GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

PUBLICADO POR

J. CALADO, B. CARAÇA, R. L. GOMES, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

ANO II **N.º 7** JULHO-1941

NÚMERO DEDICADO PRINCIPALMENTE AOS CONCORRENTES A EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

PREÇO DÊSTE NÚMERO 6$00

DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

26-06-71

2.º ANO - N.º 7

GAZETA DE MATEMÁTICA

JULHO DE 1941

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

O TEOREMA DE ROUCHÉ E A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

(CONTINUADO DO N.º 6)

3. *Resolução de sistemas de equações lineares e homogéneas.* O sistema $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i=1, 2, \cdots m)$ diz-se *homogéneo* ou de equações *lineares* e *homogéneas* se $b_i = 0 \ (i=1, 2, \cdots m)$. Tem-se, portanto,

$$1) \quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n = 0 \,. \end{cases}$$

Da aplicação do teorema de Rouché ao sistema 1) resulta, imediatamente:

1.º *o sistema* 1) *é sempre compatível, admite sempre a solução* $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$;

2.º *é condição necessária e suficiente para que o sistema* 1) *admita soluções não nulas que o número de incógnitas seja superior à característica da matriz* $\mathbf{A}$ *dos coeficientes,* $k < n$, *o que implica a indeterminação do sistema;*

3.º *se no sistema* 1) *fôr* $m = n$, *é condição necessária e suficiente para que tenha soluções não nulas que o determinante associado*[1] *à matriz* $\mathbf{A}$ *dos coeficientes do sistema seja nulo;*

4.º *se o número de incógnitas é superior ao número de equações,* $n > m$, *o sistema* 1) *admite soluções não nulas e o seu grau de indeterminação é, pelo menos,* $m - n$.

O leitor encontrará a demonstração destas quatro proposições, baseada no teorema de Rouché, por exemplo, em B. J. Caraça, *Lições de Álgebra e Análise,* vol. I, págs. 393-394.

Seja k a característica da matriz $\mathbf{A} = ((a_{ij}))$ dos coeficientes do sistema 1). A resolução dêste reduz-se à do sistema

$$2) \quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1k}\, x_k = -(a_{1k+1}\, x_{k+1} + \cdots + a_{1n}\, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\, x_1 + a_{k2}\, x_2 + \cdots + a_{kk}\, x_k = -(a_{kk+1}\, x_{k+1} + \cdots + a_{kn}\, x_n) \end{cases}$$

ou

$$\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\, x_j = -\sum_{l=k+1}^{n} a_{il}\, x_l \quad (i=1, 2, \cdots k)$$

sendo

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1k} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

A aplicação da regra de Cramer ao sistema 2) resolve o problema. O resultado reveste uma forma, particularmente, notável se $n = k + 1$. Com efeito, nesta hipótese o sistema 2) escreve-se

$$3) \quad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1k}\, x_k = -a_{1k+1}\, x_{k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1}\, x_1 + a_{k2}\, x_2 + \cdots + a_{kk}\, x_k = -a_{kk+1}\, x_{k+1} \end{cases}$$

e a regra de Cramer conduz-nos a

$$\frac{x_1}{(-1)^{n-1}\, \Delta_1} = \frac{x_2}{(-1)^{n-2}\, \Delta_2} = \cdots = \frac{x_i}{(-1)^{n-i}\, \Delta_i} = \cdots = \frac{x_k}{-\Delta_k} = \frac{x_{k+1}}{\Delta_p}$$

onde Δ_i é o determinante que se obtém da matriz

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} \cdots a_{1k+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{k1} \cdots a_{kk+1} \end{matrix} \right\|$$

pela supressão da coluna i.

Pela sua importância, convém fixar os resultados na hipótese do sistema 3) se reduzir a

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0, \end{cases} \quad \text{com} \quad \Delta_p = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Tem-se, como fácilmente se reconhece,

$$\frac{x}{bc' - b'c} = \frac{y}{a'c - ac'} = \frac{z}{ab' - a'b} .$$

Exemplo I. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ x + y = 0 . \end{cases}$$

A matriz do sistema tem característica 3, visto que é, por exemplo,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 .$$

O sistema proposto é compatível, por ser homogéneo, mas admite apenas a solução nula, $x = y = z = 0$.

Exemplo II. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x + y + t + u = z \\ x + z + u = y + t \\ y = t \\ x + u = 0 \\ y + t = z . \end{cases}$$

[1] Diz-se determinante associado à matriz $\mathbf{A} = ((a_{ij})) \ (i, j = 1, 2, \cdots n)$ o determinante $\delta(\mathbf{A}) = |a_{ij}| \ (i, j = 1, 2, \cdots n)$.

A característica do sistema é 3 e êste é indeterminado de grau 2. Tomemos para incógnitas principais x, y, z e as três primeiras equações. Tem-se

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

e, pela regra de Cramer ou, mais simplesmente, por redução,

$$x = -u \quad y = t \quad z = 2t.$$

Determinemos um sistema fundamental de soluções [1]. Porque o sistema proposto é indeterminado de grau 2, o sistema fundamental tem 2 soluções que se obtêm, por exemplo, fazendo $u=0$, $t=1$ e $u=1$, $t=0$. Tem-se

$$\begin{cases} x=-1 \quad y=0 \quad z=0 \quad u=1 \quad t=0 \\ x=0 \quad y=1 \quad z=2 \quad u=0 \quad t=1. \end{cases}$$

Exemplo III. Estude o sistema

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ \beta x + \gamma y + \alpha z = 0 \\ \gamma x + \alpha y + \beta z = 0 \end{cases}$$

onde α, β, γ são as raízes cúbicas da unidade. (I. S. C. E. F., 1.ª Cadeira, 1.º Exame de freqüência de 1939-40. V. a resolução no n.º 5 da *Gaz. de Mat.* sob o n.º 484).

Exemplo IV. Encontrar as condições para que o sistema

$$\begin{cases} x = cy + bz \\ y = az + cx \\ z = bx + ay \end{cases}$$

represente uma recta; mostrar que a recta é representada por

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}.$$

(F. C. C. exame de freqüência de 1938-39. Publicado no n.º 4 da *Gaz. de Mat.* sob o n.º 396).

Os três planos, cujas equações são as do sistema proposto, terão uma recta comum se o sistema fôr indeterminado de grau 1, ou, o que é o mesmo, se fôr 2 a característica da matriz $\mathbf{A}$ dos coeficientes do sistema.

Para tanto, é necessária e suficiente a verificação da condição

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -c & -b \\ -c & 1 & -a \\ -b & -a & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2abc - a^2 - b^2 - c^2 = 0$$

visto que ela implica o não anulamento de um, pelo menos, dos menores complementares dos elementos de Δ, ou, o que é o mesmo, de um, pelo menos, dos determinantes de 2.ª ordem da matriz $\mathbf{A}$. O leitor verificará, fàcilmente, que há sempre três determinantes de $\mathbf{A}$ de 2.ª ordem não nulos simultâneamente e, portanto, é legítimo afirmar a verificação simultânea das três condições $1-a^2 \neq 0$, $b+ac \neq 0$, $c+ab \neq 0$ ou $1-b^2 \neq 0$, $a+bc \neq 0$, $c+ab \neq 0$, ou, ainda, $1-c^2 \neq 0$, $a+bc \neq 0$, $b+ac \neq 0$.

Suponhamos que se tem $1-a^2 \neq 0$, $b+ac \neq 0$ e $c+ab \neq 0$. Podemos, portanto, tomar duas quaisquer das equações do sistema para constituirem o sistema principal. Conforme considerarmos a 1.ª e a 2.ª equações, a 1.ª e a 3.ª ou a 2.ª e a 3.ª, assim obteremos

$$\frac{x}{b+ac} = \frac{y}{a+bc} = \frac{z}{1-c^2}, \quad \frac{x}{c+ab} = \frac{y}{1-b^2} = \frac{z}{a+bc},$$

$$\frac{x}{1-a^2} = \frac{y}{c+ab} = \frac{z}{b+ac}.$$

Tratando-se da mesma recta, será

$$\frac{b+ac}{c+ab} = \frac{a+bc}{1-b^2} = \frac{1-c^2}{a+bc}, \quad \frac{b+ac}{1-a^2} = \frac{a+bc}{c+ab} = \frac{1-c^2}{b+ac}$$

donde

$$a+bc = \sqrt{1-b^2} \cdot \sqrt{1-c^2}, \quad b+ac = \sqrt{1-a^2} \cdot \sqrt{1-c^2}.$$

E, finalmente, as equações da recta tomarão a forma

$$\frac{x}{\sqrt{1-a^2}} = \frac{y}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{z}{\sqrt{1-c^2}}.$$

4. *Relações entre as soluções dum sistema de equações lineares não homogéneas e as do sistema correspondente de equações lineares e homogéneas* [2]. Dado o sistema de equações lineares não homogéneas

$$1) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \cdots m)$$

diz-se sistema homogéneo correspondente ou sistema reduzido

$$2) \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots m).$$

Aproximando os resultados da teoria das equações lineares não homogéneas e da teoria das equações lineares homogéneas, resumidamente expostos nos parágrafos 2 e 3, com facilidade se deduzem as relações existentes entre as soluções gerais dos sistemas 1) e 2) que são, fundamentalmente, conseqüência da linearidade dos primeiros membros das equações de 1) e 2).

