GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XVIII **N.° 66-67** MARÇO-JUNHO 1957

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

Tipografia Matemática, L.da — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Telefone 771943 — LISBOA-N.

ANO XVIII—N.º 66-67 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO/JUNHO—1957

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda.—Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Introdução às álgebras de Boole

por **J. A. Vinha Novais**

A leitura dos artigos da Dr.ª TEODORA ALVES publicados na G. M. (n.os 40-42 e 49) despertaram-nos o interesse pela *Álgebra de* BOOLE. Sob a orientação do Dr. JOSÉ MORGADO estudamos, durante alguns meses do ano passado, a *Teoria dos Reticulados* (*Estruturas* na nomenclatura de O. ORE e V. GLIVENKO) de que as *Álgebras de* BOOLE são um caso particular:

Uma Álgebra de BOOLE *é um Reticulado distributivo e complementado.*

1. Denomina-se *Reticulado* todo o sistema $R[R, \vee, \wedge]$ constituido por um conjunto R e por duas operações, $\vee$-supremo e $\wedge$-ínfimo, satisfazendo aos *axiomas* seguintes:

***R1** (Comutatividade):* Para todo o par x, y de elementos de R tem-se

$$x \vee y = y \vee x \quad \text{e} \quad x \wedge y = y \wedge x .$$

***R2** (Associatividade):* Para todos os x, y, z de R tem-se

$$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \quad \text{e} \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$$

***R3** (Absorção):* Para todo o par x, y de R tem-se

$$x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$$

Os axiomas da Álgebra de BOOLE compreenderão, portanto, os axiomas $R1$-$R3$ e mais três axiomas que (i) exprimirão que o Reticulado R é distributivo; (ii) garantirão a existência de um complemento de cada elemento do Reticulado, para a definição do qual é necessário introduzir (iii) um terceiro axioma garantindo a existência de dois elementos extremos.

EXEMPLO 1. Consideremos o conjunto dos números reais e nele definidas as operações $x \vee y = \sup(x, y)$ e $x \wedge y = \inf(x, y)$, isto é, $x \vee y$ designa o maior dos números x, y e $x \wedge y$ designa o menor dos números x, y É imediato que o conjunto dos números reais assim algebrizado constitui um reticulado, isto é, satisfaz $R1 - R3$.

EXEMPLO 2. Consideremos o conjunto fundamental E e seja $\mathcal{B}$ o conjunto dos sub-conjuntos (ou partes) de E. Definindo entre os elementos de $\mathcal{B}$ as operações $\cup$ (reunião de conjuntos) e $\cap$ (intersecção de conjuntos), fàcilmente se verifica que o conjunto assim algebrizado goza das propriedades $R1 - R3$, isto é, é um Reticulado. É ainda um reticulado todo o *anel de conjuntos,* isto é, um sistema de conjuntos que, com A e B, contém $A \cup B$ e $A \cap B$. Um anel de conjuntos que, com A e B, contém a diferença $A-B$, diz-se um *corpo de conjuntos*.

EXEMPLO 3. Consideremos o conjunto $E=(1,2,3,4,6,12)$ e difinamos entre os seus elementos as operações $\vee$ e $\wedge$ pelas tábuas I e II. Verifica-se que o conjunto E assim algebrizado goza das propriedades $R1-R3$ (O conjunto E é o conjunto dos divisores de 12).

I

$\vee$	1	2	3	4	6	12
1	1	2	3	4	6	12
2	2	2	6	4	6	12
3	3	6	3	12	6	12
4	4	4	12	4	12	12
6	6	6	6	12	6	12
12	12	12	12	12	12	12

II

$\wedge$	1	2	3	4	6	12
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	2	2
3	1	1	3	1	3	3
4	1	2	1	4	2	4
6	1	2	3	2	6	6
12	1	2	3	4	6	12

EXERCÍCIO 1. Considere o conjunto $E=(a,b,c)$ e forme o conjunto $\mathscr{B}$ dos sub-conjuntos de E. Algebrize o conjunto $\mathscr{B}$ pelas operações $\cup$ e $\cap$ e forme as tábuas destas operações.

