GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXI — N.° 81 — OUT.-DEZ. 1960

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 369449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de *prévio* acordo entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 369449 — LISBOA-2.

ANO XXI — N.º 81 **GAZETA DE MATEMÁTICA** OUT./DEZ. — 1960

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 36 94 49 — LISBOA 2

Sobre a determinação analítica das direcções principais das secções planas de uma quádrica

por **F. R. Dias Agudo**

Neste artigo vamos indicar como a teoria dos vectores próprios e valores próprios de uma matriz permite determinar, de forma simples e elegante, as direcções principais das secções planas de uma quádrica. Seguimos, nas suas linhas gerais, a exposição de Grotemeyer em *Analytische Geometrie* (1), mas desenvolveremos alguns pontos não completamente esclarecidos neste livro.

1. Notações.

a) $P = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \{x \ y \ z\}$ é uma matriz coluna que representará ou o ponto de coordenadas cartesianas x, y, z num sistema triortogonal de referência $OXYZ$, ou o vector de posição $\overrightarrow{OP} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3$.

b) $P = P_0 + \rho\, U$ é a equação paramétrica (em forma matricial) da recta que passa pelo ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ e é paralela ao vector $U = \{h \ k \ l\}$.

Se U é unitário, tem-se $h^2 + k^2 + l^2 = 1$, h, k, l são então os cosenos directores da recta, e a distância orientada de P_0 a P é dada por ρ.

Se U não for unitário, as distâncias de $P_1(\rho_1)$ e $P_2(\rho_2)$ a P_0 são proporcionais a ρ_1 e ρ_2.

c) $P = P_0 + \lambda\, U + \mu\, V$ é a equação do plano que passa por P_0 e é paralelo aos vectores U e V. Tem-se $(P - P_0) \mid U \times V = 0$, pelo que a equação do plano se pode escrever $W^T(P - P_0) = 0$, onde W é o vector coluna com as coordenadas do produto externo $U \times V$ (vector normal ao plano) e W^T representa o vector linha transposto de W.

Uma equação da forma $W^T P + d = 0$ representa, pois, um plano perpendicular ao vector W.

2. Equação geral de uma quádrica. Planos diametrais.

A forma mais geral da equação de uma quádrica (em coordenadas cartesianas) é

$$(1) \quad \begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{14}x &+ \\ + \ a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + 2a_{24}y &+ \\ + \ a_{33}z^2 + 2a_{34}z &+ \\ + \ a_{44} &= 0, \end{aligned}$$

(1) Ver Bibliografia.

expressão a que pode dar-se a forma matricial

$$(2)\qquad [x\ y\ z\ 1]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}=0$$

com $a_{ij}=a_{ji}$.

A matriz simétrica $A=[a_{ij}]$ é a matriz da quádrica. Fragmentando-a em

$$A=\begin{bmatrix} \mathcal{a} & \Lambda \\ \Lambda^{\mathrm{T}} & a_{44} \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{a}$ submatriz de 3.ª ordem, e

$\Lambda=|a_{14}\ \ a_{24}\ \ a_{34}|=[a_{41}\ \ a_{42}\ \ a_{43}]^{\mathrm{T}}$,

e pondo $|x\ \ y\ \ z\ \ 1|=|P\ \ 1|$, a equação (2) toma a forma

$$(3)\qquad [P^{\mathrm{T}}\ 1]\begin{bmatrix} \mathcal{a} & \Lambda \\ \Lambda^{\mathrm{T}} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P \\ 1 \end{bmatrix}=0.$$

Efectuando a multiplicação por blocos vem

$$(4)\qquad P^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,P+2\,\Lambda^{\mathrm{T}}P+a_{44}=0,$$

que é apenas outra forma de escrever a equação (1).

Se quisermos determinar os pontos em que uma recta $r\equiv P=P_0+\rho\,U$ encontra a quádrica, não temos mais que substituir P por $P_0+\rho\,U$ na equação (4), e determinar as raízes da seguinte equação do 2.º grau em ρ, que assim se obtém:

$$(5)\qquad \rho^2\,U^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,U+2\,\rho\,(P_0^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,U+\Lambda^{\mathrm{T}}U)+ \\ +P_0^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,P_0+2\,\Lambda^{\mathrm{T}}P_0+a_{44}=0.$$

Se forem $P_1(\rho_1)$ e $P_2(\rho_2)$ os pontos comuns à recta e à superfície, o ponto P_0 será o ponto médio da corda $\overline{P_1\,P_2}$ se $\rho_1+\rho_2=0$, i. e.,

$$P_0^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,U+\Lambda^{\mathrm{T}}U=0$$

ou, o que é o mesmo, $U^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,P_0+U^{\mathrm{T}}\Lambda=0$.

Fixando U e variando P_0, a expressão $P=P_0+\rho\,U$ passa a representar uma família de rectas paralelas a U; e a condição anterior mostra que os pontos médios de todas as cordas da quádrica com a direcção considerada pertencem ao plano

$$(6)\qquad U^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,P+U^{\mathrm{T}}\Lambda=0$$

ou seja

$$(6')\qquad (\mathcal{a}\,U)^{\mathrm{T}}P+U^{\mathrm{T}}\Lambda=0.$$

Este plano [perpendicular ao vector $\mathcal{a}\,U$ como se viu no § 1, c)] recebe o nome de *plano diametral conjugado* com a direcção de U.

A dedução feita exige $U^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,U\neq 0$ para que ambas as raizes de (5) sejam finitas; se for $U^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,U=0$ podemos continuar a chamar plano diametral conjugado com a direcção U ao plano de equação (6), mas trata-se então de uma definição puramente analítica, sem o significado geométrico correspondente ao caso $U^{\mathrm{T}}\mathcal{a}\,U\neq 0$.

3. Direcções principais e planos principais.

Um plano diametral diz-se *principal* (ou de *simetria*) quando é perpendicular à direcção com que é conjugado; e esta direcção também se diz então uma *direcção principal* da quádrica.

Daqui e de (6') resulta que para que U nos dê uma direcção principal da quádrica (4) deve ter a direcção do vector $\mathcal{a}\,U$, i. e.

$$\mathcal{a}\,U=\lambda\,U;$$

e U será então um vector próprio da matriz $\mathcal{a}$, e λ o correspondente valor próprio ou raiz característica. A equação do plano principal correspondente pode escrever-se $\lambda\,U^{\mathrm{T}}P+U^{\mathrm{T}}\Lambda=0$.

Deve observar-se que a dedução da equação (6) exige $\mathcal{a}\,U\neq O$. Se for $\mathcal{a}\,U=O$ o plano torna-se impróprio (se $U^{\mathrm{T}}\Lambda\neq 0$) ou indeterminado (se $U^{\mathrm{T}}\Lambda=0$); mas convém designar por direcção principal toda a direcção que satisfaça $\mathcal{A} U = \lambda U$ mesmo com $\lambda = 0$.

E podemos enunciar o seguinte

TEOREMA 1. *As direcções principais da quádrica de matriz* $A = \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \Lambda \\ \Lambda^T & a_{44} \end{bmatrix}$ *são dadas pelos vectores próprios da submatriz* $\mathcal{A}$.

Se for $\mathcal{A} U = \lambda U$, *o plano principal correspondente à direcção* U *tem por equação* $\lambda U^T P + U^T \Lambda = 0$; *e se for* $\lambda = 0$ *o plano é impróprio ou indeterminado.*

Da teoria dos valores próprios e vectores próprios de uma transformação linear (e de uma matriz), com a qual supomos o leitor familiarizado, resulta agora este outro

TEOREMA 2. *Toda a quádrica tem pelo menos um plano principal a distância finita. Se as três raízes características* λ_i *de* $\mathcal{A}$ *são distintas, a quádrica tem três direcções principais, perpendiculares duas a duas. Se* $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, *à raiz* λ_3 *corresponde uma direcção principal, e à raiz dupla correspondem infinitas direcções principais, todas perpendiculares àquela; e se a raiz dupla é diferente de zero, a quádrica é de revolução em torno de um eixo com a direcção correspondente a* λ_3.

Se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$, $\mathcal{A}$ *é matriz escalar, e qualquer direcção do espaço é direcção principal; a superfície é uma esfera.*

4. Direcções principais das secções planas de uma quádrica.

Estudemos agora a secção feita na quádrica de equação (4) pelo plano

(7) $$\pi \equiv U^T P + d = 0$$

onde U, que podemos supor de módulo igual a 1, é vector normal ao plano.

Por uma conveniente transformação ortogonal de coordenadas, pode levar-se o plano secante a ser o plano $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$; e nesse novo sistema de referência os pontos comuns ao plano e à quádrica são soluções de um sistema da forma

$$\begin{cases} \hat{a}_{11}\hat{x}^2 + 2\,\hat{a}_{12}\hat{x}\hat{y} + 2\,\hat{a}_{13}\hat{x}\hat{z} + 2\,\hat{a}_{14}\hat{x} + \cdots = 0 \text{ (1)} \\ \hat{z} = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\begin{cases} b_{11}\hat{x}^2 + 2\,b_{12}\hat{x}\hat{y} + 2\,b_{13}\hat{x} + b_{22}\hat{y}^2 + 2\,b_{23}\hat{y} + b_{33} = 0 \\ \hat{z} = 0. \end{cases}$$

A primeira destas equações (que representa a cónica secção, considerada como linha do plano $\hat{X}\hat{O}\hat{Y}$) é análoga à de uma quádrica (com uma variável a menos), e pode assumir a forma

$$P^T \mathcal{B} P + 2\,\Gamma^T P + b_{33} = 0$$

com $P = \{x\ y\}$, $\mathcal{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ e $\Gamma = \{b_{13}\ \ b_{23}\}$.

Tal como no teorema 2, pode afirmar-se que *se as duas raízes características de* $\mathcal{B}$ *são distintas, a cónica tem duas direcções principais* (2) *perpendiculares entre si; e se as duas raízes são iguais, qualquer direcção do plano da cónica é direcção principal, sendo a curva uma circunferência.*

É nosso propósito, no entanto, determinar as direcções principais da secção sem recorrer à transformação de coordenadas anteriormente referida.

Tome-se, para isso, um vector V que seja paralelo a π, i. e.,

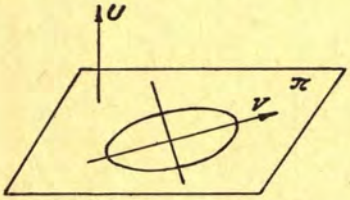
(8) $$V^T U = 0 = U^T V.$$

---

(1) [Equação análoga a (1)].

(2) Definição análoga à que foi dada para as quádricas.

V dar-nos-á uma direcção principal da cónica (secção feita por π na quádrica) se



for perpendicular à direcção conjugada, e, portanto, à intersecção de π com o plano diametral da quádrica conjugado com V.

Este plano, definido por $V^T \mathcal{A} P + V^T \Lambda = 0$ (como se viu no § 2), é normal ao vector $\mathcal{A} V$, de modo que a sua intersecção com π tem a direcção do produto externo $(\mathcal{A} V) \times U$.

Deve ter-se, pois, $V \perp (\mathcal{A} V) \times U$, e os três vectores $\mathcal{A} V$, V e U são linearmente dependentes.

Como U e V são independentes, a condição a que deve sujeitar-se V traduz-se por

$$\mathcal{A} V = \mu V + \nu U$$

ou seja

$$(9) \qquad (\mathcal{A} - \mu I) V = \nu U.$$

O problema ficará, pois, resolvido quando obtivermos os vectores V que satisfaçam as condições

$$(10) \qquad \begin{cases} U^T V = 0 \\ (\mathcal{A} - \mu I) V = \nu U \end{cases}$$

com alguns valores reais de μ e ν.

Se este sistema tiver uma solução, W, com $\nu = 0$ (e μ igual a um certo valor λ_1), o vector W satisfaz $\mathcal{A} W = \lambda_1 W$, e dá-nos, não só uma direcção principal da secção que estamos a estudar, como também uma direcção principal da própria quádrica, correspondente à raiz característica λ_1 da matriz $\mathcal{A}$.

Para as possíveis soluções do sistema, com μ distinto de qualquer dos valores próprios de $\mathcal{A}$, tem-se

$$V = \nu (\mathcal{A} - \mu I)^{-1} U = \frac{\nu}{|\mathcal{A} - \mu I|} \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu I) U,$$

ou

$$(11) \qquad V = \rho \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu I) U$$

com $\rho = \dfrac{\nu}{|\mathcal{A} - \mu I|}$, devendo μ ser raiz da equação do 2.º grau

$$(12) \qquad U^T \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu I) U = 0$$

para que se verifique a primeira condição de (10).

Podemos, pois, enunciar:

TEOREMA 3. *Considere-se a secção feita na quádrica* $P^T \mathcal{A} P + 2 \Lambda^T P + a_{44} = 0$ *pelo plano de equação* $U^T P + d = 0$.

