
GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS
ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIX

N.º 72-73

SET.-DEZ. 1958

SUMÁRIO

Sobre la geometria de $\Omega = Z^2$

por *J. Gallego-Diaz*

Representação das rotações e reflexões no espaço
euclideano tridimensional por meio dos parâmetros de
Cayley-Klein. (I)

por *Paulo Roberto de Paula e Silva*

Problemas fundamentais da teoria da aproximação
funcional

por *Luis G. M. de Albuquerque*

Movimento Matemático

5.ª Assembleia Geral da União Matemática Internacional — Congresso
Internacional de Matemáticos 1958 — XXIV Congresso Luso-Espanhol
para o progresso das Ciências — A 7.ª Olimpíada de Matemática para
alunos das escolas secundárias da Polónia — Congresso Internacional
dos Matemáticos de 1962 — Congressos, reuniões e intercambio científico

Sur la définition et la structure des distributions
vectorielles

por *J. Sebastião e Silva*

Sobre um problema de cinemática gráfica

por *M. Arala Chaves*

Matemáticas Superiores

Postos de Exame de Frequência e Finais
Matemáticas Gerais — Cálculo Infinitesimal — Análise Matemática

Matemáticas Elementares

Problemas propostos

Boletim Bibliográfico

G A Z E T A D E M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.*

ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Tel. 29449 — Lisboa - 2.

REDACÇÃO

Redactores: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

OUTROS COMPONENTES

EM PORTUGAL:

Coimbra: L. Albuquerque, **Lisboa:** Almeida Costa, Ferreira de Macedo, A. Sá da Costa, J. Calado, J. J. Dionísio, J. Sebastião e Silva, J. Ribeiro Albuquerque, M. Teodora Alves, Fernando de Jesus, Orlando M. Rodrigues; **Porto:** Andrade Guimarães, F. Soares David, Laureano Barros, L. Neves Real, Ruy Luís Gomes

NO ESTRANGEIRO:

Argentina — *Buenos Aires:* António Monteiro, L. A. Santaló; *Mendoza:* F. Toranzos; *San Luis:* Manuel Balanzat; **Brasil** — *Belo Horizonte:* Cristovam dos Santos; *Recife:* Luiz Freire, Manuel Zaluar, Newton Maia e A. Pereira Gomes; *Rio de Janeiro:* Achille Bassi, Leopoldo Nachbin, Maria Laura Mousinho e Maurício Peixoto; *São Paulo:* Omar Catunda; **Espanha** — *Barcelona:* Francisco Sanvisens; *Madrid:* Sixto Rios Garcia e J. Gallego Diaz; **Itália** — *Roma:* Emma Castelnuovo; **França** — *Paris:* Paul Belgodère; **Suissa** — *Zürich:* H. Wermus; **Uruguay** — *Montevideo:* Rafael La Guardia; **U. S. A.** — *Lincoln:* Maria Pilar Ribeiro.

Toda a colaboração enviada para publicação nesta revista deve ser dactilografada. A G. M. não dá separatas dos artigos publicados, excepto no caso de prévio acordo entre o Autor e a Redacção.

ACABA DE SAIR

Lições de Álgebra e Análise

VOLUME II — 4.ª EDIÇÃO

POR BENTO DE JESUS CARAÇA

RETICULADOS

(SISTEMAS PARCIALMENTE ORDENADOS)

por JOSÉ MORGADO

VOLUME I

PEÇO 60\$00

PUBLICAÇÃO DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

ALGEBRA MODERNA

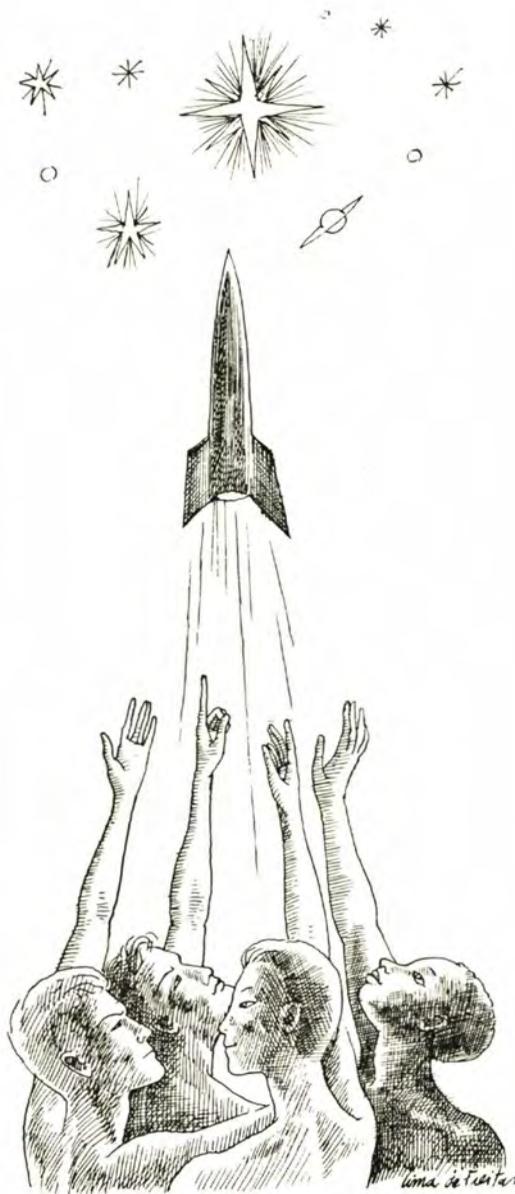
por Van der Waerden

Trad. de Hugo Ribeiro

Vol I — PREÇO 200\$00

Os sócios da S. P. M., assinantes da «Gazeta de Mat.» e da «Portuguese Math.», beneficiam para estas obras do desconto de 20%.

Tipografia Matemática, L.da — Rua Diário de Notícias, 134-1.º-Esq.º — Telefone 29449 — LISBOA-2



Ao entrar no seu XX Ano, a «Gazeta de Matemática» saúda os Leitores e Amigos desejando-lhes Boas Festas e Novo Ano próspero e de Paz; formula ardentes votos pelo ressurgimento científico de Portugal.

Sobre la geometria de $\Omega = Z^2$

por *J. Gallego-Diaz*

El objeto de este trabajo es estudiar una aplicacion geométrica de la funcion de variable compleja $\Omega = Z^2$. A pesar de su sencillez no hemos encontrado tal aplicacion estudiada en ninguno de los libros que hemos consultado ni siquiera en el excelente «*Dictionary of conformal representations*» by H. KOBER (Dover Publications, 1952).

Suponemos dada una cónica en el plano de los Ω , con centro, con un foco en el polo y con uno de sus ejes coincidiendo con el eje polar.

Asumiremos que los puntos del plano Ω estan dados ya por sus coordenadas cartesianas (u, v) o por sus coordenadas polares (ρ_1, w_1) . Análogamente los puntos del plano de las Z estan dados por sus coordenadas cartesianas (x, y) ó por sus coordenadas polares (ρ, w) .

La ecuacion en coordenadas polares de una cónica, con un foco en $(0, 0)$, y con el eje mayor en el eje polar, dada en el plano Ω es, como se sabe

$$(1) \quad \rho_1 = \frac{p_1}{1 - e_1 \cos w_1}.$$

Las fórmulas correspondientes a la funcion de variable compleja que estamos conside-

rando $\Omega = Z^2$, son:

$$\left. \begin{aligned} u &= x^2 - y^2 \\ v &= 2xy \end{aligned} \right\}$$

ó

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= \rho^2 \\ w_1 &= 2w \end{aligned} \right\}.$$

Utilizando las últimas la ecuacion (1) se convierte en

$$(2) \quad \rho^2 = \frac{p_1}{1 - e_1 \cos 2w}$$

o lo que es lo mismo:

$$(3) \quad \frac{x^2}{\frac{p_1}{1 - e_1}} + \frac{y^2}{\frac{p_1}{1 + e_1}} = 1$$

Lo que nos dice que la correspondiente curva transformada en el plano Z es otra cónica cuyo centro es el origen de coordenadas $(0, 0)$ y cuyos ejes de simetria son los ejes coordenados.

Llamando a y b a los semiejes de la cónica dada por (3) y a_1 y b_1 a los semiejes de la cónica dada por (1) encontramos fácilmente:

$$(4) \quad b^2 = a_1 - c_1$$

$$(5) \quad a^2 = a_1 + c_1$$

$$(6) \quad a^2 + b^2 = 2a_1$$

$$(7) \quad ab = \pm b_1.$$

Análogamente obtenemos

$$(8) \quad c_1 = \frac{c^2}{2}$$

$$(9) \quad e_1 = \frac{e^2}{2 - e^2}$$

donde e_1 y e son las respectivas excentricidades. Se ve sin dificultad que

$$\begin{aligned} \text{si } e_1 > 1, \quad e > 1 \text{ y si} \\ e_1 < 1, \quad e < 1 \text{ es decir} \end{aligned}$$

que: «La transformacion conserva la naturaleza de la cónica».

Teniendo en cuenta las fórmulas (4), (5), (6), (7), (8) y (9) podemos establecer fácil y rapidamente un gran número de teoremas y resolver diferentes problemas de lugares geométricos, envolventes, máximos y mínimos, trayectorias ortogonales, construcciones gráficas, etc, etc.

En algunos casos conviene recordar que la transformada de una línea recta, dada en el plano Ω es una hipérbola equilátera en el plano Z con centro en $(0, 0)$. Puesto que de: $Mu + Nv + P = 0$ pasamos a $M(x^2 - y^2) + 2Nxy + P = 0$. También es interesante el caso inverso, es decir, que la curva transformada de una línea recta dada en el plano de los Z , es una parábola, con foco en $(0, 0)$, en el plano Ω . Ello se prueba fácilmente pues de:

$$\frac{1}{\rho} = A \cos \omega + B \operatorname{sen} \omega \text{ obtenemos:}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\rho_1}} = A \cos \frac{\omega_1}{2} + B \operatorname{sen} \frac{\omega_1}{2}, \text{ es decir}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\rho_1} = A^2 + B^2 + (A^2 - B^2) \cos \omega_1 + \\ + 2AB \operatorname{sen} \omega_1. \end{aligned}$$

La transformacion es conforme y sus puntos criticos son $Z = 0$, $Z = \infty$.

Otras importantes propiedades de la transformacion que estudiamos, igualmente fáciles de establecer son:

a) A puntos diametralmente opuestos en la cónica dada en el plano Ω corresponden en la cónica transformada en el plano Z , extremos de pares de semidiámetros conjugados.

b) Los dos focos, F y F' de la cónica del plano Z corresponden al otro foco O' de la cónica dada en el plano Ω .

c) Los extremos de dos semidiámetros ortogonales de la cónica del plano Z corresponden a los extremos de una cuerda focal de la cónica dada en el plano Ω .

Con el fin de dar una idea de las sencillas demostraciones que pueden obtenerse por nuestro método damos a continuación dos ejemplos:

1 — Sean OP y OQ dos semidiámetros conjugados de una elipse dada en el plano de las Z cuyos focos F y F' corresponden al foco O' de la elipse transformada en el plano Ω .

Puesto que $|MO'| = |OL|$ se deduce que

$$PF \cdot PF' = OQ^2.$$

Es decir que: «El producto de los radios vectores de una elipse que parten de P es igual el cuadrado del semidiámetro conjugado con el OP ».

2 — Puesto que $OM + OL = 2a_1$ se deduce que

$$\overline{O_2P}^2 + \overline{O_2Q}^2 = a^2 + b^2 \text{ (Teorema de APOLÓNIO).}$$

Finalmente damos a continuación una lista de ejercicios, en su mayor parte originales,

cuya solución dejamos como ejercicio al lector:

1 — Hallar el lugar geométrico de los focos de la familia de elipses que admiten una circunferencia dada como circunferencia de MONGE (curva ortóptica) y que pasan por un punto dado.

2 — Hallar el lugar geométrico de los vértices de la familia de hipérbolas equiláteras concéntricas con una elipse dada y tangentes a la elipse.

3 — Hallar el lugar de los focos de la familia de cónicas que admiten por centro un punto dado y que pasan por dos puntos dados.

4 — Hallar el lugar geométrico de los vértices de la familia de elipses que admiten por centro un punto dado y que son tangentes a dos hipérbolas equiláteras dadas, concéntricas con la elipse.

5 — Hallar el lugar geométrico de los focos de la familia de elipses que admiten un semidiámetro fijo en longitud y posición y el semidiámetro conjugado con el, fijo solo en magnitud.

6 — Hallar el lugar geométrico de los vértices de las parábolas que admiten como foco un foco, de una elipse dada y son tangentes a la elipse.

7 — Hallar el lugar geométrico del segundo foco de las elipses que tienen un punto dado como foco que pasan por un punto dado y tales que: $a + c = K$.

8 — En un sistema de ejes coordenados cartesianos rectangulares Ox , Oy , tenemos dos circunferencias concéntricas (O_1) y (O_2) cuyo centro común es O . Por O pasa una

semi-recta OV que corta a la circunferencia (O_1) en M y a la circunferencia (O_2) en N .

Sea (P_1) la parábola cuyo foco es O , que admite Ox como eje y que pasa por M y sea (P_2) la parábola cuyo foco es O , que admite OY como eje y que pasa por N . Hallar el lugar geométrico del punto de corte de (P_1) y (P_2) cuando OV varía.

9 — Hallar la envolvente de la familia de elipses que admiten como centro un punto dado A , cuyos focos pertenecen a una hipérbola equilátera dada de centro A y tales que la circunferencia de MONGE de todas esas elipses sea la misma.

10 — Hallar la envolvente de las parábolas que admiten como foco uno de los focos de una elipse dada y que pasan por los extremos de un diámetro variable de la elipse dada. Hallar, también, el lugar geométrico de sus vértices.

11 — Hallar la envolvente de una familia de elipses de la misma área y coaxiales.

12 — Hallar la envolvente de la familia de hipérbolas equiláteras que admiten como centro el centro de una elipse dada y que pasan por los extremos A y B de dos semidiámetros conjugados de la elipse.

13 — Consideramos dos semi-rectas OA y OB ($\widehat{AOB} = 45^\circ$). Marcamos sobre OA un punto M y sobre OB otro punto N tales que $OM \cdot ON = K^2$. Hallar la envolvente de la familia de hipérbolas equiláteras que admiten como centro el punto O y que pasan por los puntos M y N .

14 — Construir gráficamente una hipérbola equilátera cuyo centro es el centro de una elipse dada, que pasa por los focos de la elipse y que corta ortogonalmente a la elipse.

15 — Construir gráficamente una parábola con foco en $(0, 0)$ tangente a las curvas

$$\rho = a \frac{\cos \omega/2}{\cos 3\omega/2} \quad \text{y} \quad \rho = b \frac{\text{sen } \omega/2}{\text{sen } 3\omega/2}$$

$$(b^2 > 3a)$$

16 — Construir gráficamente una cónica, conociéndose el centro y tres puntos.

17 — Hallar, gráficamente los puntos de intersección de una elipse y un óvalo de CASSINI que admite los mismos focos.

18 — Consideramos tres parábolas con el mismo foco O . Construir gráficamente una cónica con foco en O , inscrita en el triángulo curvilíneo definido por esas tres parábolas.

19 — Construir gráficamente una elipse conociéndose su centro y los vértices de tres hipérbolas equiláteras bitangentes y concéntricas con la elipse.

20 — Hallar, gráficamente, las tangentes comunes a dos hipérbolas equiláteras con-

céntricas conociéndose sus asíntotas y un punto de cada hipérbola.

21 — Hallar el máximo y el mínimo del ángulo comprendido entre dos diámetros conjugados de una elipse dada y probar gráficamente, que el máximo corresponde a los semidiámetros conjugados iguales.

22 — Hallar la trayectoria ortogonal de la familia de curvas

$$(x^2 + y^2)^2 = K^2(x^2 - y^2).$$

23 — Hallar la trayectoria ortogonal de todas las hipérbolas equiláteras con centro en $(0, 0)$ y que pasan por un punto dado.

24 — Hallar el lugar geométrico de los focos de las hipérbolas equiláteras con centro en $(0, 0)$ y tangentes a la curva

$$\rho^2 = \cos 2\omega.$$

25 — Hallar las curvas que hacen estacionaria la integral definida

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \, ds.$$

Representação das rotações e reflexões no espaço euclideano tridimensional por meio dos parâmetros de Cayley-Klein. (I)

por Paulo Roberto de Paula e Silva

Introdução: Sabe-se que a rotação de um sólido com um ponto fixo pode ser representada por uma matriz real (a_{ik}) (3×3) , cujos elementos dependem de 3 parâmetros, em particular, dos 3 ângulos de EULER. Entretanto, a representação por meio dos ângulos de EULER apresenta alguns inconvenientes de ordem prática: a assimetria dos

ângulos de EULER, a multiplicidade das suas definições, a dificuldade de guardar de memória (visualisar) cada definição dos mesmos; além disso o uso dos ângulos de EULER não deixa em evidência, na matriz (a_{ik}) que representa a rotação, dois elementos essenciais: o eixo de rotação e o ângulo de rotação.

A representação de que trataremos, já de

si, deixa em evidência tais elementos. Para caracterizar a rotação usaremos 3 parâmetros reais b_x, b_y, b_z . A direcção do vector $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ dará o eixo de rotação (que passa pela origem) e a intensidade do do vector \vec{b} será proporcional a $\text{sen}(\Phi/2)$, onde Φ é o ângulo de rotação. Esse vector \vec{b} é algo parecido com uma velocidade angular, com a ressalva de de que \vec{b} representa uma rotação finita (1).

Como é sabido, a rotação dos vectores de um plano pode ser representada pelo «operador de rotação» $e^{i\Phi}$ (2); no fundo é um número complexo $\cos \Phi + i \text{sen} \Phi$. No século passado, HAMILTON e outros tentaram generalisar o operador de rotação no plano, para as rotações no espaço tridimensional. Esta tentativa fez surgir na matemática novas entidades chamadas quaterniões (números hiper-complexos) que são uma generalização do conceito de número complexo. Estas quantidades são do tipo $\mathbf{Q} = b + i b_x + j b_y + k b_z$ com b, b_x, b_y, b_z reais, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $ijk = -1$. Verificou-se que uma rotação podia ser representada por uma quantidade desse tipo, onde (b_x, b_y, b_z) tem o sentido já mencionado, $b = \cos(\Phi/2)$ e $(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) + b^2 = \text{sen}^2 \Phi/2 + \cos^2 \Phi/2 = 1$.

Segundo assertiva de E. T. WHITTAKER (5), a ideia dos quaterniões teve origem no século passado em trabalhos independentes de GAUSS, O. RODRIGUES, HAMILTON e CAYLEY que (segundo nos parece, partindo de ideias

da trigonometria esférica) descobriram a seguinte propriedade: definindo:

$$b_x = \text{sen} \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\psi - \varphi}{2} \right), \quad b_y = \text{sen} \frac{\theta}{2} \text{sen} \left(\frac{\psi - \varphi}{2} \right), \\ b_z = \cos \frac{\theta}{2} \text{sen} \left(\frac{\psi + \varphi}{2} \right), \quad b = \cos \frac{\theta}{2} \cos \left(\frac{\psi + \varphi}{2} \right),$$

e de modo análogo b'_x, b'_y, b'_z, b relativamente a duas rotações sucessivas dadas pelos ângulos de EULER (θ, φ, ψ) e $(\theta', \varphi', \psi')$ (4), então a rotação resultante $(\theta'', \varphi'', \psi'')$ será tal que:

$$(b'' + i b''_x + j b''_y + k b''_z) = \\ = (b' + i b'_x + j b'_y + k b'_z) \cdot (b + i b_x + j b_y + k b_z)$$

(notar a ordem) com o produto definido pelas regras $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, etc., já vistas.

Assim uma rotação pode ser representada por um quaternião \mathbf{Q} . Na representação por quaterniões o raio vector $\rho = \rho_x i + \rho_y j + \rho_z k$ (quaternião sem parte real) se transforma pela lei $\rho' = \mathbf{Q} \rho \mathbf{Q}^{-1}$.

Entretanto, para os estudantes de física, a introdução destas quantidades gera uma certa incerteza, razão pela qual daremos aqui uma representação mais materializada, como faz CARTAN (5). Veremos, neste artigo, que a álgebra dos quaterniões, no fundo, é a álgebra das matrizes 2×2 .

Representaremos uma rotação por uma matriz complexa 2×2 do tipo

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} b_z - b & b_x - i b_y \\ b_x + i b_y & -b_z + b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad (6)$$

onde $\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$ dá a direcção do eixo de rotação e $b = \cos \Phi/2$.

(4) Veja definição e figura de H. GOLDSTEIN — *Classical Mechanics* — pg. 107.

(5) E. CARTAN — *Leçons sur la Théorie des Spinours* — Hermann.

(6) E. T. WHITTAKER — loc. cit. pág. 13 — estabelece uma correspondência entre as rotações de um sólido no espaço e as transformações homográficas no plano complexo, que são transformações do tipo:

$$z \rightarrow z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

(1) Queremos ressaltar às pessoas inadvertidas que aqui o termo rotação tem um sentido diferente daquele da cinemática do sólido: as rotações que estamos estudando não dependem do tempo e são finitas.

(2) Veja B. J. CARAÇA — *Cálculo Vectorial*.

(3) E. T. WHITTAKER — *Analytical Dynamics* — Dover, pg. 9.

O vector \vec{x} será representado por uma matriz $X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix}$.

Um vector X se transforma pela lei $X' = Q X Q^{-1}$ (produto de matrizes (2×2)).

Esta ideia será generalizada para representar as reflexões no espaço, em particular a transformação:

$$(x_1 \rightarrow -x_1, x_2 \rightarrow -x_2, x_3 \rightarrow -x_3).$$

1) Matriz (a_{ik}) de rotação.