EXERCÍCIO 2. Algebrize o conjunto dos divisores de 30 de maneira análoga à usada no EXEMPLO 3 ($x \vee y$ é o m. m. c. e $x \wedge y$ é o m. d. c. calculados dentro do conjunto). Considere o conjunto E constituído pelos divisores primos de 30 e o conjunto $\mathscr{B}=\{0, (2), (3), (5), (2,3), (2,5), (3,5), (2,3,5)\}$ dos sub-conjuntos de E. Mostre que os reticulados dos divisores de 30 e o reticulado que se obtém da algebrização do conjunto $\mathscr{B}$, por meio das operações $\cup$ e $\cap$, são isomorfos.

EXERCÍCIO 3. Mostre que no caso do EXEMPLO 3 não existe tal isomorfismo.

2. Álgebras de Boole.

Nos exemplos 2 e 3 e no conjunto dos divisores de 30 (EXERCÍCIO 2) existem dois elementos, a e b, gosando das seguintes propriedades $a \vee x = x$ e $a \wedge x = a$, e $b \wedge x = x$ e $b \vee x = b$ quaisquer que sejam os elementos x do reticulado: no EXEMPLO 2 é $a=0$ (sub-conjunto vazio de E) e $b=E$; no EXEMPLO 3 é $a=1$ e $b=12$; e no conjunto dos divisores de 30 é $a=1$ e $b=30$. Além disso, no EXEMPLO 2 e no EXERCÍCIO 2 (mas não no EXEMPLO 3), verifica-se ainda que, para cada elemento x, existe um outro elemento, x', tal que $x \vee x' = b$ e $x \wedge x' = a$: no EXEMPLO 2, se x representa determinado conjunto de $\mathscr{B}$, x' representa o conjunto formado por todos os elementos de E que não pertencem a $\mathscr{B}$; no EXERCÍCIO 2 tem-se $1'=30, 2'=15, 3'=10, \cdots$ pois que $1 \vee 30 = 30$ e $1 \wedge 30 = 1$, $2 \vee 15 = 30$ e $2 \wedge 15 = 1$, $3 \vee 10 = 30$ e $3 \wedge 10 = 1, \cdots$. No EXEMPLO 3 há sòmente dois elementos que gozam desta propriedade, a saber, 3 e 4.

A existência de reticulados nas condições anteriores legitima a seguinte

DEFINIÇÃO 1. Uma Álgebra de BOOLE é um sistema $\mathscr{R}[R, \vee, \wedge]$, constituído por um conjunto R, de elementos $x, y, z, \cdots$, e por duas operações $\vee$ (supremo) e $\wedge$ (ínfimo) satisfazendo aos seguintes axiomas:

I Grupo:

$R1.$ $\quad x \vee y = y \vee x$ e $x \wedge y = y \wedge x$

$R2.$ $\quad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$

e $\quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

$R3.$ $\quad x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x$

II Grupo:

$D.\qquad x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$

$\text{e}\qquad x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ (1)

III Grupo:

$B\,1.$ Existe um elemento 0 e um elemento I de $\mathcal{R}$ tal que $x\vee 0=x$ e $x\wedge 0=0$ e $x\vee I=I$ e $x\wedge I=x$, qualquer que seja x de $\mathcal{R}$.

$B\,2.$ Para todo o elemento x de $\mathcal{R}$ existe um elemento x' de $\mathcal{R}$ tal que

$$x\vee x'=I \text{ e } x\wedge x'=0.$$

Comparando as duas expressões que constituem cada um dos axiomas verificamos que cada uma delas se transforma na outra quando trocamos as operações $\vee$ e $\wedge$ e os elementos 0 e I; deste facto resulta o

Princípio da dualidade: *Numa Álgebra de* BOOLE, *de uma proposição verdadeira deduz-se uma outra proposição verdadeira permutando as operações* $\vee$ *e* $\wedge$ *e os elementos* 0 *e* I.