Se o plano contém alguma direcção principal da quádrica, esta é também direcção principal da secção. Caso contrário, as direcções principais da secção são dadas por

$$W_i = \rho_i \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu_i I) U$$

onde $\mu_i \ (i = 1, 2)$ *é raiz da equação do 2.º grau*

$$U^T \operatorname{adj} (\mathcal{A} - \mu I) U = 0$$

e os factores ρ_i *podem ser escolhidos de modo que os vectores* W_i *fiquem com módulo igual a* 1.

EXEMPLOS:

1) Determinar as direcções principais da secção feita no elipsóide $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1$ pelo plano $\sqrt{5}\,x + 3\sqrt{3}\,z = 0$.

A quádrica está reduzida às direcções principais [1] e a matriz $\mathcal{A}$ vem a ser

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 1/9 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

[1] Quer dizer, a equação está referida a um sistema em que os eixos coordenados se dirigem segundo três direcções principais da quádrica.

Um vector normal ao plano secante é $|\sqrt{5} \quad 0 \quad 3\sqrt{3}|$ ou, tomando o respectivo versor, $U = \left\{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{5}{2}} \quad 0 \quad \frac{3}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$.

Das três direcções principais da quádrica, $|1 \quad 0 \quad 0|$, $|0 \quad 1 \quad 0|$ e $|0 \quad 0 \quad 1|$, a segunda (correspondente à raiz característica $1/4$) pertence ao plano secante (o vector $|0 \quad 1 \quad 0|$ é perpendicular a U), e é, portanto, direcção principal da secção.

Para investigar a existência de possíveis direcções principais da cónica que não sejam direcções principais da quádrica, há que formar a equação (12):

$$\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 3\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\frac{1}{4}-\mu)(1-\mu) & 0 & 0\\ 0 & (\frac{1}{9}-\mu)(1-\mu) & 0\\ 0 & 0 & (\frac{1}{9}-\mu)(\frac{1}{4}-\mu)\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\sqrt{5}\\ 0\\ 3\sqrt{3}\end{bmatrix}=0$$

ou seja $(\frac{1}{4}-\mu)(\frac{1}{4}-\mu)=0$.

A equação não tem raízes que não sejam valores próprios de $\mathcal{A}$ e a expressão (11) não é aplicável.

Mas nós sabemos que a secção tem pelo menos outra direcção principal além da que já encontrámos.

Voltemos então ao sistema (10) e procuremos soluções com $\mu = 1/4$ mas com $\nu \neq 0$.

Obtém-se

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\sqrt{5} & 0 & 3\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=0\\[2ex] \begin{bmatrix}-\frac{5}{36} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\ v_2\\ v_3\end{bmatrix}=\nu\begin{bmatrix}\sqrt{5}\\ 0\\ 3\sqrt{3}\end{bmatrix}\end{cases}$$

i. e.,

$$\begin{cases}\sqrt{5}\,v_1+3\sqrt{3}\,v_3=0\\ -\frac{5}{36}\,v_1=\nu\sqrt{5}\\ \frac{3}{4}\,v_3=3\nu\sqrt{3}\end{cases}$$

donde $v_1 = -\frac{36}{5}\nu\sqrt{5}$, v_2 qualquer, $v_3 = = 4\nu\sqrt{3}$.

O sistema tem, pois, infinitas soluções (qualquer que seja o valor de ν) que definem infinitas direcções principais. A secção é circular.

2) Determinar as direcções principais da secção feita na quádrica $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ pelo plano $y+z=0$.

Tem-se $\mathcal{A} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1/4\end{bmatrix}$ e $U = \left|0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right|$.

A quádrica é um elipsóide de revolução em torno de OZ, e são direcções principais a direcção deste eixo (correspondente à raiz característica $1/4$) e todas as direcções perpendiculares (correspondentes à raiz dupla 1). Destas, a direcção definida por $|1 \quad 0 \quad 0|$ (a do eixo OX portanto) pertence ao plano secante e é direcção principal da secção.

A equação (12) pode escrever-se

$$\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(1-\mu)(\frac{1}{4}-\mu) & 0 & 0\\ 0 & (1-\mu)(\frac{1}{4}-\mu) & 0\\ 0 & 0 & (1-\mu)^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}=0$$

donde $(1-\mu)(\frac{5}{4}-2\mu)=0$, e as raízes são

$\mu_1 = 1$, $\mu_2 = \frac{5}{8}$.

A primeira é raiz característica de $\mathcal{A}$; para a segunda a expressão (11) dá $|0 \quad 1 \quad -1|$ (à parte um factor arbitrário) e, portanto,

$\left| 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \right|$ (se quisermos um vector de módulo 1) para definir uma direcção principal da secção.

As direcções principais da cónica são, pois $|1 \quad 0 \quad 0|$ e $|0 \quad 1 \quad -1|$ (perpendiculares entre si e ambas perpendiculares a U).

5. Considerações finais.

Como se disse no início do § 4, a secção feita numa quádrica por um plano ou é uma circunferência (e então todas as direcções do plano secante são direcções principais da secção) ou tem apenas duas direcções principais, perpendiculares entre si. Os exemplos anteriores ilustram qualquer dos casos.

Há, pois, toda a vantagem em conhecer a priori se a secção é ou não circular porque no primeiro caso a determinação das direcções principais é trivial, e, no segundo, logo que se tenha obtido uma, W_1, a outra será dada pelo produto externo $W_2 = U \times W_1$.

Se se trata de um ou outro caso resultará da discussão que vamos fazer da equação (12).

Suponha-se que as equações

(4) $$P^{\mathrm{T}} \mathcal{A} P + 2 \Lambda^{\mathrm{T}} P + a_{44} = 0$$

e

(7) $$U^{\mathrm{T}} P + d = 0\,,$$

da quádrica e do plano secante, estão referidas a um sistema triortogonal $OXYZ$, de versores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, e efectue-se uma rotação de eixos definida por

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 = t_{11}\,\mathbf{e}_1 + t_{21}\,\mathbf{e}_2 + t_{31}\,\mathbf{e}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 = t_{12}\,\mathbf{e}_1 + t_{22}\,\mathbf{e}_2 + t_{32}\,\mathbf{e}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 = t_{13}\,\mathbf{e}_1 + t_{23}\,\mathbf{e}_2 + t_{33}\,\mathbf{e}_3 \end{cases}$$

ou, simbòlicamente, $[\hat{\mathbf{e}}_1 \ \hat{\mathbf{e}}_2 \ \hat{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\, T$, com $T = [t_{ij}]$ matriz ortogonal ($T^{\mathrm{T}} T = I = T\,T^{\mathrm{T}}$).

O vector $\overrightarrow{OP}$ que no sistema $OXYZ$ tem uma expressão cartesiana $x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\, P$ (ver § 1), será definido por $\hat{x}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{y}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{z}\,\hat{\mathbf{e}}_3 = [\hat{\mathbf{e}}_1 \ \hat{\mathbf{e}}_2 \ \hat{\mathbf{e}}_3]\, \hat{P}$ no sistema $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$ que resultou do primeiro pela rotação considerada.

E da igualdade

$$x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 = \hat{x}\,\hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{y}\,\hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{z}\,\hat{\mathbf{e}}_3$$

i. e., $\quad [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\, P = [\hat{\mathbf{e}}_1 \ \hat{\mathbf{e}}_2 \ \hat{\mathbf{e}}_3]\, \hat{P}$

vem $\quad [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\, P = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\, T\hat{P}$

e, portanto, $\quad P = T\hat{P}$.

Obtém-se assim a relação entre as coordenadas de um mesmo ponto em dois sistemas de referência triortogonais com a mesma origem e cujos versores estão ligados por $[\hat{\mathbf{e}}_1 \ \hat{\mathbf{e}}_2 \ \hat{\mathbf{e}}_3] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3]\, T$.

Por meio desta transformação de coordenadas as equações (4) e (7) dão lugar a

$$\hat{P}^{\mathrm{T}} T^{\mathrm{T}} \mathcal{A}\, T\hat{P} + 2\,\Lambda^{\mathrm{T}}\, T\hat{P} + a_{44} = 0$$

e

$$U^{\mathrm{T}}\, T\hat{P} + d = 0\,,$$

ou seja,

($\hat{4}$) $$\hat{P}^{\mathrm{T}} \hat{\mathcal{A}} \hat{P} + 2\,\hat{\Lambda}^{\mathrm{T}} \hat{P} + a_{44} = 0$$

e

($\hat{7}$) $$\hat{U}^{\mathrm{T}} \hat{P} + d = 0\,,$$

com

$$\hat{\mathcal{A}} = T^{\mathrm{T}} \mathcal{A}\, T = T^{-1} \mathcal{A}\, T\,, \quad \hat{\Lambda} = T^{\mathrm{T}} \Lambda = T^{-1} \Lambda$$

e

$$\hat{U} = T^{\mathrm{T}}\, U = T^{-1}\, U\,.$$

Se além de rotação também houver translação, as relações entre $\hat{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{A}$, $\hat{U}$ e U continuam a ser as que obtivemos anteriormente. E as igualdades

$$\hat{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{adj}(\hat{\mathcal{A}}-\mu I)\hat{U}=U^{\mathrm{T}}T\,\mathrm{adj}(T^{-1}\mathcal{A}T-\mu I)\,T^{-1}U$$
$$=U^{\mathrm{T}}\,T\,\mathrm{adj}\,[T^{-1}(\mathcal{A}-\mu I)\,T]\,T^{-1}\,U=$$
$$=U^{\mathrm{T}}\,T\,T^{-1}\,\mathrm{adj}\,(\mathcal{A}-\mu I)\,T\,T^{-1}\,U\quad=$$
$$=U^{\mathrm{T}}\,\mathrm{adj}\,(\mathcal{A}-\mu I)\,U$$

mostram que *a equação (12) é invariante perante uma transformação ortogonal de coordenadas.*

Escolha-se um sistema de referência em que o plano secante π seja o plano $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$. O vector U dá lugar a $\hat{U}=\{0\ \ 0\ \ 1\}$, a equação (12) toma a forma

$$\begin{vmatrix} \hat{a}_{11}-\mu & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22}-\mu \end{vmatrix}=0\,,$$

e uma primeira conclusão importante a tirar é que as raízes de (12) são reais por serem valores próprios da matriz simétrica

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix},$$

submatriz de $\hat{\mathcal{A}}=\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix}$.

O sistema de equações

$$\begin{cases} \hat{P}^{\mathrm{T}}\,\hat{\mathcal{A}}\,\hat{P}+2\,\hat{\Lambda}^{\mathrm{T}}\,\hat{P}+\hat{a}_{44}=0 \\ \hat{U}^{\mathrm{T}}\,\hat{P}+\hat{d}=0\,, \end{cases}$$

que caracteriza a secção plana no referencial $\hat{O}\hat{X}\hat{Y}\hat{Z}$, é equivalente a

$$\begin{cases} [\hat{x}\ \ \hat{y}\ \ 0]\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ 0 \end{bmatrix}+\cdots=0 \\ \hat{z}=0 \end{cases}$$

e a cónica secção (considerada curva do plano $\hat{z}=0$) tem por equação

$$[\hat{x}\ \ \hat{y}]\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}+\text{(termos de grau} < 2)=0\,.$$

A matriz $\mathcal{B}$ que figura no início do § 4 é, portanto, $\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} \end{bmatrix}$, e outra conclusão importante a tirar é que *os valores próprios de $\mathcal{B}$ são precisamente as raízes da equação (12).* E daqui resulta agora que *a secção plana feita na quádrica de equação (4) pelo plano (7) é circular se e só se a equação (12) tiver as duas raízes iguais e não nulas* (1).

Mas a equação $\begin{vmatrix} \hat{a}_{11}-\mu & \hat{a}_{12} \\ \hat{a}_{21} & \hat{a}_{22}-\mu \end{vmatrix}=0$

ou

$$\mu^2-(\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22})\,\mu+\hat{a}_{11}\,\hat{a}_{22}-\hat{a}_{12}^2=0\,,$$

só tem raízes iguais se

$$(\hat{a}_{11}+\hat{a}_{22})^2-4\,\hat{a}_{11}\,\hat{a}_{22}+4\,\hat{a}_{12}^2$$
$$=(\hat{a}_{11}-\hat{a}_{22})^2+4\,\hat{a}_{12}^2=0\,,$$

o que implica $\hat{a}_{11}=\hat{a}_{22}\,(=\mu_1$, valor comum das raízes) e $\hat{a}_{12}=0$.

Nestas condições

$$\hat{\mathcal{A}}-\lambda I=\begin{bmatrix} \mu_1-\lambda & 0 & \hat{a}_{13} \\ 0 & \mu_1-\lambda & \hat{a}_{23} \\ \hat{a}_{31} & \hat{a}_{32} & \hat{a}_{33}-\lambda \end{bmatrix}$$

e μ_1 é também valor próprio da matriz $\hat{\mathcal{A}}$ (e, portanto, de $\mathcal{A}$).