Consideremos um sistema de eixos ortogonais $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Um vector $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$ (x_i reais), neste sistema de referência pode ser escrito na forma:

$$(1) \quad \vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Fixado o sistema de referência, uma vez por todas, podemos considerar a rotação como sendo uma transformação linear que leva o vector \vec{x} num outro vector \vec{x}' :

$$(2) \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

onde x'_1, x'_2, x'_3 são as componentes de \vec{x}' no sistema $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Como a transformação é linear teremos:

$$(3) \quad \begin{cases} x'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ x'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ x'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{cases}$$

ou, sinteticamente:

$$(4) \quad x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k = a_{ik} a_k \text{ (índices repetidos somados)}$$

ou:

$$(5) \quad \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

ou

$$(6) \quad x' = A x.$$

As equações (4), (5), (6) são outras maneiras de escrever as equações (3).

Em (6), x' é uma matriz coluna $\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$,

A é a matriz 3×3 (a_{ik}) e x é uma matriz coluna $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Ax é o produto matricial de

uma matriz 3×3 por uma matriz coluna de 3 elementos: o resultado é uma matriz coluna de 3 elementos.

A matriz $(a_{ik}) = A$ constitue uma forma de representar a rotação. Entretanto, nem sempre uma matriz (a_{ik}) representa efectivamente uma rotação, para isto a matriz (a_{ik}) deverá satisfazer a certas condições, que são:

1 a) A transformação linear deve ser tal que $\vec{x} \cdot x$ seja invariante, isto é $\vec{x}'^2 = \vec{x}^2$ ou:

$$(7) \quad x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

É fácil verificar que, para isto acontecer, é necessário e suficiente que a matriz A seja ortogonal, isto é

$$(8) \quad \sum_i a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}$$

onde δ é o símbolo de KRONECHER,

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{para } k \neq l \\ 1 & \text{para } k = l. \end{cases}$$

Em termos matriciais a equação (8) pode ser traduzida na forma:

$$(9) \quad A \tilde{A} = \tilde{A} A = I$$

onde $\tilde{A} \equiv$ transposta da matriz A , e

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De (9) segue que:

$$(10) \quad \det A \cdot \det(\tilde{A}) = (\det A)^2 = +1 \rightarrow \det A = \pm 1$$

uma vez que $\det A = \det \tilde{A}$.

2 a) O facto de que a matriz A é ortogonal, não é ainda suficiente para podermos

dizer que \mathbf{A} representa uma rotação. Para que isto aconteça é necessário que \mathbf{A} (finita) possa ser obtida como uma sucessão de pequenas rotações infinitesimais, a partir do estado inicial do sólido. Em termos matemáticos, seria necessário que « \mathbf{A} fosse contínua com a unidade», ou que $\det \mathbf{A} = +1$; (as que têm determinante -1 não podem ser contínuas com a unidade).

É fácil verificar que a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

é ortogonal, isto é, conserva \vec{x}^2 invariante mas não é uma rotação, pois para obtê-la teríamos que «virar o sólido ao avesso», isto é, deformá-lo.

Chamaremos, por isso, de rotações as transformações ortogonais com determinante $+1$; e de inversões aquelas com determinante -1 . Uma transformação ortogonal ou é rotação ou é inversão (veja eq. 10).

Aqui convém incluir um parênteses sobre as matrizes ortogonais. O conjunto \mathbf{O} das matrizes ortogonais *forma um grupo*. Diremos que um conjunto \mathbf{G} forma um grupo segundo uma certa lei de associação, se:

- G. 1. A cada par \mathbf{A}, \mathbf{B} de elementos de \mathbf{G} corresponde um elemento \mathbf{C} de \mathbf{G} que denotaremos $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$.
- G. 2. Existe em \mathbf{G} um elemento, chamado elemento neutro, ou unidade, tal que $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$, para qualquer \mathbf{A} de \mathbf{G} .
- G. 3. Dado um elemento \mathbf{A} de \mathbf{G} , existe um elemento \mathbf{A}^{-1} de \mathbf{G} tal que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

O conjunto das matrizes ortogonais forma um grupo segundo a lei de associação «produto de matrizes», pois:

1. O produto de 2 matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

Prova: $\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$ e $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{I}$, então $(\mathbf{AB})(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{AB}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{I}$.

2. A matriz $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é ortogonal e $\mathbf{IA} = \mathbf{AI} = \mathbf{A}$, para qualquer $\mathbf{A} \in \mathbf{O}$.
3. Qualquer matriz ortogonal \mathbf{A} tem inversa que é $\mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}$.

O conjunto das rotações é um *subgrupo* do grupo das matrizes ortogonais, isto é, o conjunto das matrizes de rotação forma um grupo.

Notemos que as inversões, que constituem um subconjunto de \mathbf{O} , não formam um grupo (com relação ao produto) por duas razões: primeiro, porque o produto de duas inversões não é uma inversão mas sim uma rotação; segundo, porque a unidade $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ não pertence ao conjunto das inversões mas sim ao das rotações.

Posto isto, voltando às rotações, as equações (8) e (11) estabelecem relações entre os 9 elementos da matriz (a_{ik}) deixando livres somente 3 deles; é possível, portanto, colocá-los em função de 3 parâmetros independentes, em particular dos 3 ângulos de EULER.

2. Teorema de Euler⁽⁷⁾

2a. *Eixo de rotação.* Se \mathbf{A} é uma matriz de rotação, a transformação $\vec{x}' = \mathbf{A}\vec{x}$ tem um eixo invariante. Isto quer dizer: existe uma recta (que passa pela origem) tal que, qualquer vector \vec{x} paralelo a esta recta, se transforma em $\vec{x}' = \vec{x}$.

Esta recta chama-se eixo de rotação.

2b. *Angulo de rotação.* O ângulo de rotação Φ em torno do eixo de rotação

⁽⁷⁾ Veja demonstração de H. GOLDSTEIN — loc. cit. pg. 118.

é determinado pelo traço de matriz \mathbf{A} :
 $tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 1 + 2 \cos \Phi$.

3) Formalismo de Cartan

Observação: Leia com atenção e guarde os resultados deste parágrafo.

Segundo E. CARTAN ⁽⁸⁾ vamos agora associar a cada vector $\vec{x} = x_1 \vec{i} + x_2 \vec{j} + x_3 \vec{k}$, uma matriz complexa 2×2 do tipo ⁽⁹⁾

$$(11) \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \text{ onde } i = \sqrt{-1}.$$

\mathbf{X} pode servir para representar o vector \vec{x} . Algumas vezes chamaremos \mathbf{X} de «vector». Uma das vantagens do uso desta matriz \mathbf{X} , reside no facto de que $\det \mathbf{X} = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ o que é particularmente interessante na teoria das transformações ortogonais.

Definição: dada uma matriz $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ onde α_{11} etc. são números complexos, à matriz $\begin{pmatrix} \alpha_{11}^* & \alpha_{21}^* \\ \alpha_{12}^* & \alpha_{22}^* \end{pmatrix} = (\alpha)^* = \alpha^\top$ chamaremos de conjugada hermiteana de α . A conjugada hermiteana é obtida *transpondo* os elementos da matriz α e depois *conjugando* ($\alpha_{ik} \rightarrow \alpha_{ki}^*$) cada elemento da matriz.

Definição: uma matriz α é hermiteana se $\alpha^\top = \alpha$.

Definição: uma matriz é unitária se $\alpha \alpha^\top = \alpha^\top \alpha = 1$, isto é, se $\alpha^\top = \alpha^{-1}$.

3.1 A realidade do vector \vec{x} é expressa pela hermiticidade da matriz \mathbf{X} (11).

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^\top &= \begin{pmatrix} x_3^* & (x_1 + i x_2)^* \\ (x_1 - i x_2)^* & -x_3^* \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_3^* & x_1^* - i x_2^* \\ x_1^* + i x_2^* & -x_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

se \vec{x} é real, isto é se x_1, x_2, x_3 são números reais.

3.2 Se ao vector \vec{x} corresponde a matriz \mathbf{X} (2×2), então ao vector $\lambda \vec{x}$ corresponde a matriz $\lambda \mathbf{X}$.

3.3 E se ao vector \vec{y} corresponde a matriz \mathbf{Y} , ao vector $(\vec{x} + \vec{y})$ corresponde a matriz $(\mathbf{X} + \mathbf{Y})$.

$$3.4 \quad \text{Ao vector } \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ corresponde } \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ao vector } \vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ corresponde } \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ao vector } \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ corresponde } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

As matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ são chamados matrizes de PAULI, empregadas para representar o momento angular intrínseco das partículas de spin $1/2$ ⁽¹⁰⁾.

3.5 $\mathbf{X} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3$ (verificar usando 3.2...3.4) $= \vec{x} \cdot \vec{\sigma}$

$$\begin{aligned} 3.6 \quad \mathbf{X}^2 = \mathbf{X}\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 & 0 \\ 0 & x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{X}^2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\vec{x} \cdot \vec{x}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$3.7 \quad \det \mathbf{X} = \det \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - i x_2 \\ x_1 + i x_2 & -x_3 \end{pmatrix} = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = -\vec{x} \cdot \vec{x}.$$

$$3.8 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Se } \vec{x} \sim \mathbf{X} \\ \text{e } \vec{y} \sim \mathbf{Y} \end{array} \right\} \rightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = \frac{1}{2} (\mathbf{X}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{X})$$

(n.º) (matriz) = (matriz)

3.9 Ao vector axial $\vec{x} \wedge \vec{y}$ corresponde a matriz $\frac{1}{2i} (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})$.

⁽⁸⁾ E. CARTAN: loc. cit. pg. 54.

⁽⁹⁾ GOLDSTEIN, loc. cit. usa a notação \mathbf{P} no lugar de \mathbf{X} .

⁽¹⁰⁾ Veja D. BOHM: *Quantum theory* — Prentice Hall — 4.ª ed. — pg. 391.

3.10 As propriedades das matrizes de PAULI podem ser obtidas de maneira imediata usando os itens anteriores, que são de fácil verificação. As matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ têm quadrado igual a $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e anticomutam entre si:

$$\begin{array}{l|l} \vec{i} \sim \sigma_1 & \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 = \sigma_1^2 \\ \vec{j} \sim \sigma_2 & \vec{j} \cdot \vec{j} = 1 = \sigma_2^2 \\ \vec{k} \sim \sigma_3 & \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 = \sigma_3^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \vec{i} \cdot \vec{j} = 0 &= \frac{1}{2} (\sigma_2 \sigma_1 + \sigma_1 \sigma_2) \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_1; \\ \vec{j} \cdot \vec{k} = 0 &\text{ dá: } \sigma_2 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_2; \\ \vec{i} \cdot \vec{k} = 0 &\text{ dá: } \sigma_1 \sigma_3 = -\sigma_3 \sigma_1. \end{aligned}$$

3.11 De $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$ teremos, usando os itens 3.9 e 3.10:

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{1}{2i} (\sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1) = \frac{1}{2i} (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_2) = \\ &= \frac{1}{i} \sigma_1 \sigma_2 \rightarrow \sigma_1 \sigma_2 = i \sigma_3; \end{aligned}$$

e análogamente, $\sigma_2 \sigma_3 = i \sigma_1, \sigma_3 \sigma_1 = i \sigma_2$.

3.12 As quatro matrizes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes, e qualquer matriz complexa 2×2 pode ser escrita como uma combinação linear de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ e 1.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_3 \sigma_3 + c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde c_1, c_2, c_3, c são números complexos.

4. Parâmetros de Cayley-Klein.

Veremos adiante que é possível representar, de uma maneira muito simples, uma rotação, por meio de 4 parâmetros complexos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ chamados parâmetros de CAYLEY-KLEIN. Entre estes 4 números complexos (8 reais) podemos impor 5 condições, uma vez que só necessitamos de 3 para caracterizar a rotação.

Consideremos então uma matriz $Q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Esta matriz poderia eventual-

mente ser empregada para operar sobre entidades do tipo $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ onde u e v são números complexos: $\left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \text{spinor} \right]$

$$(13) \quad \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u + \beta v \\ \gamma u + \delta v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = \gamma u + \delta v \end{cases}$$

Queremos dar um jeito que torne possível Q representar uma rotação. Para isto Q deveria actuar sobre os vectores. Mas, Q sendo 2×2 , não pode operar sobre um vector $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Teríamos que construir uma matriz 2×2 , que pudesse representar o vector. Ora, isto nos é fornecido pelo parágrafo precedente, onde, ao vector \vec{x} , associamos a matriz X .

O vector transformado X' de X seria $X' = \begin{pmatrix} x'_3 & x'_1 - i x'_2 \\ x'_1 + i x'_2 & -x'_3 \end{pmatrix}$.

Faremos Q actuar sobre X na forma:

$$(14) \quad X' = Q X Q^{-1}$$

Porque isto é conveniente? A razão disto é que o determinante de X é $-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$. Tirando o determinante da equação (14) teremos:

$$(15) \quad \det X' = \det Q \cdot \det X \cdot (\det Q)^{-1} = \det X \\ -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -(x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2)$$

isto é a transformação (14) conserva \vec{x}^2 , como é preciso.

Por outro lado, como sabemos de 3.1, a realidade do vector \vec{x} é assegurada pela hermiticidade da matriz X . Para que \vec{x}' seja também real é necessário que X' seja hermitiana. Para que isto aconteça é conveniente escolher Q unitária, pois, sendo Q unitária teremos $Q^{-1} = Q^+$ e então:

$$(16) \quad X' = Q X Q^{-1} = Q X Q^+ \therefore X'^+ = [Q X Q^+]^+ = \\ = (Q^+)^+ X^+ Q^+ = Q X^+ Q^+ = Q X Q^+ = X' \therefore X'^+ = X'$$

Vemos assim que, se \mathbf{Q} é unitária, o transformado de um «vector» real é também real. A escolha de \mathbf{Q} unitária é pois conveniente porque conserva a realidade do vector \vec{x}' , se x é real. (Veja 3.1).

5) Forma de \mathbf{Q}

A unitariedade de \mathbf{Q} impõe relações entre os 4 números complexos $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Por razões que não vamos expôr, podemos escolher a matriz \mathbf{Q} do tipo:

$$(17) \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$$

Qual a condição que $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ deve satisfazer para que seja unitária?

$$(18) \quad \mathbf{Q} \mathbf{Q}^+ = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* & -\beta \\ \beta^* & \alpha \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \alpha \alpha^* + \beta \beta^* & 0 \\ 0 & \alpha \alpha^* + \beta \beta^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \therefore \alpha \alpha^* + \beta \beta^* = 1$$

Portanto: para $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix}$ ser unitária é necessário e suficiente que $\alpha \alpha^* + \beta \beta^* = 1$ isto é, que $\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} = 1$.

Assim teremos: \mathbf{Q} é caracterizada por 2 números complexos α e β (4 reais), entre os quais existe uma relação (18). Teremos, assim somente 3 números reais livres que são o necessário e suficiente para resolver o nosso problema.

6. Desenvolvimento de \mathbf{Q} como uma combinação linear de $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, 1$.

$$(19) \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Usando o item 3.12 teremos:

$$(20) \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} = a_1 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_3 \sigma_3 + a 1$$

onde a_1, a_2, a_3, a , são 4 números complexos. Dada a particular forma de \mathbf{Q} que

estamos usando, é fácil de ver (verificar como exercício usando (19)) que a_1, a_2, a_3 são imaginários puros e a é real. Teremos então:

$$(21) \quad \mathbf{Q} = i(b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + b_3 \sigma_3) + b 1 = i \mathbf{B} + b$$

onde b_1, b_2, b_3, b são reais e $\mathbf{B} = b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + b_3 \sigma_3 = \vec{b} \cdot \vec{\sigma}$ é, no formalismo de CARTAN, a matriz 2×2 associada ao vector real \vec{b} (veja item 3.5). É fácil de ver que valem as expressões:

$$(22) \quad \begin{cases} b = \frac{1}{2} (\alpha + \alpha^*) \\ b_1 = \frac{1}{2i} (\beta - \beta^*) \\ b_2 = \frac{1}{2} (\beta + \beta^*) \\ b_3 = \frac{1}{2i} (\alpha - \alpha^*) \end{cases}$$

Exercício: verificar (22) usando (19).

A condição $\alpha \alpha^* + \beta \beta^* = 1$ pode ser traduzida em termos dos b 's; usando (22) teremos:

$$(23) \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b^2 = \alpha \alpha^* + \beta \beta^* = 1$$

Podemos considerar b_1, b_2, b_3 como independentes e b como função dos b_i .

Com isto estamos armados para tratar o problema da representação da rotação.

7. Representação das rotações.

TEOREMA: A transformação $\mathbf{X}' = \mathbf{Q} \mathbf{X} \mathbf{Q}^+$,

onde $\mathbf{Q} = i \mathbf{B} + b = i \vec{b} \cdot \vec{\sigma} + b$,

$\mathbf{X} = \vec{x} \cdot \vec{\sigma} = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 + x_3 \sigma_3 =$ matriz 2×2 associada ao vector \vec{x} ,

$\mathbf{X}' = \vec{x}' \cdot \vec{\sigma} = x'_1 \sigma_1 + x'_2 \sigma_2 + x'_3 \sigma_3 =$ matriz 2×2 associada ao vector \vec{x}' ,
representa uma rotação com:

1.º eixo de rotação na direcção do vector $\vec{b} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$.

2.º ângulo de rotação, no sentido dextrógiro com respeito a \vec{b} , dado por $\sin \Phi/2 = |\vec{b}|$ (nota: $b \neq |\vec{b}|$).

Para demonstrar este teorema podemos usar os resultados do parágrafo 3.

LEMA 7.1 A transformação $X' = QXQ^+$ deixa invariante X^2 , isto é $X'^2 = \vec{x}' \cdot \vec{x}' \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = X^2 = \vec{x} \cdot \vec{x} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Prova: Calcule $X'^2 = (QXQ^+)(QXQ^+)$, use a unitariedade de Q e a propriedade 3.8.

LEMA 7.2 Para provar que \vec{b} é o eixo de rotação basta provar que o transformado $B' = QBQ^+$ do «vector» B (associado a \vec{b}) coincide com B .

Prova: Calcule $B' = QBQ^+ = (iB + b)B(-iB + b)$ e use a propriedade 3.8: $B^2 = \vec{b} \cdot \vec{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, notando que B^2 comuta com σ_1, σ_2 e σ_3 .

LEMA 7.3 Sendo \vec{b} o eixo de rotação, se $\vec{x} \perp \vec{b}$, o transformado \vec{x}' de \vec{x} deverá ser perpendicular a \vec{b} . Em termos das matrizes de CARTAN:

Se $\frac{1}{2}(XB + BX) = \vec{x} \cdot \vec{b} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$ então $\frac{1}{2}(X'B + BX') = 0$, onde $X' = QXQ^+$.

LEMA 7.4 Para calcular o ângulo de rotação, basta calcular o produto escalar dos vectores \vec{x} e \vec{x}' do lema anterior: $\vec{x} \cdot \vec{x}' = \frac{1}{2}(XX' + X'X)$.

É fácil de ver que:

$$(24) \quad \cos \Phi = -B^2 + b^2 = -(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) + b^2$$

$$(25) \quad = 1 - 2(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

uma vez que $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b^2 = 1$, (23).

Nota: A realidade do ângulo Φ de rotação é assegurada pela condição (23): $B^2 + b^2 = 1$;

pondo $b^2 = \cos^2 \alpha$ e $B^2 = \sin^2 \alpha$ teremos:

$$(26) \quad b^2 - B^2 = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos(2\alpha)$$

Comparando (24) com (26) vemos que $2\alpha = \Phi$ ou $\alpha = \Phi/2$ donde:

$$(27) \quad b = \cos \alpha = \cos \Phi/2 \text{ e } \sqrt{B^2} = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} = |\vec{b}| = \sin \Phi/2$$

Resumindo: $X' = QXQ^+$ com $Q = iB + b = i\vec{b} \cdot \vec{\sigma} + b = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ representa uma rotação com eixo \vec{b} e ângulo Φ dado por $\sin(\Phi/2) = |\vec{b}|$.

Observação: o problema dos sinais será discutido no artigo II.

Aqui convém compararmos Q com os quaterniões. Colocando $i = \sqrt{-1} \sigma_1, j = \sqrt{-1} \sigma_2, k = \sqrt{-1} \sigma_3$ as propriedades das matrizes de PAULI do parágrafo 3 nos darão: $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, ijk = 1$ etc., que são as propriedades necessárias para construirmos um quaternião. Teremos então:

$$(28) \quad Q = i(b_1 \sigma_1 + b_2 \sigma_2 + b_3 \sigma_3) + b \cdot 1 = b \cdot 1 + b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

Vemos assim, em suma, que a álgebra dos quaterniões é a álgebra das matrizes 2×2 complexas.

Do ponto de vista prático, uma forma muito empregada de Q é a seguinte: em $Q = b + i\sigma \cdot \vec{b}$ notando que $|\vec{b}| = \sin \Phi/2$ e $b = \cos \Phi/2$ teremos:

$$(29) \quad Q = \cos(\Phi/2) + i \sin(\Phi/2) \vec{\sigma} \cdot \vec{g} = e^{i \frac{\Phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{g}}$$

onde $\vec{g} = \frac{\vec{b}}{\sin \Phi/2}$ versor do eixo de rotação. Para verificar a relação (29), formalmente, basta desenvolver $e^{i \frac{\Phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{g}}$ em série de potências de Φ , notando que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{g})^2 = \vec{g}^2 = 1$ e que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{g})^3 = (\vec{\sigma} \cdot \vec{g})$.

Finalmente queremos, a título de informação, encaixar aqui um conceito muito importante: o de spinor.

Um vector $X = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}$ se transforma pela lei: $X' = Q X Q^{-1}$; chamaremos de *spinor* uma matriz coluna do tipo $s = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, onde u e v são números complexos, e que, numa rotação se transforma pela lei: $s' = Q s$

$$\text{ou } \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad \text{ou } \begin{cases} u' = \alpha u + \beta v \\ v' = \gamma u + \delta v \end{cases}$$

É possível estabelecer uma correspondência entre um triedro ortogonal e um spinor⁽¹¹⁾⁽¹²⁾.

Restam agora 2 problemas:

1) Dada a representação (a_{ik}) da rotação, determinar Q , isto é, em termos geométricos, determinar o eixo e o ângulo de rotação.

