GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XXI N.° 78 JAN.-MARÇO 1960

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 29449 — Lisboa-2.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de *prévio* acordo entre o Autor e a Redacção.

Composição e impressão — Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 29449 — LISBOA-2.

ESCLARECIMENTO

No ano de 1959 completou a *Gazeta de Matemática* o seu vigésimo aniversário.

Um número especial comemorativo está a ser organizado.

Entretanto, ao mesmo tempo que se esforça por apressar a recepção dos últimos artigos já prometidos por matemáticos estrangeiros, a Redacção resolveu fazer sair imediatamente o presente n.º 78, esperando que a distribuição posterior do número especial 76-77 se faça o mais ràpidamente possível.

A Redacção

ANO XXI — N.º 78 **GAZETA DE MATEMÁTICA** JAN./MARÇO — 1960

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Rua Diário de Notícias, 134 - 1.º - Esq. — Telef. 29449 — LISBOA 2

Sur la figure formée par deux ensembles convexes en Géométrie plane

por ***Lucien Chamard***

1. Notre but est assez clairement exprimé par le titre de la présente Note.

Précisons cependant que nous nous attacherons surtout ici à établir diverses conditions de convexité de la réunion de deux figures convexes. A cet effet, nous devons d'abord rappeler quelques définitions et résultats. Nous énumérerons aussi les divers aspects de la figure étudiée.

2. α) Soient deux ensembles ponctuels quelconques E_1 et E_2. On a la relation formelle évidente $E_1 \dotplus E_2 = E_1 - E_1 \cdot E_2 \dotplus E_1 \cdot E_2 \dotplus E_2 - E_1 \cdot E_2$.

Cas particuliers :

1.º) $E_1 \cdot E_2 = 0$; E_1 et E_2 sont disjoints par définition.

2.º) $E_1 \cdot E_2$ n'a pas de points intérieurs; $\overline{E_1 - E_1 \cdot E_2} = E_1$, $\overline{E_2 - E_1 \cdot E_2} = E_2$, $\overline{E_1 - E_1 \cdot E_2} \dotplus \overline{E_2 - E_1 \cdot E_2} = E_1 \dotplus E_2$ et $\overline{E_1 - E_1 \cdot E_2} \cdot \overline{E_2 - E_1 \cdot E_2} = E_1 \cdot E_2$.

Et, en toute généralité.

3.º) $C(E_1 \dotplus E_2) = C(E_1) \cdot C(E_2)$ [1]

$\qquad C(E_1 \cdot E_2) = C(E_1) \dotplus C(E_2)$

4.º) $f(E) = \overline{E} \cdot \overline{C(E)}$

$\qquad f(E_1) \cdot f(E_2) = f(E_1 \dotplus E_2) \cdot f(E_1 \cdot E_2)$.

β) D'autre part, on sait qu'un ensemble convexe est un ensemble qui, avec points contient tous ceux du segment rectiligne qui les joint.

Définition I. C'est naturellement un ensemble *semi-continu* au sens suivant: avec deux points, il contient un continu contenant ces deux points. On peut dire que l'ensemble convexe possède *la semi-continuité rectilinéaire*.

γ) *Dans le plan*, un ensemble convexe qui ne remplit pas ce plan, c'est-à-dire dont le complémentaire n'est pas vide est tel que le dit complémentaire contient au moins un demi-plan ouvert. On peut, à partir de cette remarque, définir les demi-plans d'appui d'un ensemble convexe, demi-plans ouverts «bordés» par *une droite d'appui* de l'ensemble convexe et on démontre que par tout point de la frontière d'un ensemble convexe, il passe au moins une droite d'appui. A ce point de vue, l'ensemble convexe apparaît comme l'intersection des demi-plans fermés complémentaires des demi-plans d'appui. A ce titre,

---

[1] $C(E)$ désigne le complémentaire de E et $f(E)$ la frontière de E.

l'ensemble convexe est lui-même un ensemble fermé.

Si un ensemble plan convexe a au moins une droite d'appui qui passe par chacun de ses points frontières, réciproquement, tout ensemble plan qui admet en tout point de sa frontière, au moins une droite d'appui, est un ensemble convexe. Aussi, peut on définir un ensemble convexe comme un ensemble jouissant de la propriété précédente (DÉFINITION 2).

L'intersection d'une droite et d'un ensemble convexe est un ensemble fermé connexe (c'est-à-dire un continu rectiligne).

δ) Enfin, un ensemble plan E qui ne remplit pas le plan, peut, sans être convexe, avoir au moins une droite d'appui. S'il est borné, il a pour chaque direction non orientée, deux droites d'appui parallèles (à l'image du cercle). L'intersection des demi-plans fermés complémentaires des demi-plans d'appui constitue *l'enveloppante convexe* de l'ensemble E, enveloppante convexe qui se note $K(E)$.

L'ensemble $K(E)$ contient E et ne s'identifie à E que si E est convexe. Dans le cas de E quelconque, une droite peut rencontrer cet ensemble suivant un ensemble non connexe et si E est fermé, il en est de même de quelque droite d'appui que M. GEORGES BOULIGAND a appelée *droite concluante* pour rappeler le fait qu'une pareille droite contribue à «fermer» la frontière de $K(E)$ lorsqu'est donné l'ensemble $E \cdot f\,[K(E)]$.

Sur une droite concluante, il y a au moins une corde ouverte de E appartenant à $f[K(E)]$.

Enfin, rappelons que les droites d'appui jouissent de la semi-continuité supérieure par inclusion, c'est-à-dire que si M désigne un point d'appui d'une droite d'appui $\Delta'\Delta$ d'un ensemble E, si M tend vers un point M_0 de $f(E)$, $\Delta'\Delta$ tend vers une droite d'appui de E en M_0.

Les ensembles convexes bornés sont des continus, comme il résulte presque immédiatement de leur définition. Aussi convient-il, avant d'étudier la figure formée par deux ensembles convexes, d'examiner succintement la figure formé par deux continus E_1 et E_2.

THÉORÈME I. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux continus non disjoints* (1) *et tels que l'un d'eux ne soit pas inclus dans l'autre* (2). *Leur intersection* $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$ *est une coupure de leur réunion* $\mathrm{E}_1 + \mathrm{E}_2$ (3).

En effet, soient P_1 et P_2 deux points appartenant respectivement à $E_1 - (E_1 \cdot E_2)$ et à $E_2 - (E_1 \cdot E_2)$.

$E_1 \dot{+} E_2$ étant un continu, il existe un continu (4) $k(P_1, P_2)$ contenant P_1 et P_2 et contenu dans $E_1 \dot{+} E_2$. Je dis que $k(P_1, P_2)$ porte au moins un point de $E_1 \cdot E_2$.

En effet, appelons k_1 la partie de $k(P_1, P_2)$ appartenant à E_1 et k_2 la partie de $k(P_1, P_2)$ appartenant à E_2.

On peut écrire :

$$\begin{cases} k\,1 = E_1 \cdot k(P_1, P_2) \cdot \subset E_1 & (1) \\ k\,2 = E_2 \cdot k(P_1, P_2) \cdot \subset E_2 & (2) \end{cases}$$

$$k = k_1 \dot{+} k_2 \subset E_1 \dot{+} E_2$$

$$k_1 \cdot k_2 \neq 0 \quad \text{(puisque } k \text{ est un continu).}$$

Faisons le produit logique des relations (1) et (2), membre à membre : $k_1 \cdot k_2 = E_1 \cdot E_2 \cdot k(P_1, P_2)$.

$k_1 \cdot k_2$ appartient donc simultanément à k et à $E_1 \cdot E_2$, autrement dit k a un point au moins dans $E_1 \cdot E_2$. *C. Q. F. D.*

---

(1) C'est-à-dire tels que $E_1 \cdot E_2 = 0$.

(2) $E_1 \not\subset E_2$, $E_2 \not\subset E_1$.

(3) On pourrait exprimer ce fait par intersection de $(E_1 - E_1 \cdot E_2)$ et $(E_2 - E_1 \cdot E_2) = 0$, mais je me propose ici de montrer que tout continu ayant un point dans $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et un point dans $E_2 - E_1 \cdot E_2$ a forcément un point dans $E_1 \cdot E_2$.

(4) Et même un continu irréductible (par rapport aux faits de contenir P_1 et P_2 et d'être un continu, voir par exemple S. JANISWESKI: Sur les continus irréductibles entre deux points. Thèse. Paris 1911 = Journal de l'Ec. Polytech. 16, 1912, Chap. II, ou bien C. Rend. de l'Acad. des Sc. de Paris, t. 151, 18 Juillet 1910.

Nous avons écarté le cas de deux ensembles continus disjoints. Il est évident ou presque que, même dans le cas d'ensembles E_1 et E_2 *quelconques,* non forcément connexes, non forcément fermés, le fait d'être disjoints entraîne que l'intersection des fermetures est ou vide ou, au moins, dépourvue de points intérieurs.

3. On sait que l'intersection (Durschnitt) ou ensemble des points communs à un nombre quelconque fini ou non, d'ensembles convexes est aussi un ensemble convexe. Nous avons déjà rencontré un exemple de ce fait réciproque = un ensemble convexe peut être regardé comme l'intersection des demi-plans complémentaires de demi-plans d'appui.

Il est immédiat que la réunion de deux ensembles convexes n'est pas, en général, un ensemble convexe: par exemple, deux ensembles convexes disjoints n'ont pas toujours une réunion convexe. Aussi convient-il d'étudier les conditions de convexité de la réunion de deux figures convexes. Ce problème a déjà été étudié mais pas systématiquement, à ma connaissance. Je me propose de montrer ici que les conditions en question sont multiformes, mais il n'est pas inutile qu'auparavant, nous examinions les divers aspects de la figure formée par deux figures convexes.

Cas I. Bien entendu, deux ensembles convexes peuvent être disjoints

$$E_1 \cdot E_2 = 0 \quad E_1 - E_1 \cdot E_2 = E_1 \quad E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_2$$

$$(E_1 - E_1 \cdot E_2) \dot{+} (E_2 - E_1 \cdot E_2) = E_1 \dot{+} E_2$$

$$E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_1 - E_1 \cdot E_2 \dot{+} E_2 - \\ - E_1 \cdot E_2 = E_1 \dot{+} E_2$$

est fermé mais non connexe.

$E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$ a deux composantes fermées.

Cas II. $E_1 \cdot E_2 \neq 0$ mais

$$\text{Int.}\, E_1 \cdot \text{Int.}\, E_2 = 0\ (^1)$$

(1) Int. désigne l'ensemble des points intérieurs de E.

En un point de $E_1 \cdot E_2$, E_1 et E_2 ont au moins une droite d'appui commune qui les «sépare» (1).

$$E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2 = (E_1 - E_1 \cdot E_2) \dot{+} \\ \dot{+} (E_2 - E_1 \cdot E_2) \subset (E_1 \dot{+} E_1)$$

au sens strict, avec

$$(E_1 - E_1 \cdot E_2) \cdot (E_2 - E_1 \cdot E_2) = 0 .$$

Cette fois $E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$ n'est ni fermé, ni connexe et $(E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2)$ a deux composantes non fermées (2), et

$$E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_1 \dot{+} E_2 .$$

Cas III. $E_1 \cdot E_2 \neq 0$ $\text{Int.}\, E_1 \cdot \text{Int.}\, E_2 \neq 0$. Comme dans le Cas II, $E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2 = (E_1 - E_1 \cdot E_2 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2) \subset E_1 \dot{+} E_2$ avec $(E_1 - E_1 \cdot E_2) \cdot (E_2 - E_1 \cdot E_2) = 0$ $E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$ ni fermé ni connexe.

Mais $E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2$ a au moins deux composantes non fermées *et peut en avoir un nombre quelconque.*

Et $\overline{E_1 \dot{+} E_2 - E_1 \cdot E_2} \subset E_1 \dot{+} E_2$ au sens strict.

Exemple. Réunion de deux polygones réguliers convexes, réunion constituant un polygone régulier étoilé = réunion de deux triangles équilatéraux dont l'un se déduit de l'autre par une rotation de 60° autour du centre commun.

Cas IV. $E_1 \cdot E_2 \equiv E_1$ (ou E_2)

(Celà équivaut à $E_1 \subset E_2$)

avec $E_1 \cdot \overline{C(E_2)} \neq 0$

(1) J'entends ici que chacun des ensembles E_1 et E_2 est inclus dans la fermeture d'un demi-espace d'appui de l'autre.

(2) Rappelons qu'une composante d'un ensemble est une partie connexe de cet ensemble saturée par rapport à cette propriété.

Dans ce cas, $E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_2 - E_1$ n'est pas forcément d'un seul tenant;
$E_1 - E_1 \cdot E_2 = 0$.