Chega-se assim ao seguinte

TEOREMA 4. *A secção feita na quádrica*

$$P^{\mathrm{T}}\,\mathcal{A}\,P+2\,\Lambda^{\mathrm{T}}\,P+a_{44}=0$$

---

(1) Com ambas as raízes nulas a secção reduz-se a uma recta; e para que se possa considerar curva de 2.ª ordem junta-se-lhe a recta do infinito do plano secante. É o que acontece, por exemplo, quando se secciona o cilindro parabólico de equação $x^2=2\,p\,y$ pelos planos $x=c$.

pelo plano $U^T P + d = 0$ *é circular se e só se a equação* $U^T \operatorname{adj}(\mathcal{A} - \mu I)\, U = 0$ *tiver as duas raízes iguais (não nulas). E nestas condições o valor comum das raízes é necessàriamente valor próprio da matriz* $\mathcal{A}$ (1).

Designemos agora por $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ as raízes características da matriz $\mathcal{A}$, e tomemos para sistema de referência um triedro trirectângulo definido por três direcções principais da quádrica.

$\mathcal{A}$ transforma-se em $\hat{\mathcal{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$;

e sejam p, q, r as novas coordenadas do vector perpendicular ao plano secante: $\hat{U} = \{p \;\; q \;\; r\}$.

A equação (12) toma então a forma

$$p^2 \begin{vmatrix} \lambda_2 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_3 - \mu \end{vmatrix} + q^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_3 - \mu \end{vmatrix} + r^2 \begin{vmatrix} \lambda_1 - \mu & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \mu \end{vmatrix} = 0$$

donde se podem tirar as seguintes conclusões (cuja interpretação geométrica deixamos ao cuidado do leitor):

a) Se λ é raiz característica de $\mathcal{A}$ de multiplicidade 3 ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$), λ é raiz dupla da equação (12) qualquer que seja U.

b) Se λ é raiz dupla não nula de $\mathcal{A}$ (a quádrica é de revolução) λ é raiz de (12) qualquer que seja U; e é raiz dupla de (12) se e só se U tiver a direcção do eixo de revolução da quádrica.

c) Se λ é raiz simples de $\mathcal{A}$, λ será também raiz da equação (12) se U for perpendicular (e portanto o plano secante paralelo) à direcção principal da quádrica correspondente à raiz característica λ.

Depois destas considerações (sobretudo o teorema 4) já os problemas do § 4 se resolvem com muito maior simplicidade.

1) Para a secção feita no elipsóide $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$ pelo plano $\sqrt{5}\,x + 3\sqrt{3}\,z = 0$ começaríamos por formar a equação (12) que já sabemos ser $\left(\frac{1}{4} - \mu\right)^2 = 0$. Como as raízes são iguais (não nulas), a secção é circular, e o problema da determinação das direcções principais é trivial.

2) Para a secção feita no elipsóide de revolução $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ pelo plano $y + z = 0$ a equação (12) tem por raízes $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 5/8$.

A primeira, que é raiz característica da matriz $\mathcal{A}$, conduz à direcção principal definida por $W_1 = \{1 \;\; 0 \;\; 0\}$, e a segunda direcção principal será dada por $W_2 = U \times W_1 = \{0 \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; \frac{1}{\sqrt{2}}\} \times \{1 \;\; 0 \;\; 0\} = \{0 \;\; \frac{1}{\sqrt{2}} \;\; -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

(1) Esta conclusão mostra que não é correcta a afirmação «Falls die Doppelwurzel μ_1 kein Eigenwert der Matrix $\mathcal{A}$ ist, ...» feita por Grotemeyer na obra citada na introdução, pág. 142. E significa que só os planos que contêm uma direcção principal da quádrica podem produzir secções circulares.

BIBLIOGRAFIA

Dias Agudo, F. R., *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, Lisboa, 1960.

Grotemeyer, K. P., *Analytische Geometrie*, Sammlung Göschen, Band 65/65a, Berlin, 1958.

Uma interpretação da análise combinatória e algumas aplicações

por J. M. Gil

(Continuação)

3)
$$\binom{n}{p} = \frac{1}{p} \cdot P_{n\,|\,p-1,\,n-p}$$
$$= \frac{1}{p} \cdot (n-p+1)\, P_{n\,|\,p-1,\,n-p+1}$$
$$= \frac{n-p+1}{p} \binom{n}{p-1}$$

Claramente para passar dum subconjunto de $p-1$ elementos para um de p elementos é preciso juntar um dos $n-p+1$ elementos restantes. Dois subconjuntos de $p-1$ elementos que difiram apenas num elemento dão, por este processo, dois subconjuntos de de p elementos iguais. Cada subconjunto de $p-1$ elementos dá origem à repetição dum subconjunto de p elementos p vezes. O número de subconjuntos de p elementos é assim $\dfrac{n-p+1}{p}\dbinom{n}{p-1}$

4)
$$\binom{n}{p} = P_{n-1\,|\,p-1,\,n-p} + P_{n-p\,|\,n-p-1}\, P_{n-1\,|\,p,\,n-p}$$
$$= \binom{n-1}{p-1} + (n-p)\, P_{n-1\,|\,p,\,n-p}$$
$$= \binom{n-1}{p-1} + P_{n-1\,|\,p,\,n-p-1}$$
$$= \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

O número de subconjuntos de p elementos é a soma dos números de subconjuntos sem o elemento x e com este elemento.

5)
$$\binom{n}{p} = \sum_{j=0}^{n-p} P_{n-p\,|\,(n-p)-j}\, P_{(n-1)-j\,|\,p-1,\,q}$$

com $n = p + q$.

Também

$$\binom{n}{p} = \sum_{j=0}^{q} P_{q\,|\,q-j}\, P_{(n-1)-j\,|\,p-1,\,q}$$
$$= \sum_{j=0}^{q} P_{q\,|\,q-j} \cdot \frac{1}{q(q-1)\cdot(q-j+1)}\, P_{(n-1)-j\,|\,p-1,\,q-j}$$
$$= \sum_{j=0}^{q} \frac{P_{q\,|\,q-j}}{P_{q\,|\,q-j}} \cdot P_{(n-1)-j\,|\,p-1,\,q-j}$$
$$\binom{n}{p} = \sum_{j=0}^{q} \binom{n-1-j}{q-j}$$

6) Também

$$\binom{n}{p} = P_{n-p\,|\,n-p-1} \sum_{j=0}^{p} P_{n-1-j\,|\,p-j,\,q}$$

com $n = p + q$. Ou

$$\binom{n}{p} = P_{q\,|\,q-1} \sum_{j=0}^{p} P_{n-1-j\,|\,p-j,\,q}$$
$$= \sum_{j=0}^{p} P_{q\,|\,q-1} \cdot \frac{1}{q}\, P_{n-1-j\,|\,p-q,\,q-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{p} P_{n-1-j\,|\,p-j,\,q-1}$$
$$= \sum_{j=0}^{n-q} \binom{n-1-j}{q-1}$$
$$= \sum_{x=q-1}^{n-1} \binom{x}{q-1}$$

7) De $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

vem para $n = 2k+1$ e $p = 2j+1$

$$\binom{2k+1}{2j+1} = \binom{2k}{2j} + \binom{2k}{2j+1}$$

e

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j+1} = \sum_{j=0}^{k-1} \left[\binom{2k}{2j} + \binom{2k}{2j+1} \right] = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}$$

Para $p = 2j$, vem anàlogamente

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j} = \sum_{j=0}^{k} \left[\binom{2k}{2j-1} + \binom{2k}{2j} \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = \binom{n-1}{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}$$

Subtraindo membro a membro, obtem-se

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k+1}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k} \binom{2k+1}{2j} = -1$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} = -1$$

para n ímpar.

Para $n = 2k$, temos anàlogamente

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j+1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i} + 1$$

e

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} = \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}$$

Ainda

$$\sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{2j+1} - \sum_{j=0}^{k} \binom{2k}{2j} = 1$$

ou

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} = 1$$

para n par.

Então

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} = (-1)^n$$

31 — O número $P_{n \mid p,q,r}$ exprime-se fàcilmente em termos de combinações. Cada permutação de n elementos, dos quais p são iguais, outros q iguais e ainda mais r iguais, pode obter-se por escolhas sucessivas de p, q e r elementos no conjunto dos n elementos, supostos todos diferentes, $C = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$.

Estas escolhas sucessivas podem fazer-se respectivamente de $\binom{n}{p}$, $\binom{n-p}{q}$ e $\binom{n-p-q}{r}$ maneiras diferentes. Crescem ainda $n-p-q-r$ elementos que podem ser permutados. Assim

$$P_{n \mid p,q,r} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{q} \binom{n-p-q}{r} P_{n-q-q-r}$$

32 — Particularmente, para $n = p+q+r$ é $P_{n-p-q-r} = P_0 = 1$ e $\binom{n-p-q}{r} = \binom{r}{r} = 1$, consequentemente

$$P_{n \mid p,q,r} = \binom{n}{p} \binom{n-p}{p} = \binom{n}{p} \binom{q+r}{q}$$

e expressões análogas que se obtêm por permutação dos índices p, q e r.

33 — Para $r=1$, é $n=p+q+1$ e

$$P_{n|p,q,1}=P_{n|p,q}=\binom{n}{p}\binom{q+1}{q}=$$
$$=(q+1)\binom{n}{p}$$

e também as que se obtém permutando as posições de p, q e 1. Por exemplo

$$P_{n|1,p,q}=P_{n|p,q}=\binom{n}{1}\binom{p+q}{p}=$$
$$=n\binom{n-1}{p}.$$

34 — Permutações circulares de *n* objectos, não todos distintos

Seja $C=C_1+C_2+\cdots+C_r$ a soma directa de r conjuntos C_i de p_i elementos iguais a_i com $i=1,2,\cdots r$ e $p_1+p_2+ + \cdots + p_r = n$.

As permutações lineares dos n elementos de C repartem-se por duas categorias. Permutações aperiódicas, em que não há algum bloco de elementos repetido um certo número de vezes dentro da permutação; as permutações periódicas, em que se verifica a repetição dum bloco de elementos.

Chamaremos *período de permutação* precisamente ao menor bloco repetido nela.

35 — O número de elementos do período duma permutação periódica de n elementos é um divisor de n; e os números de elementos $a_1, a_2, \cdots, a_r$, no período, são directamente proporcionais aos números $p_1, p_2, \cdots, p_r$.

Para um período de δ elementos será $x_i=\frac{p_i}{n}\cdot\delta$ o número de elementos a_i presentes.

36 — Um divisor δ de n dará origem a um período, se os números x_i forem todos inteiros. Ora é

$$x=\frac{p_i}{n}\cdot\delta=\frac{p_i}{\frac{n}{\delta}}=\frac{p_i}{d} \quad \text{com} \quad d=\frac{n}{\delta}.$$

Nas condições indicadas terá de ser d um divisor de $h=\text{m. d. c.}\ (p_1, p_2, \cdots p_r)$. Cada divisor d de h dá origem à repetição de elementos do conjunto em blocos de $\delta=n/d$ elementos.

37 — Cada permutação linear aperiódica tem n permutações circulares; e cada permutação linear de período com δ elementos tem apenas δ permutações circulares.

38 — Subtraindo de $P_{n|p_1,p_2,\ldots,p_r}$ o número das permutações periódicas, obtém-se o número das que são permutações aperiódicas dos n elementos.

Designaremos por $\Pi_{n|p_1,p_2,\ldots,p_r}$ o número de permutações lineares periódicas dos n elementos e por $\Pi_{c(n)}$ o número de permutações circulares periódicas.

Então, o número de permutações circulares, $P_{c(n)}$, é

$$P_{c(n)}=\frac{1}{n}\left(P_{n|p_1,p_2,\ldots,p_r}-\Pi_{n|p_1,p_2,\ldots,p_r}\right)+$$
$$+\Pi_{c(n)}.$$

39 — Suponhamos que um período de δ elementos provém do divisor $d\neq 1$ de h. É

$$\delta=\frac{p_1+p_2+\cdots+p_r}{d}=\frac{p_1}{d}+\frac{p_2}{d}+$$
$$+\cdots+\frac{p_r}{d}.$$

As permutações lineares, em que este período se encontra repetido d vezes, são tantas quantas as maneiras distintas de escrever o período de ∂ elementos com p_i/d elementos a_i, isto é,

$$P_{n/d\,|\,p_1/d,\ldots,p_r/d}\,.$$

O somatório $P_{n/d\,|\,p_1/d,p_2/d,\ldots,p_r/d}$ estendido a todos os divisores de h contém todas as permutações lineares periódicas, mas algumas multiplicadas. Com efeito, se $d\,|\,h$ e d'/h, os blocos de $\partial = n/d$ e $\partial' = n/d'$ elementos são tais que, com $d = p\cdot d'$, é $p\cdot\partial = p\cdot\dfrac{n}{d} = p\cdot\dfrac{n}{p\,d'} = \dfrac{n}{d'} = \partial'$; o que indica que o período da permutação de blocos de ∂' elementos é possìvelmente de ∂ elementos.

Somos assim levados a considerar apenas os divisores primos de h, com $h = \alpha_1\,\alpha_2\cdots\alpha_\nu$, porque qualquer outro será múltiplo de algum destes.