À proposição assim deduzida dá-se o nome de proposição dual da primitiva; se a permutação das operações e de 0 e I não altera a proposição, a proposição diz-se auto-dual. O leitor reconhece imediatamente que todo o corpo finito de conjuntos é uma Álgebra de BOOLE.

Uma Álgebra de BOOLE admite uma representação gráfica muito simples que permite visualizar as suas propriedades. Tomemos para representação de I o conjunto dos pontos do quadrado (fig. 1); para 0 o sub-conjunto vazio dos pontos do quadrado; os elementos $x, y, \cdots$, serão representados por sub-conjuntos de pontos do quadrado. Para complemento de um elemento x tomamos o conjunto complementar do conjunto que representa x, isto é, o conjunto dos pontos do quadrado que não pertencem a x. O supremo e o ínfimo de dois elementos serão representados, respectivamente, pela reunião e pela intersecção dos conjuntos que representam x e y. Esta representação é conhecida por Diagrama de VENN e será justificada, para o caso das Álgebras de BOOLE finitas, pelo último teorema demonstrado neste artigo (Representação das Álgebras de BOOLE, § 5).

Na figura estão representados dois elementos, x e y, por meio de circulos e os seus complementos, x' representada pela parte tracejada horizontalmente e y' pela parte tracejada verticalmente. A simples análise do diagrama sugere-nos imediatamente que, por exemplo, $x'\vee y'$ (parte tracejada) é o complemento de $x\wedge y$. E isto é realmente verdade como veremos adiante.

3. Alguns teoremas das álgebras de Boole.

A) Consequências de $R\,1$-$R\,3$ e D.

Os teoremas que vamos demonstrar são válidos em qualquer Reticulado distributivo.

Comecemos por demonstrar que a proposição $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$ é, na realidade, deduzível de $R\,1$-$R\,3$ e $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)\cdots(D^*)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned}(x\wedge y)\vee(x\wedge z)&=[(x\wedge y)\vee x]\wedge[(x\wedge y)\vee z]\ldots D^*\\ &=[x\vee(x\wedge y)]\wedge[z\vee(x\wedge y)]\ldots R\,1\\ &=x\wedge[(z\vee x)\wedge(z\vee y)]\qquad\ldots R\,3 \text{ e } D^*\\ &=[x\wedge(x\vee z)]\wedge(z\vee y)\qquad\ldots R\,1 \text{ e } R\,2\\ &=x\wedge(z\vee y)\qquad\ldots R\,3\\ &=x\wedge(y\vee z)\qquad\ldots R\,1\end{aligned}$$

Da proposição que acabamos de demonstrar e de $R\,1-R\,3$ deduz-se, igualmente,

(1) Para manter a *simetria* entre as duas expressões que constituem cada um dos axiomas, consideramos as duas expressões de D como axiomas embora, como a seguir veremos, qualquer delas possa ser deduzida da outra e do I Grupo de axiomas.

D^* para o que basta notar que estamos em presença de teoremas duais.

TEOREMA 1. Se $x \vee y = z \vee y$ e $x \wedge y = z \wedge y$ então $x = z$.

Este teorema é um exemplo de um teorema auto-dual.