Exemple: $E_2 =$ disque circulaire
$E_1 =$ triangle inscrit dedans.

CAS V. $E_1 \cdot E_2 = E_1$ (ou E_2) ou bien encore $E_1 \subset \text{int.}\, E_2$.

Dans ce cas $E_2 - E_1 \cdot E_2 = E_2 - E_1 = $ $=$ connexe.

Nous retiendrons surtout que E_1, E_2 étant deux ensembles convexes, $E_1 + E_2 - E_1 \cdot E_2$ peut avoir un nombre quelconque de composantes.

4. Etude de $E_1 \cdot E_2 \dot{+} E \sum k_i$, $\sum k_i$ désignant la réunion d'un nombre quelconque de composantes k_i de $E_1 - E_1 \cdot E_2$.

THÉORÈME II. *Tout segment rectiligne joignant deux composantes différentes de* $\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$ *rencontre* $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$.

En effet, soient K_1 et C_1 deux composantes de $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et soient A_1 et A_1' deux points appartenant respectivement à K_1 et C_1. Considérons le segment rectiligne $A_1 A_1'$. Ses extrémités appartenant à E_1, il appartient tout entier à E_1.

D'autre part $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1$ et $E_1 \cdot E_2 \dot{+} C_1$ sont des continus d'intersection $E_1 \cdot E_2$ ainsi que leur réunion $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$ et aucun d'eux n'est contenu dans l'autre puisque $K_1 \cdot C_1 = 0$. En vertu du Théorème I, *tout* continu joignant un point A_1 de K_1 et un point A_1' de C_1, rencontre $E_1 \cdot E_2$. C'est donc le cas pour le segment rectiligne $A_1 A_1'$.

COROLLAIRE. *Une droite* $\Delta' \Delta$ *ne saurait rencontrer plus de deux composantes de* $\mathrm{E}_1 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$ (*ou* $\mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$).

En effet, supposons le contraire et soient A_1, A_1', A_1'' des points de $\Delta' \Delta$ appartenant à trois composantes différentes K, C, Γ de $E_1 - E_1 \cdot E_2$.

En vertu du Théorème II, à supposer que A_1, A_1', A_1'' se succèdent dans cet ordre, $A_1 A_1'$ porterait un point B de $E_1 \cdot E_2$ et $A_1' A_1''$ un point B' de $E_1 \cdot E_2$. Le segment $B B'$ serait tout entier dans $E_1 \cdot E_2$ ainsi que le point A_1' qu'il porte, contrairement à l'hypothèse.

THÉORÈME III. *Soit* K *une composante de* $\mathrm{E}_1 \dot{+} \mathrm{E}_2 - \mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E}_2$. *L'ensemble* $\mathrm{E}_1 \cdot \mathrm{E} \dot{+} \mathrm{K}$ *est convexe.*

K appartient soit à $E_1 - E_1 \cdot E_2$ soit à $E_2 - E_1 \cdot E_2$ car si ces deux ensembles ne sont pas vides, ils sont disjoints. Supposons donc que $K \subset E_1 - E_1 \cdot E_2$ et considérons un segment rectiligne $A_1 A_1'$ ayant ses extrémités sur $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K$, donc dans E_1; il appartient lui-même tout entier à E_1. Nous allons montrer qu'il appartient tout entier à $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K$ c'est-à-dire ne peut porter un point B d'une autre composante C de $E_1 - E_1 \cdot E_2$.

En effet, si A_1 et A_1' appartiennent tous deux à $E_1 \cdot E_2$, le segment $A_1 A'$ appartient tout entier à $E_1 \cdot E_2$ et ne saurait porter un point B d'une composante quelconque de $E_1 - E_1 \cdot E_2$. Supposons maintenant que A_1' appartienne à K et A_1 à $E_1 \cdot E_2$. Si $A_1 A_1'$ portait un point B de E_1 appartenant à une autre composante C de $E_1 - E_1 \cdot E_2$, en vertu du Théorème II, $A_1' B$ porterait un point B'de $E_1 \cdot E_2$; le segment $A_1 B'$ ayant ses extremités dans $E_1 \cdot E_2$ qui est convexe serait tout entier dans $E_1 \cdot E_2$ ainsi que le point B qu'il porte contrairement à l'hypothèse. Reste à envisager un segment $A_1 A_1'$ ayant ses deux extrémités dans K.

Ce segment est aussi tout entier dans E_1. Il reste à prouver qu'il ne peut rencontrer une seconde composante C de $E_1 - E_1 \cdot E_2$. Si celà était, c'est-à-dire si B était un point de $A_1 A_1'$ situé dans C, en vertu du Théorème II, il y aurait sur $B A_1$ un point I de $E_1 \cdot E_2$ et sur $B A_1'$ un point J de $E_1 \cdot E_2$. Le point B appartiendrait ainsi à $E_1 \cdot E_2$ contrairement à l'hypothèse. En résumé, tout segment ayant ses extrémités dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K$ y est situé tout entier et $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K$ est convexe.

THÉORÈME IV. *Soient deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2, *aucun d'eux n'étant contenu dans l'autre. Supposons que* $E_1 - E_1 \cdot E_2$ *présente au moins deux composantes* K_1 *et* C_1. *Je dis que* $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$ *est un ensemble convexe et que, plus généralement,* $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \sum K_i$ *est un ensemble convexe,* $\sum K_i$ *désignant la réunion d'une collection quelconque de composantes de* $E_1 - E_1 \cdot E_2$.

Démonstrons d'abord la première partie du théorème après avoir posé:

$E_1 \supset E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$ avec $K_1 \cdot C_1 = 0$.

Soient A_1 et A'_1 deux points de $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$.

CAS I. A_1 et A'_1 sont dans $E_1 \cdot E_2$; il en est de même de tout le segment $A_1 A'_1$.

CAS II. A_1 et A'_1 sont dans K_1 (ou dans C_1).

Dans ce cas, au cours de la démonstration du Théorème III, il a été prouvé que $A_1 A'_1$ appartient tout entier à $E_1 \cdot E_1 \dot{+} K_1$ (ou $E_1 \cdot E_2 \dot{+} C_1$) c'est-à-dire à $E_1 \cdot E_1 \dot{+} \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$.

CAS III. A_1 est dans $E_1 \cdot E_2$ et A'_1 dans K_1 (ou C_1). C'est encore au cours de la démonstration du Théorème III qu'on a prouvé que $A_1 A'_1$ appartiente à $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1$ ou à $E_1 \cdot E_2 \dot{+} C_1$ c'est-à-dire à $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$.

CAS IV. A_1 est dans K_1 et A'_1 est dans C_1. En vertu du Théorème II, $A_1 A'_1$ porte au moins un point B de $E_1 \cdot E_2$. Nous avons vu au CAS III que $B A_1$ est dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \dot{+} K_1$ et que $B A'_1$ est dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} C_1$. Donc $A_1 A'_1$ est tout entier dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \dot{+} K_1 + C_1$. L'ensemble $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_1 \dot{+} C_1$ est donc convexe.

Il est aisé de montrer, plus généralement que $E_1 \cdot E_2 \dot{+} \sum K i$ est convexe. La démonstration précédente est valable. Et si $\sum K i$ désigne la reunion de toutes les composantes de $E_1 - E_1 \cdot E_2$, ce résultat est évident.

5. *Critère de convexité de la reunion* $E_1 \dot{+} E_2$ *de deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2 *envisagés selon la définition* I (1).

THÉORÈME V. *Si* A_1 *est une point de* $E_1 - E_1 . E_2$ *et si* A_2 *est un point de* $E_2 - E_1 \cdot E_2$ *le segment rectiligne* $A_1 A_2$ *est tout entier dans* $E_1 \dot{+} E_2$ *à la condition nécessaire et suffisante qu'il porte au moins un point* B *de* $E_1 \cdot E_2$.

1.°) *La condition est nécessaire* — en d'autres termes, si $E_1 \dot{+} E_2$ contient $A_1 A_2$, ce segment a au moins un point B dans $E_1 \cdot E_2$. En effet, $A_1 A_2$ est tout dans $E_1 \dot{+} E_2$. Comme $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et $E_2 - E_1 \cdot E_2$ sont non vides et disjoints, il résulte du Théorème I que $A_1 A_2$ rencontre $E_1 \cdot E_2$.

2.°) *La condition est suffisante* — en d'autres termes, si $A_1 A_2$ rencontre $E_1 \cdot E_2$ en un point B au moins, ce segment apartient à $E_1 \dot{+} \cdot E_2$.

En effet, $A_1 B$ appartient tout à E_1, $B A_2$ appartient tout en E_2; donc $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_1 B} \dot{+} \dot{+} \overline{B A_2}$ apartient tout à $E_1 \dot{+} E_2$.

THÉORÈME VI. *La réunion* $E_1 \dot{+} E_2$ *de deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2 *est elle même convexe à la condition nécessaire et suffisante que tout segment* $A_1 A_2$ *dont les*

(1) § 2 (β).

extrémités sont respectivement dans E_1 *et dans* E_2 *ait au moins un point commun avec l'intersection* $E_1 \cdot E_2$.

En effet, si A_1 et A_2 appartiennent à $E_1 \cdot E_2$, $A_1 A_2$ appartient à $E_1 \cdot E_2$ donc à $E_1 \dot{+} E_2$. Si A_1 est dans $E_1 \cdot E_2$ et A_2 dans $E_2 - E_1 \cdot E_2$, on sait, grâce a Théorème III que $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_2$ est convexe(1) donc, que $A_1 A_2$ est contenu dans $E_1 \cdot E_2 \dot{+} K_2$ et par suite dans E_2, et dans $E_1 \dot{+} E_2$. Enfin, si A_1 est dans $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et A_2 dans $E_2 - E_1 \cdot E_2$, le Théorème V nous apprend que $A_1 A_2$ est encore contenu dans $E_1 \dot{+} E_2$. Ainsi la condition du Théorème VI est suffisante. Il reste à montrer qu'elle est nécessaire.

En effet, si $A_1 A_2$ n'était pas entièrement contenu dans $E_1 \dot{+} E_2$, il ne porterait pas un point de $E_1 \cdot E_2$ comme il résulte du Théorème V.

6. *Etude des droites d'appui de* $E_1 \dot{+} E_2$ *et de* $E_1 \cdot E_2$.

Les ensembls $E_1, E_2, E_1 \cdot E_2$ étant convexes, on peut établir une correspondance par «représentation circulaire» entre les frontières $f(E_1)$, $f(E_2)$, $f(E_1 \cdot E_2)$. Mais, en général, $E_1 \dot{+} E_2$ n'est pas convexe et présente, par conséquent, *des droites d'ppui concluantes* au sens du § 2 (δ).

THÉORÈME VII. *Toute droite d'appui de* $E_1 \cdot E_2$ *parallèlle à une droit d'appui concluante de* $E_1 \dot{+} E_2$ *et non confondue avec elle, ne saurait avoir plus d'un point d'appui sur* $E_1 \cdot E_2$.

En effet, soit la droite d'appui $D'D$ de $E_1 \cdot E_2$ parallèle à une droit d'appui concluante $\Delta'\Delta$ de $E_1 \dot{+} E_2$ et la plus proche de $\Delta'\Delta$. L'ensemble d'appui de $\Delta'\Delta$ n'est pas connexe. Supposons que ses points d'appui les plus rapprochés entre eux et avec l'ensemble d'appui de $D'D$ soint A_1 et A_2 (ils sont respectivement sur E_1 et E_2). Si $D'D$ avait deux points d'appui, B et B' (le segment BB' ayant le même sens que $\overline{A_1 A_2}$).

Le triangle $A_1 B' B$ ayant ses trois sommets dans E_1 est out entier dans E_1. De même, le triangle $A_2 B B'$ ayant ses trois sommets dans E_2 est tout entier dans E_2. Or, ces triangles ont en commun un troisième triangle $B I B'$ (I est l'intersection de $A_1 B'$ et de $A_2 B$) situé entre $D'D$ et $\Delta'\Delta$ ce qui contredit l'hypothèse que $D'D$ est la droite d'appui de $E_1 \cdot E_2$ parallèle à $\Delta'\Delta$ et la plus voisine de cette dernière droite.