Esta consideração não exclui totalmente a multiplicação da contagem, porque as permutações, com períodos de, por exemplo, $n/\alpha_1\,\alpha_2$ elementos, aparecerão contadas como de período com n/α_1 e n/α_2 elementos.

40 — Com correcção da contagem, temos para o caso considerado

$$P_{c(n)} = \frac{1}{n}\Big(P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_r} - \sum_{i=1}^{\nu} P_{n/\alpha_i\,|\,p_1/\alpha_i,\,p_2/\alpha_i,\ldots,p_r/\alpha_i} + C\Big) + \sum_{i=1}^{\nu} P_{c(n/\alpha_i)} - E\,.$$

41 — A permutação $P_{n/\alpha_i\alpha_j\,|\,\ldots}$ é contada duas vezes: uma como periódica de período com n/α_i elementos, e outra como de período com n/α_j elementos. A correcção a fazer é de 1.

A permutação $P_{n/\alpha_i\alpha_j\alpha_l\,|\,\ldots}$ é contada como de período com $n/\alpha_i, n/\alpha_j, n/\alpha_l$ elementos e também de período com $n/\alpha_i\alpha_j$, $n/\alpha_i\alpha_l$ e $n/\alpha_j\alpha_l$. A correcção a fazer seria de 2 correspondente à contagem nos períodos de n/α_j e n/α_l elementos, por exemplo, e há que completar a correcção com a exclusão da contagem correspondente aos factores produtos de dois números primos, porque já foram contados como de período n/α_i e n/α_j e n/α_l elementos. Então $C = 2 - \dbinom{3}{2}$.

Dum modo geral, temos, para $P_{n/\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s\,|\,\ldots}$ uma correcção

$$\begin{aligned} C &= (s-1) - \binom{s}{2} + \binom{s}{3} + \cdots + (-1)^s\binom{s}{s-1} \\ &= -1 + \binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \cdots + (-1)^s\binom{s}{s-1} \\ &= (-1)^s \end{aligned}$$

42 — Temos assim

$$\begin{aligned} P_{c(n)} = {} & \frac{1}{n} P_{n\,|\,p_1,p_2,\ldots,p_r} - \\ & - \sum_{i=0}^{\nu} \frac{1}{n} P_{n/\alpha_i\,|\,p_1/\alpha_i,\ldots,p_r/\alpha_i} + \\ & + \sum_{l=2}^{\nu} \frac{(-1)^l}{n} P_{n/\omega(l)\,|\,p_1/\omega(l),\ldots,p_r/\omega(l)} + \\ & + \sum_{i=1}^{\nu} P_{c(n/\alpha_i)} - \sum_{l=2}^{\nu} (-1)^l\, P_{c(n/\omega(l))} \end{aligned}$$

onde $\omega(l)$ é cada uma das combinações, l a l, de $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$. Anàlogamente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\nu} P_{c(n/\alpha_i)} = {} & \sum_{i=1}^{\nu} \frac{\alpha_i}{n} P_{n/\alpha_i\,|\,p_1/\alpha_i,\ldots,p_r|\alpha_i} - \\ & - \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} \frac{\alpha_i}{n} P_{n/\alpha_i\alpha_j\,|\,p_1/\alpha_i\alpha_j,\ldots,p_r/\alpha_i\alpha_j} + \\ & + \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=3}^{\nu} \frac{(-1)^{l+1}}{n} P_{n/\omega(l)\,|\,p_1/\omega(l),\ldots,p_r/\omega(l)} + \\ & + \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{j=1}^{\nu} P_{c(n/\alpha_i\alpha_j)} - \sum_{i=1}^{\nu}\sum_{l=2}^{\nu} (-1)^{l+1} P_{c(n/\alpha_i\omega(l)} \end{aligned}$$

. . . .

$$\sum_{\omega(s)} P_{c[n/\omega(s)]} = \sum_{\omega(s)} \frac{\omega(s)}{n} P_{n/\omega(s)|p_1/\omega(s),\dots,p_r/\omega(s)} -$$

$$- \sum_{\omega(s)} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\omega(s)}{n} P_{n/\omega(s)\alpha_j|p_1/\omega(s)\alpha_j,\dots,p_r/\omega(s)\alpha_j} +$$

$$+ \sum_{\omega(s)} \sum_{l=s+2}^{\nu} \frac{(-1)^{l-s-2}\omega(s)}{n} P_{n/\omega(l)|p_1/\omega(l),\dots,p_r/\omega(l)} +$$

$$+ \sum_{\omega(s)} \sum_{j=1}^{\nu} P_{c[\omega(s)\alpha_j]} - \sum_{\omega(s)} \sum_{l=s+2}^{\nu} (-1)^{l-s-2} P_{c[n/\omega(s)\omega(l)]}$$

. . . .

$$P_{c[n/\omega(\nu)]} = \frac{\omega(\nu)}{n} P_{n/\omega(\nu)|p_1/\omega(\nu),\dots,p_r/\omega(\nu)}$$

Ou mais condensamente

$$\sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} P_{c[n/\omega(s)]} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \frac{\omega(s)}{n} P_{n/\omega(s)|p_1/\omega(s)\alpha_j,\dots,p_r/\omega(s)\alpha_j} -$$

$$- \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \sum_{j=1}^{\nu} \frac{\omega(s)}{n} P_{n/\omega(s)\alpha_j|p_1/\omega(s)\sigma_j,\dots,p_r/\omega(s)\alpha_j} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \sum_{l=s+2}^{\nu} \frac{(-1)^{l-s-2}\omega(s)}{n} P_{n/\omega(l)|p_1/\omega(l),\dots,p_r/\omega(l)} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \sum_{j=1}^{\nu} P_{c[n/\omega(s)\alpha_j]} -$$

$$- \sum_{s=1}^{\nu} \sum_{\omega(s)} \sum_{l=s+2}^{\nu} (-1)^{l-s-2} P_{c[n/\omega(l)\omega(s)]}$$

Somando ordenadamente com $P_{c(n)}$ e atendendo a que as permutações circulares dos segundos membros se podem ordenar segundo

$$(-1)^s \left[-1 + \binom{s}{1} - \binom{s}{2} + \cdots + \right.$$

$$\left. + (-1)^s \binom{s}{s-1} \right] P_{c[n/\omega(s)]} =$$

$$= (-1)^s (-1)^s P_{c[n/\omega(s)]} = P_{c[n/\omega(s)]}$$

e se reduzem a $\sum_{s=1}^{\nu} P_{c[n/\omega(s)]}$, obtemos

$$P_{c(n)} = \frac{1}{n} P_{n|p_1,p_2,\dots,p_r} +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\nu} \frac{\sum_{i=0}^{s} (-1)^{s+i} \sigma_i}{n} P_{n/\omega(s)|p_1/\omega(s)\dots}$$

com $\sigma_0 = 1$ e σ_i funções simétricas elementares dos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_\nu$.

Ou

$$P_{c(n)} = \sum_d \frac{\Phi(d)}{n} P_{n/d|p_1/d,p_2/d,\dots,p_r/d}$$

com Φ a função de EULER, e o somatório estendido a todos os divisores d de h.

43 — Totalidade de dicotomias de C.

Qualquer dicotomia definida em $C = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ consiste numa classificação de cada elemento em elemento b ou elemento c

$$a_1 = \begin{cases} b \\ c \end{cases} \quad a_2 = \begin{cases} b \\ c \end{cases} \quad \cdots \quad a_n = \begin{cases} b \\ c \end{cases}$$

Cada dicotomia dá origem a um elemento do produto cartesiano destes n conjuntos. O número de dicotomias é igual ao número de elementos do produto cartesiano de n conjuntos de dois elementos

$$2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n \quad (n \text{ factores})$$

44 — Número de subconjuntos de C.

Cada dicotomia determina um subconjunto de C — o dos elementos classificados de b, por exemplo —, com desprezo do complementar — o dos elementos classificados de c. Consequentemente é

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$$

o número de subconjuntos de C: soma dos números dos que não têm elementos, só têm um elemento, dois elementos, etc., n elementos.

45 — Também

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = n! \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n-p)!\,p!}$$

Donde

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(n-p)!\,p!} = \frac{2^n}{n!}.$$

46 — Consideremos a bipartição

$$E_1 = \{x \mid x = a_j\} \qquad j = 1, 2, \cdots, r$$
$$E_2 = \{x \mid x = a_l\} \qquad l = r+1, r+2, \cdots, n$$

de $C = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

Façamos i elementos a_j iguais a b e os restantes iguais a a. Este resultado pode obter-se de $\binom{r}{i}$ maneiras diferentes. Façamos $p-i$ elementos a_l iguais a b, por alguma das $\binom{q}{p-i}$ maneiras possíveis, com $q = n - r$, e os restantes iguais a a.

Nestas condições, a reunião dum E_1 com um E_2 dá uma permutação de C, com p elementos iguais a b e $n-p$ iguais a a. Os pares $(E_1 E_2)$ possíveis são em número $\binom{r}{i}\binom{q}{p-i}$ igual ao número de permutações de C, com p elementos iguais a b, dos quais i pertencem a E_1, e $n-p$ iguais a a. Fazendo variar i desde zero até p, obteremos todas as permutações de C

$$P_{n\,|\,p,\,n-p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{r}{i} \binom{q}{p-i}$$

ou numèricamente

$$\binom{n}{p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{r}{i} \binom{q}{p-i}$$

com $n = r + q$.

Esta igualdade é conhecida por *convolução de Vandermonde.*

47 — Particularmente, para $r = q = p$, vem

$$\binom{2p}{p} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{p}{p-i} = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \binom{p}{i} = $$
$$= \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}^2.$$

48 — Por outro lado

$$\sum_{i=0}^{p+1} \binom{p+1}{i}^2 = \sum_{i=1}^{p} \left[\binom{p}{i} + \binom{p}{i-1} \right]^2 +$$
$$+ \binom{p+1}{0}^2 + \binom{p+1}{p+1}^2$$
$$= \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i}^2 + \binom{p}{0}^2 + \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i-1}^2 +$$
$$+ \binom{p}{p}^2 + 2 \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} \binom{p}{i-1}$$
$$= 2 \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{p} \frac{p-i-1}{i} \binom{p}{i-1}^2$$

consequentemente

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{p-i-1}{i} \binom{p}{i-1}^2 = \frac{1}{2} \binom{2p+2}{p+1} - \binom{2p}{p}$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2p+2}{p+1} \binom{2p+1}{p} - \binom{2p}{p}$$
$$= \binom{2p+1}{p} - \binom{2p}{p} = \binom{2p}{p-1}.$$

49 — Também

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i} + \frac{2}{n!} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i}$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i}$$
$$= \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \frac{1}{n!}\binom{2n}{n}$$

e

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i} = \frac{1}{n!}\left[\binom{2n}{n} - 2\right] =$$
$$= \frac{1}{n!}\cdot\frac{(2n)! - 2(n!)^2}{(n!)^2} =$$
$$= \frac{2^n \prod_{j=0}^{n-1}(2n-1-2j) - 2\,n!}{(n!)^2}$$

e ainda

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i!\,(n-i)!}\binom{n}{i} =$$
$$= \frac{2^{n-1} \prod_{j=0}^{n-1}(2n-1-2j) - n!}{(n!)^2}$$

50 — Aplicações de S em T

Uma função biunívoca, definida em S e de valores num subconjunto próprio de T, diz-se uma *aplicação de* S *em* T.

Se S é aplicável em T, então o número de elementos de S é igual ou menor do que o número de elementos de T. É consequência da univocidade da correspondência entre os elementos do contradomínio da função e os de S.

51 — Número de aplicação de S em T

Sejam S de p elementos e T de n elementos, com $p \leqq n$.

Para definir uma aplicação de S em T tenho de escolher ordenadamente p elementos de T. As aplicações possíveis são tantas quantas as possíveis escolhas ordenadas de p elementos de T, como vimos, em número

$$A_{n|p} = P_{n|n-p} = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

52 — Propriedades de $A_{n|p}$

a) O número de escolhas ordenadas de p elementos, num conjunto de n elementos, é o número de reordenações possíveis nos subconjuntos de p elementos. São $\binom{n}{p}$ subconjuntos de p elementos e cada um deles dá origem a P_p reordenações. A execução das duas operações sucessivas: determinação dum subconjunto de p elementos e reordenação do subconjunto, conduz a $\binom{n}{p} P_p$ resultados possíveis — arranjos dos n elementos, p a p.

Assim

$$A_{n|p} = \binom{n}{p} P_p .$$

b) As relações de recorrência do parágrafo 14 escrevem-se fàcilmente na notação dos arranjos.