Dem. Por um lado tem-se

$x \wedge (x \vee y) = x$ (1) .... $R3$

Por outro lado

$$\begin{aligned} x \wedge (x \vee y) &= x \wedge (z \vee y) \quad \ldots\ldots \text{Hip.} \\ &= (x \wedge z) \vee (x \wedge y) \quad \ldots\ldots D \\ &= (x \wedge z) \vee (z \wedge y) \quad \ldots\ldots \text{Hip.} \\ &= [(x \wedge z) \vee z] \wedge [(x \wedge z) \vee y] \quad \ldots\ldots D \\ &= z \wedge [(x \vee y) \wedge (z \vee y)] \quad \ldots\ldots R1, R3, D \\ &= [z \wedge (z \vee y)] \wedge (x \vee y) \quad \ldots\ldots R1, R2 \\ &= z \wedge (x \vee y) \quad \ldots\ldots R3 \\ &= z \wedge (z \vee y) \quad \ldots\ldots \text{Hip.} \\ &= z \quad (2) \quad \ldots\ldots R2 \end{aligned}$$

De (1) e (3) resulta $x = z$.

TEOREMA 2. Para todo o elemento x tem-se

$$x \vee x = x \wedge x = x$$

Dem. (1) $x \vee [x \wedge (x \vee y)] = x \vee (x \wedge z) = x$ pondo $z = x \vee y$.

(2) $x \wedge (x \vee y) = x$ donde $x \vee [x \wedge (x \vee y)] = x \vee x$.

De (1) e (2) resulta $x \vee x = x$.

A igualdade $x \wedge x = x$ fica também demonstrada, pois é dual de $x \vee x = x$.

TEOREMA 3. Se $x \vee y = x \wedge y$ então $x = y$.

Dem. $\quad x \vee (x \wedge y) = x$

$$x \vee (x \wedge y) = x \vee (x \vee y) = x \vee y$$

donde

$$x = x \vee y \tag{1}$$

$$y \vee (x \wedge y) = y$$

$$y \vee (x \wedge y) = y \vee (x \vee y) = x \vee y$$

donde

$$y = x \vee y \tag{2}$$

De (1) e (2) resulta $x = y$.

B) Consequências de $R1 - R3, D$ e $B1 - B2$.

TEOREMA 4. A correspondência $\lambda x = x'$ é uma correspondência biunívoca e involutiva de $\mathcal{R}$ sobre $\mathcal{R}$.

Dem. A demonstração divide-se em duas partes

i. A correspondência é biunívoca: *a*) Se $x = y$ então $x' = y'$ e *b*) Se $x' = y'$ então $x = y$.

ii. A correspondência é involutiva:

$$\lambda(\lambda x) = \lambda^2 x = x$$

i. *a*) $x \vee x' = y \vee y'$ e $x \wedge x' = y \wedge y'$ .... $B1$-2
$y \vee x' = y \vee y'$ e $y \wedge x' = y \wedge y'$ .... Hip.
donde $x' = y'$ .... $T1$

b) $x \vee x' = y \vee y'$ e $x \wedge x' = y \wedge y'$ .... $B1$-2
$x \vee y' = y \vee y'$ e $x \wedge y' = y \wedge y'$ .... Hip.
donde $x = y$ .... $T1$

ii. $x' \vee (x')' = x \vee x'$ e $x' \wedge (x')' = x \wedge x'$ ... $B1$-2
donde $(x')' = x$ .... $T1$

TEOREMA 5. (Leis de MORGAN).

$$(x \vee y)' = x' \wedge y' \quad \text{e} \quad (x \wedge y)' = x' \vee y'$$

As duas igualdades são duais; basta, pois demonstrar uma delas.

Dem. Em $T4$ ficou provado que cada elemento tem um só complemento. Para demonstrar o Teorema basta provar que $x' \wedge y'$ é o complemento de $x \vee y$. Com efeito,

$$\begin{aligned} (x \vee y) \vee (x' \wedge y') &= [(x \vee y) \vee x'] \wedge [(x \vee y) \vee y'] = \\ &= [(x \vee x') \vee y] \wedge [x \vee (y \vee y')] = \\ &= (I \vee y) \wedge (I \vee x) = I \wedge I = I \end{aligned}$$

e

$$(x\vee y)\wedge(x'\wedge y')=[x\wedge(x'\wedge y')]\vee[y\wedge(x'\wedge y')]=$$
$$=[(x\wedge x')\wedge y']\vee[x'\wedge(y\wedge y')]=$$
$$=(0\wedge y')\vee(x'\wedge 0)=0\vee 0=0$$

TEOREMA 6. $0'=I$ e $I'=0$

Dem. $0\vee I=I$ e $0\wedge I=0$, donde $0'=I$ e $I'=0$.