De plus,

THÉORÈME VIII. *Soit* $\Delta'\Delta$ *une droite d'appui concluante de* $E_1 \dot{+} E_2$. *La droite d'appui de* $E_1 \cdot E_2$ *la plus proche de* $\Delta'\Delta$ *et parallèle à* $\Delta'\Delta$ (*soit* $D'D$) *est une droite d'appui intérieure* (1) *de* $E_1 \cdot F_2$, *à moins que* $\Delta'\Delta$ *et* $D'D$ *ne soient confondues.*

En effet, d'après le Théorème VII, $D'D$ n'a qu'un seul point d'appui B sur $E_1 \cdot E_2$. Si $D'D$ n'était pas une droite d'appui intérieure de $E_1 \cdot E_2$, elle serait, en B, une droite d'appui unique de $E_1 \cdot E_2$; donc droite d'appui de E_1 et de E_2 à la fois. Si $\Delta'\Delta$ et $D'D$ ne sont pas confondues, la bande qu'elles déterminent ne doit contenir aucun point de E_1 ou de E_2, donc $\Delta'\Delta$ ne saurait être droite d'appui de $E_1 \dot{+} E_2$ puisque sans appui sur E_1 et E_2.

(1) K_2 désignant une composante de $E_2 - E_1 \cdot E_2$.

(1) On dit qu'une droite d'appui d'un ensemble en un point est intérieure si elle n'est limite que de droites d'appui. Dans ce cas, il existe au même point un «angle d'appui» supérieur à π, en d'autres termes l'ensemble est localisé dans un angle intérieur à π, dont le sommet est dit *sommet* de l'ensemble. (A. DENJOY).

Du Théorème VIII découle immédiatement ce premier résultat:

THÉORÈME IX. *Une condition suffisante pour que la réunion* $E_1 \dot{+} E_2$ *de deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2 *soit elle-même convexe est que leur intersection ne présente pas de sommets.*

La réciproque n'est pas vraie. L'ensemble $E_1 \dot{+} E_2$ peut être convexe même si $E_1 \cdot E_2$ présente des sommets.

EXEMPLE I. E_1 est un triangle ABC de base BC complété par un demi-cercle de diamètre BC construit extérieurement. Quant à E_2 c'est le symétrique de E_1 par rapport à la droite BC.

EXEMPLE II. E_1 est la réunion de deux triangles isocèles ABC et A_1BC de base commune BC et contigus, la hauteur de A_1BC étant inférieure à celle de ABC. Quant à E_2, c'est le symétrique de E_1 par rapport à la droite BC.

On peut dire plus. Considérons une droite d'appui concluante $\Delta'\Delta$ de $E_1 \dot{+} E_2$. Nous avons rappelé [§ 2, (δ)] qu'elle porte au moins une corde ouverte de $E_1 \dot{+} E_2$ (appartenant à la frontière de $K(E_1 \dot{+} E_2)$). Appelons A_1, A_2 les extrémités d'une telle corde, A_1 appartenant à E_1, A_2 appartenant à E_2. Nous dirons que le plus petit des arcs $\widehat{A_1 A_2}$ de $f(E_1 \dot{+} E_2)$ est «attaché à $\Delta'\Delta$» et plus précisément, au segment rectiligne concluant $A_1 A_2$. Cet arc $\widehat{A_1 A_2}$ est formé d'un arc ouvert $\widehat{A_1 B}$ appartenant à $f(E_1)$ et d'un arc ouvert $\widehat{B A_2}$ appartenant à $f(E_2)$. Le point B, commun à la fermeture de ces deux derniers arcs appartient à $f(E_1) \cdot f(E_2)$ et à $f(E_1 \cdot E_2)$. Le Théorème VII nous a appris que la parallèle à $\Delta'\Delta$ menée par B ne touchait $E_1 \cdot E_2$ qu'en B et le Théorème VIII qu'elle était une droite d'appui intérieure de $E_1 \cdot E_2$. Mais considérons maintenant un point P de l'arc ouvert $\widehat{A_1 B}$ par exemple. Une droite d'appui de E_1 en P rencontre $\Delta'\Delta$ en un point Q. La droite d'appui de $\widehat{B A_2}$ issue de P, rencontre $\Delta'\Delta$ en R. La parallèle à $\Delta'\Delta$ menée par P est extérieure à l'angle $Q\widehat{P}R$ (angle qu'on pourrait appeller «*angle d'appui de* $E_1 \dot{+} E_2$ *en* P»).

Cette propriété se conserve lorsque P tend vers le point B et l'on retrouve le Théorème VIII. Aussi peut-on énoncer cette proposition:

THÉORÈME X. *Soit* σ *un arc ouvert de* $f(E_1 \dot{+} E_2)$ *entièrement contenu dans* $K(E_1 \dot{+} E_2)$, *arc attaché à la droite d'appui coucluante* $\Delta'\Delta$ *pour* $E_1 \dot{+} E_2$. *La parallèle à* $\Delta'\Delta$ *menée par un point quelconque* P *de* σ *est extérieure, au sens strict au faisceau des droites d'appui de* σ *passant par* P (1). *En d'autres termes l'angle d'appui en* P *est inférieur à* π.

Et on en déduit aisément que:

THÉORÈME XI. *Une condition nécessaire et suffisante pour que la réunion* $E_1 \dot{+} E_2$ *de deux ensembles convexes* E_1 *et* E_2 *soit elle-même convexe est que, en tout point* B *de* $f(E_1) \cdot f(E_2)$ *il passe une droite d'appui commune à* $E_1 \dot{+} E_2$ *et* $E_1 \cdot E_2$.

En effet, sur $f(E_1 \dot{+} E_2)$ on distingue les points situés sur $f[K(E_1 \dot{+} E_2)]$ en ces points passe évidemment une droite d'appui de $E_1 \dot{+} E_2$. Restent les points de $f(E_1 \dot{+} E_2)$ situés à l'intérieur de $K(E_1 \dot{+} E_2)$. Ils forment des arcs tels que l'arc σ du Théo-

(1) On mieux an faisceaux des droits d'appui issues de P des deux sous-arcs de σ d'extrémité commune P.

rème IX. Pour qu'en chacun de leurs points, P par exemple, il passe une droite d'appui de $(E_1 \dot{+} E_2)$ il faut et suffit que *l'angle d'appui* en P soit égal à π, ce qui ne saurait se produire que si celà arrive au point B de $f(E_1) \cdot f(E_2)$. La droite d'appui en question est commune à $E_1 \dot{+} E_2$ et à $E_1 \cdot E_2$.

7. *Critères de convexité de deux ensembles basés sur la considération de leur intersection et de leur réunion.*

Ce qui suit est très simplement suggéré par le fait que la convexité est une connexité particulière et par les propriétés communes aux ensembles connexes, locallement connexes, continus.

Théorème XII. *Si la réunion et le pro-produit de deux ensembles* E_1 et E_2 *sont des corps convexes, les deux ensembles* E_1 et E_2 *sont eux-mêmes des corps convexes.*

Celà est banal si l'un contient l'autre. Soient les deux ensembles E_1 et E_2. Par hypothèse, $E_1 + E_2$ et $E_1 \cdot E_2$ sont des corps convexes.

Démontrons *par exemple,* que E_1 possède cette propriété. Et pour celà, considérons deux points quelconques P_1 et Q_1 de E_1. Il s'agit de prouver que tout point de segment rectiligne $P_1 Q_1$ appartient à E_1.

Trois cas peuvent se présenter :

1.°) P_1 et Q_1 sont des points de $E_1 \cdot E_2$

Alors, $P_1 Q_1$ appartiente à $E_1 \cdot E_2$, puisque ce produit est convexe par hypothèse $P_1 Q_1$ étant contenu dans une partie de E_1, est évidement contenu dans E_1.

2.°) On a, *par exemple,* la disposition suivante :

$$P_1 \text{ dans } E_1 \cdot E_2$$
$$Q_1 \text{ dans } E_1 - E_1 \cdot E_2$$

Puisque, par hypothèse, $E_1 \dot{+} E_2$ est convexe, le segment $P_1 Q_1$ appartient à $E_1 \dot{+} E_2$. Il reste à montrer que $P_1 Q_1$ ne saurait porter un point n'appartenant qu'à E_2, c'est-à-dire un point de $E_2 - E_1 \cdot E_2$.

Supposons, pour un instant, que celà puisse se produire et soit Q_2 un point de $E_2 - E_1 \cdot E_2$ porté par $\overline{P_1 Q_2}$. Le segment rectiligne $\overline{P_1 Q_2}$ ayant un point P_1 dans $E_1 - E_1 \cdot E_2$ et un point Q_2 dans $E_2 - E_1 \cdot E_2$ a forcément un point P sur $E_1 \cdot E_2$ d'après le Théorème I. De l'hypothèse que $E_1 \cdot E_2$ est convexe, on déduit que le segment $P_1 P$ appartient tout entier à $E_1 \cdot E_2$.

Or, Q_2 appartient à $\overline{P P_1}$ d'après notre supposition, donc, il appartient aussi à $E_1 \cdot E_2$, d'après ce qui précède. Celà est contraire à la seconde partie de notre supposition d'après laquelle Q_2 devrait appartenir à $E_2 - E_1 \cdot E_2$.

Ainsi se trouve démontré par l'absurde le fait que $\overline{P_1 Q_1}$ appartient tout entier à E_1.

3.°) Par hypothèse, nous posons cette fois, la double appartenance suivante :

$$P_1 \text{ dans } E_1 - E_1 \cdot E_2$$

et

$$Q_1 \text{ dans } E_1 - E_1 \cdot E_2$$

$P_1 Q_1$ appartient tout entier à $E_1 \dot{+} E_2$ qui, par hypothèse, est convexe. Supposons pour un instant que $P_1 Q_1$ porte un point Q_2 n'appartenant qu'à $E_1 - E_1 \cdot E_2$. D'aprés le Théorème I dans ce cas, $\overline{P_1 Q_2}$ et $\overline{Q_2 Q_1}$ portent chacun au moins un point de $E_1 \cdot E_2$.

Soient M un point de $\overline{P_1 Q_2}$ et N un point de $\overline{Q_1 Q_2}$ tous deux situés dans $E_1 \cdot E_2$. D'abord, Q_2 est porté par le segment $\overline{MN}$ et d'autre part, le produit $E_1 \cdot E_2$ étant convexe par hypothèse, il contient entièrement le segment MN.

Par conséquent, Q_2 appartient lui aussi à $E_1 \cdot E_2$ contrairement à la supposition qu'il n'appartient qu'à $E_2 - E_1 \cdot E_2$.

Cette contradiction démontre que $\overline{P_1 Q_1}$ appartient tout entier à E_1.

Aucun autre cas ne pouvant se présenter, le théorème est établi.

Il admêt, entre autres conséquences, celle-ci :

Corollaire. E_1 *et* E_2 *sont deux corps convexes à points intérieurs dont l'un* E_1, *par exemple, contient l'autre* E_2. *La condition nécessaire et suffisante pour que* $\overline{E_1 - E_2}$ *soit aussi un corps convexe est que le produit de fermeture* $E_1 \cdot (\overline{E_1 - E_2})$ *soit un corps convexe.*

1.°) La condition est évidemment nécessaire.

En effet, supposons $\overline{E_1 - E_2}$ conveve. Son produit avec E_2, $E_2 \cdot (\overline{E_1 - E_2})$ est convexe.

2.°) La condition est suffisante.

En effet, supposons que $E_2 \cdot (\overline{E_1 - E_2})$ soit une figure convexe, évidemment sans points intérieurs.

Dans ce cas, la somme $E_2 \dot{+} (\overline{E_1 - E_2}) = E_1$ étant convexe ainsi que le produit $E_2 \cdot (\overline{E_1 - E_2})$, il résulte du théorème précédent que E_1 et $\overline{E_1 - E_2}$ sont deux corps convexes.

Comme je l'ai indiqué au début de ce paragraphe il ne faut pas s'étonner du résultat précédent ni de sa simplicité, car les ensembles connexes, localement connexes continus jouissent d'une propriété analogue (1).

Je terminerai cet exposé par une question : «Est-il possible caractériser *logiquement* une propriété qui, appartenant à la réunion et à l'intersection de deux ensembles, appartient, de ce fait, à chacun de deux ensembles ?

---

(1) — I. Soient A et B deux ensembles fermés (ou deux ensembles ouverts). Si les ensembles $A \dot{+} B$ et $A \cdot B$ sont connexes, les ensembles A et B le sont aussi. Voir une note de S. Janizewski et C. Kuratowski. Fundamenta Mathematicae. Tome I (1920) Nouvelle Ed. 1937, P. 211, th. I.

Voir aussi C. Kuratowski, Topologie. Vol. II, Chap. V Par 41, II, p. 83.

II. A et B étant deux ensembles compacts tels que $A \dot{+} B$ et $A \cdot B$ soient des continus, A et B sont aussi des continus. (C. Kuratowski. Topologie, Vol. II, Chap. V, par. 42, p. 1[illegible]8).

III. A et B étant deux ensembles fermés tels que les ensembles $A \dot{+} B$ et $A \cdot B$ soient localement connexes; les ensembles A et B sont aussi localement connexes. (C. Kuratowski. Topologie. Vol. II, Chap. VI. Parag. 44 ; II, 10, p. 164).