1) $A_{n|n-p} = \dfrac{1}{p} A_{n|n-p+1}$ e, fazendo $n-p+1=q$ ou $p=n-q+1$ e $n-p=q-1$,

$$A_{n|q} = p\,A_{n|q-1} = (n-q+1)\,A_{n|q-1}.$$

2) $$A_{n|n-p} = n\,A_{n-1|n-1-p}$$

e, fazendo $n-p=q$,

$$A_{n\,|\,q} = n\,A_{n-1\,|\,q-1}\,.$$

3) $$A_{n\,|\,n-p} = \frac{n}{p}\,A_{n-1\,|\,n-p}$$

e, fazendo $n-p=q$

$$A_{n\,|\,q} = \frac{n}{n-q}\,A_{n-1\,|\,q}\,.$$

4) $A_{n\,|\,n-p} = A_{n-1\,|\,n-p} + (n-p)\,A_{n-1\,|\,n-1-p}$

e, fazendo $n-p=q$

$$A_{n\,|\,q} = A_{n-1\,|\,q} + q\,A_{n-q\,|\,q-1}$$

5) Do parágrafo 15 vem

$$A_{n\,|\,n-p} = \sum_{j=0}^{n-p} A_{n-p\,|\,j}\,A_{(n-1)-j\,|\,(n-p)-j}$$

e, fazendo $n-p=q$

$$A_{n\,|\,q} = \sum_{j=0}^{q} A_{q\,|\,j}\,A_{(n-1)-j\,|\,q-j}$$

E anàlogamente

$$A_{n\,|\,n-p} = A_{n-p\,|\,1}\sum_{i=0}^{p} A_{n-1-i\,|\,n-p-1}$$

e, fazendo $n-p=q$

$$A_{n\,|\,q} = A_{q\,|\,1}\sum_{i=0}^{p} A_{(n-1)-i\,|\,q-1} = q\sum_{i=0}^{p} A_{(n-1)-i\,|\,q-1}\,.$$

c) De $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = 2^n$ vem $\sum_{p=0}^{n} n!\binom{n}{p} =$
$= 2^n\,n!$

Como

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!}\binom{n}{p}p! = \sum_{p=0}^{n} P_{n\,|\,p}\,A_{n\,|\,p}$$

ou

$$\sum_{p=0}^{n}\frac{n!}{p!}\binom{n}{p}p! = \sum_{p=0}^{n} A_{n\,|\,n-p}\,A_{n\,|\,p}\,.$$

Então

$$\sum_{p=0}^{n} A_{n\,|\,n-p}\,A_{n\,|\,p} = 2^n\,n!$$

53 — Permutação com elementos repetidos.

Consideremos n conjuntos, C_i, com os mesmos n elementos. Por exemplo, n ordenações dum mesmo conjunto de n elementos,

$$\begin{aligned} C_1 &= \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \\ C_2 &= \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n &= \{a_1, a_2, \cdots, a_n\} \end{aligned}$$

Formemos todos os conjuntos ordenados que se obtêm tirando um elemento de cada conjunto C_i e colocando os elementos tirados linearmente no lugar correspondente à ordem da tiragem. Estes conjuntos podem ter um mesmo elemento repetido, quando muito, n vezes.

A primeira tiragem dá um dos n elementos do conjunto C_1; a segunda um dos n elementos do conjunto C_2 eventualmente o mesmo da primeira tiragem; e o mesmo acontece nas seguintes.

54 — Chamamos *permutação completa* dos n elementos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ a cada um destes conjuntos ordenados de n elementos distintos, ou alguns repetidos, contados, em cada repetição, como novos elementos.

55 — Representaremos por Π_n o número das permutações completas de n elementos. É

$\Pi_n = n\times n\times n\times\cdots\times n$ ao todo n factores
$= n^n$:

(Continua)

MOVIMENTO MATEMÁTICO

BRASIL E ARGENTINA

O Dr. Alfredo Pereira Gomes realizou, em Julho de 1960, na Sociedade Brasileira para o Progresso das Ciências, uma conferência intitulada: «Formas Reais das Álgebras de Lie Semi-simples».

— O Dr. Hugo Batista Ribeiro, em Julho de 1960, foi contratado pela Universidade do Recife onde realizou o curso: «Teoria dos Grupos Abelianos: noções, métodos e resultados fundamentais dessa teoria e desenvolvimentos análogos para a Álgebra Universal».

— Na Universidade do Recife realizaram-se os seguintes seminários:

1) «Teoria dos Modelos» pelo Prof. Hugo Ribeiro: Cálculo de predicados, álgebra universal, problemas.

2) Tópicos sobre Álgebra Universal» pelo Prof. José C. Morgado.

— A Escola de Engenharia da Universidade do Recife publicou a seguinte apostila de curso:

M. Zaluar Nunes, «Diferenças, Interpolação, Derivação e Integração Numéricas».

Na semana de 20 a 25 de Julho de 1959 celebrou-se na Faculdade de Ciências Exactas y Naturais de Buenos Aires, por iniciativa do Centro de Cooperação Científica da UNESCO para a América Latina e daquela Faculdade, o terceiro simpósio sobre o tema «Alguns problemas matemáticos que se estão estudando na América Latina».

Este terceiro simpósio foi continuação de outros dois que ao mesmo assunto se dedicaram. O primeiro teve lugar em 1951 em Punta del Este, Uruguay e o segundo em Vilavicencio e Mendoza, em 1954, na Argentina, com assistência de matemáticos da Argentina, Bolívia, Brasil, Colombia, Cuba, México, Peru e Uruguay.

Dai nasceram cursos de aperfeiçoamento o primeiro dos quais se realizou em Mendoza em Fevereiro e Março de 1955; o segundo no México em Janeiro e Fevereiro de 1956; o terceiro em La Plata, Argentina, em 1957 e o quarto em Bogotá, Colombia, em 1959.

Toda esta actividade na América Latina tem sido grandemente influenciada pelo trabalho do Dr. António Monteiro ao qual o Director do Centro de Cooperação da UNESCO, Dr. Juan Ibañez Gomez se referiu, no discurso inaugural do 3.º Simpósio, nos seguintes termos:

«Para el mejor logro de los fines propuestos con este tipo de actividades nuestro Centro encargó al Dr. António Monteiro para visitar algunos países latino-americanos y recoger datos sobre sus respectivos ambientes matemáticos, sus problemas y sus necessidades. Su viage dejó valiosa información concretada en un minucioso informe que constituye valioso instrumento de trabajo».

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 29-6-1960.

I

5320 — 1) Diga quantos zeros tem $f(x) = 12x^3 + 9x^2 - 18x + 8$ no intervalo $(-2, 1)$, sabendo que a sucessão de Fourier de $f(x)$ apresenta os seguintes sinais:

	-2	-1	0	1
f	$-$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	0	$-$	$+$
f''	$-$	$-$	$+$	$+$
f'''	$+$	$+$	$+$	$+$

Justifique convenientemente a resposta.

2) Defina integral de $\varphi(x)$ em (a, b) e indique algumas propriedades fundamentais. Utilize o cálculo integral para achar a área limitada pela parábola $y^2 = 4x$ e a recta $y = 2x$.

R: 1) *A sucessão de* FOURIER *perde uma variação entre* -2 *e* -1 *e portanto* $f(x)$ *tem um zero em* $(-2, -1)$. *Entre* 0 *e* 1 *a sucessão perde duas variações e portanto* $f(x)$ *pode ter duas ou zero raízes.*

Como em $(0, 1)$ *a primeira função cuja sucessão de* FOURIER *perde uma variação é* $f'(x) = 18(2x^2 + x - 1)$, *calcule-se o zero dessa função em* $(0, 1)$: $x' = = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$. *Ora* $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{11}{4} > 0$ *e, como* $f(0) > 0$, $f(x)$ *não tem zeros em* $(0, 1)$. *Em* $(-2, 1)$ *existe portanto apenas um zero de* $f(x)$.

2) *A área pedida é* $A = \int_0^1 \sqrt{4x}\, dx - \int_0^1 2x\, dx =$

$$= 2 \left| \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 - [x^2]_0^1 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

II

5321 — Nas funções de duas variáveis a existência de derivadas parciais finitas num ponto implica a continuidade da função nesse ponto? Justifique a resposta.

Defina função diferenciável em $P(a, b)$ e demonstre que, para tal função, é $\lim_{M=P} \frac{f(M) - f(P)}{\overline{MP}} = = f'_x(a, b)\, \xi + f'_y(a, b)\, \eta$ sobre todo o arco emergente de P na direcção r de cosenos directores ξ e η.

Deduza as condições necessárias à existência de um extremo de $f(x, y)$ em $P(a, b)$.

Extremar a função $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$.

R: *A condição necessária para que um ponto seja extremante de* $\varphi = x^2 + y^2 - 4x + 6y + 25$ *é que satisfaça ao sistema* $\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ 2y + 6 = 0 \end{cases}$. *Como o único ponto que satisfaz é* $P(2, -3)$, *bastará agora analisar o sinal de* $s^2 - rt$. *Como* $s = \varphi''_{xy} = 0$, $r = \varphi''_{x^2} = 2$ *e* $t = \varphi''_{y^2} = 2$, *nesse ponto é* $s^2 - rt < 0$ *e portanto há um extremo em* P; *dado que* $r > 0$, *trata-se de um mínimo.*

III

5322 — Enuncie a extensão do teorema de LAPLACE e diga como se pode dar a forma de determinante ao produto de dois determinantes.

Considere o sistema $AX = B$ em que $A\,(n \times n)$ é regular. Mostre que B é uma composição linear dos vectores independentes $A_1, A_2, \cdots, A_n$ (colunas de A) e aproveite o resultado para provar que num espaço a n dimensões não há mais de n vectores independentes.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência extraordinário — 4-7-1960.

I

5323 — Resolva os seguintes problemas:

1) Calcular $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$.

2) Extremar a função $x^3 + y^3 - 3axy$.

R: 1) $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{a_0}{x+1} + \frac{S_0}{x^2+1}$ *onde* a_0 *é uma constante e* S_0 *é um polinómio do 1.º grau.*

$a_0 = \left[\frac{1}{x^2+1}\right]_{x=-1} = \frac{1}{2}$ *e portanto* $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = = \frac{1}{2(x+1)} + \frac{S_0}{x^2+1}$ *ou* $\frac{S_0}{x^2+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} - - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1-x}{2(x^2+1)}$. *Logo* $P \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} = = \frac{1}{2} P \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} P \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{4} P \frac{2x}{1+x^2} = = \frac{1}{2} \log|x+1| + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{4} \log(1+x^2)$

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\log 2 = = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\log 2.$$

2) *Os possíveis pontos extremos são as soluções do sistema* $\begin{cases} 3x^2 - 3ay = 0 \\ 3y^2 - 3ax = 0 \end{cases}$ *que dá* $P(0,0)$ *e* $Q(a, a)$.

Como $s = -3a$, $r = 6x$ *e* $t = 6y$ *virá* $s^2 - rt > 0$ *para* $P(0,0)$ *o que significa que este ponto não é extremo. Para* $Q(a, a)$ *vem* $s^2 - rt < 0$ *e, se* $a > 0$, *virá* $r > 0$ *e* $Q(a, a)$ *será um mínimo; se* $a < 0$ *é* $r < 0$ *e* $Q(a, a)$ *será um máximo.*

II

5324 — 1) Escreva a expressão da derivada m-ésima de $f(x, y)$ com $x = a + ht$ e $y = b + kt$ e deduza a fórmula de TAYLOR para $f(x,y)$ em $P(a,b)$.

2) Enuncie o teorema de existência das funções implícitas e diga em que condições a função implícita é diferenciável.

Determine λ por forma que a função implícita $y = \varphi(x)$ definida por $x^2 + xy + \lambda x + \lambda^2 = 0$, tenha em $x = 1$ uma tangente paralela ao eixo dos xx.

R: 2) *Como* $x = 1$ *terá de satisfazer à equação dada terá de ser* $1 + y + \lambda + \lambda^2 = 0$. *Por outro lado* $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y + \lambda}{x}$ *e, para que a tangente seja paralela ao eixo dos* xx, *deverá ser* $2 + y + \lambda = 0$. *O sistema* $\begin{cases} 1 + y + \lambda + \lambda^2 = 0 \\ 2 + y + \lambda = 0 \end{cases}$ *tem as soluções* $\begin{cases} \lambda = 1 \\ y = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} \lambda = -1 \\ y = -1 \end{cases}$ *e portanto para a função implícita definida na vizinhança de* $(1, -3)$ *é* $\lambda = 1$ *e para a função definida na vizinhança de* $(1, -1)$ *é* $\lambda = -1$.

III

5325 — 1) Diga em que consiste o problema da interpolação. Dados os pares de valores (x_0, u_0), (x_1, u_1), $\cdots (x_n, u_n)$, mostre que o produto das raízes do polinómio interpolador é

$$(-1)^n \frac{u_0 - x_0 \delta u_0 + x_0 x_1 \delta^2 u_0 - \cdots + (-1)^n x_0 x_1 \cdots x_{n-1} \delta^n u_0}{\delta^n u_0},$$

em que $\delta^i u_0$ $(i = 1, \cdots n)$ é a diferença dividida i-ésima de u_0.

2) Demonstre que é nula a soma dos produtos que se obtêm multiplicando cada menor de m determinadas filas paralelas pelo complemento do menor homólogo de m outras filas paralelas às primeiras.