2) Dada a matriz Q determinar a matriz (a_{ik}) , isto é, dado o eixo e o ângulo de rotação determinar (a_{ik}) .

Estes 2 problemas, com a respectiva discussão sobre os sinais, serão examinados no próximo artigo II, em que trataremos também o problema das reflexões e simetrias.

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA
SÃO PAULO, S. P. — BRASIL

⁽¹¹⁾ Veja CARTAN — loc. cit.

⁽¹²⁾ O conceito de spinor é da maior importância prática em física teórica, pois as partículas com spin $1/2$, isto é com o momento angular intrínseco, são usualmente descritas por funções de onda do tipo

$\psi = \begin{pmatrix} u(xyz) \\ v(xyz) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, onde $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ se transforma como um spinor.

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por Luís G. M. de Albuquerque

(Conclusão)

11. Observações e exemplos.

O teorema da existência da melhor aproximação x_0 de $y \in E$ numa variedade linear $V \subset E$, demonstrado para o caso de ser E um espaço vectorial normado (§7), não é construtivo nem foi possível até hoje estabelecer um método geral para a determinação de x_0 em tais espaços.

TATARKIEWICZ e SINGER, o primeiro estudando as propriedades do conjunto dos elementos x_0 (para qualquer $y \in E$) e o segundo passando ao espaço E^* das funcionais lineares definidas em E , procuraram recentemente resolver este problema em espaços de BANACH quaisquer. Se é certo que os resultados atingidos pelo segundo dão, como casos particulares, alguns teoremas já encontrados

para certos espaços conhecidos, é também verdade que o alcance das conclusões obtidas é limitado enquanto se não entra na concretização de E .

O leitor interessado poderá informar-se sobre a situação actual do problema nos trabalhos citados na bibliografia sob os números [1], [6] e [7].

Passaremos agora a enumerar como exemplos alguns dos casos mais importantes da teoria da aproximação funcional, com o que se encerrará esta exposição.

I. APROXIMAÇÃO POR POLINÓMIOS TRIGONOMÉTRICOS. No espaço de HILBERT completo $L^2[-\pi, \pi]$ (ver §5, exemplo VI), tome-se a variedade linear V gerada pelos vectores

$$x_k = \sin k t \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Atendendo à expressão (5.7) do produto escalar, tem-se:

$$(x_k, x_j) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kt \cdot \sin jt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \neq j \\ \pi & \text{se } k = j \end{cases}$$

Consideremos a função $y(t) \in L^2[-\pi, \pi] - V$. As equações do sistema

$$(y, x_k) - \sum_{i=1}^m \alpha_i^0 \cdot (x_i, x_k) = 0 \quad (k=1, \dots, m),$$

que determina as componentes α_i^0 da melhor aproximação $y_0(t)$ de $y(t)$ em V , simplificam-se neste caso, tomando a forma:

$$(y, x_k) = \pi \cdot \alpha_k^0.$$

Assim, é:

$$\alpha_k^0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cdot \sin kt \cdot dt$$

e, portanto:

$$y_0(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m \sin kt \cdot \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cdot \sin kt \, dt.$$

Se no mesmo espaço $L^2[-\pi, \pi]$ tomarmos o sistema de vectores

$$1, \cos x, \sin x, \dots, \cos mx, \sin mx$$

e o ortogonalizarmos, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}.$$

Seja V' a variedade linear gerada por este sistema de vectores, e de novo se considere uma função $y(t) \in L^2[-\pi, \pi] - V'$. A melhor aproximação de $y(t)$ em V' tem as componentes (ver §8):

$$\alpha_j^0 = (y, x_j) \quad (j = 1, 2, \dots, 2m + 1)$$

onde é ($k = 1, 2, \dots, m$):

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, x_{2k} = \frac{\cos kx}{\sqrt{2\pi}}, x_{2k+1} = \frac{\sin kx}{\sqrt{2\pi}},$$

isto é:

$$\alpha_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) dt; \alpha_{2k}^0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos kt dt$$

e

$$\alpha_{2k+1}^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin kt dt,$$

que são os primeiros coeficientes de FOURIER relativos à função $y(t)$. Assim, a melhor aproximação $y_0(t)$ de $y(t)$ em V' é dada por:

$$y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} y(t) dt + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^m \left(\cos kt \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \cos kt dt + \sin kt \int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin kt dt \right).$$

Chamando, como é habitual, polinómio trigonométrico de ordem m a qualquer dos elementos da variedade linear V' , podemos dizer que: *a melhor aproximação de qualquer $y(t) \in L^2[-\pi, \pi]$ dada por um polinómio trigonométrico de ordem m é construída com os coeficientes de FOURIER respeitantes àquela função.*

II. O TEOREMA DE HAAR. Seja C o espaço das funções contínuas definidas sobre o conjunto limitado e fechado D (Ver exemplo II, §§3 e 4); e

$$x_i(t) \in C \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

m funções linearmente independentes de C , gerando a variedade linear V . Como C é um espaço linear normado, considerando a função $y(t) \in C - V$ existe (Teorema de existência, §7) em V ao menos um elemento

$$y_0(t) = \sum_{k=1}^m \alpha_k^0 \cdot x_k(t) \in V$$

à mínima distância de $y(t)$

$$\sup_{t \in D} |y(t) - y_0(t)| =$$

$$= \inf_{\alpha_k} \sup_{t \in D} \left| y(t) - \sum_{k=1}^m \alpha_k \cdot x_k(t) \right|.$$

O teorema de HAAR dá as condições em que a melhor aproximação é única, e enuncia-se deste modo:

TEOREMA. *A melhor aproximação de $y(t)$ em V é única, quando cada elemento da variedade linear V não tem em D mais do que $m-1$ raízes distintas (1).*

O teorema aplica-se, em particular, quando se considera o caso da variedade linear de C constituída pelas funções linearmente independentes $1, t, t^2, \dots, t^{m-1}$. É usado com êxito no problema da solução aproximada de um sistema incompatível de um número infinito de equações lineares (2).

III. O PROBLEMA DE TCHEBICHEV. Consideremos o intervalo $[a, b]$ e os polinómios

$$\begin{aligned} A(x) &= a_0 x^{m-\mu} + \dots + a_{m-\mu} \quad (a_0 \neq 0) \\ B(x) &= b_0 x^{n-\nu} + \dots + b_{n-\nu}, \end{aligned}$$

não tendo o primeiro zeros naquele intervalo. Com $\varphi(x) \in C[a, b]$, considere-se o conjunto \mathcal{R} das funções

$$R(x) = \varphi(x) \cdot \frac{B(x)}{A(x)}.$$

Dada qualquer função $f(x) \in C[a, b]$ o problema de TCHEBICHEV consiste em saber se existe (e no caso afirmativo, construí-la) uma função $R_0(x) \in \mathcal{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - R_0(x)| &= \\ = \min_{R(x) \in \mathcal{R}} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - R(x)| &= \delta(f, \mathcal{R}) \end{aligned}$$

(1) HAAR demonstrou este teorema em «Die Minkowski Geometrie und die Annäherung an stetige Funktion», in *Math. Ann.*, 78 (1918). Ver ACHIESER *Vorlesungen über Appr.*, ed. cit., pag. 67 e ss.

(2) ACHIESER, *op. cit.*

TCHEBICHEV provou que (1):

a) existe sempre uma função $R_0(x) \in \mathcal{R}$ nas condições exigidas;

b) aceites como indistintas as fracções $\frac{B(x)}{A(x)}$ com a mesma expressão mais simples, $R_0(x)$ é única e caracterizada pela seguinte propriedade: a sucessão de pontos de $[a, b]$ onde a diferença $f(x) - R_0(x)$ toma o valor $\delta(f, \mathcal{R})$ com sinais alternados não pode ser excedido pelo número $m+n+2-d$, com $d = \min.(\mu, \nu)$.

No caso particular de $A(x) \equiv 1$, cai-se na determinação da melhor aproximação de funções contínuas por polinómios de determinado grau (em dado intervalo $[a, b]$).

Seja $f(x) \in C[a, b]$ e designemos por π_n o conjunto dos polinómios de grau n e coeficientes reais:

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n;$$

pode ser $a_0 = 0$, e portanto

$$\pi_0 \subset \pi_1 \subset \dots \subset \pi_n \subset \dots;$$

sendo

$$(11.1) \quad 0 < \Delta_n = \inf_{P \in \pi_n} \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P(x)|$$

tem-se

$$\Delta_0 > \Delta_1 > \dots > \Delta_n > \dots$$

e um teorema de WEIERSTRASS (2) estabelece que:

$$\lim_n \Delta_n = 0;$$

e assim, fixado $\varepsilon > 0$, é sempre possível escolher um número $n_0(\varepsilon)$ e um polinómio de grau $n > n_0(\varepsilon)$ de tal modo que

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_0(x)| < \varepsilon$$

O ponto de vista de TCHEBICHEV era, porém,

(1) ACHIESER, *op. cit.*, cap. 2.º.

(2) NATANSON, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen*, Berlin, 1954, pag. 107 e ss.

diferente: interessava-lhe estudar, para cada n , a existência de um polinómio $P_0(x) \in \pi_n$ tal que

$$(11.2) \quad \Delta_n = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - P_0(x)|$$

com Δ_n dado por (11.1).

Chamando *sucessão alternante* de TCHEBICHEV em $[a, b]$ e relativa a um polinómio $P(x) \in \pi_n$ qualquer sucessão (finita)

(11.3) $x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} < x_{n+2}$, $x_i \in [a, b]$ onde a diferença $P(x) - f(x)$ toma o valor comum Δ_n com sinais alternados, pode-se provar que:

1.º) Em cada π_n existe um e um só polinómio que verifica (11.2) e

2.º) Sendo

$$\Delta_Q = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q(x)|$$

para $Q(x) \in \pi_n$, se relativamente a este polinómio existe uma sucessão alternante (11.3) com $n+2$ pontos e tal que $|f(x_i) - Q(x_i)| = \Delta_Q$ ($i = 1, 2, \dots, n+2$) então é $\Delta_Q = \Delta_n$ e $Q(x)$ é o polinómio de melhor aproximação: $Q(x) \equiv P_0(x)$ (*).

Este resultado, se ainda não aponta um método de rotina para a determinação de $P_0(x)$, pode orientar o caminho que leva a construir aquele polinómio. Vamos concretizar esta afirmação procurando o polinómio de 1.º grau que é melhor aproximação da função $f(x) \in C[a, b]$, supondo esta duas vezes derivável e com sinal constante (por exemplo: $f''(x) > 0$) em $[a, b]$.

Seja $P(x) = Ax + B$, com os coeficientes A e B a determinar, o polinómio de melhor aproximação, e $x_1 < x_2 < x_3$ a sucessão alternante a respeito de $P(x)$, tendo-se certamente $x_2 \in (a, b)$. Como a diferença $f(x) - P(x)$ é máxima ou mínima nos pon-

tos da sucessão alternante e x_2 é um ponto interior de $[a, b]$, tem-se:

$$f'(x_2) - P'(x_2) = 0$$

donde resulta

$$(11.4) \quad A = f'(x_2)$$

Como $f''(x) > 0$ em $[a, b]$, é $f'(x)$ monótona crescente nesse intervalo, e só uma vez pode nele atingir o valor A ; e como se existisse algum outro extremante x_0 de $f(x) - P(x)$ interior ao intervalo, ele imporia, como x_2 , $f'(x_0) = A$, segue-se que os outros pontos da sucessão alternante são a e b , isto é

$$x_1 \equiv a < x_2 < x_3 \equiv b.$$

Sendo $f''(x) > 0$ em $[a, b]$, o extremo atingido em x_2 é com certeza um mínimo; $f(x) - P(x)$ tem portanto máximos em a e b , e fica

$$\begin{aligned} f(a) - Aa - B &= f(b) - Ab - B = \\ &= -\{f(x_2) - P(x_2)\} \end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned} A &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad B = \frac{f(a) + f(x_2)}{2} - \\ &\quad - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot \frac{a + x_2}{2} \end{aligned}$$

e sendo $x_2 \in [a, b]$ determinado pelo teorema de LAGRANGE, pois (11.4) e a primeira destas últimas igualdades mostram que

$$f'(x_2) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(como exemplo o leitor pode aplicar estas indicações ao caso de ser $f(x) = \sqrt{x}$, em $[0, 1]$; o polinómio obtido será $P(x) = x + \frac{1}{8}$).

IV. PROBLEMA PROPOSTO. As funções esféricas principais de ordem l , $Y_l^m(\theta, \varphi)$ ($m = -l, \dots, +l$), definidas sobre a esfera

(*) NATANSON, *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin, 1955, Cap. 2.º.

de centro na origem e raio unitário (e cujo quadrado do valor absoluto é integrável), são dadas por

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi} \cdot F_l^m(\theta)$$

onde $F_l^m(\theta)$ estão relacionadas com os polinómios e as funções associadas de LEGENDRE. As funções $Y_l^m(\theta, \varphi)$ são base (orto-normada) de uma variedade linear V do espaço E das funções de quadrado integrável definidas naquela superfície esférica, onde foi introduzido um produto escalar por $(f, g \in E)$

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \varphi) \cdot \overline{g(\theta, \varphi)} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Construir a melhor aproximação de $f \in E$ em $V(*)$.

(*) Sugere-se a leitura de I. M. GELFAND e Z. Ya. SAPIRO, «Representations of the group of rotations in three-dimensional space and their applications», *Amer. Math. Soc. Translations*, Vol. 2 (1956), pag. 207 e ss., principalmente § 3.

BIBLIOGRAFIA

- [1] N. I. ACHESER, *Vorlesungen über Approximations-theorie*, Berlin, 1953.
- [2] G. FREUD, «Über einseitige Approxim. durch Polynome», *Acta Sc. Math.*, 16 (1955), p. 12.
- [3] P. R. HALMOS, *Finite dimensional vector space*, Princeton, 1948.
- [4] P. R. HALMOS, *Introduction to HILBERT space and the theory of spectral multiplicity*, New-York, 1951.
- [5] L. A. LJUSTERNIK e W. L. SOBOLEW, *Elemente der Funktionalanalysis*, Berlin, 1955.
- [6] I. P. NATANSON, *Konstruktive Funktionentheorie*, Berlin, 1955.
- [7] I. SINGER, «Caracterisation des éléments de meilleure approximation...», *Acta Math. Sc.*, 17 (1956), pag. 181.
- [8] I. SINGER, «Supra unicitatii elementerlui de cea mai buna aproximatie in spatii BANACH oarecare», *Studii sier. Math.*, 8 (1957), pag. 235.
- [9] K. TATARKIEWICZ, «Une théorie généralisée de la meilleure approximation», *Ann. Univ. Marie-Curie Sklodowska*, A, 6 (1952), pag. 19.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

3.ª ASSEMBLEIA GERAL DA UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS 1958

De 1 a 13 de Agosto de 1958 teve lugar na cidade escocesa de St. Andrews a 3.ª Assembleia Geral da União Matemática Internacional. Entre os numerosos assuntos discutidos, tratou-se dos planos de futuras actividades (tais como intercâmbio de matemáticos, publicações científicas, ensino matemático, congressos e simpósios, etc.), da revisão dos estatutos e da eleição do novo Comité Executivo, que ficou assim constituído: Presidente, R. NEVANLINNA; Vice-Presidentes, P. ALEXANDROFF e M. MORSE; Secretário, B. ECKMANN; outros membros: K. CHANDRASEKHARAN, C. CHOQUET, K. KNESER, J. F. KOKSMA e C. KURATOWSKI. Foi delegado português a esta Assembleia o signatário.

Seguidamente, de 13 a 21 de Agosto, efectuou-se em Edimburgo o Congresso Internacional de Matemáticos, que decorreu com a animação e o nível peculiares a estes congressos (cerca de 2.000 congressistas).

Os trabalhos repartiram-se pelas seguintes secções: I) Lógica e fundamentos; II A) Álgebra; II B) Teoria dos números; III A) Análise clássica; III B) Análise funcional; IV) Topologia; VA) Geometria algébrica; VB) Geometria diferencial; VI) Probabilidades e Estatística; VII A) Matemática aplicada; VII B) Física Teórica; VII C) Análise numérica; VIII) História e Educação. Foram expostas quatro comunicações por congressistas portugueses: *Idéaux demi-premiers*; μ et p -systèmes d'idéaux (A. ALMEIDA COSTA); *Homomorphisms of modular systems and Estimation by the minimum discrepancy method* (J. TIAGO DE OLIVEIRA); *Deux généralisations successives de la notion de distribution* (J. S. e SILVA).

O próximo congresso terá lugar, provavelmente, em Estocolmo (1962).

XXIV CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O PROGRESSO DAS CIENCIAS

Realizou-se em Madrid, de 14 a 19 de Novembro de 1958, o XXIV Congresso Luso Espanhol para o progresso das Ciências.

Os trabalhos da secção de matemática, que reuniu na ausência do presidente designado (Prof. JÚLIO REX PASTOR), iniciaram-se com um discurso inaugural do prof. Dr. JOSÉ M. ORTS, que se ocupou das *Directrices actuales de los estudios e investigaciones sobre la teoría de las funciones en la Península Iberica*.

Foram apresentadas cerca de três dezenas de comunicações de matemáticos espanhóis e portugue-

ses, por vezes discutidas com muito interesse.

Pela parte espanhola colaboraram neste congresso, entre outros, os professores SAN JUAN, PI CALLEJA, RODRIGUEZ SALINAS e GARCIA RODEJA. A representação portuguesa, presidida pelo Prof. Dr. VICENTE GONÇALVES, apresentou estudos dos Profs. DRS. ALMEIDA COSTA, SEBASTIÃO e SILVA, RIOS DE SOUSA e J. P. PACHECO DE AMORIM, e de J. TIAGO DE OLIVEIRA, PEDRO BRAUMANN, GUSTAVO DE CASTRO, SANTOS GUERREIRO, CAMPOS FERREIRA e LUIZ ALBUQUERQUE.

L. M. Albuquerque

A 7.^a OLIMPIADA DE MATEMÁTICA PARA ALUNOS DAS ESCOLAS SECUNDÁRIAS DA POLÓNIA

Revistas norte-americanas, nestes últimos anos, tem mostrado interesse pela preparação matemática dada aos alunos das escolas secundárias da Russia e da Polónia, países com organização análoga quanto a estudos científicos e de preparação para a investigação. Em especial as revistas «The American Mathematical Monthly» e «The Mathematics Teacher» publicaram em 1957 e 1958, respectivamente nos vol. 64, n.º 6 e vol. LI, n.º 8, os problemas saídos nas Olimpíadas de Matemática, na Russia (11.^a Olimpíada) e na Polónia (7.^a Olimpíada), e delas extraímos a presente notícia.

As Olimpíadas de Matemática, em qualquer daqueles dois países, destinam-se, como bem se compreende, a fazer uma selecção entre alunos de escolas secundárias com o intuito de os encaminharem para a investigação.

Os alunos são estimulados a produzir trabalho extra-escolar, para o que os próprios educadores organizam programas de actividades procurando desenvolver qualidades onde quer que elas existam. A actividade de *clubs* científicos contribue grandemente para esse fim.

A Polónia, país de tradições matemáticas, onde se faz efectivamente investigação e onde existe uma escola matemática bem conhecida, organiza as suas Olimpíadas colaborando nelas as escolas secundárias e superiores e a Sociedade Polaca de Matemática.

Para esse fim a Comissão Executiva da Olimpíada organizou sete Comissões Regionais nos distritos de Varsóvia, Krakov, Wroclau, Poznan, Torun, Lublin

e Lodz. O Presidente da Comissão Regional de Varsóvia foi, na 7.^a Olimpíada, o notável matemático Professor W. Sierpinky, decano dos matemáticos polacos.

A Olimpíada consiste em três provas.

A primeira realiza-se nas escolas locais.

A segunda, a que concorrem aqueles que obtiveram classificação *satisfatória* na prova anterior, realiza-se nas sete regiões dos distritos mencionados.

A terceira prova, (final), para a qual os concorrentes foram seleccionados na segunda, é prestada em Varsóvia.

No final são distribuídos diplomas aos alunos vencedores e aos seus professores.

Alem destes diplomas recebem os vencedores prémios utilitários.

Na 7.^a Olimpíada polaca a primeira prova (preparatória), teve lugar no período de 1 de Outubro de 1955 a 10 de Janeiro de 1956, e a ela concorreram 1642 alunos, de escolas de educação geral (1379) e de escolas semiprofissionais (263).

À segunda prova, que se realizou em 2 e 3 de Março de 1956, compareceram 326 alunos, apurados na primeira prova.

À terceira e última, realizada em 16 e 17 de Abril de 1956, concorreram 59 dos 60 alunos classificados na segunda prova.

Damos a seguir, extraídos do n.º 8, vol. LI, Dezembro de 1958, da revista *The Mathematics Teacher*, os enunciados dos problemas propostos em cada uma das fases daquela 7.^a Olimpíada de Matemática.

PROBLEMAS DA 1.ª SÉRIE (preparatória)*

1. Resolva o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}(x^3 + y^3)(x^2 + y^2) &= 2a^5 \\ x + y &= a.\end{aligned}$$

2. Prove que, para quaisquer dois inteiros a e b , o número

$$N = ab(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$$

é divisível por 30.

3. Num quadrado $ABCD$, da área S , une-se o vértice A com o ponto médio do lado BC , por meio de um segmento de recta, o vértice B com o ponto médio do lado CD , o vértice C com o ponto médio do lado DA , e o vértice D com o ponto médio do lado AB . Achar a área da parte do quadrado que contém o centro do quadrado.

4. Prove que os pontos médios dos segmentos de recta que unem o centro da circunferência inscrita num triângulo com os centros das três circunferências, cada uma das quais é tangente a um lado do triângulo e ao prolongamento dos outros dois lados, existem sobre a circunferência circunscrita ao triângulo.

5. Prove que, se os números reais p_1, p_2, q_1, q_2 verificam a igualdade

$$(1) \quad p_1 p_2 = 2(q_1 + q_2)$$

então pelo menos uma das equações

$$x^2 + p_1 x + q_1 = 0, \quad x^2 + p_2 x + q_2 = 0$$

tem raízes reais.