Princípios fundamentais dos computadores digitais automáticos

por **A. César de Freitas**

(Conclusão)

4. Memória

A parte mais importante dum computador digital automático é, talvez, a sua memória, e a eficiência da máquina depende em grande parte da quantidade de informação que ela pode memorizar. Com efeito, como nos modernos computadores automáticos em geral há a necessidade de colocar na memória, logo de início, todos os números e instruções que conduzem à resolução dum problema de cálculo, se a capacidade dessa memória é pequena, a ordem dos problemas que podem ser tratados pela máquina é bastante limitada.

Toda a memória deve ter as três propriedades seguintes :

(1) Deve ser capaz de reter a informação durante o tempo que for necessário.

(2) Deve ser capaz de fornecer essa informação quando pedida.

(3) Deve permitir substituição de informação.

Além disso o tempo que a máquina leva a colocar e a extrair informação da memória — *tempo de acesso* — deve estar de acordo com o tempo que ela demora a efectuar as outras operações — a máquina não deve estar à espera para obter e pôr informação na memória.

Uma memória cujo tempo de acesso seja muito pequeno é sempre muito cara, e, principalmente por isso, numa grande maioria dos computadores digitais actualmente existentes aparecem dois tipos de memória: uma, de menor capacidade e cujo tempo de acesso é pequeno — *memória rápida* —; outra, de grande capacidade — *a memória principal* — onde é colocada a quáse totalidade da informação a fornecer à máquina. Esta informação é transferida (ou copiada), em pequenos blocos, para a memória rápida onde é tratada pela máquina. Consegue-se assim um tempo médio de acesso à informação relativamente pequeno, sem encarecer demasiadamente o custo da máquina.

Há uma grande variedade de materiais que, pelas suas propriedades físicas (ou químicas), podem ser explorados para a construção de memórias. Assim para memorizar informação no sistema binário, qualquer dispositivo onde se possam distinguir dois estados não simultâneos, serve para representar um dígito. É o que acontece, por exemplo, com o circuito bi-estável a que fizemos referência no parágrafo anterior.

Pode mesmo dizer-se, sem grande exagero, que não há nenhum sector da física onde não se possa descobrir algo que sirva de base à construção duma memória.

Actualmente os materiais magnéticos são os mais usados, quer pela sua durabilidade e economia, quer porque, em certas condições, permitem tempos de acesso bastante pequenos. São muito usuais, como memórias, os tambores e discos magnéticos, os fios e as fitas magnéticas, as matrizes de aneis magnéticos. Nestes dispositivos usam-se dois estados de magnetização para reter informação na forma binária.

Vamo-nos referir, porém, mais detalhadamente ao primeiro tipo de memória de grande capacidade que foi usado, e que se encontra em muitos computadores actualmente em funcionamento. É o tipo de memória formada pelos chamados *circuitos de atraso acústicos*. Cada elemento desta memória é constituído como está representado esquemáticamente na figura seguinte

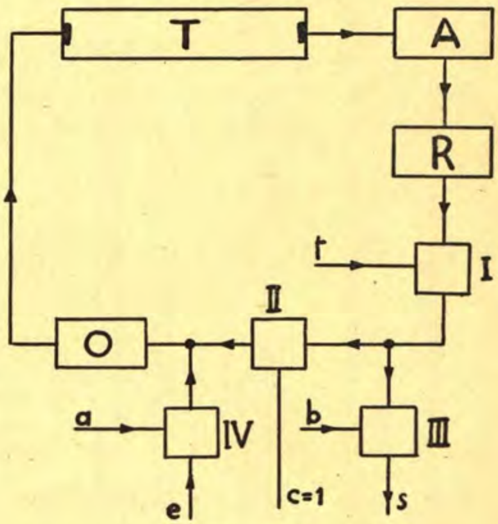


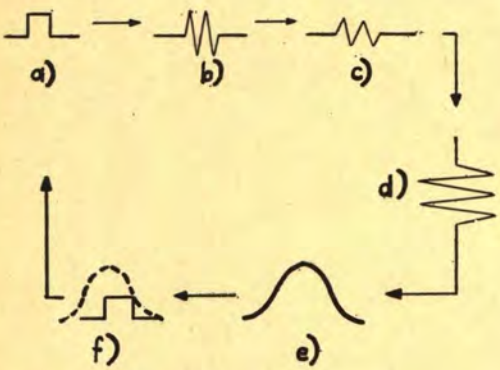
Fig. 10

T — tubo cheio de mercúrio tendo interiormente, em cada uma das extremidades, um cristal de quartzo
A — amplificador
R — rectificador
O — oscilador
I, II, III, IV — circuitos de coincidência

Ao terminal *t* chegam os impulsos dados pelo padrão de tempo, em geral um vibrador de quartzo.

Em *T*, no cristal de quartzo da esquerda, a energia eléctrica é transformada em energia acústica (ultra-sons) que viaja no mercúrio e é transformada novamente em energia eléctrica no cristal de quartzo da direita.

No dispositivo da figura anterior, um impulso que entrou no circuito sofre o ciclo de transformações a seguir esquematizado.



a) — à entrada do oscilador
b) — à saída do oscilador
c) — à saída do tubo de mercúrio
d) — à saída do amplificador
e) — à saída do rectificador
f) — o impulso inicial é reproduzido no circuito de coincidência I com o auxílio dos impulsos do padrão de tempo. Para isso é necessária uma certa sincronização para que *e)* chegue a I (Fig. 10) ao mesmo tempo que um impulso do padrão de tempo. Tal sincronização é obtida entrando em linha de conta com a velocidade de propagação do som no mercúrio e com o comprimento do tubo T.

A passagem de *a)* para *b)* faz-se com o fim de obter uma melhor propagação da energia no tubo T.

O impulso mantém-se, portanto, em circulação constante.

Se se tratasse dum grupo de impulsos (correspondente a um número ou a uma ordem) tudo se passaria da mesma maneira. Esse grupo de impulsos chegaria a e (Fig. 10) e entraria em circulação desde que se tivesse $a = 1$ durante o intervalo correspondente à passagem do grupo. Se quizessemos depois obter esse mesmo grupo de impulsos bastaria fazer $b = 1$, em III, um pouco antes de ele chegar ao outro terminal de entrada e manter esse valor de b até que o grupo fosse obtido em s. O circuito de coincidência II serve para «apagar» informação que esteja a circular.

Já se deixa ver que numa máquina que use este tipo de memória, deve haver uma sincronização que permita efectuar as operações anteriores, tanto mais que no mesmo circuito de atraso circulam em geral vários grupos de impulsos correspondentes a outros tantos números (ou ordens).

O nome de circuito de atraso que se dá ao circuito representado na Fig. 10 resulta do facto da propagação da energia eléctrica no circuito ser atrasada em virtude das transformações sofridas em T (a velocidade do som no mercúrio é da ordem de $1.5\ \mathrm{mm}/\mu\mathrm{s}$). A amplitude do atraso é função do comprimento do tubo.

Note-se que no tubo T podem ser usados outros líquidos além do mercúrio. Também se usam as propriedades magneto-estritivas de certos metais como o níquel, para a construção de circuitos de atraso acústicos.

É interessante referir que certas teorias modernas sobre a memória humana sugerem que tudo se deve passar de modo análogo ao que temos referido para os circuitos de atraso — grupos de impulsos nervosos circulam constantemente, possivelmente em vários circuitos em paralelo. O processo da aquisição de conhecimentos envolve, quer o estabelecimento de circuitos fechados onde circulam os grupos de impulsos de energia nervosa, quer a formação inicial desses grupos de impulsos.

5. Adição e subtracção

Por simplicidade e para não nos alongarmos demasiadamente, passaremos, de agora em diante, a considerar uma máquina com as características seguintes

(1) Tipo série, trabalhando com números x tais que $-1 \leqq x < 1$

(2) Os números negativos são representados pelos complementos, para dois, dos seus módulos

(3) Cada número é representado por dezasseis dígitos binários, o primeiro sendo o dígito do sinal. Assim o número 0,1 (base dez) será representado por 0,000110011001101 e o número $-0{,}628$ por 1,011000000000000

(4) Possui um acumulador, isto é, um dispositivo onde se obtém o resultado das operações antes de o transferir para a memória e onde se pode colocar qualquer número vindo da memória.

Por se tratar duma máquina do tipo série todo o seu funcionamento é controlado, no tempo, por um padrão de tempo.

Vejamos então como nesta máquina se faz a adição e a subtracção.

a) *Adição.*

Para somar dois números basta fazê-los circular simultâneamente através de dois dos terminais de entrada de um somador e ligar o terminal de saída, T, correspondente ao transporte, ao outro terminal de entrada através dum circuito de atraso que dê um atraso de um impulso [1].

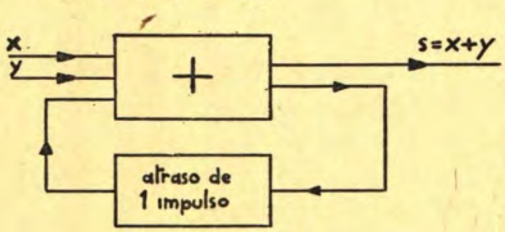


Fig. 11

[1] É daqui que vem a designação de somador dada ao circuito (f) do parágrafo 3.

Para verificar que de facto em S se obtém a soma $X+Y$ basta ter em atenção as tabelas I e II do parágrafo 1 e as tabelas III e IV do parágrafo 2. Note-se que os números circulam de modo que os algarismos menos significativos se apresentam sempre primeiro.

b) *Subtracção.*

Neste caso pode usar-se um somador como para a adição, desde que o diminuidor seja complementado antes de atingir o seu terminal de entrada. Um circuito que serve para achar o complemento dum número é o seguinte

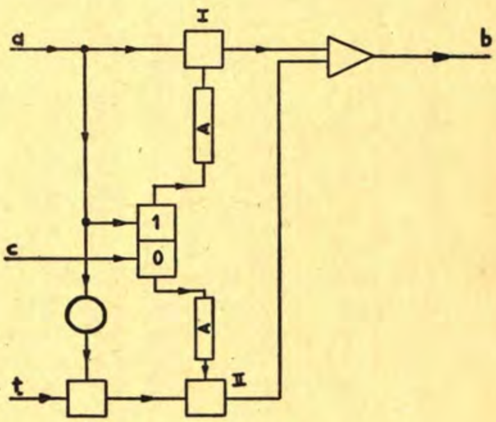


Fig. 12

A — Circuito de atraso.

t — Terminal de entrada de impulsos dados pelo padrão de tempo.

Suponhamos o circuito bi-estável no estado indicado na figura. Quando um número se apresenta no terminal de entrada a, se o seu primeiro algarismo da direita é 0 esse algarismo é reproduzido no terminal de saída b e vai acontecendo o mesmo até que apareça o algarismo 1 no terminal de entrada. Este 1 passa em I mas ao mesmo tempo muda o estado do circuito bi-estável o que interrompe a passagem em I a qualquer outro 1 que se apresente. É fácil agora reconhecer que, para os restantes algarismos do número, onde está *1* fica *0* e onde está *0* fica *1*, devido à acção do inversor e porque em II se tem agora sempre *1* no terminal de entrada que vem do circuito bi-estável (1).

Note-se que é possível construir um circuito — *um subtractor* — capaz de fazer a subtracção directamente.

Uma máquina com dispositivos para fazer a adição e a subtracção está apta a efectuar também a multiplicação e a divisão (2) já que estas operações não são mais do que determinadas sequências das outras, mas é rara a máquina que não possui ainda um dispositivo para fazer a multiplicação directamente. Máquinas que façam directamente a divisão não são tão frequentes.

6. Representação e execução das ordens (instruções)

A máquina usa as instruções em código. Vamos supor que se trata dum *código de direcção simples*, isto é, cada ordem refere-se a um único compartimento da memória (quando se trate de ordens em que ela intervém). Para usar um código deste tipo a unidade aritmética da máquina deve possuir um acumulador — é o caso da máquina que estamos a considerar.

Cada ordem é representada por dezasseis dígitos binários, tal como os números. Desses dígitos alguns referem-se ao tipo de ordem (some, multiplique, copie, etc.) — é a *parte funcional* — e os restantes indicam o compartimento da memória visado por tal ordem (quando se trata duma ordem que faz intervir a memória) — é a *direcção* —.

Suporemos que, dos dezasseis dígitos binários, cinco se referem à parte funcional e

(1) Antes de achar o complemento de outro número o circuito bi-estável deve mudar de estado.