Utilizar os determinantes para discutir o sistema:

$$kx + y + z = 1$$
$$x + ky + z = k$$
$$x + y + kz = k^2.$$

R: 2) *Se* $(k-1)^2 (k+2) \neq 0$ *o sistema é possível determinado e tem a solução* $x = -\frac{k+1}{k+2}$, $y = \frac{1}{k+2}$, $z = \frac{(k+1)^2}{k+2}$; *Se* $k = 1$ *o sistema é indeterminado (grau de indeterminação 2); se* $k = -2$ *o sistema é impossível.*

Soluções de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Prova Prática (1.ª chamada) — 15-7-1960.

I

5326 — 1) Determine k por forma que $f(x) = e^{kx^2+x}$ tenha um extremo para $x = 1$. Indique a natureza desse extremo.

2) Calcule $\lim_{x=0} \left[\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right]$.

3) Calcule $P\,x \cdot \operatorname{tg}^2 x$.

R: 1) *Como* $f'(x) = e^{kx^2+x}(2kx + 1)$, *para que* $f'(1) = 0$ *terá de ser* $2k + 1 = 0$ *ou* $k = -\frac{1}{2}$. *Dado que* $f''(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2+x}[(1-x)^2 - 1]$, *vem* $f''(1) < 0$ *e trata-se de um ponto maximizante.*

2)
$$\lim_{x=0} \left[\frac{2}{sen^2 x} - \frac{1}{1 - cos\, x} \right] = \lim_{x=0} \frac{2(1 - cos\, x) - sen^2 x}{sen^2 x\,(1 - cos\, x)} =$$
$$= \lim_{x=0} \frac{2\, sen\, x - 2\, sen\, x\, cos\, x}{2\, sen\, x\, cos\, x\,(1 - cos\, x) + sen^3 x} =$$
$$= \lim_{x=0} \frac{2 - 2\, cos\, x}{2\, cos\, x\,(1 - cos\, x) + sen^2 x} =$$
$$= \lim_{x=0} \frac{2\, sen\, x}{-2\, sen\, x + 4\, cos\, x\, sen\, x + 2\, sen\, x\, cos\, x} =$$
$$= \lim_{x=0} \frac{2}{6\, cos\, x - 2} = \frac{1}{2}$$

3) $P\,x \cdot tg^2 x = P\,x\,(sec^2 x - 1) = P\,x\,sec^2 x - P\,x =$
$$= x\, tg\, x - P\, tg\, x - \frac{x^2}{2} = x\, tg\, x + log\,|\cos x| - \frac{x^2}{2}.$$

II

5327 — 1) Desenvolva pela fórmula de Taylor até aos termos de segunda ordem a função x^y no ponto $(1, 2)$.

2) Supondo $z = f(x, y)$ homogénea e admitindo que $f(x, y) = 0$ define uma função implícita $y = \varphi(x)$ na vizinhança de $P(a, b)$, mostre que $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a = \frac{b}{a}$ e que a equação do plano tangente à superfície $z = f(x, y)$ em $P(a, b)$ é $f'_x(a, b) X + f'_y(a, b) Y = 0$.

R: 1) *Sendo* $\varphi(x, y) = x^y$ *vem:*

$$\varphi'_x = y\, x^{y-1} \quad \varphi''_{x^2} = y\,(y-1)\, x^{y-2} \quad \varphi''_{x\,y} = x^{y-1} + x^{y-1} \log x$$
$$\varphi'_y = x^y \log x \quad \varphi''_{y^2} = x^y \log^2 x$$

A fórmula de Taylor *é*

$$\varphi(x, y) = \varphi(1, 2) + (x-1)\,\varphi'_x(1, 2) + (y-2)\,\varphi'_y(1, 2) +$$
$$+ \frac{1}{2!}[\varphi'_x(1, 2)\,(x-1) + \varphi_y(1, 2)]^{(2)} + \cdots =$$
$$= 1 + 2(x-1) + \frac{1}{2!}[2(x-1)^2 + 2(x-1)(y-1)] + \cdots$$

2) *Como a função é homogénea, o teorema de* Euler *ensina que* $a f'_x(a,b) + b f'_y(a,b) = \alpha f(a,b)$.

Em virtude de ser $f(a,b)=0$ *vem* $a f'_x(a,b) + b f'_y(a,b) = 0$ *ou* $-\dfrac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)} = \dfrac{b}{a}$ *e como* $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_a = -\dfrac{f'_x(a,b)}{f'_y(a,b)}$ *está provado o primeiro resultado.*

O plano tangente a $z=f(x,y)$ *em* $P(a,b)$ *é* $f'_x(a,b)(X-a)+f'_y(a,b)(Y-b)=0$ ou $f'_x(a,b)X + f'_y(a,b)Y = af'_x(a,b)+bf'_y(a,b)=0$.

III

5328 — 1) Dada a tabela

x	u
0	a
1	2
3	4
4	b

determine a e b por forma que o polinómio interpolador seja do 3.º grau, com o coeficiente do termo de maior grau igual a 1 e tenha raízes de soma nula. Escreva o polinómio.

2) Mostre que a caracteristica da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ é três. Exprima a quarta coluna como composição linear das três primeiras.

R: 1) *Construindo a tabela das diferenças divididas vem*

x	u	δu	$\delta^2 u$	$\delta^3 u$
0	a			
		$2-a$		
1	2		$\frac{a-1}{3}$	
		1		$\frac{b-a-4}{12}$
3	4		$\frac{b-5}{3}$	
		$b-4$		
4	b			

O polinómio interpolador (Newton) *é*

$$f(x) = a + (2-a)\,x + \frac{a-1}{3}\,x\,(x-1) + \frac{b-a-4}{12}\,x\,(x-1)\,(x-3)$$

e, de acordo com o enunciado, terá de ser:

$$\begin{cases} \dfrac{b-a-4}{12} = 1 \\[2mm] \dfrac{a-1}{3} - 4\,\dfrac{b-a-4}{12} = 0, \end{cases}$$ *sistema cuja solução é*

$$\begin{cases} b = 29 \\ a = 13 \end{cases}$$

O polinómio é $f(x) = 13 - 11x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-3) = x^3 - 12x + 13$.

2) *Como* $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$, *a característica da matriz é* 3.

Resolvendo o sistema

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

pela regra de Cramer, *obtém-se* $x_1 = -31$, $x_2 = 19$, $x_3 = -8$ *e por conseguinte*

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = -31 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 19 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Prova Prática (2.ª chamada) — 18-7-1960.

I

5329 — 1) Estude a função $f(x) = x + \dfrac{1}{1-x}$.

2) Calcule $\displaystyle\int \frac{2x\,dx}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)}$.

R: 1) *O domínio é* $(-\infty, 1)\,(1, +\infty)$ *e as intersecções com os eixos são os pontos* $(0,1)$, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right)$.

A função é sempre crescente pois $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{(1-x)^2} > 0$. Como $f''(x) = \dfrac{2}{(1-x)^3}$ *a concavidade está voltada para cima em* $(-\infty, 1)$ *e para baixo em* $(1, +\infty)$.

A curva admite as assintotas $X = 1$ e $Y = X$.

2) *Para calcular o integral proposto é necessário decompor a fracção racional em elementos simples. Ora*

$$\frac{2x}{(x-1)^2\,(x^2+x+1)} = \frac{a_0 + a_1\,(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{S_0}{x^2+x+1}$$

e para calcular a_0 e a_1 *basta ordenar o numerador e o denominador da fracção auxiliar* $R_1(x) = \dfrac{2x}{x^2+x+1}$ *segundo as potências crescentes de* $t = x-1$ *e efectuar a divisão, levando o cociente até ao grau* 1:

$R_1(x) = \dfrac{2+2t}{3+3t+\cdots}$ *e o cociente é* $\dfrac{2}{3}$, *isto é,*

$a_0 = \frac{2}{3}$ e $a_1 = 0$; S_0 *obtém-se fàcilmente notando que*

$$\frac{S_0}{x^2+x+1} = \frac{2x}{(x-1)^2(x^2+x+1)} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}, \text{ isto é, } S_0 = -\frac{2}{3}.$$

Portanto,

$$\int \frac{2x\,dx}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{(x-1)^2} -$$

$$-\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^2+x+1} = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1} -$$

$$-\frac{2}{3}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = -\frac{2}{3(x-1)} -$$

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\,dx}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = -\frac{2}{3(x-1)} -$$

$$-\frac{4}{3\sqrt{3}}\, arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right).$$

II

5330 — Extreme a função $x^3 - 2xy + y^2$ e indique em que pontos da parábola $y = x^2$ a sua derivada se anula na direcção da tangente.

R: *Os pontos de estacionaridade obtêm-se resolvendo o sistema* $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases}$. *São eles* $P_1(0,0)$ e $P_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. *Como* $r = 6x$, $s = -2$ *e* $t = 2$, *vem* $s^2 - rt = 4 - 12x$. *No ponto* $P_1(0,0)$ *vem* $s^2 - rt > 0$ *e portanto não há extremo; em* $P_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ *vem* $s^2 - rt < 0$ *e* $r > 0$ *e portanto trata-se de um mínimo.*

Notando que os cosenos directores da tangente à parábola são $\xi = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$ *e* $\eta = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$, *a derivada dirigida da função segundo a direcção da tangente é* $\frac{3x^2-2y}{\sqrt{1+4x^2}} + \frac{(-2x+2y)\,2x}{\sqrt{1+4x^2}}$, *tomando o valor* $\frac{3x^2-2x^2}{\sqrt{1+4x^2}} + \frac{(-2x+2x^2)\,2x}{\sqrt{1+4x^2}}$ *nos pontos da parábola. A derivada será nula quando* $x^2 + 2x(2x^2 - 2x) = 0$, *isto é, nos pontos* $A(0,0)$ *e* $B\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{16}\right)$.

III

5331 — 1) Determine α e β por forma que o polinómio

$$x^3 + \alpha x^2 + 2x + \beta$$

tenha uma raiz tripla.

2) Discuta o sistema

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 0 \\ 3x + ay + z &= b \end{aligned}$$

e interprete geomètricamente o resultado.

R: 1) $\varphi(x) = x^3 + \alpha x^2 + 2x + \beta$
$\varphi'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + 2$
$\varphi''(x) = 6x + 2\alpha$.

A raiz tripla é raiz de $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ *e* $\varphi''(x)$. *Assim, como o zero de* $\varphi''(x)$ *é* $-\frac{\alpha}{3}$, *substituindo-o m* $\varphi'(x)$ *obtém-se* $\alpha = \pm\sqrt{6}$. *Fazendo agora em* $\varphi(x)$ $x = -\frac{\alpha}{3}$ *e* $\alpha = \pm\sqrt{6}$ *e igualando a zero, obtém-se* $\beta = \pm\frac{2\sqrt{6}}{9}$.

2) *Constituindo o determinante* $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2a$

vê-se que o sistema é possível determinado se $a \neq 1$ *(com qualquer* b*) o que indica que os 3 planos representados pelas equações lineares são concorrentes, num ponto.*

Se $a = 1$, *o determinante principal é* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ *e a possibilidade do sistema depende do valor do característico* $\Delta' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = b - 2$: *se* $b \neq 2$ o *sistema é impossível (o terceiro plano é paralelo à recta definida pelos dois primeiros); se* $b = 2$ *o sistema é possível indeterminado de grau* 1 *(o terceiro plano passa pela recta definida pelos dois primeiros).*

Soluções de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame final — Época de Outubro — 10/10/1960.

I

5332 — 1) Estude a função $f(x) = \begin{cases} x+1 \; (x<0) \\ \dfrac{x^2}{x+1} \; (x \geqslant 0) \end{cases}$.

2) Ache o desenvolvimento em série de Mac Laurin de $\dfrac{\log(1+x)}{1+x}$, indicando o intervalo onde é válido o desenvolvimento.

3) Calcule $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\,dx$.

R: 1) *O domínio é, evidentemente,* $]-\infty, +\infty[$ *e existe uma descontinuidade na origem. Como para* $x<0$, $f(x) = x+1$ *(recta) basta fazer o estudo para* $x \geqslant 0$. *Calculando a derivada, obtem-se* $f'(x) = \dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ $(x>0)$ *que é sempre positiva para* $x>0$; $f'_d(0) = 0$ e $f'_e(0) = -\infty$. *A função é pois sempre crescente e não tem extremos. Como* $f''(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3} > 0 \; (x>0)$, *a concavidade está sempre voltada para cima. Fácilmente se verifica que existe uma assintota oblíqua* $Y = X - 1$ *pois* $f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ e $\displaystyle\lim_{x=\infty} \frac{1}{x+1} = 0$.

2) *Como* $\log(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^n}{n} + \cdots \; (|x|<1)$ e $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots \; (|x|<1)$, *multiplicando os dois desenvolvimentos em série, obtem-se*

$$\frac{\log(1+x)}{1+x} = x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n + \cdots,$$

também válido para $|x|<1$.

3) $\dfrac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1} = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x-1)} + \dfrac{1}{x^2+1}$ *e então* $\displaystyle\int_2^3 \frac{2x^3+x^2+2x-1}{x^4-1}\,dx = \Big[\log(x^2-1) + \operatorname{arctg} x\Big]_2^3 = \log\frac{8}{3} + \operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2$.