4. As álgebras de Boole como sistemas parcialmente ordenados.

Um conjunto $A=(x, y, z, \cdots)$ diz-se parcialmente ordenado quando e só quando entre os seus elementos é possível definir uma relação binária x/y verificando os seguintes axiomas:

0 1. x/x
0 2. x/y e y/x implica $x=y$
0 3. x/y e y/z implica x/z

EXEMPLO 4. O conjunto dos números reais pode ser parcialmente ordenado pela relação $\lesssim$ (menor ou igual); o conjunto dos números inteiros não negativos é um outro exemplo de conjunto parcialmente ordenado quando nele se define a mesma relação $\lesssim$, ou a relação $\prec$ (divide). Vemos assim que, num mesmo conjunto, podem estar definidas várias relações de ordem parcial.

Num reticulado (e, portanto, numa álgebra de BOOLE) é possível definir uma ordem parcial $\lesssim$. Para isso introduzamos a seguinte

DEFINIÇÃO 2. Diz-se que $x\lesssim y$ quando e só quando $x\vee y=y$.

Demonstremos que a relação assim definida é, realmente, uma relação de *ordem parcial*.

Com efeito,

0 1. $x\vee x=x$ ($T2$) donde $x\lesssim x$ (Def. 2)

0 2. Se $x\lesssim y$ e $y\lesssim x$ tem-se $x\vee y=y$ e $y\vee x=x$ donde $x=y$

0 3. Se $x\lesssim y$ e $y\lesssim z$ tem-se $x\vee y=y$ e $y\vee z=z$ donde $(x\vee y)\vee z=x\vee(y\vee z)=$ $=x\vee z=z$ ou $x\lesssim z$.

A mesma relação de *ordem parcial* pode ser introduzida pela

DEFINIÇÃO 2*. Diz-se que $x\lesssim y$ quando e só quando $x\wedge y=x$ a qual é equivalente à def. 2 como vamos demonstrar:

Basta demonstrar que as igualdades

$$x\vee y=y \quad \text{e} \quad x\wedge y=x$$

são equivalentes.

Suponhamos que $x\vee y=y$; então

$$x\wedge(x\vee y)=x\wedge y=x.$$

Suponhamos que $x\wedge y=x$; então

$$y\vee(x\wedge y)=y\wedge x=y$$

Definindo $y\gtrsim x$ como equivalente a $x\lesssim y$, a def. 2* pode escrever-se

DEFINIÇÃO 2**. Diz-se que $x\gtrsim y$ quando e só quando $x\wedge y=y$.

Comparando as def. 2 e 2** vemos que as relações $x\lesssim y$ e $x\gtrsim y$ são duais; portanto quando numa expressão intervem o sinal $\lesssim$ ou $\gtrsim$ para passar à expressão dual devemos permutar estes sinais.

O facto de um reticulado ser um conjunto parcialmente ordenado permite-nos obter uma nova representação gráfica para os reticulados com um número finito de elementos (reticulados finitos) chamada diagrama de HASSE.

Para isso notemos, em primeiro lugar, que todo o reticulado finito tem um primeiro e um último elemento (0 e I). Com efeito $\bigvee x_i=x_1\vee x_2\vee\cdots$ segue qualquer x_i; e $\bigwedge x_i=x_1\wedge x_2\wedge\cdots$ procede qualquer x_i; logo $0=\bigwedge x_i$ e $I=\bigvee x_i$.