É basilar, nesta matéria, o

Teorema — A solução geral do sistema 1) *obtém-se somando à solução geral do sistema* 2) *uma solução particular qualquer do sistema* 1).

Seja $p = n - k$ o grau de indeterminação do sistema 2) e

$$\begin{cases} x_i = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l \alpha_{il} & (i = 1, 2, \cdots p) \\ x_j = \lambda_j & (j = p+1, \cdots n) \end{cases}$$

a sua solução geral, obtida do sistema fundamental de soluções

$$\begin{cases} x_i = \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots \alpha_{ip} & (i = 1, 2, \cdots p) \\ x_j = \delta_{jp+1}, \delta_{jp+2}, \cdots \delta_{jn} & (j = p+1, \cdots n) \end{cases} \quad \text{com} \quad \delta_{jl} = \begin{cases} 1 \leftarrow j = l \\ 0 \leftarrow j \neq l. \end{cases}$$

Seja $x_i = \beta_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ uma solução particular do sistema 1).

A solução geral do sistema 1) será

$$\begin{cases} x_i = \beta_i + \sum_{l=1}^{p} \lambda_l \alpha_{il} & (i = 1, 2, \cdots p) \\ x_j = \beta_j + \lambda_j & (j = p+1, \cdots n). \end{cases}$$

---

[1] Diz-se *sistema fundamental de soluções* dum sistema de equações lineares e homogéneas indeterminado de grau $n-k$ todo o conjunto de $n-k$ soluções do sistema linearmente independentes, portanto, qualquer outra solução do sistema é uma combinação linear delas e reciprocamente. Para a sua determinação v. B. J. Caraça, ob. cit., vol. I, p. 398-400.

[2] Como primeira leitura sôbre o assunto v. E. Borel — Principes d'Algèbre et d'Analyse (Bibliothèque d'Education Scientifique) p. 1-60.

Exemplo. $x=-8/3$, $y=2/3$, $z=1$, $t=z$ é uma solução do sistema

$$\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-2y+z+t=-1 \\ 2x-y+2z+2t=0 \\ x-y+z+t=-1/3\,. \end{cases}$$

O sistema reduzido escreve-se

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ x-2y+z+t=0 \\ 2x-y+2z+2t=0 \\ x=y+z+t=0 \end{cases}$$

cuja característica é 2. A regra de Cramer dá

$$x=-(z+t) \quad y=0\,.$$

É um sistema fundamental de soluções

$$\begin{cases} x=-1 \quad y=0 \quad z=1 \quad t=0 \\ x=-1 \quad y=0 \quad z=0 \quad t=1 \end{cases}$$

e a solução geral do sistema reduzido é

$$x=-(\lambda+\mu) \quad y=0 \quad z=\lambda \quad t=\mu\,.$$

A solução geral do sistema proposto é

$$x=-(8/3+\lambda+\mu) \quad y=2/3 \quad z=1+\lambda \quad t=2+\mu\,.$$

5. *Bibliografia.* O leitor encontrará exposições teóricas do assunto tratado em:

B. J. Caraça — *Lições de Álgebra e Análise*, vol. I, p. 363-401; G. Vivanti — *Lezioni di Analisi Matematica*, vol. I, p. 104-116; S. Pincherle — *Lezioni di Algebra Complementare*, parte seconda, p. 81-106; E. Pascal — *I Determinanti*, p. 307-320; L. Massoutié — *Determinants, équations et formes linéaires*, p. 25-45;

exercícios resolvidos e propostos em:

G. Belardinelli — *Esercizi di Algebra Complementare*, p. 173-193; Aubert et Papelier — *Exercices d'Algèbre, d'Analyse et de Trigonométrie*, vol. I, p. 37-49; R. Noguès — *Cours de Mathématiques Spéciales sous forme de problèmes*, p. 17-19;

e, nos finais dos capítulos dedicados à exposição teórica do mesmo assunto, além das obras indicadas em primeiro lugar, em:

Niewenglowski — *Cours d'Algèbre*, vol. I, p. 214-216; C. Bourlet — *Leçons d'Algèbre Élémentaire*, p. 205-206; C. Comberousse — *Cours de Mathématiques*, vol. III, 1.ª parte, p. 302-312, 317-320; J. Haag — *Exercices du Cours de Mathématiques Spéciales*, p. 198-203.

A. SÁ DA COSTA

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

(CONTINUADO DO N.º 6)

18 — Tratemos agora do terceiro método de demonstração: o *método de redução ao absurdo*, também chamado *método analítico indirecto*. Êste e os anteriores constituem os *métodos gerais de demonstração*, por isso que, para demonstrar uma proposição *qualquer*, é forçoso adoptar um dêstes métodos, além de que o emprêgo de cada um dêles não é privativo duma classe particular de proposições. Pode até acontecer que, na mesma demonstração, se acumulem dois ou mesmo os três métodos: tratar-se-á, neste caso, duma demonstração de tipo *misto*.

O método de redução ao absurdo consiste essencialmente em demonstrar a proposição dada α, estabelecendo a falsidade da sua contraditória, α': ora (§5), se α' é falsa, α é necessàriamente verdadeira. Para demonstrar a falsidade de α', segue-se a marcha dedutiva: deduzem-se de α' novas proposições; destas, outras ainda, e assim sucessivamente, até se chegar a uma proposição ω' que seja a contraditória duma proposição ω, conhecida como verdadeira; assim ω' será falsa, e como se tem $\alpha' \rightarrow \omega'$, também α' será falsa. Quando se chega à proposição ω', manifestamente falsa, diz-se que tal conclusão é *absurda*, donde a designação do método (de redução ao absurdo); por outro lado, é visível a analogia entre êste método e o analítico, o que justifica, em parte, a segunda designação.

Como exemplo, demonstremos *em Geometria plana*, partindo do postulado das paralelas, a seguinte afirmação: «Duas rectas distintas, paralelas a uma terceira, são paralelas entre si». A contraditória da proposição a demonstrar é a seguinte: «Existem, pelo menos, duas rectas distintas $\overline{a}$ e $\overline{b}$, que, sendo paralelas a uma terceira $\overline{c}$, não são paralelas entre si»; mas notemos que, se as rectas $\overline{a}$ e $\overline{b}$ são distintas e não paralelas, se encontram num ponto $M=\overline{a}\,.\,\overline{b}$, e, assim, a última proposição é equivalente à seguinte: «Existe uma recta $\overline{c}$ e um ponto M, tais que, por M, passam duas rectas $\overline{a}$ e $\overline{b}$, distintas, paralelas a $\overline{c}$». Mas esta proposição é incompatível com o postulado das paralelas, e portanto falsa: a proposição dada é pois verdadeira.

Muitas vezes, êste método reduz-se à simples aplicação das propriedades 1) e 2) do § 5, ao teorema $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$, a demonstrar: como as implicações $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{t}' \rightarrow \mathfrak{h}'$ são equivalentes, demonstrar que se tem $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$ é o mesmo que demonstrar a implicação $\mathfrak{t}' \rightarrow \mathfrak{h}'$ (parte-se da contraditória da tese e é-se conduzido à negação da hipótese).

19 — Em Matemática, não se consideram apenas teoremas, postulados e definições — verdades estabelecidas: estudam-se também problemas — verdades a estabelecer. (Modificando as convenções introduzidas no § 12, passaremos neste § a representar elementos determinados ou *conhecidos* pelas primeiras letras do alfabeto e elementos variáveis ou *desconhecidos* pelas últimas letras do alfabeto). Esquemàticamente, um problema consiste em, dada uma proposição condicional $\alpha(X)$, pedir a determinação dos elementos que satisfazem à condição $\alpha(X)$. Assim, resolver um problema não é mais do que passar duma proposição $\alpha(X)$ para outra $\beta(X)$, que seja equivalente à primeira, e que se considere *definidora* da classe dos elementos que as verificam. Por exemplo, o problema «Determinar os números x, tais que $x^2-7x+10=0$» fica resolvido quando se passa à proposição condicional «$(x=2)+(x=5)$», equivalente à que é expressa pela equação do enunciado.