(2) Observe-se que o essencial na máquina é possuir um dispositivo apenas para fazer a subtracção.

os restantes aos compartimentos da memória

$$\underbrace{\boxed{d_{16}}\boxed{d_{15}}\boxed{d_{14}}\boxed{d_{13}}\boxed{d_{12}}}_{\text{função}}\underbrace{\boxed{d_{11}}\boxed{d_{10}}\boxed{d_{9}}\boxed{d_{8}}\boxed{d_{7}}\boxed{d_{6}}\boxed{d_{5}}\boxed{d_{4}}\boxed{d_{3}}\boxed{d_{2}}\boxed{d_{1}}}_{\text{direcção}}$$

Estamos portanto a supor a possibilidade de $32 = 2^5$ ordens e que a memória tem $2048 = 2^{11}$ compartimentos.

Passaremos a designar por $C(n)$ o conteudo do compartimento n da memória, por $C(Ac)$ o conteúdo do acumulador, por $C(M)$ o conteúdo do multiplicador (1) e suporemos desde já que o código de ordens da máquina inclui as ordens seguintes

1) A n — adicione $C(n)$ a $C(Ac)$ colocando o resultado no acumulador;

2) S n — subtraia $C(n)$ de $C(Ac)$ colocando o resultado no acumulador;

3) T n — transfira $C(Ac)$ para o compartimento n da memória (deixando limpo o acumulador);

4) U n — copie $C(Ac)$ no compartimento n da memória;

5) H n — substitua $C(M)$ por $C(n)$;

6) V n — multiplique $C(n)$ por $C(M)$ e some o resultado a $C(Ac)$;

7) F n — tome $C(n)$ como a próxima ordem a ser executada (2);

8) G n — se $C(Ac) < 0$ tome $C(n)$ como a próxima ordem; caso contrário proceda normalmente (2);

9) E n — se $C(Ac) \geq 0$ tome $C(n)$ como a próxima ordem; caso contrário proceda normalmente (2);

(1) O multiplicador é um registo, semelhante a um compartimento da memória, onde se coloca um dos factores quando se pretende fazer uma multiplicação.

(2) No parágrafo seguinte perceberemos melhor o significado desta ordem.

10) $R\ \ p$ — divida $C(Ac)$ por 2^p;
11) $L\ \ p$ — multiplique $C(Ac)$ por 2^p;
12) Z — pare.

Considere-se, por exemplo, a ordem *A 21* que significa, adicione o conteudo do compartimento *21* da memória ao conteúdo do acumulador. Se a função adicionar — *A* — por representada pelo grupo de digitos *11100,* a ordem anterior é representada por [1] *1110000000010101.*

Vejamos agora, em linhas muito gerais, como é executada uma determinada ordem onde intervenha o conteúdo dum compartimento da memória. Os impulsos correspondentes a tal ordem viajam da memória até um grupo de circuitos bi-estáveis (em número de 16) onde a ordem é memorizada.

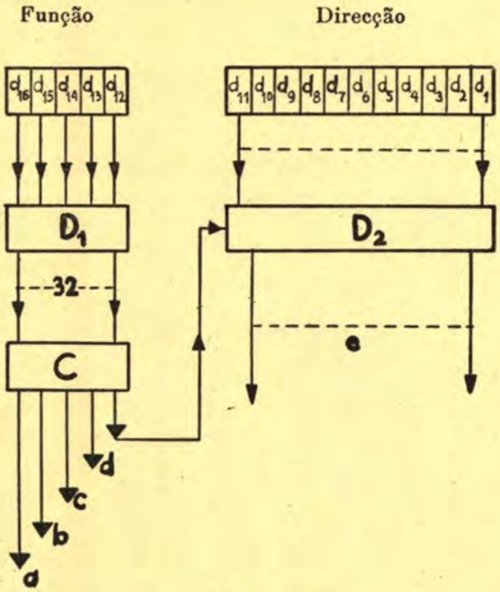


Fig. 13

D_1, D_2 — decifradores
C — cifrador
a — para a unidade aritmética
b — para o control principal
c — para a via de entrada
d — para a via de saída
e — para a memória

(1) Este grupo de dígitos também representa o número — 0,001111111101011.

O grupo de circuitos bi-estáveis correspondente à parte funcional da ordem está ligado a um *decifrador,* D_1, que tem trinta e dois terminais de saída, dos quais um, e só um, é activado para cada tipo de ordem. Este decifrador está por sua vez ligado a um *cifrador* que tem terminais de saída para as diferentes partes da máquina e que vão dar origem aos impulsos necessários à execução da ordem. Um destes terminais de saída está ligado a um decifrador D_2 que interpreta os dígitos correspondentes à direcção da ordem.

Considerámos uma máquina com um código de direcção simples, mas para o caso de códigos com várias direcções tudo se passa de maneira semelhante. Assim, para um código de três direcções, a ordem

$A\ l\ m\ n$ — adicione $C(l)$ a $C(m)$ e coloque o resultado no compartimento n,

continua a ser representada por um grupo de dígitos dos quais alguns se referem à operação a executar, e os restantes estão divididos em três grupos cada um deles referindo-se a um compartimento da memória.

7. Programação

A programação tem por fim traduzir na linguagem da máquina (isto é, por aplicação do respectivo código de ordens) a informação que conduzirá à resolução de determinado problema. Ela compreende duas fases distintas: na primeira, em geral bastante delicada e exigindo sólidos conhecimentos de análise numérica, estabelece-se a sequência de operações adaptáveis à máquina e que resolvem o problema; na segunda, traduz-se essa sequência de operações no código da máquina, obtendo-se o que se chama o *programa* correspondente ao problema em questão.

Na máquina que estamos a considerar (código de direcção simples) o programa é todo colocado [1] na memória em compartimentos sucessivos, digamos nos compartimentos 100, 101, 102, ⋯, e depois a máquina começa a executar esse programa começando pela ordem do compartimento 100, passando à do compartimento 101, depois à do 102 e assim sucessivamente. Este modo de actuar só poderá ser modificado quando for encontrada uma ordem Fn, Gn, En, ou quando a máquina parar. Antes de começar a execução do programa é necessário, evidentemente, que os números a que se referem as instruções também já estejam na memória.

Vejamos dois exemplos muito simples

1) Suponhamos que durante a resolução de certo problema um número [2] N vai ocupar o compartimento 200 da memória. Pretende-se escrever a sequência de instruções que fazem com que N seja substituído pelo seu módulo.

Se supusermos que o acumulador está limpo, as instruções seguintes permitem obter o que se pretende

100	A 200 → coloca N no acumulador
101	E 105 → se $N \geq 0$ execute a ordem que está no compartimento 105, caso contrário siga normalmente (isto é, execute a ordem do compartimento 102)
102	S 200 → zero no acumulador
103	S 200 → $-N$ no acumulador
104	T 200 → $C(200) = -N$ (e portanto positivo).
105	. . . . . .

Um outro conjunto de ordens que resolvem a questão, é o seguinte

100	S 200 → $-N$ no acumulador
101	G 103 → se $-N$ é negativo execute a ordem que está no compartimento 103, caso contrário siga normalmente.
102	T 200 → $C(200) = -N$.
103	. . . . . .

Este segundo programa é preferível ao anterior pois faz uso apenas de três ordens.

2) Seja agora calcular o valor do polinómio

$$a + ax + ax^2 + \cdots + ax^{11}$$

para $x = 0{,}5$ e $a = 0{,}25$, supondo que $C(200) = a$ e $C(201) = x$.

Não convém pôr a em evidência porque se obtinha uma expressão da forma $a(1 + \cdots)$ e o número 1 não pertence ao intervalo em que trabalha a máquina. O melhor processo é escrever o polinómio na forma

$$\{[(ax + a)x + a]x + a\}x + a \cdots$$

pois corresponde a efectuar repetidamente o mesmo ciclo de operações: multiplicar um número por x e somar a. Mais precisamente, se S_n é o resultado parcial após n repetições do ciclo, então

$$S_{n+1} = x S_n + a$$

Deve então colocar-se x no multiplicador e repetir onze vezes o ciclo

$$(1)\begin{cases} V\,202 \rightarrow \text{multiplicar } x \text{ por } C(202) \\ A\,200 \rightarrow \text{somar } a \\ T\,202 \rightarrow \text{colocar o resultado em } 202, \end{cases}$$

partindo com $C(202) = a$.

Para contar onze repetições do processo vamos colocar -11×2^{-15} num compartimento da memória e aumentar este número de 1×2^{-15} depois de cada repetição do grupo de ordens (1):

Depois do primeiro ciclo fica -10×2^{-15}
Depois do segundo ciclo fica -9×2^{-15}
. . . .
Depois do décimo-primeiro ciclo fica 0

(1) Veremos mais adiante como isso é feito.
(2) Cujo sinal é desconhecido.

Suponhamos então que $C(2) = 1 \times 2^{-15}$ e que $C(3) = 11 \times 2^{-15}$.

O programa para o problema proposto será o seguinte [1]:

	100	H 201	$\rightarrow$ coloca x no multiplic.
	101	A 200	$\rightarrow$ faz $C(202) = a$ e limpa o acumulador
	102	T 202	
	103	S 3	$\rightarrow$ faz $C(4) = -11 \times 2^{-15}$
110 $\rightarrow$	104	T 4	
	105	V 202	$\rightarrow x S_n$ no acumulador
	106	A 200	$\rightarrow x S_n + a$ no acumulador
	107	T 202	$\rightarrow x S_n + a = S_{n+1}$ em 202
	108	A 4	$\rightarrow$ Contagem do número de ciclos e verificação do final
	109	A 2	
	110	G 104	
	111	. . . .	

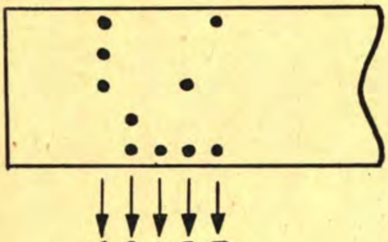
8. Entrada e saída de informação.

Vamos finalmente ver como as ordens e os números são colocados na memória.

Considere-se por exemplo a ordem $A\,315$. Esta ordem deverá ser colocada num compartimento da memória na forma

$$\underbrace{11100}_{\text{função } A}\underbrace{00100111011}_{\text{direcção } 315 = 2^8+2^5+2^4+2^3+2+1}$$

Para isso, por meio dum dispositivo com um teclado semelhante ao de uma máquina de escrever, perfura-se numa fita de papel o que está indicado na figura



A 3 1 5 F

Fig. 14

Esta fita vai ser «lida» fotoelèctricamente pela máquina. O F que agora aparece vai servir para indicar que terminou o que dizia respeito à ordem $A\,315$ e que portanto o que vier em seguida fará parte doutra ordem.

Na máquina existe um programa [1] que vai transformar o que é lido na fita naquilo que se pretende. Nesse programa intervem a ordem

$I\,n$ — Coloque no compartimento n da memória o número $b \times 2^{-15}$, sendo b o inteiro representado no código de entrada pela fila de furos da fita.

As ordens do programa podem ser as seguintes:

	0	T 28	$\rightarrow$ Limpa o acumulador
	1	H 25	$\rightarrow$ Coloca $\frac{10}{16}$ no multiplicador
24 $\rightarrow$	2	T 30	$\rightarrow C(30) = 0$
	3	I 28	$\rightarrow C(28) = 000000000011100$
	4	A 28	$\rightarrow C(Ac) = C(28)$
	5	L 11	$\rightarrow C(Ac) = 111000000000000$
	6	T 29	$\rightarrow$ Ficou «guardada» a função A
16 $\rightarrow$	7	I 28	$\rightarrow$ Lê a fila de furos seguinte e coloca $b \times 2^{-15}$ no acumulador
	8	A 28	
	9	S 26	$\rightarrow$ Verifica se se trata dum algarismo ou da letra F indicativa do fim da ordem; neste último caso muda control para o compartimento 17
	10	E 17	
	11	T 31	$\rightarrow C(Ac) = 0$
	12	V 30	$\rightarrow C(Ac) = C(30) \times \frac{10}{16}$
	13	L 4	$\rightarrow C(Ac) = C(30) \times \frac{10}{16} \times 16 = C(30) \times 10$
	14	A 28	$\rightarrow C(Ac) = C(30) \times 10 + C(28)$
	15	T 30	$\rightarrow C(30) = C(Ac)$
	16	F 7	$\rightarrow$ Para recomeçar o ciclo

(1) Supondo que o acumulador está limpo.

(1) Pode dizer-se que este programa faz parte da máquina.