Designemos por letras $-a, b, c, \cdots-$ os elementos do reticulado; quando dois elementos a e b estão ligados pela relação

$a \lesseqgtr b$, mas com $a \neq b$, e são tais que entre a e b não existe algum elemento c, as duas letras representativas são ligadas por uma flecha dirigida de a para b.

Por exemplo, o reticulado constituído pelos elementos a, b, c, d com $a \lesseqgtr b \lesseqgtr d$ e $a \lesseqgtr c \lesseqgtr d$ será representado pelo diagrama I e o reticulado dos divisores de 30 (Exercício 2) pelo diagrama II.

Demonstremos algumas proposições onde intervem a relação $\lesseqgtr$.

A) Proposições válidas em qualquer Reticulado:

Teorema 7. $x \lesseqgtr x \vee y$ qualquer que seja y.

Dem. De $x \wedge (x \vee y) = x$ resulta imediatamente $x \lesseqgtr x \vee y$.

Dualmente,

Teorema 7*. $x \wedge y \lesseqgtr x$ qualquer que seja y.

Teorema 8. Se $x \lesseqgtr y$ e $x \lesseqgtr z$ então $x \lesseqgtr y \wedge z$

Dem. A hipótese é equivalente a $x \wedge y = x$ e $x \wedge z = x$; então tem-se $x = x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ donde $x \lesseqgtr y \wedge z$.

Dualmente,

Teorema 8*. Se $y \lesseqgtr x$ e $z \lesseqgtr x$ então $y \vee z \lesseqgtr x$.

B) Proposições válidas em Álgebras de Boole.

Teorema 9. Numa Álgebra de Boole $x \vee y = y$ é equivalente a $x' \vee y = I$.

Dem. Admitamos que $x \vee y = y$; então $x' \vee y = x' \vee (x \vee y) = (x' \vee x) \vee y = I \vee y = I$.

Admitamos que $x' \vee y = I$; então $x \vee y = I \wedge (x \vee y) = (x' \vee y) \wedge (x \vee y) = y \vee (x' \wedge x) = y \vee 0 = y$

Dualmente,

Teorema 9* Numa álgebra de Boole $x \wedge y = y$ é equivalente a $x' \wedge y = 0$.

Os Teoremas 8-9 mostram que numa álgebra de Boole as def. 2-2* podem ser substituídas pelas definições que lhes são equivalentes: $x \lesseqgtr y$ *quando e só quando* $x' \vee y = I$» ou «$x \lesseqgtr y$ *quando e só quando* $x \wedge y' = 0$».

Teorema 10. Se $x \lesseqgtr y$ então $y' \lesseqgtr x'$.

Dem. A hipótese $x \lesseqgtr y$ é equivalente a $x \vee y = y$; então $y' = (x \vee y)' = x' \wedge y'$ donde $y' \lesseqgtr x'$.

Exercício 4. Demonstre que $0 \lesseqgtr x$ e $x \lesseqgtr I$ qualquer que seja x.

Exercício 5. Demonstre que se $x \lesseqgtr u$ e $y \lesseqgtr v$ então $x \wedge y \lesseqgtr u \wedge v$ e $x \wedge y \lesseqgtr u \wedge v$.

Exercício 6. Desenhe o diagrama de Hasse do reticulado do exercício 1.

Exercício 7. Desenhe o diagrama de Hasse do reticulado do Exemplo 3 e procure os elementos não complementados desse reticulado. Verifique que, neste caso, os elementos complementados são os vértices do «quadriláteros» (3, 4, 1 e 12).

5. Representação das álgebras de Boole.

Neste parágrafo vamos dar uma generalização do Exercício 1, isto é, demonstrar que toda a álgebra de Boole finita é isomorfa ao conjunto dos sub-conjuntos (ou partes) do conjunto dos átomos da álgebra.