Mas, tendo em vista as observações do § 9, é de prever que surjam dúvidas, quando se procura interpretar o sentido da locução «resolver um problema». Assim, os problemas que se propõem, geralmente, em Geometria elementar, deverão ser resolvidos, *só com auxilio da regua e do compasso.* Nêste caso, a referida locução adquire um sentido particular, e devem considerar-se como definidoras, correspondentes a problemas *elementares*, as proposições condicionais dos seguintes tipos: «$\overline{x}$ é a recta que passa pelos pontos A e B»; «$[x]$ é a circunferência de centro em O e de raio congruente a $\overline{PQ}$»; «$X=\overline{a}\,.\,\overline{b}$»; «X é um ponto de intersecção das circunferências $[a]$ e $[b]$»; «X é um ponto de intersecção de $\overline{a}$ com a circunferência $[c]$»; «(X, Y e Z são distintos e pertencem a $\overline{a}$). $(X\in[Y,Z])$». Dêste modo, deve considerar-se *teòricamente* resolvido um problema, quando se chega a um conjunto de proposições dêste tipo, como equivalente à condição apresentada; é óbvio que a *resolução* de tais problemas elementares não interessa à Matemática, mas apenas ao Desenho: *matemàticamente,* êsses problemas consideram-se, por sua própria natureza, já resolvidos.

Dá-se o nome de *soluções* do problema, correspondente a uma condição $\alpha(X)$, às determinações de X que verificam a condição dada: haverá problemas com várias soluções (indeterminados), uma única solução (determinados) e nenhuma solução (impossíveis). Assim, o problema «Dados A e B, determinar X, de modo que $\overline{AX} \simeq \overline{BX} \simeq \frac{1}{m}\overline{AB}$» admite duas soluções, no plano, e uma infinidade de soluções, no espaço, se $m<2$; admite uma única solução, se $m=2$; e não admite solução nenhuma, se $m>2$. Mas é ainda manifesto que o número de soluções dum problema está condicionado pelo sentido que se atribui à locução «resolver um problema»; assim, há problemas, como o da trisecção do ângulo, o da duplicação do cubo e o da quadratura do círculo, que, na *Geometria da régua e do compasso,* não admitem solução nenhuma, embora sejam resolúveis por outros processos.

Para resolução de problemas de Matemática existem dois métodos gerais: o *analitico*[1] e o *sintético.* Consiste o primeiro em reduzir a resolução do problema proposto à de outros que pareçam mais simples, cuja resolução se reduz, por sua vez, à de outros ainda, e assim sucessivamente, até se chegar a problemas de resolução imediata; é êste o método que se usa, por exemplo, na resolução das equações, com a aplicação dos princípios da equivalência. Pelo método sintético, resolvem-se, uns a seguir aos outros, vários problemas conhecidos, de modo que, ao resolver o último, fique também resolvido o problema proposto. Não entraremos em pormenores a respeito dêstes métodos, nem sequer apresentaremos exemplos da aplicação de cada um dêles à resolução de problemas. Limitar-nos-emos a observar que deve haver todo o cuidado em estabelecer a equivalência entre a condição final, $\omega(X)$, definidora das soluções, e a condição dada, $\alpha(X)$; em particular, se $\alpha(X) \rightarrow \omega(X)$, sem que se tenha $\omega(X) \rightarrow \alpha(X)$, são introduzidas *soluções estranhas;* ao passo que, se $\omega(X) \rightarrow \alpha(X)$, sem que se verifique a implicação inversa, serão *omitidas* soluções.

Antes de terminar, desejamos formular algumas conclusões. A exposicão que fizemos não é tão desenvolvida que mostre todos os recursos da Lógica matemática (ou simbólica), na análise do raciocínio matemático; nem tão reduzida, que possa, sem qualquer simplificação prévia, ser utilizada no ensino médio. Foi nosso intento apresentar sugestões, de preferência a indicar um modêlo definitivo para o ensino. Uma conclusão, porém, se impõe, entre tôdas: a dificuldade dum estudo criterioso dos métodos gerais da Matemática, e duma justa compreensão do encadeamento das proposições no raciocínio matemático, sem recorrer à Lógica simbólica, e sem uma cuidadosa preparação que desenvolva no aluno hábitos de rigorismo lógico, libertando-o progressivamente dos processos intuïtivos.

Algumas noções, como as de produto lógico e de soma lógica, podem ser úteis no estudo das desigualdades.

Por outro lado, a Aritmética, com a simplicidade dos seus conceitos e das suas propriedades, constitui, mais do que a Geometria, um campo privilegiado para a aplicação da Lógica matemática.

JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

[1] Também chamado método *do problema resolvido,* porque se começa por supor já resolvido o problema, a-fim-de mais fàcilmente se descobrir o processo de resolução.

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

ANO DE 1940

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo.

PONTO N.º 2

653 — Determine as soluções inteiras e positivas da equação $3x+4y=26$. R: *Da equação tira-se* $x=\frac{26-4y}{3}=8-y+\frac{2-y}{3}$ *o que nos mostra que um par de soluções é* $x_1=6$, $y_1=2$ *e as soluções gerais em números inteiros são dadas pelas equações* $x=6+4n$ *e* $y=2-3n$; *só existem soluções inteiras e positivas para os valores de* n *iguais a* 0 *e* -1, *o que dá os pares de valores* $x_1=6$, $y_1=2$ *e* $x_2=2$, $y_2=5$. J. P.

654 — Defina arranjos e combinações de n objectos tomados p a p. Forme os arranjos dos 3 números 1, 2 e 3 tomados 2 a 2. R: *Chamam-se arranjos aos agrupamentos de objectos que diferem entre si sòmente pela natureza. Entende-se por objectos de natureza diferente os que não são iguais. Os arranjos pedidos são* 12, 21, 31, 13, 23 *e* 32. J. P.

655 — Forme a equação do 2.º grau cujas raízes são $+i$ e $-i$. R: $x^2+1=0$. J. P.

656 — A corda de uma circunferência de raio igual a $16^m,46$ tem por comprimento $12^m,39$. Calcule, recorrendo ao cálculo logarítmico, o ângulo ao centro cujos lados passam pelos extremos da corda. R: *A relação que liga a corda* l *com o ângulo ao centro* α *correspondente é* $l=2R\,\text{sen}\,\frac{\alpha}{2}$ *e portanto será*

$$\log \text{sen}\,\frac{\alpha}{2}=\log l+\text{colog}\,2+\text{colog}\,R=1{,}09307-\bar{1}{,}69897+\bar{2}{,}78357=$$

$$=\bar{1}{,}57561 \quad \textit{donde} \quad \frac{\alpha}{2}=22^{\circ}\,6'\,30'',97 \quad \textit{e} \quad \alpha=44^{\circ}\,13'\,1'',94.$$

J. P.

657 — Verifique a igualdade $\operatorname{tg}(\pi/4+x)-\operatorname{tg}(\pi/4-x)=2\operatorname{tg}2x$. R: $\operatorname{tg}(\pi/4+x)-\operatorname{tg}(\pi/4-x)=\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}-\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}=\frac{4\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}=2\operatorname{tg}2x$.

J. P.

658 — Determine sem recorrer às tábuas os valores de $\operatorname{cosec}855^\circ$ e de $\operatorname{cotg}(-3\pi/4)$. R: $\operatorname{cosec}855^\circ=\operatorname{cosec}135^\circ=\operatorname{cosec}45^\circ=\sqrt{2}$; $\operatorname{cotg}(-3\pi/4)=-\operatorname{cotg}3\pi/4=+1$. J. P.

659 — Considere um rectângulo $ABCD$, cuja base AB tem um comprimento duplo da altura. Tire pelo vértice A a perpendicular à diagonal DB. Figure o ponto E em que esta última recta corta DC. Demonstre que: $\overline{DE}=\overline{DC}/4$. R: *Os triângulos rectângulos* ADE *e* ABD, *são semelhantes pois que o ângulo agudo em* A *do 1.º é igual ao ângulo agudo em* B *do 2.º, por terem os lados respectivamente perpendiculares tem-se então:* $\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$ *e* $\overline{DE}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DC}^2/4}{\overline{DC}}=\overline{DC}/4$ *por ser* $\overline{DC}=\overline{AB}$ *e* $\overline{AD}=\overline{DC}/2$.

J. P.

660 — Como define máximo divisor comum de 3 números? Calcule, pelos métodos das divisões sucessivas e pelo da decomposição em factores primos o máximo divisor comum dos números: 405, 24 e 567. R: *Máximo divisor comum de vários números é o maior número que os divide simultâneamente.* *Como* $405=3^4.5$, $24=2^3.3$ *e* $567=3^4.7$ *será* m. d. c. $=3$.

J. P.

PONTO Nº 5

661 — Desenvolva pela fórmula do binómio de Newton a expressão $\left(\frac{3}{4}a-\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^5$ e faça as simplificações possíveis.

R: $\left(\frac{3}{4}a\right)^5-5\left(\frac{3}{4}a\right)^4.\sqrt{\frac{x}{2}}+10\left(\frac{3}{4}a\right)^3.\frac{x}{2}-10\left(\frac{3}{4}a\right)^2.\frac{x}{2}\sqrt{\frac{x}{2}}+5.\frac{3}{4}a.\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{4}\sqrt{\frac{x}{2}}=\frac{3^5}{4^5}a^5-\frac{5.3^4}{4^4}a^4\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{5.3^3}{4^3}.a^3.x-\frac{5.3^2}{4^2}a^2x\sqrt{\frac{x}{2}}+\frac{5.3}{4^4}ax^2-\frac{x^2}{4}\sqrt{\frac{x}{2}}$.