II

5333 — 1) Extreme á função $\varphi(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey$, discutindo os casos $AC - B^2 = 0$ e $AC - B^2 \neq 0$.

2) As relações $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$ permitem definir r e θ em função de x e de y. Verifique que $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \dfrac{\partial r}{\partial x}$.

R: 1) $\varphi'_x(x,y) = 2Ax + 2By + 2D$

$\varphi'_y(x,y) = 2Bx + 2Cy + 2E$.

Os pontos de estacionaridade são dados pela resolução do sistema $\begin{cases} Ax + By + D = 0 \\ Bx + Cy + E = 0 \end{cases}$ *que é possível determinado quando* $AC - B^2 \neq 0$. *Como* $s = 2B$, $r = 2A$ *e* $t = 2C$, *vem* $s^2 - rt = 4(B^2 - AC)$ *e então se* $B^2 - AC > 0$ *não há extremo; se* $B^2 - AC < 0$ *há extremo: máximo se* $A < 0$ *e mínimo se* $A > 0$.

No caso de $AC - B^2 = 0$, *o sistema é impossivel se* $\dfrac{A}{B} = \dfrac{B}{C} \neq \dfrac{D}{E}$, *não existindo extremo; se* $\dfrac{A}{B} = \dfrac{B}{C} = \dfrac{D}{E}$ *o sistema e indeterminado e a linha* $Ax + By + D = 0$ *é uma possível linha de extremos. Notando que, neste último caso,* $A\varphi(x,y) = (Ax + By + D)^2 - D^2$ *seja* (x_0, y_0) *um ponto que satisfaz a* $Ax+By+D=0$; *como* $A[\varphi(x_0+h, y_0+k) - \varphi(x_0,y_0)] = (Ak + Bk)^2$, *a linha* $Ax+By+D=0$ *será uma linha de mínimos com* $A>0$ *e uma linha de máximos com* $A<0$.

2) *Como* $x^2 + y^2 = r^2$, *vem* $r = \sqrt{x^2+y^2}$. *Então* $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *e, como* $\dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta = \dfrac{x}{r} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, *está provado o que se queria.*

III

5334 — 1) Dado o polinómio $ax^3 + bx^2 + cx + d$, que relação deve existir entre os coeficientes a, b, c e d para que uma das raízes seja igual à soma das outras duas?

Satisfeita esta condição, ache as raízes do polinómio.

2) Para que valores de α o vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ é composição linear dos vectores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$? Escreva a composição para esses valores de α.

R: 1) *Designando por* x_1, x_2 *e* x_3 *as três raízes, tem-se* $\begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = -\dfrac{b}{a} \end{cases}$. *Este sistema dá* $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$ *e então* $a\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^3 + b\left(-\dfrac{b}{2a}\right)^2 + c\left(-\dfrac{b}{2a}\right) + d = 0$ *ou* $b^3 - 4abc + 8a^2d = 0$, *que é a condição procurada. Se esta condição é satisfeita, o polinómio dado é divisível por* $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)$ *e então* $a x^3 + b x^2 + c x + d = \left(x + \dfrac{b}{2a}\right)\left(a x^2 + \dfrac{b}{2} x + c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$ *o que mostra que* x_2 *e* x_3 *são as raízes do trinómio do segundo grau* $a x^2 + \dfrac{b}{2} x + c - \dfrac{b^2}{4a}$.

2) *O problema equivale a saber para que valores de* α *é possível o sistema*

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ora o sistema é possível determinado quando $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0$, *o que acontece com* $\alpha \neq 0$. *Com* $\alpha = 0$, *tome-se o determinante principal* $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$. *Como o característico* $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, *o sistema será impossível.*

Portanto o sistema só é possível (determinado) com $\alpha \neq 0$. *Resolvendo-o pela regra de* CRAMER *vem*

$$x_1 = \frac{\alpha + 1}{\alpha}, \quad x_2 = -\frac{\alpha + 1}{\alpha}, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = -\frac{1}{\alpha},$$

o que permite escrever a composição.

Soluções de Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. – MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Epoca de milicianos — 12-12-1960.

I

5335 – Considere a função $f(x) = \dfrac{k^2 x + 1}{x^2 + 1}$ $(k \neq 0)$ e resolva os seguintes problemas:

1) Ache o domínio de $f(x)$ e mostre que a função é sempre contínua nesse domínio, inclusivamente para $x = +\infty$ e $x = -\infty$.

2) Mostre que $f(x)$ não pode ser sempre crescente ou decrescente. Determine então os intervalos de monotonia, os extremos interiores e fronteiros, considerando os valores $f(+\infty)$ e $f(-\infty)$ integrados no contradomínio de $f(x)$. Qual é o mínimo absoluto e o máximo absoluto?

3) Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{k^2 x + 1}{x^2 + 1}\, dx$.

R: 1) *O domínio é* $]-\infty, +\infty[$ *e a função é sempre contínua neste intervalo pois é cociente de funções contínuas* (*polinómios*) *sempre definido em* $]-\infty, +\infty[$. *Como* $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$, *a função é contínua para* $x = \infty$.

2) $f'(x) = \dfrac{-k^2 x^2 - 2x + k^2}{(x^2 + 1)^2}$ *e, como o trinómio* $-k^2 x^2 - 2x + k^2$ *tem o binómio discriminante* $\Delta = 4 + 4k^4 > 0$, *é evidente que ele não tem sempre o mesmo sinal em* $]-\infty, +\infty[$ *e por isso* $f'(x)$, *cujo sinal é o do trinómio, não tem sinal constante em* $]-\infty, +\infty[$. *Assim* $f(x)$ *não é sempre crescente ou decrescente.*

Como $f'(x) > 0$ *quando* $k^2 x^2 + 2x - k^2 < 0$, $f(x)$ *é crescente em* $\left[\dfrac{-1 - \sqrt{1 + k^4}}{k^2}, \dfrac{-1 + \sqrt{1 + k^4}}{k^2}\right]$; $f'(x) < 0$ *quando* $k^2 x^2 + 2x - k^2 > 0$, *isto é, para todos os valores de* x *situados em qualquer dos intervalos* $\left]-\infty, \dfrac{-1 - \sqrt{1 + k^4}}{k^2}\right]$ *e* $\left[\dfrac{-1 + \sqrt{1 + k^4}}{k^2}, +\infty\right[$ $f(x)$ *é decrescente.*

É evidente que $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + k^4}}{k_2}$ *é minimizante e* $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + k^4}}{k^2}$ *é maximizante. Os extremos interiores são pois o mínimo* $P\left(\dfrac{-1 - \sqrt{1 + k^4}}{k^2}, a\right)$ $(a < 0)$ *e o máximo* $Q\left(\dfrac{-1 + \sqrt{1 + k^4}}{k^2}, b\right)$ $(b > 0)$.

Os extremos fronteiros são um máximo para $x = -\infty$ *e um mínimo para* $x = +\infty$ *e é evidente que os extremos absolutos são* P *e* Q.

3) $$\int_0^1 \frac{k^2 x + 1}{x^2 + 1}\, dx = \frac{k^2}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\, dx + \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = \frac{k^2}{2}\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1 + \Big[\operatorname{arctg} x\Big]_0^1 = \frac{k^2}{2}\log 2 + \operatorname{arctg}\frac{\pi}{4}.$$

II

5336 — 1) Mostre que a função $\varphi(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$ é homogénea e verifique a identidade de Euler.

2) Que superfície é representada no espaço pela equação $x^2 + y^2 = r^2$? Ache a equação do plano tangente a esta superfície no ponto $P(r,0,0)$ e mostre que há uma infinidade de pontos comuns ao plano tangente e à superfície.

R: 1) *A função é homogénea pois* $\varphi(tx,ty) = t^{-1}\varphi(x,y)$ *e o grau de homogeneidade é* -1.

Como $\varphi'_x(x,y) = \dfrac{-x^2+y^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}$ *e* $\varphi'_y(x,y) = \dfrac{-x^2+y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, *vem* $x\varphi'_x + y\varphi'_y =$
$$= -\frac{x^3+xy^2-x^2y-y^3}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{(x^2+y^2)(x-y)}{(x^2+y^2)^2} = -1\cdot\frac{x-y}{x^2+y^2},$$
que é o teorema de Euler.

2) *Trata-se de uma superfície cilíndrica de geratrizes paralelas ao eixo dos* zz.
A equação do plano tangente é

$$f'_x(r,0,0)\,(X-r) + f'_y(r,0,0)\,(Y-0) = 0$$

ou

$$2r(X-r) = 0$$

ou ainda $X = r$.

É evidente que este plano, paralelo a $y0z$, *passa por todos os pontos* $Q(r,0,z)$ *pertencentes à superfície cilíndrica e que se dispõem segundo a geratriz* $\begin{cases} X = r \\ Y = 0 \end{cases}$.

III

5337 — Estude, por meio de determinantes, o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 0 \\ 2x - y + z - u &= 1 \\ x + y - z - u &= 0 \\ x - y + z + \alpha u &= \beta \end{aligned}$$

e apresente a sua solução no caso em que for possível determinado.

R: *O sistema será possível determinado quando*
$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & \alpha \end{vmatrix} \neq 0,$$
o que sucede com $\alpha \neq -\dfrac{1}{3}$.

Para esses valores de α *tem-se então a solução dada pela regra de* Cramer:
$$x = \frac{2\alpha + 4\beta - 2}{6\alpha + 2},\quad y = -\frac{2\alpha + 4\beta - 2}{6\alpha + 2},$$
$$z = \frac{4 - 6\beta}{6\alpha + 2},\quad u = \frac{6\beta - 4}{6\alpha + 2}.$$

Quando $\Delta = 0$, *o que sucede com* $\alpha = -\dfrac{1}{3}$, *encontra-se o determinante principal*
$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 6$$
e o determinante característico
$$\Delta'_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & \beta \end{vmatrix} = 6\beta - 4.$$

Pelo teorema de Rouché, *o sistema é impossível quando* $\Delta'_1 \neq 0$, *ou* $\beta \neq \dfrac{2}{3}$ *e é possível (neste caso indeterminado de grau 1) quando* $\Delta'_1 = 0$ *ou* $\beta = \dfrac{2}{3}$.

Resumindo:

$$\text{Sistema}\begin{cases} \text{Possível}\begin{cases} \text{Determinado: } \alpha \neq -\dfrac{1}{3} \text{ e } \beta \text{ qualquer} \\ \text{Indeterminado: } \alpha = -\dfrac{1}{3} \text{ e } \beta = \dfrac{2}{3} \end{cases} \\ \text{Impossível: } \alpha = -\dfrac{1}{3} \text{ e } \beta \neq \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Solução de Fernando de Jesus

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — Biológicas, Geológicas e Professores Adjuntos — Julho de 1960.

Ponto n.º 1

5338 — 1. Determine os extremos da função

$$z = x^4 + 3\,y^2 + x^2\,(2\,y - 1)\,.$$

2. Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 5\,y - 3\,z = -13 \\ 3\,x + 6\,y - 4\,z = -11 \\ 3\,x + 2\,y + 4\,z = 13 \\ 2\,x + \;\,y - \;\,z = 2 \end{cases}$$

por condensação da matriz.

3. Numa das clássicas experiências de Mendel com ervilhas obtiveram-se os seguintes resultados:

Forma / Cor	Redondas	Angulosas
Amarelas	315	101
Verdes	108	32

Confirmarão estes números a teoria que prevê ervilhas dos quatro tipos na proporção de 9: 3: 3: 1? Justifique.

4. Defina momentos de uma distribuição e dê uma ideia da sua importância.

Que outros parâmetros conhece?

Calcule a mediana da distribuição cuja densidade de probabilidade é assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \geqslant 0\,. \end{cases}$$

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — Biológicas, Geológicas e Professores Adjuntos — Outubro de 1960.

Ponto n.º 2

5339 — 1. Dada a equação $x^5 - 11\,x^4 + 23\,x^3 + 73\,x^2 - 176\,x + 90 = 0$ verifique que 1 é raiz e indique a respectiva multiplicidade Separe as raízes da equação e calcule um valor aproximado de uma raiz não racional.

2. Dada a seguinte tabela

x	-2	-1	0	1
y	7	4	1	-8

calcule o polinómio interpolador

a) por resolução de um sistema de equações lineares;

b) organizando uma tábua de diferenças e usando uma fórmula de interpolação.

3. De um baralho de 40 cartas tiram-se duas (com reposição). Qual a probabilidade de saída de

a) duas cartas de paus?

b) Pelo menos uma carta de paus?

Qual a probabilidade de saída de duas cartas de paus se a tiragem for feita sem reposição?

4. Propriedades da distribuição normal.

Na análise de uma amostra de uma variável casual verifica-se que 58 % dos dados são inferiores a 75, 38 % estão entre 75 e 80 e os restantes são superiores a 80. Qual a média e o desvio padrão admitindo que a amostra faz parte de uma população normal?

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Outubro de 1960.