6. Resolva a equação

$$x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$$

7. São dados um rectângulo $ABCD$ e um ponto M no espaço tridimensional. Ache a distância MD , conhecidas as distâncias MA, MB, MC .

8. É dado um triângulo acutângulo ABC e um ponto M do interior de um dos seus lados. Construir o triângulo de perímetro mínimo tal que um dos seus vértices seja o ponto M e os outros dois existam nos outros dois lados do triângulo.

9. Prove que pode construir-se um triângulo a partir de segmentos de comprimentos a, b, c , se e somente se

* Os problemas de geometria deviam ser resolvidos somente com métodos da geometria sintética euclidiana (sem uso da geometria analítica).

$$a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2 > \frac{1}{2}(a^4 + b^4 + c^4).$$

10. Prove que se $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$, e $\alpha + \beta + \gamma = \frac{1}{2}\pi$, então

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1.$$

11. Num triângulo de lados a, b, c traçam-se os segmentos m, n, p tangentes à circunferência inscrita no triângulo, de modo que os seus extremos existam sobre os lados do triângulo e sejam paralelos respectivamente aos lados a, b, c .

Mostre que

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 1.$$

12. Prove que:

a) a soma das distâncias de um ponto arbitrário M , do interior ou dos lados de um triângulo equilátero, aos três lados do triângulo é constante, isto é, é independente da posição do ponto M no triângulo.

b) a soma das distâncias de um ponto arbitrário, do interior ou da superfície de um tetraedro regular, às faces do tetraedro é constante.

PROBLEMAS DA 2.ª SÉRIE (regional)

1. Para que valores de m o polinómio $x^3 + y^3 + z^3 + mxyz$ é divisível por $x + y + z$?

2. Prove que se H é o ponto de intersecção das alturas de um triângulo escaleno ABC , então as circunferências circunscritas aos triângulos AHB, BHC, CHA e ABC são congruentes.

3. Um disco circular horizontal de densidade uniforme e peso Q kg apoia-se em três pontos A, B, C da circunferência do disco, sendo $AC = BC$ e $\angle ABC = 2\alpha$. Que peso x kg deve colocar-se na segunda extremidade D do diâmetro que passa por C , para que a pressão exercida pelo disco no apoio C seja igual a zero?

4. Prove que a equação $2x^3 - 215y^3 = 1$ não tem soluções inteiras.

5. Prove que os números A, B, C definidos pelas fórmulas $A = \operatorname{tg} \beta \cdot \operatorname{tg} \gamma + 5, B = \operatorname{tg} \gamma \cdot \operatorname{tg} \alpha + 5, C = \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta + 5$, onde $\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0$ e $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$, satisfazem a desigualdade

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} \leq 4\sqrt{3}$$

6. Suponha que num tetraedro $ABCD$ os segmentos que unem os vértices do tetraedro com os centros das circunferências inscritas nas faces opostas se intersectam um ponto. Prove que

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AD} \cdot \overline{BC},$$

e que o recíproco do teorema é válido.

PROBLEMAS DA 3.ª SÉRIE (finais)

1. Resolva o seguinte sistema de equações:

$$x^2 y^2 + x^2 z^2 = a x y z$$

$$y^2 z^2 + y^2 x^2 = b x y z$$

$$z^2 x^2 + z^2 y^2 = c x y z.$$

2. Prove que se

$$(1) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

e se n um número natural ímpar, arbitrário, então

$$(2) \quad \frac{1}{a^n} + \frac{1}{b^n} + \frac{1}{c^n} = \frac{1}{a^n + b^n + c^n}.$$

3. Sobre uma recta são dados três pontos distintos M, D, H . Construir um triângulo rectângulo para

o qual M seja o ponto médio da hipotenusa; D o ponto de intersecção da bissectriz do ângulo recto com a hipotenusa; H o pé da altura relativa à hipotenusa.

4. Prove que se os números naturais a, b, c satisfazem a igualdade

$$a^2 + b^2 = c^2$$

então:

1) pelo menos um dos números a ou b é divisível por 3;

2) pelo menos um dos números a ou b é divisível por 4;

3) pelo menos um dos números a, b, c é divisível por 5.

5. Prove que qualquer polígono de perímetro $2a$ pode ser completamente coberto por um disco circular de diâmetro a .

6. É dada uma esfera de raio R e um plano α sem pontos comuns com a esfera. Seja S um ponto do plano α . Considere o cone de vértice S e tangente à esfera. Se C é o centro da circunferência de tangência, ache o lugar de C quando S se desloca livremente no plano α .

J. S. P.

CONGRESSO INTERNACIONAL DOS MATEMÁTICOS DE 1962

O Comité autorizado pela sessão plenária final do Congresso de Edinburgh para determinar o local do Congresso Internacional de 1962 aceitou o convite do Comité Nacional Sueco para a Matemática e da Sociedade Matemática Sueca redigido nos termos seguintes:

«Aos Matemáticos de todos os países:

O Comité Nacional Sueco para a Matemática e a Sociedade Matemática Sueca têm a honra de convidar-vos para o próximo Congresso Internacional de Matemáticos que terá lugar em Stockholm no Verão de 1962.

Faremos o possível por tornar o Congresso cientificamente eficiente e agradável, desejando que esse

facto estimule o intercâmbio cultural entre os matemáticos dos diferentes domínios da matemática e dos diferentes países».

Ake Pleijel

Presidente do Comité Nacional
Sueco para a Matemática

Göran Borg

Presidente da Sociedade
Matemática Sueca

B. Eckmann

Secretário da IMU

A Redacção da G. M. congratula-se com o facto de poder transmitir aos seus Leitores o convite anterior num momento em que ainda estão bem vivos os reflexos da última reunião congénere.

J. G. T.

CONGRESSOS, REUNIÕES E INTERCAMBIO CIENTÍFICO

O Ano Geofísico Internacional, iniciado em Julho de 1957, depois de cinco anos de preparação, é o exemplo mais flagrante de uma ampla cooperação científica internacional, jamais realizada, se bem que limitada, a um domínio relativamente restrito. O seu sucesso extraordinário põe perante todos os cientistas, professores e educadores, o dever de algumas

reflexões, públicas ou íntimas, mas necessárias, sobre o interesse de realizações deste tipo ou de outro semelhante.

Os cientistas, professores e educadores da época actual estão firmemente convictos, por evidência, de que o lugar comum «a ciência não conhece fronteiras» aplica-se singelamente não só à interpretação directa

de que os conhecimentos científicos não podem ser do domínio dum só país ou dum conjunto de países mas também à generalização imediata deste princípio: mesmo dentro dum grupo nacional, é impossível, além de anacrónico, a limitação de acesso democrático a todos os lugares, a todos os postos.

A ciência situa-se acima das lutas violentas que dividem os homens e, por esse mesmo facto, é um dos mais eficientes processos, por ser do mais alto nível moral, de impedimento da mesma luta violenta.

O ano civil de 1958 foi fértil em realizações internacionais científicas, nas quais encontramos, com manifesto prazer, as bases de bons entendimentos internacionais no campo científico, técnico e cultural. Pode dizer-se mesmo que é o ano em que a terra estende a mão aos outros mundos...

Na medida das suas possibilidades, a Gazeta de Matemática tem tentado acompanhar tais realizações internacionais desde as do Ano Geofísico Internacional passando pelos diversos congressos científicos até a Exposição Internacional de Bruxelas.

Assim nos n.º 68-69; 70-71 foram publicados 3 artigos relativos aos lançamentos dos satélites artificiais um dos quais é a tradução integral do trabalho do prof. TCHEBOTAREV, escrito em 1956, e que serviu de base ao lançamento do primeiro planeta artificial do Sol.

*
* * *

No seguimento desta orientação e relacionado com a Exposição de Bruxelas, a G. M. organizou entre os estudantes universitários e professores dos diversos ramos de ensino uma visita àquela cidade. Numa apreciação de conjunto várias conclusões se podem tirar: se por um lado os principais pavilhões nacionais são um índice da importância que nos respectivos países se dá à investigação e vida científica; se por outro, o Palácio Internacional da Ciência patenteia o número crescente das descobertas científicas dos últimos anos; sobre tudo se tornam evidentes os resultados de uma lição realizada à escala mundial: os países relativamente atrasados que tomaram a sério o desenvolvimento da ciência e da tecnologia alcançam rapidamente e mesmo ultrapassam, sob certos aspectos, os que neste campo, com mais tradições se deixaram adormecer. A recíproca é evidentemente equivalente.

Em qualquer caso, porém, a visita à Exposição Internacional de Bruxelas deu-nos a certeza de que o futuro próximo da humanidade será coerente com a condição humana: cooperação e bom entendimento internacional no campo da ciência da cultura e da vida.

J. G. T.

Sur la définition et la structure des distributions vectorielles (*)

par J. Sebaslião e Silva

Introduction et plan général. M. L. SCHWARTZ appelle distributions vectorielles (i. e., à valeurs dans un espace vectoriel E) les applications linéaires continues de l'espace \mathcal{D} (des fonctions numériques indéfiniment dérivables à support borné) dans l'espace E . C'est là une définition synthétique, immédiate, mais elle est à l'origine d'une théorie difficile, qui a exigé la mise en oeuvre de puissantes ressources de l'analyse fonctionnelle moderne (voir [12] et [6], dans la Bibliographie). Comme les distributions vectorielles interviennent couramment dans les importantes recherches de M. SCHWARTZ et de ses

élèves sur les équations aux dérivées partielles et sur d'autres types d'équations fonctionnelles, la lecture de ces travaux est rendue de ce fait assez difficile pour la plupart des physiciens et, même, des mathématiciens.

D'autre part, mon article «Sur une construction axiomatique des distributions» [16], dont l'un des buts était justement de rendre plus accessible la théorie des distributions scalaires, a été écrit beaucoup plus comme un travail de

(*) Extraído de um trabalho a publicar na revista «Portugaliae Mathematica».

recherche que comme un exposé didactique, ce qui rend peu commode sa lecture, en masquant, par une formulation trop abstraite, le caractère foncièrement élémentaire et facile de cette construction. C'est pourquoi j'expose ici des préliminaires assez détaillés (n.º 2): le lecteur moins informé y trouvera tout l'essentiel de la théorie algébrique des distributions, généralisée au cas des distributions vectorielles.

Or, en rédigeant cet article [16], je me suis aperçu que les mêmes méthodes pourraient s'appliquer, avec avantage, au cas des distributions vectorielles. Une seule difficulté essentielle se présentait dans ce cas: tandis que toute distribution scalaire s'exprime, localement, comme dérivée généralisée, d'ordre fini, d'une fonction continue, cela n'est plus vrai, en général, pour les distributions vectorielles. Cependant M. A. GROTHENDIECK [4] s'était trouvé devant une difficulté exactement analogue, dans la recherche des applications linéaires continues de certains espaces de fonctions holomorphes, dans un espace localement convexe E (complet), et il l'a résolue au moyen de sa notion de «fonction holomorphe au sens large à valeurs dans E ». Il ne s'agit plus là de vraies fonctions à valeurs dans E , mais de fonctions à valeurs dans des espaces de BANACH E_x , dont E se compose (comme sous-espace du produit des E_x); mais cette désignation est suggestive et, au fond, naturelle.

Donc, nous n'avons qu'à suivre un chemin tout à fait parallèle: les distributions T au sens large, telles que nous les définissons ici (nº 6) résolvent, d'une façon naturelle et directe, le problème de la détermination des applications linéaires continues des espaces \mathcal{D} , C^∞ , etc. dans un espace localement complet E ; deux formules simples établissent alors une corres-

pondance biunivoque $\Theta \rightarrow T$ entre ces applications Θ et ces distributions T (voir théorèmes 4.1 et 7.1). Comme conséquence de ces théorèmes on retrouve, d'une façon presque élémentaire, le célèbre «théorème des noyaux» de SCHWARTZ.

Il conviendra de commencer par donner ici un aperçu de cette orientation. Soit d'abord E un espace de BANACH et considérons l'espace \mathcal{D}_K des fonctions numériques $\varphi(x)$ d'une variable, indéfiniment dérivables et nulles en dehors d'un intervalle borné $K=[a, b]$. On démontre alors que l'expression générale des applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_K dans E est:

$$(1.1) \quad \Theta \varphi = (-1)^n \int_a^b f(x) \varphi(x) dx,$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K$,

où f est une fonction continue dans $[a, b]$, à valeurs dans E , et n un entier ≥ 0 , le couple (f, n) dépendant de Θ (mais pas de façon univoque). En particulier, il peut arriver que la fonction f soit n fois continûment différentiable; alors, en intégrant par parties, la formule (1.1) peut s'écrire plus simplement:

$$(1.2) \quad \Theta \varphi = \int_a^b f^{(n)}(x) \varphi(x) dx,$$

puisque φ s'annule, ainsi que toutes ses dérivées, aux points a, b . Dans ce cas, l'application Θ est représentée, uniquement, par une fonction continue, $F = f^{(n)} = D^n f$.

Dans le cas opposé, la formule (1.2) n'est plus applicable, la dérivée $f^{(n)}$ de f n'existant pas comme fonction. Mais on peut convenir de désigner par $f^{(n)}$ la classe de tous les possibles couples $(f_1, n_1), (f_2, n_2), \dots$ (constitués par une fonction continue dans K à valeurs dans E et par un entier ≥ 0), qui déterminent,

d'après (1.1), la même application Θ ; (1) et cette classe de couples (f, n) , que l'on pourra nommer, par convention, la *dérivée généralisée d'ordre n de la fonction f* , sera dite une «distribution dans K à valeurs dans E ». Dans ces cas, donc, l'application Θ sera représentée par la distribution unique $F = f^{(n)}$. (Pour commodité, les fonctions continues $f = f^{(0)}$ seront dites aussi distributions). La formule (1.2) peut maintenant s'interpréter comme une simple abréviation de (1.1); mais on peut aussi la justifier par une généralisation naturelle du concept d'intégrale.

Soit maintenant E un espace localement convexe complet, quelconque; alors E se «compose» d'une infinité d'espaces de BANACH E_x (n.° 6) et l'expression générale des applications linéaires continues Θ de \mathcal{D}_K dans E devient un peu plus compliquée: pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_K$, la composante $(\Theta \varphi)_x$ du vecteur $\Theta \varphi$ de E , dans chacun des espaces E_x , sera donnée par une formule du type:

$$(\Theta \varphi)_x = \int_a^b T_x(x) \varphi(x) dx,$$

où T_x est une distribution dans K à valeurs dans E_x , dérivée $D^{n_x} f_x$ d'une fonction continue dans K à valeurs dans E_x (n_x et f_x dépendant de Θ et de x). Dans ce cas général, donc, l'application Θ sera représentée par le système $T = (T_x)$ de distributions, que nous appelons une «distribution au sens large dans K , à valeurs

(1) On démontre aisément que pour que deux tels couples (f, n) et (g, m) , avec $m \geq n$, déterminent d'après (1.1) la même application Θ , il faut et il suffit que g admette au sens usuelle dérivée $g^{(m-n)}$ continue, différant de f au plus par un polynôme de degré $> n$. Le parallèle avec les nombres rationnels, conçus comme classes de couples d'entiers, est toujours ici efficace, par l'analogie frappante des situations.

dans E ». Nous dirons alors que T est la «distribution indicatrice» de l'opérateur Θ , par analogie avec les «fonctions indicatrices» des fonctionnelles analytiques de L. FANTAPPIÈ.

Cette notion de «distribution au sens large» n'est pas nécessaire pour certaines catégories d'espaces E : espaces de BANACH, espaces (\mathcal{G}_2) etc.; mais elle s'impose dans le cas général. D'ailleurs nous abandonnons ensuite, pour commodité, le complément «au sens large», en disant simplement «distribution» en accord avec M. SCHWARTZ.

Voilà l'idée essentielle; tout le rest n'est que détails techniques, pas très compliqués. Il s'agissait donc de résoudre un problème typique d'analyse fonctionnelle. Sa résolution est évidemment une des façons les plus naturelles d'introduire les distributions, considérées cependant comme entités formelles, qu'il convient de distinguer des opérateurs linéaires qu'elles représentent, de même qu'il convient de distinguer les transformations linéaires dans des espaces de dimension finie ou hilbertiens, de leurs représentations matricielles. Cela devient même indispensable lorsqu'il y a des changements de base et, en particulier, dans le cas des distributions sur des variétés sans élément de volume spécifié (cf. [3]).

Ce type de problème de l'analyse fonctionnelle — détermination des applications linéaires continues d'un espace U dans un autre espace E — rentre dans une catégorie beaucoup plus générale, concernant une théorie de GALOIS métamathématique, dont j'ai abordé l'étude en 1945 (cf. [14]) (1).

(1) Je n'ai plus retrouvé l'opportunité de poursuivre cette étude, dont une partie seulement est contenue dans [14]. Mais il me semble important d'attirer l'attention des mathématiciens sur l'intérêt de ces méthodes métamathématiques.

Pour le cas considéré des espaces vectoriels topologiques, la méthode de recherche peut s'esquisser rapidement.

On cherche d'abord une *base vectoriel-topologique* de U , c'est-à-dire un système (u_λ) , fini ou infini, de vecteurs $u_\lambda, u_\lambda, \dots$ de U , en fonction desquels on puisse exprimer tout vecteur v de U , au moyen d'une «*formule de représentation*»

$$(1.3) \quad v = F[(u_\lambda)],$$

construite exclusivement à l'aide de notions vectoriels-topologiques définies dans U («*somme*», «*produit par scalaires*» et «*limite*»). On vérifie ensuite si cette formule est respectée, dans sa structure logique, par n'importe quelle application linéaire continue Φ de U dans E . Cela étant, si l'on pose $e_\lambda = \Phi u_\lambda$ (pour toute valeur de λ), la formule de représentation (1.3) donne aussitôt

$$(1.4) \quad \Phi v = F[(e_\lambda)], \text{ pour tout } v \in U.$$

Toute application $\Phi \in \mathcal{L}(U, E)$ sera donc, nécessairement, de cette forme⁽²⁾. Il reste à voir réciproquement, quelles conditions devra vérifier un système (e_λ) , donné d'avance dans E , pour que la formule (1.4) définisse une application $\Phi \in \mathcal{L}(U, E)$; ces conditions on les trouvent, évidemment, en cherchant les propriétés vectoriel-topologiques de la base (u_λ) de U qui sont respectées par toute application $\Phi \in \mathcal{L}(U, E)$ et que l'on devra, par suite, retrouver dans (e_λ) .

Dans le cas fini (espaces R^n ou C^n) la formule de représentation la plus simple est donnée par

$$(1.5) \quad x_i = \sum_{\alpha=1}^n \delta_{i\alpha} x_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

où $\delta_{i\alpha}$ est le symbole de KRONECKER ($\delta_{i\alpha} = 1$ si $i = \alpha$, $\delta_{i\alpha} = 0$ si $i \neq \alpha$). Ici le paramètre générique λ devient l'indice α , prenant les valeurs $1, 2, \dots, n$, auxquelles correspondent les *vecteurs de base*

$$(\delta_{i1}) = (1, 0, \dots, 0), (\delta_{i2}) = \\ = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (\delta_{in}) = (0, \dots, 0, 1).$$

Dans la formule (1.5), que l'on peut écrire $x = \sum_1^n x_\alpha e_\alpha$, en posant $x = (x_i)$ et $e_\alpha = (\delta_{i\alpha})$, pour $\alpha = 1, \dots, n$, il n'y a que la somme des n produits des vecteurs de base par les scalaires x_α (coordonnées de x). Mais, dans le cas des espaces de dimension infinie, on ne peut plus éviter l'opération de limite, souvent déguisée sous un signe d'intégrale remplaçant celui de somme finie.

On sait que, dans un passage hardi du fini à l'infini, dans sa systématisation de la mécanique ondulatoire, M. DIRAC a substitué au $\delta_{i\alpha}$ de KRONECKER sa fameuse «*fonction*» (qui n'est plus d'ailleurs une fonction) $\delta(x - \alpha)$, où x est la variable réelle et α un paramètre réel, jouant resp. les rôles de i et de α dans $\delta_{i\alpha}$; et il a introduit intuitivement la *formule de représentation*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - \alpha) f(\alpha) d\alpha,$$

pour toute «*fonction*» f définie dans R . Simplement, comme ces $\delta(x - \alpha)$ ne sont pas des fonctions de x , mais des distributions, ce que M. DIRAC a obtenu est en réalité une formule de représentation pour les distributions (cf. [16], §3) exactement analogue à la formule intégrale de CAUCHY pour les fonctions analytiques (cf. [8], [4], [5], [15], [18] et [19]).

Or, tandis que notre méthode générale de recherche s'ajuste parfaitement à ces espaces de distributions et à certains espaces de fonctions analytiques, on ne

⁽²⁾ Je désigne par $\mathcal{L}(U, E)$, avec BOURBAKI, l'espace vectoriel des applications linéaires continues de U dans E .

peut l'appliquer que par des détours inattendus, au cas d'espaces U de fonctions indéfiniment dérivables. La raison en est que, pour la représentation des éléments de U , il devient plus commode, dans ce cas, de pendre pour vecteurs de base, des éléments, étrangères à U , des espaces de BANACH U_n dont U se «compose». Et c'est là bien la vraie origine du concept de distribution.

Dans une deuxième partie de ce travail je m'occupe de la topologie et de la théorie de l'intégration, pour les distributions vectorielles considérées au point de vue direct. Cela conduit à définir l'espace vectoriel topologique $C_\infty(K, E)$, des distributions dans un intervalle compact K , à valeurs dans un espace de BANACH E , comme la limite inductive des espaces normés $C_n(K, E) = D^n C(K, E)$, et l'espace $\bar{C}_\infty(K, E)$, des distributions (au sens large) dans K à valeurs dans un espace localement convexe complet E , comme limite projective des espaces $C_\infty(K, E_x)$. Alors on pourra aussi justifier la désignation «distribution au sens large à valeurs dans E », chacune de ces distributions étant exprimable comme limite de dérivées formelles de fonctions continues à valeurs dans E . En particulier on démontre, d'une façon tout à fait simple et directe, que les espaces de distributions scalaires considérés sont nucléaires.