J. P.

662 — Enuncie os teoremas que utiliza para determinar o sinal que toma o valor dum trinómio do 2.º grau em x para os diferentes valores de x. R: *Se as raízes do trinómio são reais e desiguais o trinómio toma o sinal do coeficiente do têrmo em* x^2 *para valores de* x *maiores que a maior ou menores que a menor das raízes, e toma o sinal contrário para valores simultâneamente maiores que a menor e menores que a maior das raízes.*

Se as raízes são iguais o trinómio toma sempre o sinal do coeficiente de x^2 *excepto para o valor das raízes para o qual se anula.*

Se as raízes são números complexos o trinómio toma sempre o sinal do coeficiente de x^2, *qualquer que seja o valor de* x.

J. P.

663 — Determine m na equação $x^2-6x-m=0$ de modo que uma das raízes seja dupla da outra. R: *Seja* α *a menor das raízes; será* $\alpha+2\alpha=6$, *e* $2\alpha^2=m$ *donde* $m=8$. J. P.

664 — As duas diagonais dum losango têm comprimentos iguais a $14^m,67$ e $19^m,81$. Calcule, recorrendo ao cálculo logarítmico, as medidas dos ângulos do losango. R: *Se forem* α *e* β *os ângulos do losango será* $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{19,81}{14,67}$ *e* $\beta=180^\circ-\alpha$. *Será* $\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\log 19,81+\operatorname{colog}14,67=1,29688+\bar{2},83357=0,13045$ *donde* $\frac{\alpha}{2}=53^\circ\,28'\,42''$, $\alpha=106^\circ\,57'\,24''$ *e* $\beta=73^\circ\,2'\,36''$.

J. P.

665 — Escreva a expressão geral dos ângulos que têm a mesma cosecante que o ângulo $76^\circ\,13'$. R: *A expressão geral é* $x=n.360^\circ+(-1)^n.(76^\circ\,13')$.

J. P.

666 — Determine sem recorrer às tábuas, os valores de: $\operatorname{tg}(-75^\circ)=\operatorname{tg}(-45^\circ-30^\circ)$ e de $\operatorname{sen}13\pi/6$. R: $\operatorname{tg}(-75^\circ)=-\operatorname{tg}(45^\circ+30^\circ)=-\frac{\operatorname{tg}45^\circ+\operatorname{tg}30^\circ}{1-\operatorname{tg}45^\circ\operatorname{tg}30^\circ}=-\frac{1+1/\sqrt{3}}{1-1/\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=-\frac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}=-\frac{3+1+2\sqrt{3}}{2}=-(2+\sqrt{3})$ *e* $\operatorname{sen}13\pi/6=\operatorname{sen}(2\pi+\pi/6)=\operatorname{sen}\pi/6=1/2$.

J. P.

667 — Considere duas circunferências tangentes interiormente no ponto A. Tire pelo ponto B diametralmente oposto ao ponto A na circunferência maior uma tangente BC à circunferência menor. Determine o outro ponto D em que esta tangente corta a circunferência maior. Demonstre que AC é a bissectriz do ângulo das rectas AB e AD. R: *Designemos por* O *o centro de circunferência de raio menor. Equivale o problema a demonstrar que os ângulos* $\widehat{OAC}$ *e* $\widehat{CAD}$ *são iguais. Ora o triângulo* BAD *é rectângulo em* D *e o triângulo* BOC *é também rectângulo e assim os lados* OC *e* AD *são paralelos, e portanto* $\widehat{ACO}=\widehat{CAD}$; *por outro lado o triângulo* COA *é isósceles e é* $\widehat{ACO}=\widehat{OAC}$ *logo* $\widehat{OAC}=\widehat{CAD}$.

J. P.

668 — Decomponha o número 810 em factores primos. Determine o número de divisores positivos de 810. Indique quais são êsses divisores. R: $810=2.3^4.5$ *logo o número de divisores é dado por* $N=(1+1)(4+1)(1+1)=20$. *Os divisores são os termos do desenvolvimento do produto* $(1+2)(1+3+3^2+3^3+3^4)(1+5)$.

J. P.

Faculdade de Engenharia da Universidade do Pôrto

PONTO N.º 5

669 — Num rectângulo cujos lados diferem de um quilómetro a diagonal mede 5 quilómetros. ¿Quais são as dimensões dos lados do rectângulo? R: *Sejam* x *e* x+1 *os lados do rectângulo. Será* $x^2+(x+1)^2=25$ *ou* $x^2+x-12=0$ *cujas soluções são* $x=3$ *e* $x=-4$; *a segunda solução não serve ao problema e portanto os lados medem* 3 *e* 4 *quilómetros.*

J. P.

670 — Sendo $120\sqrt{y}$ o quarto têrmo do desenvolvimento de: $\left(\sqrt{y}-\frac{1}{y}\right)^{10}$ determinar o têrmo seguinte sem fazer o desenvolvimento. R: *No desenvolvimento de* $(x+a)^m$ *a razão do têrmo de ordem* p+1 *para o anterior é dado por* $\frac{T_{p+1}}{T_p}=\frac{m-p+1}{p}.\frac{a}{x}$. *No nosso caso teremos* $\frac{T_5}{T_4}=\frac{10-4+1}{4}.\frac{1}{y\sqrt{y}}$ *donde* $T_5=\frac{210}{y}$.

J. P.

671 — Resolver a equação $\frac{a}{x}=\frac{x-1}{x-a}$ e determinar os limites entre os quais a deve estar compreendido para que as raízes sejam reais. R: *A equação proposta é equivalente a* $a(x-a)=x(x-1)$ *para todos os valores de* $x \neq a$. *E então virá* $x^2-(a+1)x+a^2=0$ *cujas soluções são* $x=\frac{a+1\pm\sqrt{-3a^2+2a+1}}{2}$. *Para que as raízes sejam reais é necessário que* $-3a^2+2a+1\geq 0$ *e portanto os valores de* a *tais que* $-1/3\leq a\leq +1$ *são os valores que pode ter* a *para que as raízes da proposta sejam reais.* J. P.

672 — Num triângulo rectângulo sabe-se que um cateto mede $20^m,15$ e o ângulo adjacente $27^o\,30'\,45''$. ¿A que distância da hipotenusa está o vértice do ângulo recto? Calcule-a pelos logarítmos. R: *Se designarmos por* h *essa distância será* $h=20,15 \operatorname{sen} 27^o\,30'\,45''$ m. J. P.

673 — Demonstrar que: $\operatorname{tg} 4\alpha=\frac{2\cos\alpha(\operatorname{sen}3\alpha-\operatorname{sen}\alpha)}{2\cos\alpha(\cos 3\alpha-\cos\alpha)+1}$.

R: *Tem-se:* $\operatorname{tg}4\alpha=\frac{2\operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha}=\frac{4\operatorname{sen}\alpha\cos^3\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha}{\cos^4\alpha+\operatorname{sen}^4\alpha-6\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}$. *Provemos agora a igualdade dos dois membros. Para isso transformemos convenientemente as expressões do 2.º membro. Obtém-se sucessivamente* $\operatorname{sen}3\alpha-\operatorname{sen}\alpha=3\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^3\alpha-\operatorname{sen}\alpha(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)=2\operatorname{sen}\alpha\cos^2\alpha-2\operatorname{sen}^3\alpha$; $2\cos\alpha(\operatorname{sen}3\alpha-\operatorname{sen}\alpha)=4\operatorname{sen}\alpha\cos^3\alpha-4\operatorname{sen}^3\alpha\cos\alpha$; $\cos 3\alpha-\cos\alpha=\cos^3\alpha-3\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha-\cos\alpha(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)=-4\cos\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$; $2\cos\alpha(\cos3\alpha-\cos\alpha)+1=-8\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha+(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha)^2=\cos^4\alpha+\operatorname{sen}^4\alpha-6\cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$. M. Z.

674 — Pelo método geométrico das figuras simétricas determine o ponto de uma recta dada tal que as tangentes a duas circunferências dadas façam ângulos iguais com essa recta. Discutir as soluções possíveis. R: *Sejam* Γ *e* Γ' *as circunferências dadas e* r *a recta. Constrói-se a circunferência* Γ'' *simétrica de* Γ' *em relação a* r. *As tangentes comuns a* Γ *e* Γ'' *determinam sôbre* r *os pontos soluções do problema. Haverá 4 sol. caso geral;* 3 *se* r *fôr paralela a uma das tangentes, ou não o sendo se passar por um dos pontos de encontro delas;* 2 *se passar por um dêsses pontos e fôr paralela a uma das tangentes ou se unir os centros de* Γ *e* Γ'; 1, *se unindo* r *êsses centros,* $\Gamma=\Gamma'$; *um número infinito se* Γ *e* Γ' *forem simétricas em relação a* r. J. P.

