-se de uma forma perfeita na teoria electromagnética de Maxwell, teoria do campo, como vimos.

Em oposição, a lei de Newton não estando por si associada a nenhuma teoria do campo baseada na existência de acções contínuas, manteve-se sempre refractária a todas as tentativas da criação de uma teoria relativista do campo de gravitação.

Foi então postulando uma «equivalência local» entre as forças de inércia e as forças de gravitação, que se conseguiu atingir o duplo objectivo:

a) Justificar a identidade entre os conceitos de massa grave e massa inerte.

b) Estender aos referenciais acelerados o princípio da Relatividade Restrita.

Nesta terceira parte a Autora continua a não apresentar de chofre uma axiomática, mas a justificar os fundamentos da teoria com razões lógicas e experimentais. Insiste, em particular sobre a significação de princípios da equivalência e sobre problemas que constituem uma espécie de ponte entre a Relatividade restrita e a Relatividade geral: paradoxo dos relógios, problema do disco, etc.

Em seguida expõe os pontos essenciais da Relatividade geral: no que respeita as soluções rigorosas, a obra contém um estudo da de Schwarzchild (caso da simetria esférica) e as aplicações clássicas experimentais que dela decorrem: avanço de perihélio de Mercúrio, desvio das frequências para o vermelho curvatura dos raios luminosos no campo da gravitação. Para as soluções aproximadas, a Autora apresenta uma dedução das equações do movimento das partículas neutras a partir das correspondentes equações do campo.

Os desenvolvimentos puramente matemáticos: cálculo tensorial no espaço euclideano, álgebra e análise tensoriais numa variedade afim e particularmente num espaço de RIEMANN, são expostos em Apendíce nos últimos três capítulos (cinquenta páginas). Desta maneira o desenvolvimento dos princípios da Física não é interrompido por considerações de ordem matemática que poderiam desviar a atenção do Leitor.

Nos últimos tempos numerosas obras dedicadas à Relatividade Restrita têm sido publicadas. «Esta situa a referida teoria nas perspectivas que a precederam e a seguiram: o electro-magnetismo e a Relatividade Geral. Aqui são destacadas as mais simples ideas de base destas teorias e as suas ligações com a experiência. Os fundamentos das teorias clássicas do campo fazem aparecer notável encadeamento de ideas impostas pelos factos, guiado por um formalismo rigoroso e verificado pelas suas consequências».

J. G. T.

147 — MAURICE GODEFROY — **Mathématiques Générales. Synthèse Élémentaire** — Gauthier-Villars, Paris.

Nunca conseguimos compreender bem qual a função do epítome, analisando-o atravez da óptica do utilizador, evidentemente.

No nosso ensino, se por um lado existe entre os alunos «menos interessados» a tendência de resumir as lições do professor, fazendo até resumos do resumo afim de «melhor fixarem» o programa, por outro existem não poucas disciplinas cujos orientadores fazem a apologia de que «o necessário é saber-se utilizar o formulário» para que os futuros técnicos se possam desembaraçar convenientemente, na vida prática.

Esta atitude de formação, justificação e aceitação da inconsciência profissional conduz aos mais desastrosos resultados pedagógicos.

Do que conhecemos acerca do ensino francês estamos convencidos de que a situação é um pouco melhor, neste ponto.

É com surpresa pois que vemos aparecer o presente livro e com embaraço que aceitamos dele fazer uma apreciação bibliográfica.

O editor apresenta-o: «dans le présent ouvrage se trouve condensé en 171 pages l'essentiel de ce qu'il faut savoir pour aborder l'étude de n'importe quelle branche des sciences mathématiques Eliminant le superflu, supprimant l'érudition, il expose en un raccourci substantiel les notions premières sur lesquelles reposent le Calcul infinitésimal, la Géométrie analytique, la Mécanique rationnelle.

Le souci d'une parfaite rigueur joint à la préoccupation d'écarter toute spéculation dénuée d'utilité pratique ont dominé la pensée de l'auteur.

De plus, l'enchaînement logique des diverses disciplines, considérées non isolément, mais comme parties intégrantes d'un même corps de doctrine, a été sauvegardé avec une attention constante, de sorte que l'ensemble des matières traitées se déroule de façon solide et cohérente: tâche ingrate mais garante d'une réussite propre à satisfaire l'esprit.