Enfin, ces résultats s'appliquent à l'étude des transformations de FOURIER et de LAPLACE, pour les distributions vectorielles. En particulier, on pourra définir l'espace des fonctions holomorphes au sens large, à valeurs dans E et à croissance lente à droite (cf. [18]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Topologie générale*, chapitres I-II. Act. Scient. Ind., n° 1141, Hermann, Paris (1951).
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*, chap. I-V, Act. Scient. Ind., n.°s 1189 (1953), 1229 (1955), Hermann, Paris.
- [3] J. GUERREIRO, *Distribuições sobre uma variedade*. À paraître.
- [4] A. GROTHENDIECK, *Sur certains espaces de fonctions holomorphes*. J. Reine Angew. Math., **192**, p. 35-64, 77-95 (1953).
- [5] A. GROTHENDIECK, *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équations aux dérivées partielles*. J. d'Analyse Math., **2**, p. 243-280, Jérusalem (1952-53).
- [6] A. GROTHENDIECK, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. Memoirs Amer. Math. Soc. (1955).
- [7] H. KÖNIG, *Neue Begründung der Theorie der «Distributionen» von L. SCHWARTZ*. Math. Nachrichten, **9**, p. 129-148 (1953).
- [8] G. KÖTHE, *Dualität in der Funktionentheorie*. J. Reine Angew. Math., **191**, p. 29-49 (1953).
- [9] J. MIKUSINSKI — R. SIKORSKI, *The elementary theory of distributions*. (I). Panstwowe Wydwnictwo Naukowe, Varsóvia (1957).
- [10] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. I (1950), II (1957), Hermann, Paris.
- [11] L. SCHWARTZ, *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*. J. d'Analyse Math., **4**, p. 88-148, Jérusalem (1954-55).
- [12] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, I. Ann. Inst. FOURIER, Grenoble, **7** (1957), p. 1-141.
- [13] R. SIKORSKI, *A definition of the notion of distribution*. Bull. Acad. Pol. Sc. Cl. III, **2**, p. 209-211 (1954).
- [14] J. S. E SILVA, *Sugli automorfismi di un sistema matematico qualunque*. Comm. Pontificia Academia Scientiarum, **9**, p. 327-357 (1945).
- [15] J. S. E SILVA, *As funções analíticas e a análise funcional*. Thèse, 1948. Portugaliae Math., **9**, p. 1-130 (1950).
- [16] J. S. E SILVA, *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions*. Rev. Fac. Cienc. Lisboa, 2.^a série A, **4**, p. 79-186 (1954-55).
Rectifications : Ibidem, **5**, p. 169-170 (1956).

- [17] J. S. E SILVA, *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*. Rend. Mat. Univ. Roma, série V, 14, p. 388-410 (1955).
- [18] J. S. E SILVA, *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite*. Portugaliae Math., 17, p. 1-17 (1958).
- [19] J. S. E SILVA, *Les fonctions analytiques comme*

ultra-distributions dans le calcul opérationnel. À paraître dans «Math. Annalen».

Observation. La méthode des couples (f, m) pour la définition des distributions a été adoptée, indépendamment de moi, dans le cas d'une seule variable, par M. R. SIKORSKI dans [13].

Sobre um problema de cinemática gráfica

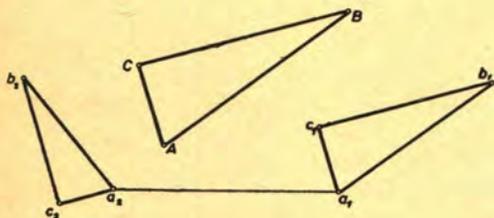
por M. Arela Chaves

1. Gráfico das acelerações.

Para representar gráficamente os vectores-acelerações do movimento de um sistema rígido plano S no seu plano, é cómodo utilizar um diagrama — o gráfico das acelerações, cuja construção se indica a seguir. Ela é baseada na expressão que relaciona a aceleração de dois pontos quaisquer de um sistema rígido num mesmo instante:

$$a) \quad \overline{a_B} = \overline{a_A} + \overline{\omega'} \wedge \overline{B-A} - \omega^2 \cdot \overline{B-A}.$$

Designemos por a_1 e a_2 respectivamente a origem e extremidade do vector, que, numa certa escala, representa a aceleração do ponto A e S .



Visto que $\overline{\omega'}$ é perpendicular ao plano de S , o vector $\overline{\omega'} \wedge \overline{B-A}$ pertence a esse plano e é, além disso, perpendicular a $\overline{B-A}$ ⁽¹⁾. O ângulo de $\overline{B-A}$ com esse

(1) Supõe-se o sentido positivo de medida dos ângulos escolhido de acordo com o sentido do versor de $\overline{\omega'}$.

vector será 90° ou 270° conforme ω' for positivo ou negativo. Sejam b_1 e b_2 pontos tais que $\overline{b_2-a_2}$ e $\overline{b_1-a_1}$ representem, na escala anteriormente escolhida, respectivamente os vectores $\overline{\omega'} \wedge \overline{B-A}$ e $\omega^2 \cdot \overline{B-A}$. Atendendo à expressão $a)$ reconhece-se imediatamente que $\overline{b_2-b_1}$ representa naquela escala a aceleração de B . Pelo mesmo processo, dado qualquer outro ponto C do sistema rígido S , se determinará o par (c_1, c_2) . Por este processo de construção se vê que a cada figura F de S correspondem duas figuras F_1 e F_2 semelhantes a F , se $\omega \neq 0$ e $\omega' \neq 0$. Vemos ainda que os segmentos correspondentes de F e F_1 são paralelos e os correspondentes de F e F_2 são perpendiculares. De uma maneira geral designaremos o par (x_1, x_2) correspondente a um ponto X e F por *imagem* de X no gráfico das acelerações.

É claro que o gráfico fica bem determinado, conhecidas as imagens de 2 pontos distintos, de F ⁽¹⁾. Supô-lo-emos sempre definido pelos dois pares (a_1, a_2) e (b_1, b_2) . Atendendo a propriedades de semelhança e proporcionalidade é ainda fácil ver que dados dois pontos quaisquer X, Y , e construídos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , $\overline{x_1-y_1}$ representa $\omega^2 \cdot \overline{X-Y}$ e $\overline{x_2-y_2}$ representa $\overline{\omega'} \wedge \overline{X-Y}$.

2. Imagem do centro de acelerações. Discussão geométrica.

Admitindo a construção anterior, pretendemos, como exercício, discutir *geomêtricamente* a existência e unicidade de um ponto $\Gamma \in S$ tal que:

1.º) $\overline{a_\Gamma} = 0$;

2.º) a distribuição das acelerações de S seja a mesma que a de uma rotação de centro Γ e velocidade e aceleração angulares respectivamente $\overline{\omega}$ e $\overline{\omega'}$.

1.º CASO. $a_1 \neq b_1$; $a_2 \neq b_2$ (isto é: $\omega \neq 0$; $\omega' \neq 0$).

Vejamus em primeiro lugar o seguinte problema:

Definido o gráfico pelas imagens de dois pontos A, B de F e dados dois pontos quaisquer c, d , em geral (c, d) não pertence ao gráfico, isto é, não é imagem de nenhum ponto de F .

Uma condição necessária e suficiente para que (c, d) pertença ao gráfico é que a figura $\{a_1 b_1 c\}$ — formando triângulo ou três pontos colineares — e a figura $\{a_2 b_2 d\}$ sejam semelhantes e, no caso de triângulo, também igualmente orientadas.

Convém-nos utilizar contudo outras condições:

b) $\overline{ca_1} \perp \overline{da_2}$ e $\overline{cb_1} \perp \overline{db_2}$ se $c \notin \overline{a_1 b_1}$;

c) $d \in \overline{a_2 b_2}$ e $\frac{|c - a_1|}{|d - a_2|} = \frac{|c - b_1|}{|d - b_2|} = \frac{|a_1 - b_1|}{|a_2 - b_2|}$

se $c \in \overline{a_1 b_1}$. (2)

Estas condições são perfeitamente equivalentes à condição anterior. Com efeito,

(1) Trata-se no fundo de uma aplicação:

$$\varphi(F) = F_1 \times F_2.$$

E é esta aplicação φ que fica definida se forem dadas as imagens por φ de dois pontos de F .

(2) Consideram-se os valores absolutos dos vectores, pelo que não basta uma igualdade.

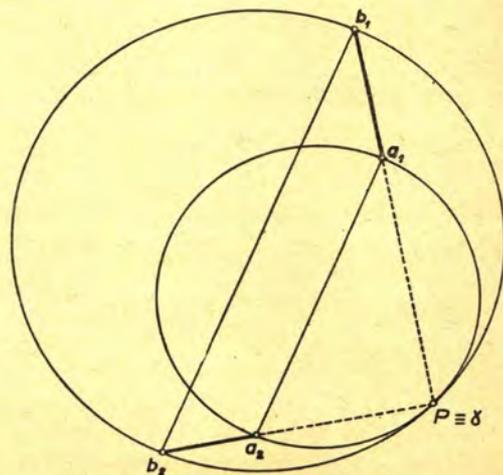
se $c \in \overline{a_1 b_1}$, a equivalência da condição anterior e de c) é evidente. Se $c \notin \overline{a_1 b_1}$, a semelhança $\{a_1 b_1 c\} \sim \{a_2 b_2 d\}$ implica em particular que $\sphericalangle(\overline{b_1 - a_1}, \overline{c - a_1}) = \sphericalangle(\overline{b_2 - a_2}, \overline{d - a_2})$; mas, por hipótese $\overline{a_1 b_1} \perp \overline{a_2 b_2}$ e então também $\overline{ca_1} \perp \overline{da_1}$. Do mesmo modo concluo que $\overline{cb_1} \perp \overline{db_2}$. Está, pois, provado que a condição de semelhança e igual orientação implica b). O recíproco prova-se sem dificuldade seguindo um caminho inverso.

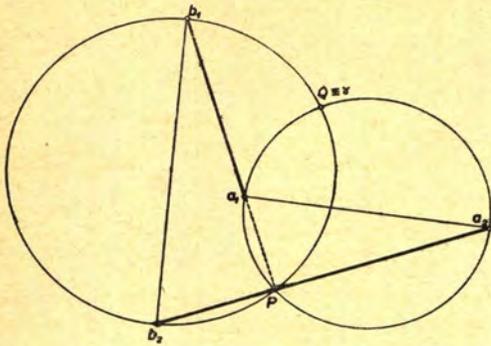
Vejamus então se existe um ponto γ , tal que o par (γ, γ) pertença ao gráfico. Se existir, então o original Γ terá aceleração nula pois ela será representada pelo vector $\overline{\gamma - \gamma} = \overline{0}$.

Construamos as circunferências de diâmetro $\overline{a_1 a_2}$ e $\overline{b_1 b_2}$. Elas têm um ponto P comum, que é a intersecção de $\overline{a_1 b_1}$ e $\overline{a_2 b_2}$, pois por hipótese $\overline{a_1 b_1} \perp \overline{a_2 b_2}$. Portanto, ou são tangentes em P ou intersectam-se num segundo ponto Q .

No primeiro caso, e só nesse, é $\overline{a_1 a_2} \parallel \overline{b_1 b_2}$ e verifica-se então c) para o par (P, P) (T. de Thales).

É $\gamma \equiv P$ o ponto procurado.





No segundo caso P não verifica c); mas o ponto Q e só esse, por construção verifica b).

Em qualquer dos casos, há no gráfico um único par da forma (γ, γ) e, portanto, em S um único ponto de aceleração nula.

Vejamos agora que o ponto Γ satisfaz à segunda condição de definição do centro de acelerações. Para qualquer ponto X , $\overline{\gamma - x_1}$ representa (vidé § 1.º) em direcção e sentido e, na escala adoptada, também em grandeza, a aceleração centrípeta de X numa rotação de velocidade angular ω em torno do original de (γ, γ) ; e $\overline{x_2 - \gamma}$ a aceleração tangencial de uma rotação em torno do original de (γ, γ) , de aceleração angular ω' . Portanto $\overline{x_2 - x_1} = \overline{x_2 - \gamma} + \overline{\gamma - x_1}$, representa efectivamente a aceleração de X numa rotação (ω, ω') em torno do original de (γ, γ) c. q. d.

2.º CASO. $a_1 \neq b_1; a_2 \equiv b_2$ (isto é: $\omega \neq 0; \omega' = 0$).

Neste caso, uma condição necessária e suficiente para (c, d) pertencer ao gráfico é $d \equiv a_2$. Então o ponto procurado é $\gamma \equiv a_2$, e Γ o original de (γ, γ) .

3.º CASO. $a_1 \equiv b_1; a_2 \neq b_2$ (isto é: $\omega = 0; \omega' \neq 0$).

De maneira análoga à hipótese anterior, condição necessária e suficiente para (c, d)

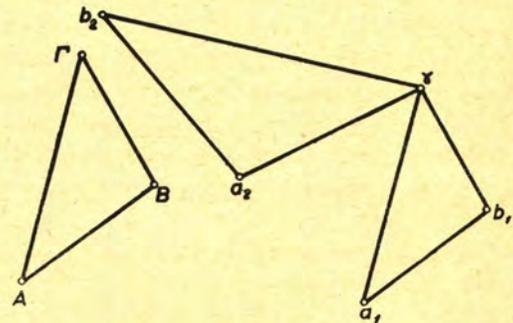
pertencer ao gráfico é $c \equiv a_1$. Então a imagem de Γ será (γ, γ) , com $\gamma \equiv a_1$.

Ainda nestes dois últimos casos existe e está univocamente determinado um centro de acelerações.

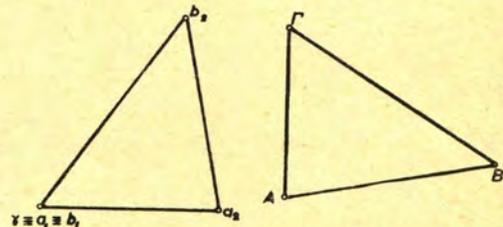
4.º CASO. $a_1 \equiv b_1; a_2 \equiv b_2$ (isto é $\omega = 0; \omega' = 0$).

Neste caso, para qualquer X e S se tem $x_1 \equiv a_1, x_2 \equiv a_2$, o que traduz a igualdade de aceleração de todos os pontos. Portanto, ou $a_1 \neq a_2$ e não há nenhum ponto de aceleração nula, ou $a_1 \equiv a_2$ e todos os pontos de S têm aceleração nula.

3. Determinação geométrica de Γ , conhecida a imagem (γ, γ) .



Nos dois primeiros casos Γ é a intersecção das paralelas por A e B respectivamente a $\overline{\gamma a_1}$ e $\overline{\gamma b_1}$.



No terceiro caso Γ é a intersecção das perpendiculares por A e B respectivamente a $\overline{\gamma a_1}$ e $\overline{\gamma b_1}$.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAME DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. G. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Outubro — 1958.

Teóricas

4417 — Em que intervalo é decrescente a função $f(x) = e^{\sin x}$?
Justifique a resposta.

4418 — Mostre que toda a função integrável no intervalo (a, b) é limitada.

4419 — Que valores podem ter os elementos de uma matriz hemi-hermítica?
Justifique a resposta.

4420 — Qual a equação de um plano definido por 3 pontos?
Justifique a resposta.

4421 — Mostrar que toda a série convergente goza da propriedade associativa.

Práticas

4422 — Primitiva a função $\frac{x+4}{x^2+1} + e^{\sin x} \cos x + \sqrt{x^2-1}$.

4423 — Calcule os máximos e mínimos da função $f(x) = \sin^2 4x + \sin 2x$.

4424 — Escreva os comprimentos dos eixos da cónica $x^2 + 4y^2 - 8 = 0$, a excentricidade e as equações das directrizes.

F. C. G. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Outubro — 1958.

Teóricas

4425 — Em que intervalo é crescente a função $f(x) = \sin 2x$, quando x varia de zero a 2π ?
Justifique a resposta.

4426 — O que entende por infinitamente pequeno?
Justifique que $\frac{h^n}{n!}$ é infinitamente pequeno com $\frac{1}{n}$ sendo $h > 0$.

4427 — O que entende por matriz hemi-simétrica? Em que casos é o seu determinante nulo?
Justifique a resposta.

4428 — Indique alguma propriedade do integral indefinido $\int_a^x f(t) dt$.
Justifique a resposta.

4429 — Designando por S_1, S_2, S_3 , as raízes da equação em S de uma quádrlica, quando teremos um elipsóide?
Justifique a resposta.

Práticas

4430 — Trace a curva $y = e^{\frac{1}{2+x}}$.

4431 — Calcule o integral $\int_0^1 \frac{x-2}{x^2-7x+12} dx$.

4432 — Escreva a equação do diâmetro conjugado com a recta $y = 2x + 1$ da cónica $x^2 - 4y^2 = 1$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º exame de frequência ordinário — 21-2-58.

4433 — Defina limites de WEIERSTRASS dum conjunto (u_n) .

Enuncie e deduza as condições que caracterizam estes limites.

Considere o conjunto $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}$ e indique os seus limites de WEIERSTRASS, bem como os pontos de acumulação, os pontos isolados e os pontos fronteiros, caso existam.

Quais as possíveis relações entre os limites de WEIERSTRASS e o mínimo e máximo dum conjunto.

R: $L = \frac{5}{4}, l = \frac{1}{2}$. O único ponto de acumulação é 1. Todos os pontos do conjunto são isolados no conjunto e fronteiros (1 também é ponto fronteiro).

4434 — 1) Deduza as fórmulas de GIRARD e aproveite-as para calcular a soma e o produto dos inversos das raízes dum polinómio.

2) Sendo os polinómios A e B primos entre si, mostre que a condição de primigeneidade $AU + BV = 1$ só pode ser verificada por um único par de polinómios U e V , inferiores em grau, respectivamente, a B e A .

Determine m por forma que o polinómio $x^3 + 3x + m$ tenha raízes iguais.

3) Mostre que o polinómio interpolador não depende da seriação dos pares de valores $\begin{cases} x_i \\ u_i \end{cases}$. Como justifica então a aparente diversidade de soluções que surgem da regra do zigue-zague?

Utilize a tabela de diferenças divididas

x	u	δ_u	δ_u^2
x_0	u_0		
x_1	u_1	δ_{01}	δ_{01}^2
x_2	u_2	δ_{12}	

para exemplificar a resposta.

Calcule um polinómio de grau não superior a 3 que represente aproximadamente a função $f(x) = -x^4 + 3x - 1$ no intervalo $(-2, 1)$.

R: 2) $m = +2i$

3) $-2x^3 + x^2 + 5x - 1$

4435 — 1) Indique a condição para que as colunas de uma matriz sejam linearmente dependentes e prove que se as colunas completas são dependentes também o são as colunas incompletas. É a inversa verdadeira?

Justifique a resposta.

2) Considere o sistema $AX = B$, de m equações a n incógnitas, em que A tem característica r e analise o caso $r = m < n$ por meio da teoria dos determinantes.

Determine α por forma que o sistema

$$\begin{aligned} x + y + z + t &= 2 \\ x + y + z - t &= 2 \\ x - y + z - t &= 2 \\ x - y + z - 3t &= \alpha \end{aligned}$$

seja indeterminado de grau 1. Apresente neste caso a sua solução.

R: 2) $\alpha = 2 \begin{cases} x = 2 - z \\ t = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 1.º exame de frequência extraordinário — 29-3-58.

4436 — Dado o conjunto infinito X , defina ponto de acumulação de X e prove que neste conjunto há pelo menos um ponto de acumulação.

Em que condições admite X mínimo? Justifique a resposta.

4437 — 1) Deduza a fórmula de MOIVRE e aproveite-a para exprimir $\cos n\theta$ num polinómio em $\cos \theta$ e, se n é ímpar, $\sin n\theta$ num polinómio em $\sin \theta$.

2) Diga em que consiste o problema da interpolação polinomial e mostre que este apenas comporta uma única solução.

Duma função interpoladora são conhecidas as seguintes diferenças finitas:

$$\begin{aligned} \Delta^0 f(-1) &= -4 & \Delta^0 f(0) &= -1 \\ \Delta^1 f(-1) &= 3 & \Delta^1 f(0) &= 3 \\ \Delta^2 f(-1) &= 0 & \Delta^2 f(0) &= 4 \\ \Delta^3 f(-1) &= 4 & \Delta^3 f(0) &= 4 \end{aligned}$$

Deduza a respectiva tabela de diferenças, calcule o valor de $f(3)$ e determine, por último, a interpoladora.

4438 — 1) Considere o sistema linear e homogéneo $MX = O$, de m equações a n incógnitas, de característica p . Mostre que a condição necessária e suficiente para que os vectores $X^1 X^2 \dots X^p$ formem um contra-resolvente é que eles permaneçam independentes depois de multiplicados por M .

2) Enuncie o teorema de LAPLACE e indique o seu préstimo na dedução da regra de CRAMER.

Discuta o sistema:

$$\begin{aligned} u + x + y &= 3 \\ x - y &= 3 \\ u + y + 3z &= 3 \\ u + y + 3z &= 0 \\ x - y + 2z &= 1 \\ u + x + y + z &= \alpha \end{aligned}$$

Soluções dos números 4436 a 4438 de Fernando de Jesus.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência ordinário — 30-6-58.

4439 — Resolva os seguintes problemas:

1) Decompor em quadrados $x, x_2 + x_2^2 + x_1 x_3$.

2) Dados os planos $\pi_1 \equiv x + z - 2\beta = 0$, $\pi_2 \equiv -x + \alpha y + z = 0$ e $\pi_3 \equiv \alpha x - \beta y - 4 = 0$, determinar as condições para que eles contenham: a) um único ponto comum; b) uma mesma recta.

3) Calcular $P \sec^3 x$.