675 — Demonstre que a soma de dois números deminuída da sua diferença é o dôbro do menor. ¿Em que propriedade se baseia a demonstração? R: *Sejam* a *e* b *os números. Será então:* $(a+b)-(a-b)=2b$ *ou* $(a+b)-a+b=2b$ *e* $b+b=2b$. *Baseia-se na propriedade da subtracção que se pode enunciar: para subtrair dum número uma diferença pode-se subtrair do número o aditivo e adicionar ao resultado o subtrativo.* J. P.

PONTO N.º 4

676 — Encontrar os três lados de um triângulo rectângulo, sabendo que êsses três lados são três números inteiros consecutivos. R: *Sejam* $x-1$, x *e* $x+1$ *os lados do triângulo, entre os quais existirá a relação* $x^2+(x-1)^2=(x+1)^2$ *ou* $x^2-4x=0$ *equação que tem duas soluções* $x=0$ *e* $x=4$ *das quais só a segunda serve. Os lados são então* 3, 4 *e* 5. J. P.

677 — Sendo o número das combinações de n objectos três a três sete vezes o número dêsses objectos, determine n. R: *Será* $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}=7n$ *expressão que é equivalente à equação* $n^2-3n-40=0$ *cujas soluções são* $n=8$ *e* $n=-5$ *das quais só a primeira serve, como é óbvio.* J. P.

678 — Simplificar a fracção seguinte: $\frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}$. R: *Em vista das raízes dos trinómios numerador e denominador serem respectivamente* -7 *e* -3; -3 (raiz dupla), *poderemos escrever.* $\frac{x^2+10x+21}{2x^2+12x+18}=\frac{(x+7)(x+3)}{2(x+3)^2}=\frac{x+7}{2x+6}$. J. P.

679 — Calcule pelos logarítmos a área do octógono regular cujo perímetro é 76 metros. R: *A área dum polígono regular é dada pela expressão* $A=\frac{n.l.ap}{2}$. *Ora o apótema do octógono é* $ap=\frac{1}{2}\operatorname{cotg}22^o\,30'$ *logo a área do octógono pedida é* $A=\frac{76\times 9,5}{4}\cdot\operatorname{cotg}22^o\,30'$ $\log A=\log 76+\log 9,5+\log\operatorname{cotg}22^o30'+\operatorname{colg}4=1,88081+0,97772+0,38278+\bar{1},39794=2,63925$ *e portanto* $A=435,76\ m^2$. J. P.

680 — Simplificar a expressão $\frac{\operatorname{sen}2(x-\pi/2)\sec(3\pi-2x)}{\operatorname{cotg}(3\pi/2-x)}$ transformando-a numa expressão em $\operatorname{tg}x$. R:

$$\frac{\operatorname{sen}2(x-\pi/2)\sec(3\pi-2x)}{\operatorname{cotg}(3\pi/2-x)}=\frac{2\operatorname{sen}(x-\pi/2)\cos(x-\pi/2)\cdot\frac{1}{\cos(\pi-2x)}}{\operatorname{cotg}(\pi/2-x)}=$$

$$=\frac{-2\cos x\operatorname{sen}x\cdot\frac{1}{-\cos 2x}}{\operatorname{tg}x}=\frac{\frac{\operatorname{sen}2x}{\cos 2x}}{\operatorname{tg}x}=\frac{2\operatorname{tg}x}{(1-\operatorname{tg}^2x)\operatorname{tg}x}=\frac{2}{1-\operatorname{tg}^2x}.$$

J. P.

681 — É dada uma circunferência $O(R)$ e nela um ponto A e uma corda $\overline{BC}$. Conduzir por A, pelo método dos lugares geométricos, uma segunda corda que seja dividida em duas partes iguais pela primeira. Discutir as soluções possíveis. R: *O lugar geométrico dos pontos médios das cordas que passam por* A *é uma circunferência tangente interiormente à dada no ponto* A *e de raio* $\frac{R}{2}$. *Os pontos de encontro dêste lugar com a corda* $\overline{BC}$ *definem com o ponto* A *a corda pedida. Assim haverá duas, uma ou nenhuma solução, consoante o número de pontos de encontro de* $\overline{BC}$ *com a circunferencia auxiliar.* J. P.

682 — A divisão dos números inteiros gosa da propriedade distributiva? Justifique a resposta. R: *Gosa. Sejam, por exemplo, os números* a *e* b *que divididos por* d *dão os cócientes* q_1 *e* q_2. *Será* $(a+b):d=q_1+q_2=a:d+b:d$. *Efectivamente como* $a=dq_1$ *e* $b=dq_2$ *virá* $a+b=dq_1+dq_2=d(q_1+q_2)$ *ou seja* $(a+b):d=q_1+q_2$ *c. q. d.* J. P.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

I

683 — *a)* Enuncie as condições necessárias e suficientes para que uma equação do 2.º grau de coeficientes reais tenha raízes reais e positivas. *b)* Resolva e faça a discussão do problema seguinte: determinar a altura dum triângulo rectângulo conhecendo a hipotenusa a e a soma S dos catetos com a altura. R: *b)* $b+c+h=S$ *escreve-se sucessivamente* $b+c=S-h$, $b^2+c^2+2bc=S^2+h^2-2Sh$, $h^2-2(a+S)h+S^2-a^2=0$, *donde* $h=a+S\pm\sqrt{2a(a+S)}$. *O problema admite apenas a solução* $h=a+S-\sqrt{2a(a+S)}$ *que é positiva porque, de* $a+S>\sqrt{2a(a+S)}$

vem $S>a$ *e, se em qualquer triângulo a soma de dois lados é maior do que o terceiro, será por maioria de razão,* $b+c+h>a$.

Com efeito, de $\begin{cases} b^2+c^2=a^2 \\ 4b^2c^2=4a^2h^2 \end{cases}$ *ou* $z^2-a^2z+4a^2h^2=0$ *vem*

$z=\frac{a^2}{2}\pm\sqrt{\frac{a^4}{4}-4a^2h^2}=\frac{a}{2}\left[a\pm\sqrt{(a+4h)(a-4h)}\right]$ *e, para que os dois valores de* z *sejam reais, terá de ser* $a>4h$, *condição que só é verificada para* $h=a+S-\sqrt{2a(a+S)}$ *se* $23a^2+8aS-16S^2>0$.

684 — Resolver a equação $(a+\sqrt{x})^4+(a-\sqrt{x})^4=0$ e determinar *a* de modo que a soma dos quadrados das raízes seja igual a 17. R: $2x^2+12a^2x+2a^4=0$, $x=a^2(-3\pm2\sqrt{2})$. *Sejam* α *e* β *as raízes. Será* $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=36a^4-2a^4=34a^4$ $34a^4=17\rightarrow a=2^{-1/4}$ *e os quatro valores de* a *que satisfazem ao problema são* $\pm1/2$, $\pm i/2$.

685 — Defina proporcionalidade directa e inversa. Classifique a proporcionalidade, se existir, nos casos seguintes: *a)* lados e alturas correspondentes num triângulo qualquer; *b)* perímetros de circunferências e raios respectivos; *c)* áreas de círculos e raios respectivos; *d)* volumes de esferas e raios respectivos.

686 — Determinar o lugar geométrico dos pontos do espaço equidistantes de 3 pontos dados, não em linha recta. R: *Sejam* A, B, C *os três pontos dados. O lugar geométrico cuja determinação é proposta é a intersecção dos três planos mediadores dos segmentos* AB, BC *e* AC. *A intersecção é uma recta, visto que os três planos são perpendiculares ao plano definido por* A, B *e* C, *a qual encontra êste plano no centro da circunferência definida pelos pontos dados.*

687 — Determinar os lados e os ângulos dum triângulo isósceles conhecendo o perímetro p dêsse triângulo e a sua altura h. Aplicação numérica: $p=8$, $h=2$. R: *Tem-se imediatamente,* $\begin{cases} p=2l+b \\ 4h^2=4l^2+b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} p^2=4l^2+b^2+4lb \\ 4h^2=4l^2+b^2 \end{cases}$ $\begin{cases} p^2-4h^2=4lb \\ 4h^2=4l^2+b^2 \end{cases}$

$z^2-4h^2z+(p^2-4h^2)^2=0$, $z=2h^2\pm\sqrt{8p^2h^2-12h^4-p^4}$ *donde* $l=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2h^2+\sqrt{8p^2h^2-12h^4-p^4}}$, $b=+\sqrt{2h^2-\sqrt{8p^2h^2-12h^4-p^4}}$.

688 — Diga como compara fracções e em que propriedades se baseia. Prove a desigualdade $(n!)^2/2n!<1/n$. R: *De* $(n!)^2/2n!<1/n$ *vem* $n.(n!)^2<2n!$, $n.n!<(n+1)(n+2)\cdots2n$ *mas* $n.n!<(n+1)!$ *e* $(n+1)!<(n+1)(n+2)\cdots2n$ *logo* $(n!)^2/2n!<1/n$.