Autre exigence dont il a été tenu compte à l'extrême, celle de la clarté dans la suite des raisonnements se développant avec simplicité, à l'aide de notations significatives et uniformes, sans équations et formules numérotées, sans continuels retours en arrière.

Enumération sommaire des sujets:

I. *Algèbre* — Nombres — Variable — Limite — Fonction — Continuité — Séries — Approximations — Différentielles — Dérivées — Intégrales.

II. *Géométrie vectorielle* — Orientation — Vecteurs — Contours — Angles — Trigonométrie.

III. *Géométrie analytique plane* — Coordonnées — Droites — Courbes planes — Cercle — Fonctions circulaires — Ellipse — Parabole — Hyperbole — Equations focales de ces courbes — Aires — Volumes — Courbure.

IV. *Géométrie analytique spatiale* — Coordonnées — Plan — Droite — Courbes — Courbure.

V. *Mécanique* — Mouvement — Temps — Trajectoire — Vitesse — Accélération — Force — Attraction».

Folheando-o não lhe encontramos uma fórmula, uma idea, a demonstração de um teorema (por vezes se demonstram teoremas, quase sempre se justificam as afirmações) que não figure nos variados e excepcionalmente bons livros de texto, publicados pela grande e honesta casa editora Gauthier-Villars, e tão utilizados e apreciados pela juventude estudiosa da França e de outros países.

Portanto em face desta obra, bem organizada, estruturada e escrita, apreciando-a do ponto de vista da sua utilidade, repetimos, apenas podemos perguntar:

Para quê?

J. G. T.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor — GAUTHIER-VILLARS, Paris

T. Doetsch — *Introduction à l'utilisation pratique de la transformation de Laplace.*

Études Relativistes

H. Arzeliès — *Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement.*
M. Parodi — *Introduction à l'étude de l'Analyse Symbolique.*
G. Polya — *Les Mathématiques et le Raisonnement «Plausible».*

Cahiers Scientifiques

J. Favard — *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique. Tome II.*

Editor — LIBRAIRIE VUIBERT, Paris

Lentin et Rivaud — *Éléments d'Algèbre Moderne.*
J. Rivaud — *Exercices d'Analyse. Tome I et Tome II.*

Editor — SOCIÉTÉ D'EDITION D'ENGEIGNEMENT SUPÉRIEUR, Paris

J. Grey — *Mathématiques Préparatoires aux Sciences Expérimentales.*

Editor — CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE, Paris

J. Lavoine — *Calcul Symbolique, Distributions et Pseudo-fonctions.*

Editor — LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE Albert Blanchard, Paris

J. F. Montucla — *Histoire des Mathématiques.*
A. M Ampère — *Théorie Mathématique des phénomènes electro-dynamiques.*
J. Hadamard — *Essai sur la psychologie de l'invention dans le donnaire Mathématique.*
Gauss — *Recherches arithmétiques*
A. M Legendre — *Théorie des nombres.*
C. Jordan — *Traité des substituitions et des équations algébriques.*

Editor — CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, Cambridge

L. G. Slater — *Confluent Hypergeometric Functions.*
D. G. Northcott — *An Introduction to Homological Algebra.*
P. J. Hilton & S. Wylie — *Homology Theory — An introduction to Algebraic Topology.*
E. A. Maxwell — *Advanced Algebra, part I.*
Snell & Morgan — *New Mathematics — A unified course, I and II.*

Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics
G. L. Watson — *Integral Quadratic Forms.*

Editor — DENNIS DOBSON, London

Irving Adler — *The New Mathematics.*

Editor — VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

M. A. Neumark — *Normierte Algebren.*
Otakar Borůvka — *Grundlagen der gruppoid-und gruppentheorie.*

Mathamatische Monographien
Gerhard Ringel — *Färbungsprobleme auf flächen und graphen.*

Mathematische Forschungsberichte
A. N. Kolmogoroff und W. M. Tichomirow — *Arbeiten zur Informationstheorie III.*
A. W. Pogorelow — *Einige untersuchungen zur Riemannschen Geometrie im grossen.*
H. Hornich — *Existenzprobleme bei linearen partiellen Differentialgleichungen.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1961 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1961, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automaticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.os 51 a 81 — cada número simples	17$50
N.os 51 a 81 — » » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA-2 — Telefone 369449