R: 1)

	x_1	x_2	x_3
x_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0
x_3	$\frac{1}{2}$	0	0

 $\rightarrow f_1 = \frac{1}{2}x_1 + x_2$

	x_1	x_3
x_1	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$\frac{1}{2}$	0

 $\rightarrow f_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2}x_3$

	x_3
x_3	$-\frac{1}{4}$

 $\rightarrow f_3 = -\frac{1}{4}x_3$

Então será: $f = f_1^2 - 4f_2^2 + 16f_3^2 = \left(\frac{1}{2}x_1 + x_2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x_1 - x_3\right)^2 + x_3^2$

2) Como $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & 1 \\ \alpha & -\beta & 0 \end{vmatrix} = 2\beta - \alpha^2$, a condição

para que os três planos tenham um único ponto comum é que $\Delta \neq 0$ ou $2\beta \neq \alpha^2$; para que contenham uma mesma recta é necessário que $\Delta = 0$ ($\alpha^2 = 2\beta$) e que o característico

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2\beta \\ -1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 4 \end{vmatrix}$ seja nulo ($\alpha\beta = 4$). As duas condições $\begin{cases} \alpha^2 = 2\beta \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$ dão facilmente $\alpha = 2$ e $\beta = 2$.

3) $P \sec^3 x = P \sec x (1 + \operatorname{tg}^2 x) = P \sec x + P \sec x \operatorname{tg}^2 x = -\log \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \sec x \operatorname{tg} x - P \sec^3 x$

$$P \sec^3 x = \frac{1}{2} \log \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \sec x \operatorname{tg} x$$

4440 - 1) Enuncie e demonstre a condição necessária e suficiente de convergência de uma sucessão.

Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\log n}}$, enunciando as posições a que tem de recorrer.

2) A que condição deve obedecer a sucessão a_n para que a série $k a_0 - k a_1 + k a_2 - k a_3 + \dots$ seja convergente? Justifique.

Determine o intervalo de convergência da série

$$\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{x^n} + \dots$$

Defina série absolutamente convergente e indique algumas das propriedades mais notáveis destas séries.

R: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\log n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{\log n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{\log n}{n^2}} = e^0 = 1$

2) Sendo $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\alpha_n|}$ e $X = \left|\frac{1}{x}\right|$, a série será absolutamente convergente quando $X < \frac{1}{\lambda}$ ou $x > \lambda$ e $x < -\lambda$.

4441 - 1) Prove que $f(x)$, continua em (a, b) toma neste intervalo todos os valores desde o mínimo ao máximo. Estude a continuidade e derivabilidade de $f(x) = \begin{cases} e^x (x \geq 0) \\ e^{-x} (x < 0) \end{cases}$ e mostre que em $x=0$ a função tem um extremo.

2) Se no intervalo (a, b) a sucessão de FOURIER é de 5.ª ordem e apresenta as seguintes variações:

	a	b
f	+	+
f^I	-	-
f^{II}	+	+
f^{III}	-	0
f^{IV}	+	+
f^{V}	-	-

indique, justificando, o número de zeros de $f(x)$ e sucessivas derivadas até $f^{(IV)}$ no intervalo (a, b) .

3) Diga quando é que $f(x, y)$ é função diferenciável e demonstre alguma proposição que garanta a diferenciabilidade.

Utilize a fórmula da derivação da função composta para deduzir a expressão da derivada de $y = \varphi(x)$ definida implicitamente por $f(x, y) = 0$.

R: 1) A função $f(x) = \begin{cases} e^x (x \geq 0) \\ e^{-x} (x < 0) \end{cases}$ é contínua em todos os pontos de $(-\infty, +\infty)$ e admite derivada em todos os pontos, excepto em $x=0$. Como $f'(0) = 1$ e $f'_-(0) = -1$ a função apresenta um mínimo em $x=0$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — 2.º exame de frequência extraordinário — 7-7-1958.

4442 — Resolva os seguintes problemas :

1) Achar as raízes comuns a $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ e $x^3 - x^2 - 4x + 4$, utilizando a teoria da eliminação.

2) Dada a recta $r \equiv \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$ e o plano $\pi \equiv 2x - y - z = 0$ determinar o plano α que passa por r e é perpendicular a π .

3) Calcular $P \log(1 - x^2)$. Ache o desenvolvimento em série de $\log(1 - x^2)$, segundo as potências

de x , e aproveite-o para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x^2)}{x^2}$.

R: 1)

1	-1 -4 4 (0)
	1 1 -1 1 -2
$\lambda_1 = -1$	2 3 -3 -2
$\lambda_2 = -2$	5 5 -10
$\lambda_3 = -5$	10 10 -20
$\lambda_4 = -10$	20 20 -40

R - $\begin{vmatrix} 5 & 5 & -10 \\ 10 & 10 & -20 \\ 20 & 20 & -40 \end{vmatrix} = 0$ $R_1 = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} = 0$ $R_2 = 5$
 $R_3 = 5$ $R_4 = -10$.

A equação das raízes comuns é $R_2 x^2 + R_1 x + R_3 = 0$, ou seja $5x^2 + 5x - 10 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 1, x_2 = -2$.

2) O feixe de planos que passa por r é representado pela equação $(m + 1)x + (1 - m)y + (1 - m)z + 1 = 0$. O que é perpendicular a π satisfaz à condição: $2(1 + m) - (1 - m) - (1 - m) = 0$ ou $4m = 0$ que dá $m = 0$.

O plano pedido é assim $x + y + z + 1 = 0$ que é um dos que define r .

3) $P \log(1 - x^2) = P \log(1 - x) + P \log(1 + x) =$
 $= x \log(1 - x) + P \frac{x}{1 - x} + x \log(1 + x) - P \frac{x}{1 + x} =$
 $= x \log(1 - x) + P(-1) + P \frac{1}{1 - x} + x \log(1 + x) -$
 $- P1 + P \frac{1}{1 + x} = x \log(1 - x) - x - \log(1 - x) +$
 $+ x \log(1 + x) - x + \log(1 + x) = x \log(1 - x^2) - 2x +$
 $+ \log \frac{1 + x}{1 - x}$.

O desenvolvimento em série, válido para $|x| < 1$, é $\log(1 - x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \frac{x^8}{4} - \dots - \frac{x^{2n+2}}{n+1} - \dots$ e

portanto: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 - x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} - \dots}{x^2} = -1$.

4443 — 1) Enuncie as condições a que deve satisfazer (u_n) para que u_n tenha limite (finito ou infinito).

Quando se confundem os limites mínimo e máximo de uma sucessão, respectivamente, com os limites inferior e superior do conjunto dos seus termos?

Prove que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

2) Enuncie alguma proposição que garanta a convergência uniforme de $\sum |u_n|$ e aproveite-a para provar que $\sum x_n x^n$ e a sua associada são uniformemente convergentes em qualquer intervalo interior ao intervalo de convergência.

Determine a natureza de $\sum \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$, recorrendo a S_n .

R: 2) $\sum \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ equivale a $\sum [\log(n+1) - \log n]$ e esta série é redutível. Fácilmente se vê que $S_n = \log(n+1)$.

Portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$ e a série é divergente.

4444 — 1) Demonstre o teorema de Cauchy para as funções regulares $\varphi(x)$ e $\Psi(x)$ e deduza o método de primitiação formal de um produto.

2) Deduza o teorema dos acréscimos finitos para uma função de duas variáveis $f(x, y)$. Que se deve exigir a $f'_x(x, y)$ e $f'_y(x, y)$ em torno de $P(a, b)$ para que $f(x, y)$ seja contínua nesse ponto.

Fernando de Jesus

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Época de Julho — (1.ª chamada) — 1958.

4445 — Utilizando a teoria da eliminação, determinar os parâmetros α e β por forma que os polinómios

$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + \alpha$

e

$g(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - \beta$

admitam duas raízes comuns. Calculá-las.

$$R: \begin{array}{c|ccc} 1 & -2 & -1 & \alpha \\ \hline & 1 & -6 & 11 \\ \hline -1 & -4 & 12 & -\alpha-\beta \\ \hline 4 & 4 & -4-\alpha-\beta & 4\alpha \\ \hline -4 & 4-\alpha-\beta & 4+4\alpha & -4\alpha \end{array}$$

Para que existam duas raízes comuns é necessário que $R_1 = \begin{vmatrix} -4 & 12 \\ 4 & -4-\alpha-\beta \end{vmatrix} = 0$, o que dá $-\alpha-\beta = -8$.

Então terá de ser $R = \begin{vmatrix} -4 & 12 & -8 \\ 4 & -12 & 4\alpha \\ -4 & 4+4\alpha & -4\alpha \end{vmatrix} = 0$,

o que acontece com $\alpha = 2$.

Os valores dos parâmetros são então $\alpha = 2$ e $\beta = 6$. A equação das raízes comuns é $R_2 x^2 + R_1 x + R_0 = 0$, ou $-4x^2 + 12x - 8 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 2$ e $x_2 = 1$.

4446 - 1) Calcular $P \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^2}$.

4447 - 2) Estudar a função $y = \cos(x + a) + \frac{x}{2} (a > 0)$, no intervalo $(-\pi, \pi)$.

R: 1) Extraindo-se a parte inteira tem-se

$$\frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^2} = 1 - \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^4 + x^2}$$

A teoria da decomposição em elementos simples ensina que $\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^2(x^2 + 1)} = \frac{a_0}{x^2} + \frac{a_1 x}{x^2} + \frac{S_0}{x^2 + 1}$, com a_0 e a_1 constantes e S_0 um polinómio do 1.º grau $ax + b$. Obtem-se facilmente $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ e $S_0 = 2$.

Então

$$P \frac{x^4 - x^3 - x + 1}{x^4 + x^2} = P1 + P \frac{1}{x^2} - P \frac{1}{x} - 2P \frac{1}{x^2 + 1} = x - \frac{1}{x} - \log x - 2 \arctg x + C.$$

2) O domínio é $(-\pi, +\pi)$ e a função é contínua em todos os pontos. Intercepta o eixo dos yy em $(0, a)$ e o eixo dos xx num ponto entre $x = -\pi$ e $x = \frac{\pi}{6} - a$.

A função tem um máximo em $x = \frac{\pi}{6} - a$ e um mínimo em $\frac{5\pi}{6} - a$, é crescente nos intervalos $(-\pi, \frac{\pi}{6} - a)$

e $(\frac{5\pi}{6} - a, \pi)$ e decrescente em $(\frac{\pi}{6} - a, \frac{5\pi}{6} - a)$. A concavidade está voltada para cima em $(a - \pi, -\frac{\pi}{2} - a)$ e $(\frac{\pi}{2} - a, \pi - a)$ e para baixo em $(-\frac{\pi}{2} - a, \frac{\pi}{2} - a)$. Apresenta pontos de inflexão em $x = -\frac{\pi}{2} - a$ e $x = \frac{\pi}{2} - a$. Não tem assíntotas.

4448 - Dada a tabela $\frac{x}{y} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & t^3 & \alpha \end{vmatrix}$ utilize a teoria da interpolação para determinar a função $y = f(x, t)$.

Calcular α por forma que a equação $f(x, t) + x + 2 = 0$ defina, na vizinhança de $x = -2$ um função implícita $t(x)$, com um extremo neste ponto.

R: A fórmula de GREGORY-NEWTON dá facilmente:

$$y = (x + 1)t^3 + x(x + 1) \cdot \frac{\alpha - 2t^3}{2}$$

para que $f(x, t) + x + 2 = 0$ defina uma função $t(x)$, na vizinhança de $x = -2$ e com um extremo neste ponto, terá de ser:

$$\begin{cases} f(-2, t) = 0 \\ f'_1(-2, t) + 1 = 0 \end{cases} \text{ sistema que dá } \alpha = 6 \text{ e } t = \sqrt[3]{2}.$$

Verifica-se também que $f'_1(-2, \sqrt[3]{2}) \neq 0$.

I. S. G. E. F. - MATEMÁTICAS GERAIS - Exame final - Época de Julho - (2.ª chamada) - 19/7/58.

4449 - Utilize a teoria dos determinantes para estudar o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 2 \\ x - y + 2z = 0 \\ x + 3y - 4z = 4 \\ x - 3y + 5z = m \end{cases}$$

Faça a interpretação geométrica dos resultados para os diferentes valores de m .

R: Da matriz dos coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

o determinante de maior ordem significativo que se pode extrair (determinante principal) é de 2.ª ordem, por

exemplo, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Podem construir-se dois determinantes característicos:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} \quad e \quad \Delta'' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & m \end{vmatrix}.$$

O primeiro é nulo e o segundo só é nulo com $m = -2$. Então o sistema é simplesmente indeterminado se $m = -2$ e impossível se $m \neq -2$.

A interpretação geométrica é óbvia: as duas primeiras equações definem uma recta pela qual passa também o plano $x + 3y - 4z = 4$; se $m = -2$, o plano $x - 3y + 5z = -2$ passa pela recta e, se $m \neq -2$, será paralelo à recta.

4450 — Resolva os seguintes problemas:

1) Determinar α , β e γ por forma que a função $y = \frac{x^2 + \alpha^2}{\beta x + \gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma \neq 0$) tenha um extremo em $x = 1$, apresente a concavidade voltada para baixo em $(-\infty, -1)$ e para cima em $(-1, +\infty)$ e tenha uma assíntota de coeficiente angular igual à unidade.

Caracterizar o extremo e determinar a ordenada na origem da assíntota.

2) Calcular $Ptg^4 x$.

R: 1) $y' = \frac{\beta x^2 + 2\gamma x - \alpha^2 \beta}{(\beta x + \gamma)^2}$. Para que a função tenha um extremo em $x = 1$ terá de ser (1) $\beta + 2\gamma - \alpha^2 \beta = 0$. Como $y'' = 2 \cdot \frac{\gamma^2 + \alpha^2 \beta^2}{(\beta x + \gamma)^3}$ o estabelecido quanto à concavidade exige (2) $\gamma = \beta$. O coeficiente angular da assíntota calcula-se do seguinte modo:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + \alpha^2}{\beta x^2 + \gamma x} = \frac{1}{\beta}.$$

Como $m = 1$, vem (3) $\beta = 1$. As condições (1), (2) e (3) dão $\alpha = \pm\sqrt{3}$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. A ordenada na origem da assíntota é $p = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - x}{x + 1} = -1$. Como $y''(1) > 0$ o ponto $x = 1$ é abscissa do mínimo.

$$2) Ptg^4 x = Ptg^2 x \cdot tg^2 x = P(\sec^2 x - 1)tg^2 x = Ptg^2 x \sec^2 x - P(\sec^2 x - 1) = \frac{tg^3 x}{3} - tg x + x + c.$$

4451 — Resolva os seguintes problemas:

1) Dada a função $z = \text{sen}(x+y)$, calcular $\frac{\partial^k z}{\partial x^k}$ e $\frac{\partial^k z}{\partial x^i \partial y^{k-i}}$.

Supondo $x = t + a$ e $y = t - b$, aplicar a regra de derivação da função composto para calcular $\frac{d^n z}{dt^n}$.

2) Sendo $f(x, y) = x^2 y^3 + c x^3 + x y^2 + d x + y - 1$, determinar c e d por forma que na vizinhança de $x = 1$ a equação $f(x, y) = 0$ defina uma função implícita $y(x)$ que tem um zero duplo nesse ponto. Em $x = 1$ a função $y(x)$ tem um extremo? Justifique.

R: 1) $\frac{\partial^k z}{\partial x^k} = \text{sen}\left(x + y + k \frac{\pi}{2}\right)$
 $\frac{\partial^k z}{\partial x^i \partial y^{k-i}} = \text{sen}\left(x + y + k \frac{\pi}{2}\right)$
 $\frac{d^n z}{dt^n} = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\right)^{(n)} = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} + \binom{n}{1} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} + \binom{n}{2} \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} + \dots + \frac{\partial^n f}{\partial y^n} = 2^n \text{sen}\left(x + y + n \frac{\pi}{2}\right)$
 2) Para $x = 1$ vem $y = 0$ e então terá de ser:

$$\begin{cases} f(1, 0) = 0 \\ f'_x(1, 0) = 0 \\ f'_y(1, 0) \neq 0. \end{cases}$$

As duas primeiras equações dão $\begin{cases} c + d = 1 \\ 3c + d = 0, \end{cases}$ sistema cuja solução é $c = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{2}$. Como $f'_y(x, y) = 3x^2 y^2 + 2xy + 1$, vem $f'_y(1, 0) \neq 0$. Em $x = 1$ a função $y(x)$ tem um mínimo porque $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_1 = -\frac{f''_{xx}(1, 0)}{f'_{yy}(1, 0)} = 3 > 0$.

Resoluções de Fernando de Jesus.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — Exame final — Prova prática — Época de Outubro — 15-10-1958.

4452 — a) Calcule as raízes de $\varphi(x) = 2x^4 - 13x^3 + 12x^2 + 17x - 10$ e determine a expressão lagrangeana do polinómio que para esses valores de x (por ordem crescente) se reduz a 1, 2, 6 e 3, respectivamente.

4453 — b) Prove a independência das formas $a_i^2 x_i$ que têm por matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e resolva o sistema $a_i^2 x_i = b_i$.

R: a) As possíveis raízes racionais $\frac{p}{q}$ são as seguintes:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$$

Como, $\begin{cases} \varphi(1) = 8 \\ \varphi(-1) = 0 \end{cases}$ verifica-se imediatamente que

-1 é raiz. Efectuando a divisão de $\varphi(x)$ por $(x+1)$, obtém-se o cociente $\varphi_1(x) = 2x^3 - 15x^2 + 27x - 10$, sobre o qual vai incidir a pesquisa das raízes. Como

$\begin{cases} \varphi_1(1) = 4 = \frac{p}{q} \\ \varphi_1(-1) = -54 = \frac{p}{q} \end{cases}$ permanecem possíveis raízes os seguintes valores:

$$2, 5, \frac{1}{2}$$

Pela regra de RUFFINI, aplicada a $\varphi_1(x)$, conclui-se facilmente que as raízes são efectivamente $2, 5$ e $\frac{1}{2}$.

A segunda parte do problema corresponde a determinar o polinómio interpolador (forma lagrangeana),

dada a tabela $\begin{array}{c|ccc} x & -1 & \frac{1}{2} & 2 & 5 \\ \hline u & 1 & 2 & 6 & 3 \end{array}$. Esse polinómio é

$$f(x) = \sum_{i=0}^3 \frac{\varphi_i(x)}{\varphi_i(x_i)} u_i \text{ em que:}$$

$$\varphi_0(x) = \frac{\varphi(x)}{x+1} = 2x^3 - 15x^2 + 27x - 10, \quad \varphi_0(-1) = -54$$

$$\varphi_1(x) = \frac{\varphi(x)}{x - \frac{1}{2}} = 2x^3 - 12x^2 + 6x + 20, \quad \varphi_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{4}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\varphi(x)}{x-2} = 2x^3 - 9x^2 - 6x + 5, \quad \varphi_2(2) = -27$$

$$\varphi_3(x) = \frac{\varphi(x)}{x-5} = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2, \quad \varphi_3(5) = 162$$

Então,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^3 - 15x^2 + 27x - 10}{-54} \cdot 1 + \\ &+ \frac{2x^3 - 12x^2 + 6x + 20}{\frac{81}{4}} \cdot 2 + \frac{2x^3 - 9x^2 - 6x + 5}{-27} \cdot 6 + \\ &+ \frac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 2}{162} \cdot 3 = -\frac{20}{81}x^3 + \frac{28}{27}x^2 + \\ &+ \frac{37}{27}x + \frac{88}{81}. \end{aligned}$$

$$b) \text{ Como o determinante } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

de A é 4 e as formas são linearmente independentes. O sistema é indeterminado de grau 1 e a solução é a seguinte:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 - x_5 & 1 & 1 & 1 \\ b_2 - x_5 & -1 & -1 & -1 \\ b_3 - x_5 & 1 & -1 & 1 \\ b_4 - x_5 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2) - x_5$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & b_1 - x_5 & 1 & 1 \\ 1 & b_2 - x_5 & -1 & -1 \\ 1 & b_3 - x_5 & -1 & 1 \\ 1 & b_4 - x_5 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-8}$$

etc.

4454 - a) Calcule $Px \cdot \arctg x$.

4455 - b) Desenvolva $\frac{1}{(1-x)^3}$ em série de MAC-LAURIN.

$$\begin{aligned} \text{R: a) } Px \cdot \arctg x &= \frac{x_2}{2} \cdot \arctg x - P \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \\ &= \frac{x^2}{2} \arctg x - \frac{1}{2} P 1 + \frac{1}{2} P \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2} \arctg x - \\ &- \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctg x + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots = \\ &= \sum_0^{\infty} x^n, \quad |x| < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + n x^{n-1} + \dots = \\ &= \sum_0^{\infty} (n+1) x^n, \quad |x| < 1 \\ \frac{1}{(1-x)^3} &= \frac{1}{2} (2 + 6x + 12x^2 + \dots + \\ &+ n(n-1)x^{n-2} + \dots) = \\ &= \sum_0^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} x^n, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

4456 - a) Em que condições define

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

uma rotação de eixos rectangulares?

4457 - b) Supondo tais condições satisfeitas, mostre que se tem sempre

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} \quad (z = f(x, y))$$

R: a) Com $a_1' = \cos \alpha$, $a_2' = \sin \alpha$, $a_1'' = \sin \alpha$ e $a_2'' = -\cos \alpha$.

b) $x = x' \cos \alpha + y' \sin \alpha$

$y = x' \sin \alpha - y' \cos \alpha$ e portanto:

$$\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \alpha$$

$$\frac{\partial z}{\partial y'} = \frac{\partial z}{\partial x} \sin \alpha - \frac{\partial z}{\partial y} \cos \alpha$$

As derivadas de 2.^a ordem calculam-se rapidamente, uma vez que as relações de transformação são lineares. Assim:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x'^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cos^2 \alpha + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \sin^2 \alpha$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y'^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \sin^2 \alpha - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \cos^2 \alpha$$

e, somando membro a membro, obtém-se a igualdade proposta.

Fernando de Jesus

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. - CÁLCULO INFINITESIMAL - 2.º Exame de Frequência.