II

689 — *a)* Defina poliedro regular e descreva sumàriamente os poliedros regulares convexos existentes. Diga qual a razão porque não há poliedros regulares convexos cujas faces tenham mais de cinco lados. *b)* Resolva o seguinte problema: dado um tetraedro regular, diga como deve ser dividida a altura para que, tirando pelo ponto de divisão um plano paralelo à base, o tetraedro fique dividido em dois sólidos de volumes iguais. R: *b) Seja* h *a altura e* V *o volume do tetraedro dado. Para que os volumes dos dois sólidos sejam iguais é necessário e suficiente que o volume do tetraedro que a intersecção determina seja* $V/2$, *ou, o que é o mesmo, que* $1/2=(h-x)^3/h^3$ *donde* $x=h(1-1/\sqrt[3]{2})$ *sendo* x *a distância do plano ao vértice do tetraedro dado.*

A altura do tetraedro dado ficará dividida na razão $1/(\sqrt[3]{2}-1)$.

690 — Calcular $x=\sqrt{\text{sen }71^\circ 21'}\cdot\frac{247,453}{\cos 123^\circ 10'}$.

R: $x=-4,41298$.

691 — Verificar que, sendo α e β ângulos quaisquer, é verdadeira a relação

$$(\text{sen }\alpha+\text{sen }\beta)(\text{sen }\alpha-\text{sen }\beta)=\text{sen }(\alpha+\beta)\text{ sen }(\alpha-\beta).$$

$$R:\ 4\text{ sen }\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\text{ sen }\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$
$$=4\text{ sen }\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\text{ sen }\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

692 — Dada uma circunferência, deduzir a relação a que deve satisfazer o ângulo ao centro α para que a área do segmento de círculo, determinado pela corda correspondente a êsse ângulo, seja $1/n$ da área do círculo. R: *A área do segmento* AMB *tem por medida a diferença das medidas das áreas do sector* OAB *e do triângulo* OAB. $S=\frac{\alpha r^2}{2}-\frac{r^2\text{sen }\alpha}{2}=\frac{r^2}{2}(\alpha-\text{sen }\alpha)$, $S_c=\pi r^2$ *e a relação pedida é* $n(\alpha-\text{sen }\alpha)=2\pi$.

693 — Resolver um triângulo rectângulo conhecendo o seu perímetro e a altura correspondente à hipotenusa.

Aplicação numérica: perímetro 26 m., altura 7,2 m.

R: $\begin{cases} a+b+c=p \\ bc=ah \\ b^2+c^2=a^2 \end{cases}$ $\begin{cases} b+c=p-a \\ bc=ah \\ b^2+c^2=a^2 \end{cases}$ b, c *são as raízes da equação* $z^2+(a-p)z+ah=0$, $z=\frac{p-a}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p-a}{2}\right)^2-ah}=\frac{1}{2}\left(p-a\pm\sqrt{p^2+a^2-2a(p-2h)}\right)$. *Por outro lado, de* $a+b+c=p$ *vem* $a^2+a(p-a)+ah=p^2/2$, $a=\frac{p^2}{2(p+h)}$.

Aplicação numerica: $p=36$, $h=7,2$, $a=15$, $b=10,5$, $c=10,5$, $z=\frac{1}{2}\left(21\pm\sqrt{1521-1521}\right)=21/2$, *o triângulo é isósceles.*

694 — Defina progressão geométrica. Resolva o seguinte problema: determinar três números em progressão geométrica conhecendo a sua soma S e o seu produto p.

As soluções dos exercícios 683 a 693 são devidas ao assistente Dr. A. Sá da Costa.

Instituto Superior Técnico — Julho de 1940

1.ª PROVA

695 — São dados 2 números. O primeiro é meia proporcional entre o segundo e metade da diferença entre o segundo e o primeiro, o segundo é meia proporcional entre o primeiro e 48. Quais são os números? R: *Designando os números por* x *e* y, *tem-se:* $x^2=y.(y-x)/2$, $y^2=48x$. *Resolvendo o sistema:* $\begin{cases} 2x^2=y^2-xy \\ y^2=48x \end{cases}$ *tem-se* $2x^2-48x+xy=0$, $y^2=48x$, *e uma primeira solução é* $(0,0)$. *Agora* $\begin{cases} 2y^2+48y-48^2=0 \\ x=y^2/48 \end{cases}$ *donde mais duas soluções* $(48,-48)$ *e* $(12,24)$.

696 — Possuem-se duas qualidades de um adubo contendo percentagens desconhecidas de matéria activa. Sabe-se que juntando à primeira 20 % de areia se obtém um adubo com 12 % de matéria activa e que juntando à segunda 10 % de areia se obtém um adubo com 17 % de matéria activa. Que pesos das duas qualidades existentes se devem misturar para obter uma tonelada de adubo com 16 %? R: *Representando por* x *e* y *as percentagens em matéria activa no 1.º e no 2.º adubos e por* p *e* q *os pesos a partir dos quais se fizeram as duas misturas, exprimindo que a adjunção de areia não faz* *variar as quantidades de matéria activa:* $\frac{x}{100}p=\frac{12}{100}(p+\frac{20}{100}p)$, $\frac{y}{100}q=\frac{17}{100}(q+\frac{10}{100}q)$ *donde* $x=14{,}4$ *e* $y=18{,}7$. *Designando por* p' *e* q' *os pesos dos dois adubos que devem misturar-se e exprimindo que a quantidade de matéria activa na mistura é igual à soma das quantidades de matéria activa nos componentes:* $0{,}144p'+0{,}187q'=0{,}16$ *com* $p'+q'=1$. *Então* $p'=0{,}628\,t$, $q'=0{,}372\,t$.

697 — Uma ilha tem 6.000 habitantes e a população aumenta 2,5 % ao ano. A quantidade de trigo que a ilha produz aumenta cada ano 7.000 kg e presume-se que daqui a quinze anos a produção começa a ser insuficiente para o consumo. Qual é a produção actual do trigo, sabendo-se que cada habitante consome em média 50 kg por ano? R: *Admitindo que a colheita no início do 14º ano chegou justamente para o consumo durante êsse ano e ainda que só consumiram os indivíduos existentes no início dêsse ano, a produção actual será em kg:* $x=6000\,.\,(1+0{,}025)^{13}\,.\,50-13\,.\,7000$.

698 — Numa circunferência de raio R inscreve-se um triângulo isósceles em que a base é igual a metade de um dos outros lados. Calcular a área do triângulo e o comprimento dos 3 arcos em que a circunferência fica dividida. R: *Representando por* 2α *o ângulo oposto à base será* $\operatorname{sen}\alpha=1/4$. *Então* $l=2R\operatorname{sen}2\alpha$ *e* $A=\frac{l\,.\,2l\cos\alpha}{2}=4R^2\operatorname{sen}^2 2\alpha\cos\alpha=\frac{15\sqrt{15}}{64}R^2$. *Os comprimentos dos arcos serão* $s_1=\frac{4\alpha}{360}2\pi R$, $s_2=s_3=\frac{2\pi R-s_1}{2}$.

699 — Dada uma circunferência de raio R e uma corda que passa à distância $R/2$ do centro, determinar as áreas em que o círculo fica dividido. R: *A corda subtende um arco* α *de* 120^0, *de facto* $\alpha=2\operatorname{arc}\cos\frac{R/2}{R}$. *A área do segmento menor será* $A_1=\pi R^2/3-R^2\sqrt{3}/4=R^2(\pi/3-\sqrt{3}/4)$ *e a do maior* $A_2=2\pi R^2/3+R^2\sqrt{3}/4=R^2(2\pi/3+\sqrt{3}/4)$.

700 — Numa pirâmide hexagonal regular, ôca e invertida, com o lado da base igual a l, e a altura $4l$, lança-se uma esfera de raio igual a $l/2$. A que distância do vértice fica o centro da esfera? R: *Supondo as duas superfícies cortadas por um plano passando pelo eixo e perpendicular a um lado da base tem-se* $\frac{\sqrt{x^2-R^2}}{l/2}=\frac{4l}{a}$, *designando por* a *o apótema da da base que é* $a=l\sqrt{3}/2$. *Será* $x=l/2\cdot\sqrt{67/3}$.

2.ª PROVA

701 — Uma estante contém livros repartidos igualmente por p prateleiras. O número de prateleiras é 6,5 vezes menor que o número de livros de cada uma, e o número de combinações dos livros de cada prateleira tomados p a p é 46 vezes maior que o número de combinações $p-2$ a $p-2$. Quantos livros há na estante? R: *Se fôr* x *o número de livros de cada prateleira* $x=6{,}5p$ *e* $\frac{(x-p+2)(x-p+1)}{p(p-1)}=46$ *donde* $p=4$ *e* $x=26$ *e* $X=px=104$.

702 — Verificar a identidade: $1-\operatorname{tg}^4 x=\frac{\cos 2x}{\cos^4 x}$.