10→17	T 28	→ $C(Ac)=0$
18	A 29	→ $C(Ac)=1110000000000000$
19	A 30	→ $C(Ac)=1110000100111011$
20	T 32	→ No compartimento 32 da memória ficou a ordem que se pretende
21	A 20	→ Tem por fim aumentar de uma unidade a direcção da ordem 20
22	A 27	
23	T 20	
24	F 2	→ Para começar a leitura da ordem seguinte
25		→ Neste compartimento está o número 10/16
26		→ Neste compartimento está o número 10×2^{-15}
27		→ Neste compartimento está o número 2^{-15}
28		→ Compartimentos auxiliares.
29		
30		
31		

Os números são colocados na memória utilizando um programa apropriado que é lá colocado como acabámos de indicar.

Para obter os resultados calculados pela máquina usa-se também um programa apropriado onde desempenha papel primordial a ordem

$O\,n$ — perfure na fita de saída uma fila de furos que corresponda posicionalmente aos *uns* das cinco posições digitais mais significativas do compartimento n da memória.

No que acabámos de referir suposemos que a entrada e saída de informação era feita através duma fita de papel perfurada. É também muito usual, para tal fim, o emprego de cartões perfurados e de fita magnética.

BIBLIOGRAFIA

[1] V Belevitch, *Langage des Machines et Langage Humain*, Office de Publicité, S. A., Editeurs, Bruxelles.

[2] *Faster Than Thought* (a symposium on digital computing machines), Sir Isaac Pitman & Sons Ltd, London.

[3] M. V. Wilkes, *Automatic Digital Computers*, Methuen & Co. Ltd, London.

[4] D. R. Hartree, *Calculating Instruments & Machines*, Cambridge University Press.

[5] R. K. Richards, *Arithmetic Operations in Digital Computers*, D. Von Nostrand Co. Inc.

[6] Wilkes, Wheeler, Gill, *Programs for an Electronic Digital Computer* (2d edition), Addison-Wesley Publishing Co. Inc.

[7] R. Higonnet, R. Gréa, *Étude Logique des Circuits Electriques et des Systèmes Binaires*, Editions Berger-Levrault, Paris.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — Matemáticas Gerais — **2.º exame de frequência.**

5124 — 1) Estudar a curva $y=x^2e^x$

5125 — 2) Enunciar e demonstrar o teorema de Rolle. É o teorema aplicável à função $f(x)=\dfrac{x^2-4x}{x+2}$ no intervalo $[0,4]$?

5126 — 3) Determinar $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+x^2-2}{\operatorname{sen}^2 x-x}$

5127 — 4) Primitivar

a) $(e^x+1)^3\,e^x$

b) $\dfrac{1}{x^2+10x+30}$

c) $\dfrac{x^3+x^2-5x+1}{x^3+x^2-6x}$

5128 — 5) Calcular a área compreendida entre a parábola $y = k\,x^2$ e a recta $y = k$

5129 — 6) Determinar um valor aproximado (com erro $< 0{,}01$) da área compreendida entre as curvas $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 1$ usando o método de primitivação por séries.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 30-6-1959.

I

5130 — 1) Considere as sucessões u_n e v_n, a primeira crescente e a segunda decrescente, e a sucessão $S)$ $u_1, v_1, u_2, v_2, \cdots u_n, v_n, \cdots$.

Responda às seguintes perguntas, apresentando as respectivas justificações:

a) A sucessão S) pode ter limite infinito de sinal qualificado?

b) Na hipótese em que S) admite sublimites finitos, quais são os limites máximo e mínimo?

c) Quais são os limites de Weierstrass do conjunto (u_n, v_n)?

Calcular $\lim\limits_{n=\infty} \left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^n$.

2) Estude a natureza da série $\sum \dfrac{1}{1+x^n}$; em que x representa um número positivo.

Demonstre que as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são da mesma natureza quando $\dfrac{a_n}{b_n} \to h \neq 0, \infty$. Aproveite esta proposição para mostrar que a série $\sum \dfrac{n^p + a\, n^{p-1} + \cdots}{n^q + a'\, n^{q-1} + \cdots}$ é convergente quando $q > p + 2$.

R: 1) *Como* $\lim\limits_{n=\infty} \log \left(\dfrac{2n-3}{2n+3}\right)^n =$

$$= \lim_{n=\infty} n \log\left(1 - \frac{6}{2n+3}\right) = \lim_{n=\infty} \xi \cdot \frac{-6n}{2n+3} =$$

$$= -3\ (\xi \to 1)\,,\ \textit{será}\ \lim_{n=\infty}\left(\frac{2n-3}{2n+3}\right)^n = e^{-3}.$$

2) *Se* $x < 1$, $\lim\limits_{n=\infty} \dfrac{1}{1+x^n} = 1$ *e a série é divergente.*

Se $x > 1$, $\dfrac{1}{1+x^n} < \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ *e, como a série* $\sum \left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ *é convergente, também a série proposta será.*

II

5131 — 1) Quando as funções contínuas $F(x)$ e $G(x)$ têm igual derivada em (a, b) e a sua diferença não é constante, que se pode dizer de $F'(x)$ e $G'(x)$? Razão da resposta.

Desenvolva $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)}$ em série de Mac Laurin. Calcule $P\,x \cdot \text{arc sen}\, x$.

2) Considere a tabela de valores

x	x_0	x_1	x_2	x_3
y	y_0	y_1	y_2	y_3

e suponha que o polinómio interpolador $g(x)$ é do segundo grau. Se $h(x)$ é outro polinómio que assume em x_0, x_1, x_2 e x_3 os mesmos valores que $g(x)$, que sabe sobre o grau de $h(x)$? Porquê?

Admitindo que $g(x) = x^2 + x - 1$, indique os valores de y_0, δy_0, $\delta^2 y_0$ e $\delta^3 y_0$ e escreva a expressão geral dos polinómios $h(x)$.

R: 1) *Como* $\dfrac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}$, *virá*

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2}\sum_0^\infty x^n + \frac{1}{6}\sum_0^\infty (-1)^n x^n - \frac{1}{6}\sum_0^\infty \left(\frac{x}{2}\right)^n = \sum_0^\infty \left[\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n}{6} - \frac{1}{6 \cdot 2^n}\right] x^n.$$

$$P\,x \cdot \textit{arc sen}\, x = \frac{x^2}{2} \cdot \textit{arc sen}\, x + \frac{1}{2} P \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x = \frac{x^2}{2} \cdot \textit{arc sen}\, x + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} P\sqrt{1-x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\, \textit{arc sen}\, x + \frac{1}{2} x\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{4}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{4}\, \textit{arc sen}\, x + C.$$

2)

$$\begin{array}{c|ccc}
 & 1 & 1 & 1 \\
x_0 & & x_0 & x_0 + x_0^2 \\
\hline
 & 1 & 1 + x_0 & \underline{1 + x_0 + x_0^2} = y_0 \\
x_1 & & x_1 & \\
\hline
 & \delta^2 y_0 = 1 & \underline{1 + x_0 + x_1} = \delta y_0 &
\end{array}$$

Como o polinómio interpolador é do segundo grau, é evidente que $\delta^3 y_0 = 0$.

$$h(x) = x^2 + x + 1 + (x - x_0)^\alpha (x - x_1)^\beta (x - x_2)^\gamma (x - x_3)^\omega f(x)$$

em que α, β *e* γ *são inteiros positivos arbitrários e* $f(x)$ *é um polinómio arbitrário.*

III

5132 — Deduza o teorema dos acréscimos finitos para as funções de duas variáveis.

Em que condições $f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b)$? Em que condições $f'''_{xyx}(a,b) = f'''_{x^2y}(a,b) = f'''_{yx^2}(a,b)$?

Calcule a derivada da função composta de $f(x,y) = e^{x+y}\cdot\log(x^2+y^2)$ com $x = t^t$ e $y = \sqrt{1+t^2}$.

A equação $f(x,y) = 0$ pode definir uma função $y = \varphi(x)$ na vizinhança de $P(1,0)$? Porquê?

R: $$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} =$$

$$= e^{x+y}\left\{\left[\log(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right] t^t(\log t + 1) + \right.$$

$$\left. + \left[\log(x^2+y^2) + \frac{2x}{x^2+y^2}\right]\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right\}$$

Basta notar que $f'_y(1,0) = 0$ *para se concluir que a equação* $f(x,y) = 0$ *não define uma função* $y = \varphi(x)$ *na vizinhança de* $P(1,0)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.° Exame de frequência extraordinário — 10-7-1959.

I

5133 — 1) Qual o limite de $\sqrt[n]{y_n}$ quando $\frac{y_{n+1}}{y_n} \to A \; (y_n > 0)$? Calcule $\lim\limits_{n=\infty} \sqrt[n]{\frac{n\log n}{n^{\log n}}}$.

2) Enuncie e demonstre o teorema de Kummer. Deduza desse teorema algum critério de segunda espécie.

Por que é que a série $\sum \alpha_n x^n$ diverge fora do intervalo de convergência?

Estude a natureza da série $\sum \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$.

R: 1) *Fazendo* $y_n = \frac{n\log n}{n^{\log n}}$, *vem* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{y_{n+1}}{y_n} =$

$$= \lim_{n=\infty}\frac{n^{\log n}}{(n+1)^{\log(n+1)}} = 1 \text{ e portanto } \lim_{n=\infty}\sqrt[n]{\frac{n\log n}{n^{\log n}}} = 1.$$

2) $$\lim_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n=\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{2^n\,n!} =$$

$$= 2\lim_{n=\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$ *e por consequência a série é convergente.*

II

5134 — 1) Considere a função $f(x) = \begin{cases} e^x & (x>0) \\ 1+x & (x>0) \end{cases}$. Calcule a oscilação de $f(x)$ em $x = 0$ e, em face do valor obtido, diga se $f(x)$ se pode tornar contínua em $x = 0$. Enuncie a proposição em que basear a resposta.

Utilize os desenvolvimentos em série para calcular $\lim\limits_{x=0}\frac{1}{x}[\log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x]$.

2) Dada a tabela

x	0	2	3	5
y	1	2	1	0

, determine o polinómio interpolador, utilizando a fórmula de Newton.

Enuncie e demonstre o teorema de Rolle. Aproveite a proposição para deduzir o termo resto das fórmulas interpoladoras.

R: 1) $$\lim_{x=0}\frac{1}{x}[\log(1+x^2) - \operatorname{arctg} x] = \lim_{x=0}\frac{1}{x}\left[x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} + \cdots - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \cdots\right] =$$

$$= \lim_{x=0}\left[x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{4} + \cdots - 1 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{5} + \cdots\right] = -1.$$

2)

x	y	δy	$\delta^2 y$	$\delta^3 y$
0	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	
2	2	-1		$\frac{2}{15}$
3	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
5	0			

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x(x-2) +$$

$$+ \frac{2}{15}x(x-2)(x-3) = \frac{2}{15}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + \frac{23}{10}x + 1$$

III

5135 — Deduza a expressão da derivada de uma função composta de $f(x,y)$, com $x = \varphi(t)$ e $y = \psi(t)$.

Defina função homogénea de grau α e enuncie as suas propriedades. Exemplifique com $z = g\left(\frac{y}{x}\right)$.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — Exame Final — Epoca de Julho — (1.ª chamada) — 15-7-1959.

I

5136 — Ache a equação das raízes comuns dos polinómios

$$x^4 + 7x^3 - 9x^2 - 12x + 3$$
$$\text{e} \quad x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 27x + 6.$$

Utilize a sucessão de Rolle para separar estas raízes e calcule uma delas em primeira aproximação.

R:

1		-1	-1	1	-1
7	1	1	-1	1	-1
-9	8	6	-6	6	-6
-12	-3	-15	15	-15	15
3	-27	3	-3	3	-3
	6				

Tanto o resultante como o primeiro e o segundo sub-resultantes são nulos. O terceiro sub-resultante é $R_3 = 1$ *e do quadro imediatamente se conclui que:*

$$R_3^1 = 6 \, , R_3^2 = -15 \, , R_3^3 = 3 \, .$$

A equação das raizes comuns é pois $x^3 + 6x^2 - 15x + 3 = 0$. *Os limites excedente e deficiente das raizes desta equação são respectivamente* $L = 2$ *e* $l = -8$, *calculados pelo método de Newton.*

Os zeros da primeira derivada são -5 *e* 1 *e a sucessão de Rolle* $f(-8)\, f(-5)\, f(1)\, f(2)$ *apresenta os sinais* $-+-+$, *o que significa que existem três zeros reais, um em cada um dos intervalos* $(-8, -5)$, $(-5, 1)$ *e* $(1, 2)$. *Aplicando o método de Newton para o cálculo aproximado do zero situado em* $(1, 2)$, *obtém-se, em primeira aproximação,* $a_1 = 2 - \dfrac{f(2)}{f'(2)} = 1{,}7619\cdots$

II

5137 — **Faça o estudo da função $f(x) = e^x \cdot \cos x$. Calcule $Pf(x)$ e apresente caso seja legítimo, o seu desenvolvimento em série de Mac Laurin.**

R: *O domínio é* $(-\infty, +\infty)$. *Como* $f'(x) = \sqrt{2}\, e^x \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$, *a função é crescente nos intervalos* $\left(-\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$ *e decrescente nos intervalos* $\left(\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$, *apresentando máximos nos pontos* $\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ *e mínimos nos pontos* $\dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi$. *Analisando* $f''(x) = 2e^x \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ *verifica-se que a concavidade está voltada para cima nos intervalos* $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ *e para baixo em* $(2k\pi, (2k+1)\pi)$.