4458 - a) Enuncie o teorema relativo à existência e derivabilidade de um sistema de funções implícitas e deduza as expressões das suas derivadas de 1.^a ordem em relação às variáveis de que dependem.

4459 - b) Enuncie as propriedades que respeitam à função $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ onde a se considera constante. Indique qual a derivada em ordem a t da função $y(t) = \int_t^\beta f(x) dx$ onde β se considera constante e defina integral indefinido.

4460 - c) Defina curvatura e torsão de uma curva torsa num dos seus pontos e escreva na forma vectorial e na forma cartesiana as fórmulas de FRENET-SERRET, indicando o significado das grandezas que nelas figuram.

II

4461 - a) Classifique a quádrlica de equação

$$2x^2 - 2z^2 + 2xy - 2yz - x - z = 0.$$

Em seguida determine uma equação canónica da superfície

$$xy^2 - 2z^2 + x = 0$$

4462 - b) Determine os pontos de coordenadas extremas da curva de equações

$$x^3 + y^3 - 3a^2xy = 0 \quad (a \neq 0, c^e).$$

4463 - c) Dada a expressão diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2(1-y) \frac{dy}{dx}.$$

Mude as variáveis x e y nas variáveis u e v (u ind., v dep.), sabendo que as equações de ligação são

$$x = \log u, \quad y = \frac{v}{u^2}.$$

F. C. L. - CÁLCULO INFINITESIMAL - Exame final - 1.ª época - Julho 1958.

4464 - a) Defina envolvente duma família de superfícies, características e aresta de reversão, enuncie as propriedades da envolvente e aplique os conceitos definidos à determinação da equação geral das superfícies cilíndricas.

4465 - b) Escreva a equação vectorial das superfícies regradas, indique o significado das grandezas que nela figuram, escreva a equação do plano tangente num ponto de tal superfície e deduza a partir dela uma condição para que a superfície seja planificável.

4466 - c) Defina equação diferencial de ordem n ; considere o caso particular da equação diferencial linear e homogénea e enuncie as suas propriedades.

II

4467 - a) Ache uma equação cartesiana da envolvente da família de superfícies de equação

$$x - y + 3\lambda z + \lambda(\lambda^2 + 1/3) = 0.$$

aonde λ é o parâmetro da família.

4468 - b) Calcule o volume da região do espaço limitado pela superfície

$$z = 0, \quad x^2 - 4x + y^2 = 0, \quad x^2 + y^2 - 4y = 0, \quad z = xy.$$

4469 - c) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y'' + 2y' + y = x.$$

F. G. C. - CÁLCULO INFINITESIMAL - (2.ª chamada) - Fevereiro de 1958.

4470 - Calcule o comprimento do arco da cicloide $x = \theta - \sin \theta$, $y = 1 - \cos \theta$ compreendido entre $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$.

$$R: s = 2 \int_0^{2\pi} \sin \frac{1}{2} \theta d\theta = -4 \left[\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} = 8$$

4471 - Determinar a série de MAC-LAURIN para $\arcsen x$ utilizando $\arcsen x = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$R: (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{z^2}{2} + \frac{3z^4}{8} + \dots$$

$$\begin{aligned} \arcsen x &= \int_0^x \left(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{3z^4}{8} + \dots \right) dz = \\ &= \left[z + \frac{1}{2 \cdot 3} z^3 + \frac{3}{8 \cdot 5} z^5 + \dots \right]_0^x = \\ &= x + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 x^5}{2 \cdot 4 x^5} + \dots \end{aligned}$$

4472 - Desenvolva em série de FOURIER $f(x) = |x|$ para $x \in [-\pi, \pi]$.

$$R: |x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

4473 - Determinar os máximos e mínimos da função

$$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$$

R: $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ são satisfeitas para $x=y=0$ e $x=y=-1$. No ponto $(0,0)$ não existe nem máximo nem mínimo. No ponto $(-1, -1)$ existe um máximo cujo valor é $f(-1, -1) = 1$.

4474 - Calcular o comprimento do arco da curva

$$x = t^3, \quad y = t^2 \text{ de } t=0 \text{ a } t=4$$

$$\begin{aligned} R: s &= \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4} t^2} 2t dt = \\ &= \frac{8}{27} \left[\left(1 + \frac{9}{4} t^2 \right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{8}{27} (37 \sqrt{37} - 7) \end{aligned}$$

4475 - Desenvolva em série de MAC-LAURIN $e^x \sen x$ e derive para obter a série de $e^x \cos x$.

$$\begin{aligned} R: e^x \sen x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) \\ &\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \dots \\ \frac{d}{dx} (e^x \sen x) &= e^x \sen x + e^x \cos x = 1 + 2x + x^2 - \\ &- \frac{x^4}{6} - \dots. \text{Então } e^x \cos x = \left(1 + 2x + x^2 - \frac{x^4}{6} - \dots \right) - \\ &- \left(x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \dots \right) = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \dots \end{aligned}$$

4476 - Desenvolva em série de FOURIER $f(x) = x^2$ no intervalo $0 < x < 2\pi$.

$$R: x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{n^2} - \frac{\pi \sen nx}{n} \right)$$

4477 - Determinar o gradiente no ponto $P(0,3)$ da função $z = ye^x$.

R: No ponto $(0,3)$ na direcção θ , $\frac{dz}{ds} = 3 \cos \theta + \sen \theta$. Para determinar θ para o qual $\frac{dz}{ds}$ seja máximo resolve-se $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{dz}{ds} \right) = -3 \sen \theta + \cos \theta = 0$ o que dá $\text{tg } \theta = \frac{1}{3}$ e θ ou é do primeiro ou do terceiro quadrante. E como $\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{dz}{ds} \right) = -3 \cos \theta - \sen \theta$ é negativo no primeiro quadrante, o gradiente é $\frac{dz}{ds} = \sqrt{10}$ ($\theta = 18^\circ 26'$).

ANÁLISE MATEMÁTICA

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — 2.º Exame de frequência — 28-6-57.

4478 — Deduza a fórmula de TAYLOR para uma função escalar de ponto dum espaço R_n .

Diga como a utiliza para caracterizar um extremo relativo da função escalar num ponto interior do seu domínio; enuncie condições necessárias e suficientes de extremo, em termos diferenciais.

Diga em que consiste o método dos multiplicadores de LAGRANGE e demonstre o teorema em que ele se fundamenta.

4479 — Defina integral curvilíneo e enuncie as principais propriedades.

Indique as fórmulas de redução dos integrais curvilíneos dx , dy e ds , da função $f(x, y)$ ao longo do arco AB duma curva Γ , tanto no caso desta estar representada por uma equação do tipo $y = g(x)$, como, parametricamente, representada por $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Deduza uma das fórmulas de RIEMANN.

Calcule, reduzindo-o a integrais cursilíneos, o integral duplo

$$\iint_{\Delta} x^2 dx dy$$

onde o domínio Δ é limitado por $y = x^2$ e $y = 2 + \frac{x^2}{2}$.

4480 — O que é a série de FOURIER duma função $F(x)$?

Deduza a fórmula de LIOUVILLE e mostre a sua utilidade.

Enunciado geral do problema do Cálculo das Variações.

I. S. C. E. F. — ANÁLISE MATEMÁTICA — Exame final — 2.ª chamada — 20-7-57.

4481 — Reduza a primitivação de

a)
$$\frac{1}{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}}$$

b)
$$\frac{1}{x+1 + \sqrt{-2x-x^2}}$$

c)
$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \sqrt{\cos x}}$$

à primitivação de fracções racionais. Complete o cálculo para uma delas.

R: Para a primeira fracção, definida em $(-1, +\infty)$, faça-se $1+x=t^6$. A função $x=t^6-1$ que se vai supor definida apenas em $(0, +\infty)$, é crescente e tem derivada

$\frac{dx}{dt} = 6t^5$; sendo monótona em $(0, +\infty)$ admite

uma inversa unívoca $t = +\sqrt[6]{1+x}$. Vem:

$$\frac{6t^5}{t^3-t^2} = \frac{6t^3}{t-1} = 6t^2 + 6t + 6 + \frac{6}{t-1}.$$

Em qualquer intervalo fechado, contido no intervalo aberto $(-1, +\infty)$ tem se

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x} - \sqrt[3]{1+x}} = 2\sqrt{1+x} + 3\sqrt[3]{1+x} + 6\sqrt[6]{1+x} + 6 \log(\sqrt[6]{1+x}-1) + C.$$

Na segunda fracção faça-se $x+1=t$ e obtém-se $\frac{1}{t + \sqrt{1-t^2}}$ definida para $|t| < 1$. Faça-se a substituição $\sqrt{1-t^2} = (1-t)u$ ou melhor $t = \frac{u^2-1}{u^2+1}$; supondo

esta função definida em $(0, +\infty)$ ela é crescente com derivada $\frac{dt}{du} = \frac{4u}{(u^2+1)^2}$; esta função transforma o intervalo $(0, +\infty)$ no intervalo $(-1, 1)$ e admite uma

inversa unívoca $u = +\frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t}$. Vem:

$$\frac{4u}{(u^2+2u-1)(1+u^2)} = \frac{4u}{(u-a)(u-b)(1+u^2)} = \frac{A}{u-a} + \frac{B}{u-b} + \frac{M+N u}{1+u^2}$$

com $a = -1-\sqrt{2}$, $b = -1+\sqrt{2}$, $A = \frac{4a}{(a-b)(1+a^2)}$,

$$B = \frac{4b}{(b-a)(1+b^2)}, M = \frac{A}{a} + \frac{B}{b}, N = -(A+B).$$

Finalmente a terceira fracção está definida só para valores de x que não anulem $\operatorname{sen} x$ nem tornem nulo ou negativo $\cos x$: por exemplo, o intervalo aberto $(0, \frac{\pi}{2})$ e uma infinidade numerável doutros intervalos.

Pondo $\cos x = t^2$, isto é, $x = \arccos t^2$, função definida para t no intervalo $(0, 1)$, é uma função decres-

cente que transforma o intervalo $(0, 1)$ no intervalo $(\frac{\pi}{2}, 0)$; a derivada é $\frac{dx}{dt} = \frac{-2t}{\sqrt{1-t^4}}$. Vem:

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \sqrt{\cos x}} = -2 \int \frac{dt}{1-t^4} =$$

$$-2 \int \frac{dt}{(t+1)(t-1)(t^2+1)} = 2 \int \frac{1/2 \cdot dt}{(t+1)(t-1)} =$$

$$-2 \int \frac{1/2 \cdot dt}{t^2+1} = -1/2 \int \frac{dt}{t-1} - 1/2 \int \frac{dt}{t+1} - \int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x \sqrt{\cos x}} = \log c \sqrt{\frac{\sqrt{\cos x} - 1}{\sqrt{\cos x} + 1}} - \operatorname{arctg} \sqrt{\cos x}$$

4482 - Calcule o volume do sólido limitado por $z = x^2 + y^2$, $z^2 = x^2 + y^2$

a) Utilizando coordenadas esféricas; b) por qualquer outro processo.

R: A equação $z = x^2 + y^2$ representa um parabolóide de revolução em torno de Oz com vértice na origem; $z^2 = x^2 + y^2$ representa uma superfície cônica de revolução em torno de Oz com vértice na origem. É a folha superior do cone que intersecta o parabolóide, segundo uma circunferência situada no plano $z=1=0$ de centro no eixo Oz.

As coordenadas esféricas são

$$x = \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \quad y = \rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \quad z = \rho \cos \theta$$

e tem-se

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi \operatorname{sen} \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta & \rho \operatorname{sen} \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \operatorname{sen} \theta \\ \cos \theta & -\rho \operatorname{sen} \theta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \operatorname{sen} \theta$$

Para o volume vem

$$V = \int \int \int dx dy dz = \int \int \int \rho^2 \operatorname{sen} \theta d\rho d\theta d\varphi =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta d\theta \int_0^{\frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}^3 \theta}} \rho^2 d\rho$$

visto que se tem:

$$z = x^2 + y^2 \text{ ou } \rho \cos \theta = \rho^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\text{ou } \cos \theta = \rho \operatorname{sen}^2 \theta$$

segue-se o cálculo:

$$V = 4 \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} \theta d\theta \cdot \frac{1}{3} \frac{\cos^3 \theta}{\operatorname{sen}^6 \theta} =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cotg^3 \theta \cdot \operatorname{cosec}^2 \theta \cdot d\theta =$$

$$= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[-\frac{1}{4} \cotg^4 \theta \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = + \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{6}$$

Para calcular por outro caminho, é de escolher, evidentemente, aquele que resulta do facto de os planos $z=k$ com $0 \leq k \leq 1$, cortarem o sólido segundo coroa circulares de área $A(z) = \pi(z - z^2)$.

Então

$$V = \int_0^1 \pi(z - z^2) dz = \pi \left[\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{\pi}{6}$$

Podem ainda calcular-se como a diferença de volumes de dois cilindroides de base $x^2 + y^2 = 1$ e determinados pelo cone e parabolóide. Vem

$$V = \int \int_c (\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (\sqrt{x^2 + y^2} - x^2 - y^2) dx dy =$$

$$= \int \int_c (\rho - \rho^2) \rho d\rho dz = \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) d\rho =$$

$$= \int_0^1 dz \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{6}$$

4483 - Procurar na curva $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$, o ponto mais próximo e também o mais afastado da recta $3x - 4y = 12$.

R: Valores extremos da distância de (x, y) à recta, com a condição de (x, y) pertencer à curva.

A função a extremar pode ser antes $(3x - 4y - 12)^2$ com a condição $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$.

Com o método dos multiplicadores de LAGRANGE

$g(x, y) = (3x - 4y - 12)^2 + \lambda(x^2 - xy + y^2 - 1)$
e determinam-se os multiplicadores com o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x} = 6(3x - 4y - 12) + 2\lambda x - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y} = -8(3x - 4y - 12) - \lambda x + 2\lambda y = 0 \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

A primeira equação dá $\lambda = \frac{6(3x - 4y - 12)}{y - 2x}$ que

se elimina nas outras; vem o sistema

$$\begin{cases} \frac{3}{2x-y} = \frac{4}{2y-x} & \text{ou} & \begin{cases} y = -\frac{5}{2}x \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \\ x^2 - xy + y^2 - 1 = 0 & & \begin{cases} x_1 = -\frac{2}{\sqrt{39}} \\ y_1 = \frac{5}{\sqrt{39}} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2}{\sqrt{39}} \\ y_2 = -\frac{5}{\sqrt{39}} \end{cases}$$

Estudam-se agora os extremos livres das funções

$$g_1(x, y) = (3x - 4y - 12)^2 + \frac{1}{3\sqrt{39}}(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

no ponto $(-\frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{5}{\sqrt{39}})$

$$g_2(x, y) = (3x - 4y - 12)^2 - \frac{1}{3\sqrt{39}}(x^2 - xy + y^2 - 1)$$

no ponto $(\frac{2}{\sqrt{39}}, -\frac{5}{\sqrt{39}})$

Tem-se

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 18 + 2\lambda = 9 \left(2 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}} \right);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -24 - \lambda = - \left(2 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}} \right);$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 32 + 2\lambda = 2 \left(16 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}} \right).$$

sendo os sinais superiores para a função $g_1(x, y)$ e os inferiores para $g_2(x, y)$. Como se tem

$$\left(24 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}} \right)^2 - 18 \left(2 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}} \right) \left(16 \pm \frac{1}{3\sqrt{39}} \right) -$$

$$\begin{cases} -\frac{17}{117} - \frac{276}{3\sqrt{39}} < 0 \\ -\frac{17}{117} + \frac{372}{3\sqrt{39}} > 0 \end{cases}$$

A função $(3x - 4y - 12)^2$ tem extremos da mesma qualidade e nos mesmos pontos onde os têm as funções $g_1(x, y)$ e $g_2(x, y)$; vem então

máximo em $(-\frac{2}{\sqrt{39}}, \frac{5}{\sqrt{39}})$

mínimo em $(\frac{2}{\sqrt{39}}, -\frac{5}{\sqrt{39}})$.

Fernando de Jesus

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

Exame de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, em Ciências Físico-Químicas e em Ciências Geográficas, preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo — Ano de 1958 — (1.ª chamada). F. C. L.

4484 — Determinar todos os números naturais que divididos por 17 dão resto igual ao quadrado do cociente respectivo.

R. Os números serão da forma $17x + x^2$ sendo x um inteiro maior que zero e tal que $x^2 < 17$. Concluz-se então que x só pode ser os valores 1, 2, 3 e 4 e os correspondentes números são 18, 38, 60 e 84.

4485 — Determinar os valores de m para os quais a equação $x^2 - 3x + 6 = m(x - 6 - m)$ tem as raízes reais e desiguais.

R. A equação proposta é equivalente a $x^2 - (3 + m)x + 6 + 6m + m^2 = 0$. Para que as raízes sejam reais e desiguais é necessário que o discriminante seja positivo. Será então $(m + 3)^2 - 4(m^2 + 6m + 6) > a$ desigualdade equivalente a $m^2 + 6m + 5 < 0$; esta como se reconhece facilmente tem como soluções os valo-

res de m tais que $-5 < m < -1$, visto -5 e -1 serem os zeros do trinômio primeiro membro da desigualdade.

4486 — Derivar a função $y = x / (\sqrt{1 - x^2})$ e simplificar o resultado.

R. Será $y' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right)$.

$$= (1 - x^2)^{-\frac{1}{2} - 1} \cdot (-3x^2) = (2 + x^2) : 2\sqrt{(1 - x^2)^3}.$$

4487 — Sem usar tábuas, resolver o triângulo retângulo em que a hipotenusa mede 14 metros e um dos catetos 7 metros. (usar $\sqrt{3} = 1,732$).

R. Como a hipotenusa é o dobro de um dos catetos, então o ângulo oposto a esse cateto mede $\frac{\pi}{6}$ radianos

e o outro ângulo agudo $\frac{\pi}{3}$. Seja $b = 7$ e $a = 14$; como sabemos é $\text{sen } \hat{C} = c/a$ e como $\hat{C} = \frac{\pi}{3}$ temos

a sen $\frac{\pi}{3} = c$ ou seja $14 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = c$; isto é $c = 7 \times \sqrt{3} = 12,124 \text{ m}$.

4488 — Resolver a equação

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x = \cos \frac{x}{2}$$

R. Como $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{3x}{2} \cos \frac{x}{2}$ vem
 $(2 \operatorname{sen} \frac{3x}{2} - 1) \cos \frac{x}{2} = 0$. Daqui resulta que é: ou
 $\cos \frac{x}{2} = 0$ isto é $\frac{x}{2} = (2n+1) \frac{\pi}{2}$ (n inteiro) e
portanto $x = (2n+1)\pi$; ou então é $2 \operatorname{sen} \frac{3x}{2} - 1 = 0$,
ou $\operatorname{sen} \frac{3x}{2} = \frac{1}{2}$ ou ainda $\operatorname{sen} \frac{3x}{2} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}$ e daqui
resulta $\frac{3x}{2} = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6}$ e finalmente $x = \frac{2n\pi}{3} +$
 $+ (-1)^n \frac{\pi}{9}$ (n inteiro).

4489 — Os vértices dum triângulo são $(2, 3)$, $(-3, 1)$ e $(3, -1)$. Verificar que a recta definida pelos pontos médios dos lados do triângulo é paralela ao terceiro lado.

R. Sejam $A(2, 3)$, $B(-3, 1)$ e $C(3, -1)$ os vértices do triângulo; M_a, M_b e M_c os pontos médios dos lados a (oposto a A), b (oposto a B) e c (oposto a C).

As coordenadas dos pontos médios são $M_a \left(\frac{-3+3}{2}, \frac{1-1}{2} \right)$, $M_b \left(\frac{2+3}{2}, \frac{3-1}{2} \right)$ e $M_c \left(\frac{2-3}{2}, \frac{3+1}{2} \right)$ ou $M_a(0, 0)$, $M_b(5/2, 1)$ e $M_c(-1/2, 2)$. As equações dos lados são: do lado a , $(x-3):(3+3) = (y+1):(-1-1)$ ou o que é o mesmo $6y+2x=0$; do lado b , $(x-2):(2-3) = (y-3):(3+1)$ ou seja $4x+y=11$ e do lado c $(x-2):(2+3) = (y+3):(3+1)$ ou $2x-5y=-11$. As equações das rectas que unem os pontos médios são: de $M_a M_c$, $(x+1/2):(-1/2-0) = (y-2):(2-0)$ ou seja $4x+y=0$ paralela a $4x+y=11$, equação do lado b ; de $M_a M_b$, $(x-0):(0-5/2) = (y-0):(0-1)$ ou $2x-5y=0$ paralela a $2x-5y=-11$, equação do lado c ; e de $M_b M_c$, $(x+1/2):(-1/2-5/2) = (y-2):(2-1)$ ou $x+3y=6$, paralela à recta $6y+2x=0$ equação do lado a .

Ano de 1958 — (2.ª chamada)

4490 — Determinar os números naturais que divididos por 7 dão resto inferior ao cociente em três unidades.

R. Os números pedidos são da forma $x=7n+n-3$ onde, $0 < n-3 < 7$, sendo n um número natural. Segue-se que $3 < n < 10$, e portanto n pode tomar os valores 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Os valores correspondentes de x são: 29, 37, 45, 53, 61 e 69.

4491 — Determinar n de modo que $x^2 - (m+1)x - m + 7$ seja positivo para todos os valores reais de x .

R. O facto dá-se sempre que o discriminante for menor que zero, isto é, quando for $(m+1)^2 + 4(m-7) < 0$, desigualdade equivalente a $m^2 + 6m - 27 < 0$. Como as raízes do trinómio, primeiro membro da desigualdade são -9 e 3 , os valores de n que satisfazem ao problema são aqueles para os quais se verifica a dupla desigualdade $-9 < m < 3$.

4492 — Derivar a função $y = (2+x) : (\sqrt{1-x^2})$ e simplificar o resultado.

R. É $y' = (\sqrt{1-x^2})^{-1} + \left(-\frac{1}{2}\right) (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) \cdot (2+x)$ ou $y' = (1+2x) : (\sqrt{1-x^2})^3$.