R: $1-\operatorname{tg}^4 x=\frac{\cos^4 x-\operatorname{sen}^4 x}{\cos^4 x}=\frac{(\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x)(\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x)}{\cos^4 x}=\frac{\cos 2x}{\cos^4 x}$.

703 — Qual é o número cuja raíz quarta é igual à raiz quadrada menos 42? Verifique o resultado. R: *Sendo* x *o número e considerando só raizes aritméticas, tem-se* $\sqrt[4]{x}=\sqrt{x}-x^2$ *ou* $(\sqrt[4]{x})^2-\sqrt[4]{x}-42=0$, *donde* $\sqrt[4]{x}=7$ *ou* $x=2401$.

704 — Dado um triângulo rectângulo de catetos a e b e um ponto P sôbre a hipotenusa, determinar a posição dêste ponto de forma que a soma das suas distâncias aos catetos seja um número dado k. Indicar os valores possíveis de k e analisar o que se passa no caso de ser a igual a b. R: *Se o triângulo fôr* [OAB] *e forem* x *e* y *as distâncias de* P *a* OB *e* OA *tem-se* $x+y=k$ *e* $\frac{y}{a-x}=\frac{b}{a}$. *Então* $x=a\frac{b-k}{b-a}$, $y=b\frac{k-a}{b-a}$. *Como agora deve ser* $0\leq x\leq a$ *e* $0\leq y\leq b$ *supondo* $b>a$ *deverá ser* $a\leq k\leq b$. *Quando fôr* $a=b$ *deve ser* $k=a=b$ *e as duas equações não são distintas: todos os pontos da hipotenusa verificam a condição do enunciado.*

705 — Um tetraedro regular está inscrito numa esfera de raio R. Qual é a distância da superfície esférica ao centro de cada face? R: *Se fôr* r *o raio da esfera inscrita* $d=R-r$. *Agora, representando por* l *a medida comum das arestas, as medidas do apótema da base e da altura duma face lateral são respectivamente* $l\sqrt{3}/6$ *e* $l\sqrt{3}/2$ *e portanto a altura da pirâmide* $R+r=l\sqrt{6}/3$. *Por outro lado* $(R+r)(R-r)=l^2/3$. *Então* $R=l\sqrt{6}/4$ *e* $r=l\sqrt{6}/12$, $r=1/3R$ *e* $d=2/3R$.

706 — Numa circunferência de raio R traça-se um triângulo inscrito. Dois dos lados dêste triângulo limitam segmentos circulares cujas alturas são $R/6$ e $R/8$. Calcular a área do triângulo. R: *Sejam* V_1, V_2 *e* V_3 *os vértices e* O *o centro da circunferência. Se forem* h_1, h_2 *e* h_3 *as distâncias a* O *dos lados do triângulo,* $r_1=h_1/R$, $r_2=h_2/R$ *e* $2\alpha_1$, $2\alpha_2$, $2\alpha_3$ *os ângulos em* O *dos 3 triângulos: área de* $[V_2OV_3]=h_1R\sqrt{1-r_1^2}$. *área de* $[V_3OV_1]=h_2R\sqrt{1-r_2^2}$, *área de* $[V_1OV_2]=R^2\operatorname{sen}\alpha_3\cos\alpha_3=-R^2\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2)$. *As fórmulas da multiplicação e da adição permitem calcular* $-\operatorname{sen}(\alpha_1+\alpha_2)\cos(\alpha_1+\alpha_2)=r_1\sqrt{1-r_1^2}(1-2r_2^2)+r_2\sqrt{1-r_2^2}(1-2r_1^2)$. *A área procurada será a soma algébrica das áreas obtidas.*

As soluções dos exercícios 695 a 706 são devidas ao sr. Gustavo Ramos de Castro.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Exame final, Julho de 1940

707 — Reduza à forma $a+bi$ o produto

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3i \\ 2i & 0 & 1 \\ -1 & i & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & i \\ 2i & -1 \end{vmatrix}.$$

R: $1-4i$.

708 — Deduza a equação dum plano perpendicular à recta de equações $x=2z-3$, $y=1$ e que seja plano diametral da quádrica $x^2-2y^2-z^2+4xy-2yz-2x+4y-2z+7=0$.
R: $2x-z=0$.

709 — Deduza a equação da recta do plano radical das esferas Σ_1 e Σ_2 e que seja perpendicular à recta $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-6}{3}$ e a encontre; Σ_1 é tangente a XOY e a XOZ com centro no plano $x=4$ e raio $R=5$, Σ_2 tem por equação $x^2+y^2+z^2-5x-11y-8z+25=0$. R: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{5}=\frac{z-6}{1}$.

710 — Deduza a equação da parábola que passa pelos pontos $P_1(0,0)$, $P_2(0,1)$ e $P_3(1,0)$ e é tangente ao eixo OY na origem das coordenadas. Indique se se trata dalgum caso de degenerescência. R: $x(x-1)=0$ *(duas rectas paralelas e distintas).*

711 — Resolva a equação $6x^6-25x^5-3x^4-91x^3-103x^2+30x+20=0$. R: $-1, 5, 1/2, -1/3, \pm\sqrt{2}\,i$.

712 — Calcule a área do triângulo definido pelos pontos P, Q e R; P é centro da circunferência $x^2+y^2-2x-6y-1=0$, Q é centro da cónica $x^2+2y^2-3xy+x+5y-5=0$ e R é vértice da parábola $y^2=8x$. R: $S=5/2$.

713 — Deduza a equação da cónica $x^2+4y^2+4x+16y+4=0$ referida aos seus eixo. R: $x^2/4+y^2/16=1$.

714 — Determine os máximos e mínimos da função $y=\frac{9}{x}+\frac{4}{3-x}$. R: *Máximo* $y=25/3$ *para* $x=9/5$; *mínimo* $y=1/3$ *para* $x=9$.

715 — Calcule a distância do ponto P ao plano π; P é o centro radical do sistema formado pelas esferas $\Sigma_1\equiv x^2+y^2+z^2-x+3y+z-7=0$, $\Sigma_2\equiv x^2+y^2+z^2+3x+2y+3z-9=0$, $\Sigma_3\equiv x^2+y^2+z^2+x+6y-z-15=0$ e $\Sigma_4\equiv x^2+y^2+z^2+3y+4z-8=0$, π é o plano diametral da quádrica $3x^2-3z^2+4xy-2xz+6y-1=0$, conjugado das cordas paralelas à recta de equações: $y-2=-2z$ e $x=2$. R: $d=11/\sqrt{34}$.

716 — Determine $\lim\limits_{x=\pi/4}\frac{\sqrt{2}-\operatorname{sen}x-\cos x}{\log(\operatorname{sen}2x)}$. R: $-\sqrt{2}/4$.

717 — Deduza a equação da circunferência que passa pelo ponto $P(0,-1)$ e forma com a circunferência de equação $x^2+y^2-2x+4y+5=0$ um sistema que tem por eixo radical uma das assíntotas da hiperbole $3x^2+5xy-2y^2-x-9y+5=0$. R: $-3(x^2+y^2)+10y+7=0$ *ou* $x^2+y^2+8y+7=0$.

718 — Torne logarítmica, pelo método do ângulo auxiliar, para o cálculo do elemento a, a fórmula $\cos a.\cos C=\operatorname{sen}a.\operatorname{cotg}b-\operatorname{sen}C.\operatorname{cotg}B$.

Nota — Agrupe no mesmo membro as parcelas que contenham funções da incógnita e ponha em evidência $\cos C$ ou $\operatorname{cotg}b$. R: $\frac{\operatorname{cotg}b}{\cos C}=\operatorname{cotg}\varphi$, $\operatorname{sen}(\varphi-a)=\frac{\operatorname{tg}C.\cos\varphi}{\operatorname{tg}B}$.

719 — Deduza a equação da cónica que admite as rectas $3x-2y-7=0$ e $5x+y-3=0$ como diâmetros, é tangente à recta $y=2x-1$ no ponto $P_1(0,-1)$ e passa pelo ponto $P_2(1,-1)$. R: $4xy+y^2+8x-1=0$.

Os exercícios 707 a 719 e respectivas soluções, foram-nos cedidos pelo assistente Dr. J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — Exame final, 1940

720 — Verificar que, se $j^3=1$ $(j\neq1)$ *a* soma $S=j^n+j^{2n}$ (n inteiro) só pode tomar os valores $+2$ ou -1. R: *Tem-se* $0=j^3-1=(j-1)(j^2+j+1)$ *donde* $j^2+j=-1$ *(visto ser* $j\neq1$*). Se* $n=3k \rightarrow j^n=1$ *e* $S=2$; *se* $n=3k+1\rightarrow j^n=j$ e $S=j+j^2=-1$; *finalmente se* $n=3k+2\rightarrow S=j^2+j=-1$. M. Z.

721 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=\operatorname{sen}x+\cos x$. Estudar a sua inversão.

722 — Calcular quatro termos do desenvolvimento em série da função $y(x)=\frac{e^{x^2}}{1+x^2}$.