5340 — 1. Dada a quádrica de equação

$$4\,x^2 - 4\,x\,y + 4\,x\,z + y^2 - 2\,y\,z + z^2 + 12\,x - 6\,y + 6\,z = 7$$

investigue se tem centro, determine os invariantes, escreva uma equação canónica e classifique a quádrica.

2. Demonstre e interprete geomètricamente o teorema de Lagrange.

Será o teorema aplicável à função $y = \sqrt[3]{x^2}$ no intervalo $[-8\,,\,8]$? Porquê?

3. Primitive

a) $x \log x$

b) $x^2\,e^x + \dfrac{1}{x^4 + 2\,x^2 + 1}$

c) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3\,x + 2}\,.$

4. Considere um sistema triortogonal de referência $OXYZ$, de versores $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ e sejam $\mathbf{u}_i = \cos\alpha_i\,\mathbf{e}_1 + \cos\beta_i\,\mathbf{e}_2 + \cos\gamma_i\,\mathbf{e}_3 \quad (i = 1\,,2\,,3)$ três vectores de origem O.

a) Qual o significado de $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$ e qual o comprimento de cada vector $\mathbf{u}_i$?

b) Mostre que o volume do paralelipípedo de arestas $\mathbf{u}_1\ \mathbf{u}_2\ \mathbf{u}_3$ (supostos não complanares) é dado por

$$V = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \\ \cos\alpha_3 & \cos\beta_3 & \cos\gamma_3 \end{vmatrix}$$

c) Multiplicando, segundo regra conveniente, o determinante anterior por si mesmo, mostre que

$$V^2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2}) & \cos(\widehat{\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_3}) \\ \cos(\widehat{\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1}) & 1 & \cos(\widehat{\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_3}) \\ \cos(\widehat{\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_1}) & \cos(\widehat{\mathbf{u}_3,\mathbf{u}_2}) & 1 \end{vmatrix}$$

d) Se considerar agora um sistema de referência $O'X'Y'Z'$ não necessàriamente triortogonal, permite o resultado anterior atribuir algum significado geométrico importante ao determinante da matriz

$$\Omega = \begin{bmatrix} 1 & \cos(\widehat{X',Y'}) & \cos(\widehat{X',Z'}) \\ \cos(\widehat{Y',X'}) & 1 & \cos(\widehat{Y',Z'}) \\ \cos(\widehat{Z',X'}) & \cos(\widehat{Z',Y'}) & 1 \end{bmatrix} ?$$

Enunciados do Dr. Dias Agudo

EXAMES DE ADMISSÃO E ESTÁGIOS PEDAGÓGICOS

Liceus Normais — Exames de Admissão em 1959/60.

Prova escrita de Aritmetica e Álgebra

5341 — «Função exponencial de base $a, (a > 1)$ e expoente real; função inversa».

Prova escrita de Geometria e Trigonometria

5342 — «Áreas; unidade de área; figuras equivalentes».

Prova prática de Aritmética e Álgebra

5343 — 1) Determine um número inteiro que admite seis divisores dos quais apenas dois são primos e tal que a soma de todos os seus divisores é 42;

5344 — 2) Estabeleça as relações a que devem satisfazer os coeficientes do polinómio $x^4 + px^2 + qx + r$ para que admita uma raiz tripla.

Prova prática de Geometria e Trigonometria

5345 — 1) Um triângulo $[ABC]$ verifica as condições $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$; conhecem-se, dele, o ângulo A, a altura $\overline{AH}$ e a mediana $\overline{AM}$. Supondo $A\hat{M}B = \alpha$ resolva as duas questões seguintes:

a) Exprima $\operatorname{cotg}\alpha$ em função de $\operatorname{cotg} A$ e $\operatorname{cotg} B$;

b) Mostre que é possível calcular $\hat{B}$ e $\hat{C}$ a partir dos dados.

2) Dado o triângulo $[ABC]$ tome-se o ponto M sobre $\overline{BC}$ e o ponto P sobre o prolongamento de $\overline{CA}$ de modo que se cumpra a condição $\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CB}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{CA}} = k$, em que $k > 0$;

a) Prove que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = k^2$ sendo D o ponto de encontro de $\overline{AB}$ com $\overline{PM}$.

b) Determine k de modo que seja área do triang. $[APD]$ + área do triâng. $[DBM] = \dfrac{1}{2}$ área do triâng. $[ABC]$.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

136 — Lucienne Felix — **Mathématiques Modernes ∩ Enseignement Elémentaire** — Librairie Scientifique Albert Blanchard — 1960, preço 12 N. F.

O livro dirige-se, como a autora afirma, aos professores do ensino primário que «enseignent les rudiments des mathématiques sans avoir pu acquérir assez de conaissances de cette science dans son ensemble». A autora está convencida que, ao contrário do que muitos pensam, para se ensinar matemática mesmo nas classes primárias é necessário, ou pelo menos vantajoso, que o professor se tenha iniciado nas matemáticas superiores. Destina-se por isso o livro a esta espécie de iniciação tendo em vista que «a marcha rápida do progresso científico conduziu à revisão dos fundamentos das matemáticas».

Não se trata de um manual de matemáticas modernas, mas de um livro que aponta ràpidamente os assuntos da teoria dos conjuntos, de topologia e de álgebra moderna que convém conhecer para que se possa fazer um ensino que prepare o aluno de modo a que a passagem do ensino primário para o secundário se faça sem solavancos.

Estamos convencidos que a sua leitura será bastante útil aos nossos professores do ensino secundário, pois que a autora, se bem que dirija o livro aos professores do ensino primário, procura mostrar como é possível introduzir mesmo no ensino secundário as noções de matemática moderna como a teoria dos conjuntos, lógica moderna e os métodos axiomáticos.

Desde as experiências belgas sobre o ensino às monitoras dos jardins de infância da teoria dos conjuntos e lógica, tendo em vista o seu trabalho de ensino da matemática, que os professores belgas e franceses se preocupam com a introdução, o mais cedo possível, destas noções que a escola Bourbaki tanto fez para pôr em evidência.

Este livro tem exactamente preocupações desse tipo e é por isso de aconselhar vivamente.

J. S. P.

137 — L. Robin — **Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroidales** — Gauthier-Villars, Paris — 1957-59.

Eis uma obra produto de um longo e aturado trabalho. Sugerida pelo Director do Instituto de Física do Globo de Paris, a sua redacção foi encarada favoràvelmente pela Direcção do Centro Nacional de Estudos das Telecomunicações pelo papel fundamental que as funções de Legendre de grau não inteiro desempenham na teoria das antenas bi-cónicas.

Efectivamente no estudo de qualquer fenómeno de propagação com simetria esférica a utilização das funções esféricas e esferoides é, pode dizer-se, permanente.

Assim o livro destina-se aos matemáticos, aos físicos de uma maneira geral, e aos engenheiros que se dedicam ao estudo dos referidos fenómenos de propagação esférica.

O seu Autor, Louis Robin, engenheiro chefe de telecomunicação, doutor em ciências e laureado pelo Instituto, viu o seu trabalho coroado com um prémio de matemáticas atribuído pela «Académie des Sciences».

A obra está dividida em três volumes obedecendo a uma exposição com objectivo mais documental que pedagógico. Mas quando alguma demonstração é omitida, o Autor tem o cuidado de indicar a bibliografia onde ela se encontra. O nível de conhecimentos exigido para a sua leitura é o do Certificado tradicional de Cálculo diferencial e integral (incluindo evidentemente as propriedades fundamentais da integração à Lebesgue e a teoria das funções analíticas de variàvel complexa).

No estudo da equação de derivadas parciais de Laplace, em coordenadas esféricas, os respectivos integrais exprimem-se como produto duma função do raio vector por uma função da colatitude e outra da longitude; esta última é função associada de Legendre (também chamada função esférica de Laplace).

O tomo primeiro começa pela separação de variàveis da equação de Laplace em coordenadas esféricas, fazendo uma introdução ao estudo das funções associadas de Legendre de primeira e segunda espécie (P_n^m, Q_n^m) e naturalmente dos polinómios de Legendre. Estudam-se as propriedades nos casos de m e n inteiros e insiste-se particularmente nas funções associadas de primeira espécie com m negativos.

No tomo II, admite-se n e m quaisquer, reais ou complexos. Estabelecem-se relações entre as funções correspondentes e a função hipergeométrica, e a função P de Riemann. Apresenta-se ainda as funções associadas quer sob a forma de desenvolvimentos em série quer como integrais de contorno no plano complexo. Estuda-se o comportamento dos desenvolvimentos assintóticos respectivos quando n e m tendem em módulo para infinito. A convergência das séries de polinómios de LEGENDRE e das funções associadas de LEGENDRE faz-se pormenorizadamente, tirando partido das suas propriedades de ortogonalidade para poder estabelecer representações em séries de certas classes de funções.

Estes problemas de convergência são precedidos por outros semelhantes mas relativos às séries de Fourier apresentados como exemplos dos outros, de natureza bastante mais delicada. Como aplicação encontram-se ainda um fenómeno de tipo GIBBS, vários exemplos de somação de CÉSARO válidos mesmo em condições de divergência vulgar.

No tomo III o Autor dedica se aos teoremas de adição para as funções de LEGENDRE e ao número de zeros das funções associadas. Num só capítulo se estuda de forma exaustiva a equação de LAPLACE em sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais relacionado com os sistemas triplos ortogonais associados aos elipsoides de revolução e ao toro circular. É se assim levado ao estudo dos problemas interior e exterior de DIRICHLET e certas soluções e ao estudo das funções cónicas de MEHLER utilizadas na resolução do problema de DIRICHLET no interior duma superfície cónica.

O último capítulo trata das funções de GEGENBAUER e das funções esferoides de estudo recente e difícil. Termina com tabelas numéricas das funções de LEGENDRE.

É obra única no seu género, em língua francesa. Pela sua estrutura, completa e bem ordenada, por resultados originais que apresenta, torna-se um elemento de estudo utilíssimo no domínio dos assuntos versados.

J. G. T.

138 — F. GERRISH — **Pwe Mathematies, A university and College Course** — Vols. I e II — Cambridge University Press, Cambridge, 1960.

Estes dois volumes destinam-se à preparação dos candidatos à primeira parte do «London B. Sc. General Degree» ou ao primeiro ano de qualquer curso universitário, no que respeita o domínio das matemáticas puras. Contém também os programas de matemática pura relativos ao Diploma em Matemática da «Mathematical Association». Por outro lado o Autor teve a intenção de neles incluir o que será necessário de futuro aos estudantes que não se destinam à frequência dos cursos de matemática da Parte II do referido «London B. Sc. G.». Admitiu ainda que muitos estudantes que iniciam o referido curso não tenham recebido a devida preparação quer nos conhecimentos teóricos quer na preparação prática; por outros termos, isto significa que a obra não necessita de conhecimentos adquiridos em nível superior.

O volume primeiro, começando pelo estudo das funções e sua representação gráfica, expõe muitos problemas clássicos considerados em livros de nível teórico superior. Os capítulos dois e três, dedicados à continuidade, derivabilidade e aplicações desenvolvem-se de acordo com a mesma orientação que, de resto, é geral. Segue-se o estudo da noção de integral como quadratura, regras vulgares de primitivação e extensões do conceito de integral - impróprios e entre limites infinitos. As equações diferenciais correntes são estudadas, com aplicações geométricas num só capítulo.

O volume termina com o estudo dos teoremas fundamentais do cálculo diferencial, propriedades mais correntes do integral de RIEMANN e suas aplicações ao cálculo de comprimento, áreas e volumes, e novos capítulos com as aplicações do cálculo diferencial e integral à geometria das curvas e superfícies e ainda funções de várias variáveis.

O volume II trata da teoria dos polinómios: os polinómios como função e sua decomposição factorial; resolução das equações inteiras; teoria da eliminação. Segue-se o estudo dos determinantes com as clássicas aplicações à resolução ou sistemas lineares; o estudo das séries numéricas (de termos positivos e quaisquer, reais) dos desenvolvimentos de funções em séries de potências, as respectivas aplicações clássicas e os cálculos dos limites superiores dos erros cometidos nas aproximações. Em capítulos seguintes estudam-se os números complexos e respectivas aplicações aos problemas fundamentais da álgebra, métodos de resolução numérica de equações (GRAEFFE e HORNER) etc. O volume termina com o estudo da geometria analítica no plano e no espaço e rudimentos de trigonometria esférica. Aqui são dados todas as propriedades vulgares das linhas e superfícies do primeiro e segundo graus em coordenadas cartesianas e polares e a dedução das fórmulas fundamentais para resolução e determinação da área dos triângulos esféricos.

O grande mérito destes dois volumes está, para os nossos estudantes dos dois primeiros anos das Faculdades de Ciências, em apresentar-lhes os conceitos fundamentais das cadeiras de matemáticas gerais e cálculo infinitesimal de uma forma simples e precisa, ilustrada sempre com numerosos exemplos e exercícios cuja resolução permite certo desembaraço nos trabalhos práticos.

J. G. T.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1960 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1960, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 71 cada número simples	17$50
N.ºs 51 a 71 » » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA-2 — Telefone 369449