$Pf(x) = e^x \cos x + P e^x \operatorname{sen} x = e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - P e^x \cos x$, *donde se conclui que* $Pf(x) = \dfrac{1}{2} e^x (\cos x + \operatorname{sen} x)$.

Como $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{4}\right)$, *vem* $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^n \cos n \frac{\pi}{4} \cdot \frac{x^n}{n!}$ *em* $(-\infty, +\infty)$.

III

5138 — **Verifique se $f(x, y) = x^2y^2 + x^3y - 2 = 0$ define uma função $y = \varphi(x)$ em torno de $P(1, 1)$. Na hipótese afirmativa, escreva a equação da tangente à curva $y = \varphi(x)$ nesse ponto.**

Prove que $x f'_x + y f'_y \equiv 8$, utilizando o conhecimento das funções homogéneas.

R: *Como* $f(1, 1) = 0$ *e* f'_x *e* f'_y *são contínuas, com* $f'_y(1, 1) = 3 \neq 0$ *a equação define* $y = \varphi(x)$ *na vizinhança de* $P(1, 1)$. *A equação da tangente a* $y = \varphi(x)$ *nesse ponto é* $f'_x(1, 1)(X - 1) + f'_y(1, 1)(Y - 1) = 0$, *ou seja* $5X + 3Y - 8 = 0$.

Fazendo $\Psi(x, y) = x^2y^2 + x^3y$, *como* $\Psi'_x = f'_x$ *e* $\Psi'_y = f'_y$, *vem* $x f'_x + y f'_y = 4\Psi(x, y) \equiv 8$.

Enunciados e soluções de Fernando de Jesus

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — Análise Superior — 2.° exame de frequência — 29-5-59.

Teoria

5139 — 1) **Integração de diferenciais algébricas: equivalência dum caminho aberto a um caminho fechado seguido de um caminho aberto conveniente. Defina lacete e indique como tal conceito é aplicável ao cálculo de integrais de diferenciais algébricas. Dê um exemplo de tal aplicação.**

5140 — 2) **Enuncie o teorema de Cauchy sobre a existência e unicidade do sistema de integrais gerais dum sistema canónico de equações diferenciais. Indique uma condição suficiente para tal existência.**

5141 — 3) Defina equação diferencial de ordem n; considere o caso da equação de Fuchs, defina a sua equação determinante em relação à origem, indique a forma dos integrais daquela equação correspondentes a raízes simples da equação determinante e justifique o facto de raízes desta equação que difiram por números inteiros não conduzirem a integrais particulares independentes.

Prática

5142 — 1) Equação às derivadas parciais das superfícies de equação finita

$$z = e^{ny}\,\varphi(x-y)\,.$$

Confirme o resultado por integração.

Determine um integral completo da equação por recurso:

a) à substituição

$$x + \lambda y = X$$

b) $z_1 = \log z$.

5143 — 2) Considere a equação

$$\frac{p}{x} = \frac{y}{q}\,.$$

Verifique que

$$(z+\alpha)^2 = y^2(x^2-\beta)$$

é um integral completo da equação

a) por derivação deste

b) por integração da equação dada.

5144 — 3) $\varphi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right) = 0$ é integral geral de certa equação às derivadas parciais. Determine essa equação. Verifique que $p = c^{te}$ é um integral particular do sistema diferencial das características e determine por seu intermédio um integral completo da equação. Solução da equação que se reduz a

$$z = y^2 \text{ para } x = 1\,.$$

a) recurso às características

b) partindo do integral completo.

Nota: O n.º 3 é obrigatório. Fazer *um* dos problemas 1 e 2.

GEOMETRIA SUPERIOR

F. C. L. — Geometria Superior — **Exame de Frequência 1958-59.**

I

5145 — Supondo que a relação de equivalência ρ arrasta as relações de equivalência σ_1 e σ_2, mostre que vale a igualdade

$$\frac{\sigma_1 \cap \sigma_2}{\rho} = \frac{\sigma_1}{\rho} \cap \frac{\sigma_2}{\rho}\,.$$

Exemplifique.

II

5146 — $\mathfrak{M}$ é um módulo livre de base $\{v_\alpha\}_{\alpha \in A}$ sobre um anel $\mathfrak{A}$.

O conjunto A é suposto bem ordenado.

Designe por $\mathfrak{M}_\alpha$ o submódulo de $\mathfrak{M}$ construído sobre a base $\{v_\beta\}_{\beta<\alpha}$ e por $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha$ o submódulo de $\mathfrak{M}$ construído com $\{v_\beta\}_{\beta \leq \alpha}$.

Então, dado um submódulo $\mathfrak{N}$, de $\mathfrak{M}$, suposto admissível — $\mathfrak{A}$:

1) Mostre que o elemento $a \in \mathfrak{N} \cup \mathfrak{M}_\alpha$ tem a forma $a = b + \lambda v_\alpha$, com $b \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_\alpha$ e $\lambda \in \mathfrak{A}$;

2) estude o homomorfismo $a \to \lambda$. Em particular dê a expressão do núcleo.

III

5147 — Seja E um conjunto infinito. Mostre que o subconjunto vazio, o subconjunto impróprio e os subconjuntos com complemento finito são os conjuntos abertos de uma topologia τ.

Quais são os conjuntos fechados dessa topologia? Esclareça as relações entre subconjuntos abertos, fechados, finitos e infinitos.

Este espaço topológico é separável?

IV

5148 — Seja E um espaço de Lindelöff. Prove que, se todo o conjunto infinito de E tem um ponto de acumulação — ω, é sempre possível extrair duma cobertura aberta do espaço uma sub-cobertura finita.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. L. – Mecânica Racional — 1.° exame de frequência – (2.ª chamada) — 15-4-59.

5149 — *a*) Relações entre as velocidades e as acelerações dos movimentos de um ponto material em relação a dois sistemas de referência.

b) Considera-se o movimento de um ponto P em relação a três sistemas de referência móveis em relação uns aos outros. Neste caso há a considerar três movimentos de transporte de P; indique, justificando, as relações que existem entre as velocidades e acelerações de P nestes três movimentos de transporte e verifique estas relações, considerando os movimentos de P em relação a cada par de sistemas de referência.

5150 – *a*) Descreva o modo de representar o movimento de um sólido invariável em relação a um sistema de referência; vectores característicos deste movimento; sua determinação a partir do conhecimento do movimento e sua aplicação à determinação da natureza do movimento instantâneo do sólido em cada instante.

b) Considere o movimento de um referencial S_1 em relação a outro referencial S e o movimento recíproco deste, isto é, o movimento de S em relação a S_1. Determine, por aplicação da teoria do movimento relativo, a relação que existe entre os vectores característicos destes dois movimentos; mostre que, em cada instante, a natureza dos correspondentes movimentos instantâneos é a mesma e que os eixos instantâneos de rotação dos dois movimentos coincidem.

5151 — Um ponto está animado de movimento definido pelas equações

$$x = 2t^2 - t + 4$$
$$y = t^2 - 2t.$$

Determinar as componentes tangencial e centrípeta da sua aceleração, o instante em que esta é normal à trajectória e o raio de curvatura desta neste instante.

5152 – 4) Uma placa rectangular $ABCD$ move-se no seu plano com velocidade angular ω. Num dado instante o vértice A tem uma velocidade $\mathbf{v}$ dirigida segundo a diagonal AC. Achar as velocidades dos vértices B e C em função de $\mathbf{v}, \omega$ e das dimensões do rectângulo.

5153 – 5) Seja a hélice cilíndrica

$$\xi = R\cos\varphi$$
$$\eta = R\operatorname{sen}\varphi$$
$$\xi = a\,\varphi\,.$$

Considera-se um triedro móvel $Oxyz$ que se move de forma que a origem O percorre esta hélice segundo a lei $\varphi = t$, o eixo Ox sempre dirigido segundo a tangente à hélice e Oy sempre dirigido segundo a normal principal.

Determine os vectores característicos do movimento do triedro.

F. C. L. — Mecânica Racional — Exame Final — 2.° turno — (1.ª chamada) — 10-7-59.

5154 – 1) Escreva, justificando-as, as equações de equilíbrio de um sistema articulado isostático plano. Particularize estas equações no caso de um sistema isostático formado por três lados e mostre, directamente, que estas equações implicam que o vector resultante e o momento resultante do sistema formado pelas três forças exteriores aplicadas nos nodos sejam nulos; será este anulamento uma condição suficiente para que aquelas equações sejam verificadas? Justifique a resposta. Mostre como se pode saber o estado tenso ou comprimido de um qualquer dos lados de um sistema pela orientação que tem relativamente ao triângulo a força exterior aplicada num qualquer dos nodos em que se articula esse lado.

2 — *a*) Estabeleça as equações do movimento de um sólido com um eixo fixo. Indique de entre estas equações aquelas que servem efectivamente para definir o movimento e aquelas que dão as reacções dos pontos fixos; reacções estáticas e dinâmicas. Condição necessária e suficiente para que estas últimas sejam nulas.

b) Calcule a expressão do trabalho efectuado pelas forças exteriores aplicadas ao referido sólido num deslocamento infinitamente pequeno deste; estabeleça as equações que determinam efectivamente o seu movimento por aplicação do theorema da força viva.

3) Um fio de peso total *1* está suspenso pelos seus dois extremos A e B em dois pontos fixos. A figura de equilíbrio do fio é um arco da elipse

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

com a concavidade voltada para cima e os pontos A e B tem abcissas $+1$ e -1.

Determine a densidade e a tensão do fio e as forças que os pontos de suspensão exercem no fio.

4) Um ponto P de massa *1* move-se sem atrito sobre a cardióide de equação

$$r = 1 + \cos\theta$$

sujeito à acção duma força atractiva para o polo de módulo $3/r^4$; no instante $t = OP$ encontra-se no ponto mais afastado do polo com velocidade de módulo $1/2$.

Estude o movimento do ponto.

5) Um volume homogéneo com a forma de um cilindro de revolução está animado de um movimento de rotação de velocidade angular ω em torno de uma das suas geratrizes.

Calcule a sua energia cinética directamente e por aplicação do teorema de Koenig.

ASTRONOMIA

F. C. L. — Astronomia — 2.° exame de frequência — 1.ª chamada — 18-5-59.

Teoria

5155— 1) A Terra utiliza-se para unidade fundamental da medição do tempo? Porquê?

2) O valor da obliquidade da eclíptica é uma quantidade constante? Porquê?

3) Conhecidas as coordenadas equatoriais do Sol α e δ num certo instante, pode-se determinar o valor da longitude celeste do Sol? Justifique.

4) A declinação do Sol apresenta pontos de estacionaridade? Porquê?

5) Na definição de ano trópico interessa considerar o fenómeno de nutação? Justifique a resposta.

6) Defina dia sideral. Quantas espécies de dia sideral se podem considerar? Justifique a resposta.

7) Indique, justificando, quais as condições necessárias para que o ano anomalístico seja idêntico ao ano sideral.

8) Mostre que o movimento médio do Sol é constante.

9) Conhecidas as coordenadas equatoriais α e δ do Sol médio e do Sol verdadeiro, mostre como se poderiam tabular os valores da equação do tempo.

10) Justifique a necessidade da introdução do tempo das efemérides nos cálculos astronómicos.

11) Pode-se determinar, por observação, a magnitude absoluta do Sol? Porquê?

12) Existem estrelas com magnitudes aparentes negativas? Justifique a resposta.

13) Indique as condições necessárias para que um instrumento possa ser utilizado na determinação das magnitudes bolométricas.

14) Para que serve a fórmula de Pogson?

15) Sabendo-se que o índice de cor de uma estrela é -0.58 pode saber-se qual a sua cor e composição? Justifique a resposta.

Prática

5156 — Num local de coordenadas

$$\varphi = 51^\circ\ 13'\ 50''.55$$
$$\lambda = -9^h\ 22^m\ 36^s.086$$

observou-se no dia 1931 Set. 2 a estrela θ Arietis de coordenadas

$$\alpha = 2^h\ 14^m\ 19^s.757$$
$$\delta = 19^\circ\ 34'\ 77''.06$$

tendo-se determinado para distância zenital $49^\circ\ 24'\ 10''.3$.