Calcular $y(1/2)$ com um êrro inferior a 10^{-3}.

I. S. C. E. F. — Exame final, 1940

723 — Estudar e representar geomètricamente as funções definidas pela equação $y^2-\operatorname{sen}2x=0$.

724 — Utilizar o desenvolvimento em série para o cálculo de $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ com um êrro inferior a 10^{-4}. R: *Fazendo* $x=-1/3$ *no desenvolvimento de* e^x, *vem* $e^{-1/3}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!3^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!3^n}+\cdots$. *Tomando para* $e^{-1/3}$ *o valor aproximado* $S_4=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2!3^2}-\frac{1}{3!3^3}+\frac{1}{4!3^4}$, *comete-se um êrro de que é limite superior* $\frac{1}{5!3^5}=\frac{1}{120.243}<\frac{1}{2.10^4}$ *(visto tratar-se duma série alterna e ser* $\frac{1}{5!3^5}$ *o módulo do primeiro têrmo desprezado). Basta pois efectuar o cálculo dos quatro últimos termos de* S_4 *com cinco decimais exactos.* M. Z.

725 — Verificar que a função $y(x)$ definida pela equação $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$ satisfaz à equação diferencial $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$.

CÁLCULO INFINITESIMAL

I. S. C. E. F. — Exame final, 17-7-1940

726 — Integrar a equação $y''=\frac{2y}{x^2}$. R: *A equação escreve-se* $x^2y''-2y=0$ *e reconhece-se que é linear e homogénea em* y *e* y''. *A substituição* $z=\log x$, $\frac{d^2z}{dx^2}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{dy}{dz}\right)$ *converte-a numa equação linear de coeficientes constantes* $z''-z'-2z=0$ *cuja equação característica* $k^2-k-2=0$ *admite as raízes* 2 *e* -1 *e cujo integral geral, portanto, é* $y=c_1e^{2z}+c^2e^{-z}$.

O integral geral da equação proposta é $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}$.

A equação proposta é conhecida sob o nome de equação da dúvida. *Cauchy duvidou que João Bernoulli a tivesse integrado. Parece que êste se limitou a eliminar as constantes* c_1 *e* c_2 *entre* $y=c_1x^2+\frac{c_2}{x}$ *e as duas primeiras derivadas.*

727 — Determinar a mínima distância da origem dos eixos coordenados à hipérbole $y^2-x^2+2x+3=0$ (eixos ortogonais). R: *A distância* d *dum ponto à origem é tal que* $d^2=x^2+y^2$. *No problema o ponto pertence à hipérbole* $y^2-x^2+2x+3=0$. *As condições de estacionaridade da função* d^2 *são, portanto*

$$\left\{\begin{array}{l} y^2-x^2+2x+3=0 \\ \begin{vmatrix} 2x & -2x+2 \\ 2y & 2y \end{vmatrix}=0 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} y^2-x^2+2x+3=0 \\ 2xy-y=0 \end{array}\right.$$

que conduzem a

$(x=5, y=5)$, $(x=-3, y=0)$ *e* $(x=1/2, y=\pm\sqrt{15}\,i/4)$.

Excluídas as duas últimas soluções, por serem complexas, as duas primeiras correspondem aos dois pontos da hipérbole mais próximos da origem, necessàriamente.

728 — A curva $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=t^2-1 \\ z=4t+2 \end{cases}$ será plana? R: *A curva proposta é plana porque a torsão é nula em todos os seus pontos, ou, o que é o mesmo, porque é nulo o determinante*

$$\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t & 2t & 4 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

As soluções dos exercícios 726 a 728 são do Dr. A. Sá da Costa.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — Exame final, Julho de 1940

729 — Seja A um operador linear definido no domínio D_A de um espaço de Hilbert. A condição necessária e suficiente para que exista, em D_A, uma base do espaço (um sistema orto-normado completo), é que D_A seja denso em todo o espaço.

730 — Seja H um operador de Hermite e $\mathcal{M}$ um dos seus espaços próprios. Demonstrar que H comuta com o operador $P_{\mathcal{M}}$ — projecção ortogonal sôbre $\mathcal{M}$.

731 — Sejam φ, ψ dois vectores normados independentes de um espaço de Hilbert. Determinar as constantes λ e os vectores fundamentaisdo operador $a \cdot P_{[\varphi]} + b \cdot P_{[\psi]}$. ¿Qual é o grau de multiplicidade de cada constante? Generalizar o problema a uma combinação linear qualquer de projecções.

Nota: Considerar separadamente as duas hipóteses: $\lambda=0$, $\lambda\neq 0$.

(Exercícios extraídos de «Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik — v. Neumann»). R. L. G.

F. C. P. — Exame final, Outubro de 1940

732 — Seja A um operador de Hermite com uma base (sistema orto-normado completo) de vectores fundamentais. Demonstrar que a continuïdade de A *é* equivalente à condição $|\lambda_i| \leq c, (i=1, 2, \cdots)$.

733 — Supondo que A é *também* definido-positivo, demonstrar que $\sum_{i=1}^{\infty}(A\varphi_i, \varphi_i) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i$, seja qual fôr o sistema orto-normado (completo) φ_i.

734 — Supondo que $E(\lambda)$ — decomposição da unidade relativa ao operador de Hermite A — é uma função contínua de λ no intervalo fechado $(\mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2)$, deduzir a ortogonalidade: $\{E(\mu_2)-E(\mu_1)\}\,\{E(\lambda)-E(\lambda-0)\}=0$.

Associando a êste resultado a hipótese de A admitir uma base de vectores fundamentais, concluir que $E(\lambda)$ se mantém constante no intervalo (μ_1, μ_2). Classificar o espectro de A.

¿Quais são os valores possíveis de grandeza física — A? ¿Qual é a probabilidade dêsses valores? ¿Tratar-se-á de uma grandeza contínua?

Nota — Para resolver o exercício 733 basta desenvolver $(A\varphi_i, \varphi_i)$ segundo a base de vectores fundamentais de A.

No exercício 734 considerar separadamente os intervalos $(\lambda<\mu_1)$, $(\mu_1 \leq \lambda \leq \mu_2)$ e $(\lambda > \mu_2)$, recorrendo sempre às propriedades características da projecção $E(\lambda)$.

Todos estes exercícios foram extraídos da obra de Neumann, anteriormente citada. R. L. G.

PROBLEMAS PROPOSTOS

735 — O problema n.º **324** (número 3 da *Gazeta de Matemática*, pg. 14) pode resolver-se por diferentes processos. Um dêsses processos conduz ao seguinte conjunto de soluções

$$x=\frac{4n+3}{6}\pi, \quad x=\frac{1-4n}{6}\pi, \quad x=\frac{12n\pm 1}{18}\pi, \quad x=\frac{12n+7}{18}\pi,$$

$x=\frac{12n+5}{18}\pi$. Porém, seguindo um outro caminho na resolução do mesmo problema, obtêm-se as soluções: $x=\frac{4n\pm 1}{6}\pi$, $x=\frac{4n\pm 1}{18}\pi$. Demonstrar a equivalência dos dois resultados.

736 — Sabe-se que $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r}+\binom{n}{r-1}$. Demonstrar que a proposição anterior se generaliza tomando a forma $\binom{n+t}{r}=\sum_{k=0}^{t}\binom{t}{k}\binom{n}{r-k}$ $(t \leqq r)$.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros — Revista dos Estudantes de Agronomia. Ano 23 — n.º 6, Ano 24 — n.º 1.

Portugaliae Mathematica — Revista trimestral — Faculdade de Ciências — Lisboa — Portugal. Vol. 2 — 1941 — Fascículo 1 — Março. Fascículo 2 — Junho.

Técnica — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T., n.º 119 (Abril de 1941), n.º 120 (Maio de 1941). O n.º 120 contém os enunciados dos pontos dos exames de aptidão ao I. S. T. realizados nos dois últimos anos.

— *Separata da* **Revista da Faculdade de Ciências** *da U. L. — Sôbre um problema de Tchebycheff* — Hugo Ribeiro.

Conceitos fundamentais da Matemática — Bento de Jesus Caraça — Biblioteca Cosmos — Lisboa. 1941 — Preço: 2$50.

RECTIFICAÇÕES

Na *resolução* do problema n.º 453 (*G. M.* n.º 5) onde se lê $\sqrt{\frac{5a^2+2a}{3}}$, 10^o, $\sqrt{\frac{5a^2+2a}{3}}\,\text{sen}\,10^o$, escreva-se respectivamente: $a\frac{\sqrt{21}}{3}$, $\text{arc sen}\,\frac{\sqrt{7}}{14}$, $a\frac{\sqrt{3}}{6}$.

H. R.

REFERÊNCIAS

A Direcção da «Gazeta de Matemática» agradece muito reconhecida as referências feitas por: *Diário de Lisboa*, *Diário de Notícias*, *Jornal do Comércio e das Colónias* e *Jornal de Notícias do Pôrto*.