4493 — Determinar, com denominador racional, o valor de $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha)$ sendo α o ângulo do 4.º quadrante cujo seno é $-3/5$.

R. $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = (\operatorname{tg} 60^\circ + \operatorname{tg} \alpha) : (1 - \operatorname{tg} 60^\circ \operatorname{tg} \alpha)$ e como $\operatorname{tg} \alpha = (\operatorname{sen} \alpha) : (\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 \alpha}) = (-3/5) : (\sqrt{1 - 9/25}) = -3/4$ vem $\operatorname{tg}(60^\circ + \alpha) = (\sqrt{3} - 3/4) : (1 + 3\sqrt{3}/4) = (36 - 25\sqrt{3}) : 11$.

4494 — Resolver a equação $\sec^2 x = 1 - \operatorname{tg} x$.

R. como $\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ vem $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 - \operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$ e $\operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x + 1) = 0$. Então deve ser $\operatorname{tg} x = 0$ o que dá $x = n\pi$ (n inteiro); ou $\operatorname{tg} x + 1 = 0$ donde $\operatorname{tg} x = -1$ e $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right)$. Então deve ser, neste último caso, $x + \frac{\pi}{4} = n\pi$ ou seja $x = -\frac{\pi}{4} + n\pi$.

4495 — Determinar a equação da recta que passa pelo ponto $(1, 3)$ e é perpendicular à recta $x - 2y = 1$.

R. A equação geral das rectas que passam por $(1, 3)$ é $y - 3 = m(x - 1)$ ou $y = m(x - 1) + 3$, e como a recta deve ser perpendicular a $y = 1/2x - 1/2$, terá que ser $1 + m \cdot 1/2 = 0$, donde $m = -2$. Finalmente será $y = -2x + 5$ a equação da recta pedida.

PROBLEMAS PROPOSTOS

No n.º 51 da G. M., em 1952, iniciou-se a secção de Problemas sob a forma de concurso entre os leitores da Gazeta. O concurso e a secção terminaram no n.º 58 de 1954, em virtude do reduzido número de concorrentes. A G. M. concluiu, então, que não tinha sabido despertar o interesse entre os seus leitores e daí a sua resolução. Faltaram-nos indicações da parte dos leitores que nos permitisse modificar a orientação que seguíamos. Apesar disso recomeçamos agora e procuraremos, de novo, o interesse dos leitores de quem solicitamos o envio de soluções dos problemas e indicações sobre a natureza dos problemas que gostariam fossem tratados, assim como quaisquer outras que possam melhorar esta secção. As críticas que nos forem feitas serão recebidas com toda a nossa boa vontade e atenção, no sentido de fazer da secção um elemento de trabalho que interesse e seja útil ao leitor. Das soluções que nos forem enviadas escolheremos as melhores que serão publicadas.

4496 — Determinar todas as soluções do sistema:
 $x(x+y)(x+y+z) = y(x+y)(x+y+1) =$
 $= (x+y+z)^2(y+z) + y(x+y+z) = z$

4497 — Determine os inteiros a e n para os quais $a^n + 1$ é divisível por 10.

4498 — Mostre que, se n é múltiplo de 6, tem-se:

$$\sum_{m=0}^{n/2} \binom{n}{2m} (-3)^m = 2^n$$

4499 — Mostre que, se a, b e c são os comprimentos dos lados de um triângulo, então:

$$A) \quad a^3 + b^3 + c^3 + 2abc < ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a)$$

$$B) \quad a^4 + b^4 + c^4 < (2a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

5000 — Considere-se o segmento $\overline{A_1A_2}$ de medida 1. Tomemos sucessivamente os pontos A_3 meio de $\overline{A_1A_2}$; A_4 meio de $\overline{A_2A_3}$; A_5 meio de $\overline{A_3A_4}$ e assim por diante.

Determine o limite da sucessão cujos termos são as abscissas, contadas a partir de A_1 , dos pontos A_2, A_3, A_4, \dots .

5001 — Mostre que se for p o semi-perímetro do triângulo $[ABC]$ e r o raio da circunferência inscrita no triângulo, se tem

$$r = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2}.$$

5002 — Demonstre que um polígono de n lados é regular se e somente se

$$r = R \cos \frac{\pi}{n}$$

sendo r o raio da circunferência inscrita no polígono e R o raio da circunferência circunscrita ao mesmo polígono.

5003 — Seja $[ABCD]$ um tetraedro e P um ponto qualquer. Considerem-se os segmentos PA', PB' e PC' , perpendiculares, respectivamente, às faces $[BCD], [ACD]$ e $[ABD]$ e de comprimentos iguais aos produtos de uma constante b pelas áreas das respectivas faces. Supõe-se ainda que os segmentos são dirigidas para o lado em que ficam os vértices opostos.

Considere o paralelepípedo que tem para arestas PA', PB' e PC' . Mostre que a diagonal do paralelepípedo que parte de P é perpendicular à face $[ABC]$ e que o seu comprimento é igual ao produto de b pela área de $[ABC]$.

Rectificação:

Os enunciados dos pontos n.ºs 4360 a 4379, publicados no número 70/71 da Gazeta de Matemática, são da autoria de Dr. A. Almeida e Costa e do Dr. F. Almeida e Sá e não, como por lapso se escreveu, exclusivamente de F. Almeida e Sá. Do lapso pedimos desculpa aos nossos colaboradores.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

126 — W. SPROHT — Elementare Beweise der Primzahlsätze — 78 pags. — Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

Como acontecimento mais significativo do desenvolvimento actual da teoria analítica dos números, pode talvez designar-se a demonstração elementar do teorema dos números primos, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \cdot \log(x)}{x} = 1$ e o teorema dos números primos para as progressões aritméticas, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(k, l; x) \cdot \log(x)}{x} = \frac{1}{\varphi(k)}$, apresentados por A. SELBERG (1) (em parte num trabalho comum com P. ERDŐS e J. G. VAN DER CORPUT).

O conceito «elementar» necessita de esclarecimento: a demonstração de ambos os teoremas apoia-se exclusivamente sobre o conhecimento da teoria dos números racionais inteiros, portanto da teoria elementar dos números, sobre os mais simples conhecimentos da teoria das funções reais de uma variável real, particularmente sobre o conhecimento das funções exponencial e logarítmica, abstraindo das funções racionais e de alguns integrais formados com a função $\log(x)$. Além disso, a demonstração do teorema dos números primos para progressões aritméticas exige alguns conhecimentos sobre números complexos e raízes da unidade e dos mais simples resultados da teoria das séries infinitas.

A monografia presente tem como tarefa apresentar uma descrição pormenorizada destes teoremas, presumindo os referidos conhecimentos elementares. Há a intenção de na apresentação esclarecer todo o pormenor, expondo os cálculos necessários, não deixando entregue ao leitor qualquer dificuldade, e, não obstante tudo isto, chegar o mais rapidamente possível ao alvo que se pretende atingir e exposto no título do livrinho.

J. G. T.

(1) Cf. *Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers.*

Scriptam, Math. Centrum, Amsterdam 1948, nr. 1.

127 — D. IWANENKO — A. SOKOLOV — Klassische Feldtheorie — 350 pgs. — Akademie Verlag — Berlin, 1953.

A publicação de um livro dedicado à teoria clássica, isto é, não quântica, dos campos e das partículas elementares necessita sem dúvida de explicação. A existência de grande quantidade de monografias e livros de texto que se ocupam da teoria dos campos electromagnéticos e de gravitação parece tornar supérflua nova exposição da teoria clássica. Além disso, o tratamento de processos pelos quais as partículas elementares, nomeadamente os mesões, tomam parte, torna habitualmente necessário, por razões evidentes, um cálculo rigoroso teórico-quântico.

O presente livro não pretende de modo algum substituir os livros habituais de ensino da electrodinâmica.

Uma das tarefas dos AA. está na aplicação a alguns métodos matemáticos da teoria dos quanta na investigação de fenómenos clássicos.

Assim, apresentam a teoria da função δ sistematicamente, com cujo auxílio se descrevem as diferentes singularidades de carga (carga pontual, carga superficial, etc.) e com que se pode dar novo tratamento às funções de GREEN. Nos II e III capítulos desenvolvem o instrumento matemático com cujo auxílio se pode aplicar a função δ na solução de série de problemas da física matemática e da electro dinâmica. Por exemplo, pode-se formular de modo especialmente simples a chamada condição de emissão por meio da teoria da função δ .

Nestes três capítulos mostram especialmente como os novos métodos podem ser utilizados para a solução de muitos problemas antigos.

A teoria clássica dos campos e das partículas elementares reacendeu-se nos últimos anos. Muitos fenómenos descobertos nos últimos tempos, por exemplo, o «electrão CHERENKOV», o «electrão luminoso» e outros efeitos baseados na aceleração de partículas carregadas podem-se também descrever nos pontos essenciais por uma teoria clássica relativista. Além disso, a análise do problema das massas de campo, ainda não resolvido, permite do ponto de vista clássico, uma penetração mais profunda na essência física deste problema e desempenhará em todo o caso um papel heurístico no futuro desenvolvimento da teoria das

partículas elementares. O capítulo IV trata de todos estes problemas. Aqui o leitor encontra portanto uma descrição sistemática de série de problemas que até então só eram conhecidos através de artigos dispersos em revistas.

O V e último capítulo dedica-se aos problemas mais importantes que surgiram em relação com o desenvolvimento da teoria clássica do campo do mesão.

Se bem que a existência dos mesões neutros que são directamente acessíveis ao tratamento clássico ainda não foi assegurada de modo completamente convincente, muitos resultados e métodos da dinâmica clássica do mesão continuam em vigor na teoria rigorosa das quanta que trata tanto dos mesões neutros como dos carregados.

Os AA. dedicam a máxima importância ao problema das forças nucleares que representa um dos problemas centrais em toda a física moderna das partículas elementares.

Em si, o efeito mútuo das partículas por intermédio dum campo, é de natureza clássica e por isso não admira que muitos resultados da teoria do mesão das forças nucleares sejam revelados essencialmente já pelo tratamento clássico.

O problema da difusão de mesões em nucleões (prótons e neutrões), tomando em consideração o amortecimento da radiação, de que também se trata neste capítulo, tem importância não só para a teoria da penetração da radiação cósmica através da matéria, mas também para o exame de problemas gerais ligados com a natureza do campo.

Os AA. só tocam ao de leve nos problemas do campo de gravitação, especialmente porque as investigações na teoria da gravitação que se ligam com o esclarecimento do seu papel na teoria das partículas elementares ainda estão em evolução.

O livro é por um lado considerado suplemento aos livros conhecidos de electro dinâmica e teoria dos campos e por outro lado introdução à teoria moderna das partículas elementares que se baseia em mais amplas investigações sobre a teoria das quanta.

J. G. T.

128 — LANCELOT HOGGEN — Statistical Theory — 510 págs. — George Allen & Unwin, Ltd. — London, 1957.

Neste livro, sub-intitulado «The Relationship of Probability, Credibility and Error», o autor de «Mathematics for the Million» procede a um exame crítico daquilo que ele chama a crise contemporânea da teoria estatística.

Preocupado com a crescente popularidade de que gozam as técnicas estatísticas junto de cientistas e investigadores dos mais diversos matizes, os quais raras vezes se detêm a meditar sobre as hipóteses

básicas ou as credenciais matemáticas dessas mesmas técnicas, o Prof. Hogben propôs-se a tarefa de discutir os fundamentos da teoria dum ponto de vista que interessa a um utilizador como ele, biólogo experimental. E fá-lo com o entusiasmo e o vigor habituais ao longo de 510 extensas páginas, num estilo que pretende tornar acessível a larga audiência mas é frequentemente arrezado.

O autor exprime as suas dúvidas sobre o valor de certos aspectos da teoria e da prática estatísticas na sua forma actual, mas não propõe em sua substituição nenhum outro sistema por ele considerado coerente; pelo contrário, sugere até com pessimismo no final do livro que um tal sistema poderá não ser encontrado.

É difícil discordar da sua tese principal: que a estatística é frequentemente ensinada em tom demasiado autoritário, e que aqueles que precisam de utilizá-la devem compreender bem os fundamentos para que possam aplicá-la com o indispensável sentido crítico e evitar a indesejada rigidez que os dogmas trazem ao espírito científico. Com efeito, uma boa compreensão dos princípios por parte do cientista é um grande auxílio para o estatístico no papel de consultor, quer para melhor se fazer entender nas suas recomendações, quer para melhor poder compreender os problemas que lhe são postos. Qualquer livro que se proponha esclarecer princípios é portanto de saudar; no entanto a presente obra, a despeito da estatura mental do seu autor, não parece cumprir bem essa finalidade, pois as longas discussões de pontos elementares repelirão o profissional, enquanto que o novato dificilmente discernirá as linhas mestras da argumentação cheia de circunlocuções e ajoujada de transcrições. É pena que assim se obscureçam muitos comentários importantes e de extrema finura disseminados através da obra, que talvez não perdesse se fosse um pouco menos longa e não fugisse tanto à argumentação de carácter matemático.

As três primeiras partes tratam principalmente do cálculo de probabilidades e suas aplicações, com extensos comentários à origem histórica das doutrinas; e haverá leitores que, embora encontrando sempre interesse em tais comentários, se ressentirão com o tom polémico que o autor por vezes assume e com a possível injustiça de certas referências aos fundadores da teoria, cujos pontos de vista não podem desligar-se da época em que foram defendidos.

A última parte do livro trata dos fundamentos da inferência estatística, quer dizer, do estabelecimento de hipóteses com base em observações; e termina com um «epílogo» em que o autor sumariza as conclusões que pretendeu tirar neste seu interessante trabalho, que podemos classificar como um estimulante ensaio.

F. C.

Revistas recebidas por troca com «Gazeta de Matemática» no último trimestre de 1958:

- Extrait du *Bulletin Signalétique du C. N. R. S.*, vol. XIX. Fascicule 11-12. Section I, «Mathématiques pures et appliquées», «Mécanique» — «Physique Mathématique», *Automatique et Cybernétique*.
- Glasnik* — Matematicko-Fizicki i Astronomski. T. 13. — Zagreb.
- Mathematical Journal of Okayama University* — Vol. 8. Okayama, Japão.
- The Mathematical Gazette*, vol. XLII. Londres.
- Elemente der Mathematik* — Revue de Mathématiques Élémentaires — Basel-Suíça.
- Czechoslovak Mathematical Journal*. T. 8 (83). Praga.
- Revista Mathematica Hispano-Americana*. Tomo XVIII — 4.^a série. Madrid.
- Gaceta Matematica*. Tomo X — 1.^a série. Madrid.
- Pacific Journal of Mathematics*. Vol. 8. Califórnia. Los Angeles.
- La Recherche Aéronautique* — N.^o 67. França.
- Colloquium Mathematicum*. Vol. VI — Polónia.
- Analele Stiintifice ale Universitatii «al. T. Cuza» din Tasi*. Tomo IV — Roménia.
- Revista de la Mathematica Argentina*. Vol. XVIII.
- Nuclear Science Abstracts* — Vol. 12 — U. S. A.
- Archimede*. Ano X. — Firenze. Itália.
- La Scienza per i Giovani*. Ano VII — Firenze. Itália.
- Revista do I R B*. Instituto de Resseguros do Brasil.
- Revue Général des Sciences Pures et Appliquées*. Vol. LXV. França.

NOTAS DE MATEMÁTICA

Colecção publicada sob a direcção de L. Nachbin e sob os auspícios do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, da Faculdade Nacional de Filosofia e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada

Fascículos à venda:

- A. MONTEIRO, *Filtros e ideais* (I).
- A. MONTEIRO, *Filtros e ideais* (II).
- M. M. PEIXOTO, *Convexidade das curvas*.
- M. L. MOUSINHO, *Espaços projectivos, reticulados de seus sub-espaços*.
- M. H. SIMONSEN, *Introdução à programação linear*.
- P. RIBENBOIM, *Ideais em anéis de tipo infinito*.
- E. L. LIMA, *Topologia dos espaços métricos*.
- S. MACLANE, *Curso de topologia geral*.
- G. REEB, *Estruturas folheadas*.
- I. KAPLANSKY, *Introdução à teoria de Galois*.
- D. G. FIGUEIREDO, *Decompositions of the sphere*.
- G. S. S. AVILA, *Simultaneous propagation of waves of more than one type*.
- I. KAPLANSKY, *Topological álgebra*.

Dirigir os pedidos dessas publicações à Livraria Castelo, Avenida Erasmo Braga, 227, 2.^o andar, Rio de Janeiro, Brasil.

LITERATURA MATEMÁTICA RECIENTE

Editor — GAUTHIER VILLARS, Paris

POLYA — *Les Mathématiques et le Raisonnement «Plausibles».*

FAUCHER — *Tables Trigonométriques.*

Mémorial des Sciences Mathématiques

Fas. CXXXVIII — BERGE — *Théorie Générale des Jeux a n Personnes.*

Fas. CXXXIX — KING-LAI HIONG — *Sur les Fonctions Meromorphes et les Fonctions Algébroides.*

Collection Technique et Scientifique du C. N. E. T.

L. ROBIN — *Fonctions Sphériques de Legendre et Fonctions Sphéroïdales*

Tom I, 1958, 201 pag., 4000 frs — Tome II, 1958, 384 pag., 5000 frs.

Editor — PERGAMON PRESS LTD, London — Paris

L. D. LANDAU and E. M. LIFSCHITZ — *Course of Theoretical Physics.*

Vol. 3 — Quantum Mechanics 80 s. — Vol. 5 — Statistical Physics 80 s.

Editor — VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Berlin

I. M. RYSHIK, und I. S. GRADSTEIN — *Summen - Produkt - und Integral - Tafeln* — XXIII/438 pag., 8°, DM 56.

J. MIKUSINSKI — *Operatorenrechnung* — XII/360 pag., 177 grav., 8°, DM 37,20.

L. W. KANTOROWITSCH, W. I. KRYLOW — *Näherungsmethoden der höheren Analysis* — 1956, XI/611 pag., 68 grav., 8°, cart. DM 47.

W. D. KUPRADSE — *Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen* — 1956, VIII/239 pag., 11 grav., 8°, broch. DM 27,60, cart. DM 29,70.

W. BLASCHKE — *Vorlesungen über Integralgeometrie* — 3. Auflage — 1955, VIII/130 pag., 44 grav., 8°, cart. DM 13,60.

W. BLASCHKE — *Reden und Reisen eines Geometers* — 1957, 115 pag., 8°, broch. DM 7,20.

I. N. VEKUA — *Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung vom elliptischen Typus und Randwertaufgaben* — 1956, 107 pag., 8°, broch. DM 10,40.

A. S. PARCHOMENKO — *Was ist eine Kurve?* — 1957, 140 pag., 23 grav., 8°, broch. DM 8,20.

G. M. GOLUSIN — *Geometrische Funktionentheorie* — 1957, VIII/438 pag., 23 grav., 8°, cart. DM 39,60.

H. REICHARDT — *Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung* — XI/499 pag., 33 grav., 8°, cart. DM 41,20.

N. M. GÜNTER, und R. O. KUSMIN — *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik* — Bd. I: 1957, VIII/492 pag., 162 grav., 8°, DM 14,80; Bd II: 1957, VI/289 pag., 24 grav., 8°, DM 19,60.

L. S. PONTRJAGIN — *Grundzüge der kombinatorischen Topologie* — 1956, VIII/133 pag., 8°, broch. DM 8,80.

I. I. PRIWALOW — *Randeigenschaften analytischer Funktionen* — 1956, VIII/247 pag., 10 grav., 8°, cart. DM 29,60.

I. M. JAGLOM, und W. G. BOLTJANSKI — *Konvexe Figuren* — 1956, XVI/257 pag., 318 grav., 8°, cart. DM 15.

A. D. MYSCHKIS — *Lineare Differentialgleichungen mit nachteilendem Argument* — 1955, VIII/180 pag., 9 grav., 8°, cart. DM 21,30.

G. P. TOLSTOW — *Fourierreihen* — 1955, XI/300 pag., 51 grav., 8°, cart. DM 17,50.

R. KOCHENDÖRFFER — *Einführung in die Algebra* — 1955, XII/316 pag., 8°, cart. DM 23,60.

Editor — AKADEMIE - VERLAG, Berlin

I. M. GELFAND - M. A. NEUMARK — *Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen*, 334 pag. DM 36.

S. I. WAWILOW — *Die Mikrostruktur des Lichtes*, 163 pag., DM 12.

HELMUT SCHAEFER — *Neue Existenzsätze in der Theorie nichtlinearer Integralgleichungen*, 40 pag., DM 2,40.

Editor — WALTER DE GRUYTER & CO., Berlin

Sammlung Göschen

L. BAUMGARTNER — *Gruppen theorie*, 1958, 110 pag., DM 2,40.

P. LORENZEN — *Formale Logik*, 1958, 165 pag., DM 4,80.

K. STRUBECKER — *Differential geometrie III*, 1958, 254 pag., DM 4,80.

Editor — TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT, Leipzig

N. M. GÜNTER — *Die Potential theorie und ihre Anwendung*, 342 pag., DM 18.

I. G. PETROWSKI — *Vorlesungen über die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, 198 pag., DM 7,80.
— *Vorlesungen über Differential gleichungen*, 296 pag., DM 17.

Editor — NATIONAL LIBRARY OF PEKING, Peking

CHEN KIEN-KWONG — *Summation of the Fourier Series of Orthogonal Functions*, 174 pag.

Editor — GUOZI SHUDIAN, Peking

BUCHIN SU — *The General Projective Theory of Curves*, 242 pag. £ 0-18-6.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1959 (4 números) 50 escudos

Assinatura para o estrangeiro, 80 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.º 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.º 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1959, quando pedidas directamente, assinatu-

ras de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automaticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.º 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40\$00
N.º 12 e 15 a 49, cada número	12\$50
N.º 50	60\$00
N.º 51 a 71 { cada número simples	17\$50
" " duplo	35\$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35\$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Rua Diário de Notícias, 134-1.º - Esq.º — LISBOA - 2 — Telefone 29449