Pretende-se determinar:

a) O tempo verdadeiro no momento da observação

b) O ângulo horário e a hora legal num lugar de coordenadas

$$\varphi = -66^\circ\ 15'\ 31''.12$$
$$\lambda = +1^h\ 52^m\ 53^s.781.$$

F. C. L. — Astronomia — 2.° exame de frequência — 2.ª chamada — 6-6-59.

Teoria

5157 — 1) O valor de ρ que figura na fórmula de Pogson poderá ser igual a 3.0? Porquê?

2) Pode-se determinar a magnitude absoluta de Saturno? Justifique a resposta.

3) O período de rotação da Terra é igual ao dia sideral? Porquê?

4) Tem significado considerar a luminosidade absoluta de Júpiter? Justifique a resposta.

5) A nutação em ascensão recta pode ter valores sempre crescentes com o tempo? Porquê?

6) A correcção bolométrica pode ser positiva? Justifique a resposta.

7) A longitude celeste do Sol varia uniformemente? Porquê?

8) Defina equação do centro. Esta equação poderá ter valores nulos? Justifique a resposta.

9) A distribuição das estrelas pelas várias cores é uniforme? Porquê?

10) Existindo um erro $\Delta\lambda$ no valor da longitude média do sol poderá determinar-se o erro que existirá no valor da ascensão recta do sol médio? Porquê?

11) Indique como se poderá determinar a paralaxe espectroscópica de uma estrela.

12) Mostre as vantagens e inconvenientes dos calendários lunares em relação aos calendários solares.

13) O tempo das efemérides poderá ser igual ao tempo universal? Justifique a resposta.

14) Duas estrelas a temperaturas muito diferentes apresentarão o mesmo tipo de espectro? Porquê?

15) A equação do tempo terá valores nulos? Porquê?

Prática

5158 — 1) Calcular a luminosidade e a distância (em anos-luz) de uma estrela cuja magnitude aparente é $+0{,}22$ e cuja magnitude absoluta é $+0{,}51$.

5159 — 2) Num local de coordenadas

$$\varphi = 31^\circ\ 29'\ 25''.7$$
$$\lambda = -10^h\ 25^m\ 38^s.25$$

pretende-se observar o Sol na data 1959 Junho 6, a Oeste do meridiano, a uma altura

$$h = 39^\circ\ 51'\ 47''.2.$$

Sabendo-se que a ascensão recta do Sol nesse instante em Greenwich é

$$\alpha_\odot = 4^h\ 53^m\ 16^s.33$$

pretende-se calcular o tempo médio e o azimute do Sol ($A_\odot$) nesse local.

Enunciados do Dr. Raimundo Vicente

CÁLCULO NUMÉRICO

F. C. L. — Cálculo numérico, mecânico e gráfico — **Exame final — Prova prática — (Junho 1959).**

5160 — 1) Calcular $f'(x)$ e $f''(x)$ nos pontos $x = 3{,}5$ e $x = 3{,}55$, usando a tabela

x	$f(x)$
3,0	0,17727
3,1	0,31588
3,2	0,43747
3,3	0,53481
3,4	0,60167
3,5	0,63325
3,6	0,62663
3,7	0,58111
3,8	0,49849
3,9	0,38313
4,0	0,24189

Verificar que os resultados obtidos satisfazem à equação diferencial

$$y'' + \left(\frac{1}{4}x^2 + 3\right) y = 0$$

5161 — 2) Calcular

$$\int_0^{0,84} \frac{t}{1+t^3}\, dt$$

a) Pela regra de Simpson;
b) Pela regra de Weddle.

Discutir em cada caso, a precisão do resultado obtido.

5162 — 3) A equação

$$x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24 = 0$$

tem todas as raízes reais.

Separe as raízes e determine o valor de uma delas com erro (em valor absoluto) não superior a 5×10^{-4}.

RECTIFICAÇÃO

Os enunciados 5087 e 5091 dos pontos de exame de frequência, publicados nos números 74-75 da Gazeta, devem ser substituídos pelos seguintes:

5087 — Existindo um erro dt no valor do ângulo horário de Sirius, mostre em que posições da estrela esse erro afecta menos a determinação do tempo sideral.

5091 — Num lugar cujas coordenadas são

$$\begin{cases} \varphi = 40^\circ \;\; 32' \;\; 12'',45 \\ \lambda = \;\; 2^h \;\; 15^m \;\; 25^s,65 \end{cases}$$

pretende-se determinar o azimute no momento do ocaso e o ângulo horário no instante do nascimento de uma estrela de coordenadas

$$\begin{cases} \alpha = \;\; 7^h \;\; 45^m \;\; 47^s,60 \\ \beta = 15^\circ \;\; 34' \;\; 52'',4 \end{cases}$$

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

134 — E. J. Gumbel — **Statistics of Extremes** — Columbia University Press, 347 pag., 1958, $ 15 00

O livro de que vamos aqui dar uma notícia crítica é escrito pelo maior especialista da teoria dos valores extremos, que tem dedicado toda a sua vida ao estudo deste problema e das suas aplicações técnicas Muito esquemàticamente, a teoria dos valores extremos tem por objectivo obter as distribuições assintóticas dos extremos e, conhecidos os extremos (máximo ou mínimo) de uma amostra, tirar conclusões sobre os parâmetros da variável aleatória inicial ou extrema.

Conquanto escrito por um matemático, «Statisties of Extremes» tem sempre em vista as inúmeras aplicações da teoria aos mais diversos domínios. Embora não seja a leitura fácil, pode bem ser estudado por quem tenha conhecimentos mínimos de Cálculo e de Estatística. Os numerosos exercícios inseridos no texto permitem controlar a compreensão efectiva de teoria e são, muitas vezes, sugestões de aplicações concretas.

Algumas falhas são de notar, inevitáveis, de resto, neste primeiro e único tratado sobre os extremos: ligeiras incorrecções, em certos pontos pouca clareza e citações falhadas no índice.

No capítulo I, inicia-se uma curta história da teoria, descrevendo-se depois um grande número das suas aplicações que vão da astronomia, metereologia, engenharia naval, oceanografia, controle de qualidade, fractura de materiais, segurança de construções, demografia, economia, aeronáutica, hidrologia, etc. Segue-se ainda um estudo geral dos instrumentos estatísticos mais usados, entre os quais convém salientar a função de intensidade (oriunda da demografia) e o período do retorno (usado em engenharia). São ainda tratadas distribuições ligadas com anormal.

O capítulo seguinte trata das estatísticas ordinais e de problemas não-paramétricos ligados à teoria dos extremos, como o problema dos excessos. A lei de Poisson surge ligada aos acontecimentos raros.

No Capítulo III tratam-se as distribuições finitas dos extremos, do meio, da amplitude e as distribuições que extremam (variacionalmente) certas estatísticas dos extremos.

O Capítulo IV trata de certas distribuições específicas como as distribuições exponencial, logistica, normal, gama que dão (assintòticamente) o tipo da exponencial dupla e as de Cauchy e Pareto.

O problema inicial e final dos extremos, isto é, o problema das distribuições estáveis e das distribuições assintóticas dos extremos são tratados no capítulo V. Encontram-se aí a dedução de Fisher — Tipett das distribuições estáveis e as deduções de Gumbel e von Mises relativas principalmente à exponencial dupla. É pena que a extensão do trabalho não permitisse a reprodução da identificação, feita por Gnedenko, das distribuições estáveis e assintóticas para a qual, de resto, Gumbel chama a atenção. As distribuições dos mesmos extremos e das suas estatísticas são também tratadas.

A distribuição exponencial dupla é em parte tratada no capítulo V e continua para o capítulo VI que que é essencialmente dedicado aos seus usos, à determinação dos seus parâmetros de localização e de dispersão, a construção da banda de controle, etc. São tratadas em detalhe as aplicações de teoria dos extremos (exponencial dupla, especìficamente) às cheias (máximos de débitos anuais), os seus retornos e o aproveitamento dos rios, a meteorologia, a aeronáutica, a demografia (idades máximas), fractura de materiais e problemas de segurança de construções (a fractura dever-se-á ao rompimento da secção mais fraca — de resistência mínima), etc.

O capítulo VI, dedicado aos outros dois tipos de distribuições assintóticas dos extremos, principia com a derivação de Fréchet das distribuições estáveis, a derivação de von Mises de uma das distribuições, estimação dos seus parâmetros, fazendo depois aplicação ao problema das secas e à fadiga dos materiais.

No último capítulo trata das distribuições assintóticas do meio e da amplitude, os seus usos e do cociente extremal e amplitude geométrica.

Esta descrição sumária dos temas tratados, que é constantemente complementada pela notícia dos inúmeros problemas em aberto, dá uma ideia da orientação do livro e da sua capacidade informativa resultante da exposição em profundidade dos problemas de que trata. É, pois, um texto indispensável a quem queira dedicar-se à teoria dos extremos ou às suas aplicações.

J. Tiago de Oliveira

135 — C. Meynart — **Les séries et leurs application à la resolution de divers problèmes pratiques d'analyse mathématique** — Tome I — *Eyrolles éditeur* — Paris — Preço 29,35 F. N.

O autor deste livro é engenheiro chefe da Régie belga dos T. T., e esse facto parece determinar o aspecto prático de aplicações das séries dado aos assuntos tratados como, de resto, se pode concluir do próprio título da obra. A noção de função que o autor dá não é muito clara e em especial parece não fazer distinção entre função e a sua representação analítica. Considera as séries como um modo de expressão analítica completo, e diz mesmo: «Or, il est évident que la série des puissances entières de la variable, dont nous nous occupons plus particulièrement, est susceptible de représenter quelque relation que ce soit puisqu'elle réserve une double infinité de possibilités. En effet, on peut donner au coefficient de chaque puissance de la variable une infinité de valeurs et d'autre part la série elle-même comporte une infinité de termes».

O aspecto teórico é assim sacrificado às vantagens, consideradas pelo autor, da aplicação judiciosa da «notion généralisée de fonction ou, ce que revient au même, des séries» que «permet de résoudre pratiquement tout problème d'analyse si compliqué soit-il».

É claro que a palavra análise está aqui aplicada no sentido de análise de um problema, e não como um capítulo da matemática. Note-se ainda que, para o autor, série e função são vocábulos sinónimos.

À parte, portanto, o aspecto teórico, o livro é cheio de belíssimos exemplos, estudados minuciosamente, de aplicação das séries à resolução de muitos problemas de geometria analítica, mecânica racional e electricidade fazendo uso do estudo, efectuado prèviamente, do cálculo de integrais, resolução de equações diferenciais e sistemas e cálculo operacional, nas suas relações com as séries.

É por isso um livro que pode prestar serviço útil a todo aquele que carece na prática do uso judicioso das séries mas não tem tempo nem para consultar uma larga bibliografia, nem disposição para enfrentar obras que em geral e até pelo próprio autor são consideradas como de «mathématique transcendante».

J. S. P.

LIVROS RECEBIDOS PARA CRÍTICA:

* *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, par J. HADAMARD — Paris — Librarie Scientifique Albert Blanchard, 9, Rue de Médicis.
* *Récréations Mathématiques*, par EDOUARD LUCAS, deuxième edition, nouveau tirage, vol. I. Librairie Sc. Albert Blanchard.
* *Problèmes plaisants & déletables qui se font par les nombres*, par CLAUDE GASPAR BACHET, sieur de Méziriac. Librairie Sc. Albert Blanchard.
* *Cours de Mathématiques générales (analyse et géométrie)* par RENÉ GARNIER, tome IV. Paris, Gauthier-Villars, editeur-imprimeur-libraire, 55, Quai des Grands-Augustins.
* *Voies Naturelles et Bases des Mathématiques, initiation nouvelle, Tome 1 Algébre et analyse,* par ERVAUD G. KOGBETLIANTZ, Paris. Gauthier-Villars.
* *Milieux conducteurs ou polarisables en mouvement*, par HENRI ARZELIÈS, Paris. Gauthier-Villars.
* *Fonctions Hypergéométriques Confluentes*, par F. G. TRICOMI, fascicule CXL, Paris. Gauthier-Villars.
* *Färbungsprobleme auf Flächen und Graphen*, von GERHARD RINGEL, Berlin. Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften.
* *Normierte Algebren*, von M. A. NEUMARK, Berlin. Veb Deutscher Verlag der Wissenschaften.
* *Calcul Symbolique – Distributions et pseudo-fonctions*, par JEAN LAVOINE. Paris (VII^e), Centre National de la Recherche Scientifique, 13, Quai Anatole France.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1959 (4 números) 50 escudos
Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1959, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 71 { cada número simples	17$50
N.ºs 51 a 71 { » » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — LISBOA-2 — Telefone 29449