Definição 3. Diz-se que o elemento a_i dum Reticulado é um átomo quando e só quando $a_i \neq 0$ e $0 \lesseqgtr x \lesseqgtr a_i$ implica $x = 0$ ou $x = a_i$; quer dizer, quando a_i *segue* imediatamente 0 ou a_i é um *sucessor* de 0.

Dualmente,

Definição 3*. Diz-se que o elemento m_i de um Reticulado é uma molécula quando e só quando $m_i \neq I$ e $m_i \lesseqgtr x \lesseqgtr I$ implica $x = m_i$ ou $x = I$; quer dizer, quando m_i *pre-*

cede imediatamente I ou m_i é um *antecessor* de I.

A existência de tais elementos num Reticulado finito é evidente.

Posto isto demonstremos o

TEOREMA 10. Num reticulado finito e complementado o supremo $\bigvee a_i$ de todos os átomos é o supremo do reticulado: $\bigvee a_i = I$.

Notemos, em primeiro lugar, que existem reticulados finitos em que o supremo dos átomos não é o supremo do reticulado (Diagrama III).

Dem. Designemos por a o supremo dos átomos de um reticulado finito e complementado e seja a' um seu complemento (a unicidade do complemento deriva do axioma D — reticulados distributivos — e, portanto, não se exigindo na hipótese que o reticulado seja distributivo, pode a ter vários complementos (Diagrama IV)). Ora, $a_i \mathrel{\overline{<}} a$ (Teorema 7) e como qualquer elemento do reticulado ou é 0, ou é átomo ou é precedido por algum átomo, a' só pode ser 0 pois que se $a_k \mathrel{\overline{<}} a'$ seria $a_k \mathrel{\overline{<}} a \wedge a' = 0$. Logo, sendo $a' = 0$ será (Teorema 6) $a = I$.

Dualmente,

TEOREMA 10*. Num reticulado finito e complementado e ínfimo m_i de todas as moléculas é o ínfimo do reticulado.

Estamos agora em condições de demonstrar um teorema que oferece certa analogia com o teorema da decomposição de números inteiros em factores primos:

TEOREMA 11. Todo o elemento de uma álgebra de BOOLE finita, diferente de 0, admite uma decomposição atómica da forma $\bigvee a_{\alpha_i}$ (em que α_i são elementos tomados do conjunto dos índices dos átomos e $i = 1, 2, \cdots k \mathrel{\overline{<}} n$, sendo n o número de átomos da álgebra) e tal decomposição é única.

O teorema que vamos demonstrar baseia-se no Teorema 10 e no axioma D, logo, é válido nas álgebras de BOOLE.

Dem. Seja x um elemento da álgebra diferente de 0; então $x = I \wedge x = \bigvee a_i \wedge x = \bigvee (a_i \wedge x)$ (Axioma D). Ora $a_i \wedge x = 0$, caso não seja $a_i \mathrel{\overline{<}} x$, ou $a_i \wedge x = a_i$ se $a_i \mathrel{\overline{<}} x$; logo, a expressão $\bigvee (a_i \wedge x)$ fica reduzida ao supremo dos átomos que precedem $x : x = \bigvee a_l$ representando por a_l os átomos que precedem x.

Dualmente,

TEOREMA 11*. Todo o elemento de uma álgebra de BOOLE diferente de I admite uma decomposição da forma $\bigwedge m_i$ e tal decomposição é única: $x = \bigwedge m_l$ representando por m_l as moléculas que seguem x.

Antes de demonstrarmos a proposição fundamental deste parágrafo, recordemos a definição de *isomorfismo-algébrico*. Um isomorfismo algébrico e uma transformação biunívoca de um espaço X sobre um espaço Y que respeita as leis de composição definidas em cada um dos espaços. Para demonstrar a existência de um isomorfismo entre dois espaços temos que demonstrar: (i) A transformação é biunívoca, isto é, a cada elemento de X corresponde *um e um só* elemento de Y e cada elemento de Y é o transformado de *um e um só* elemento de X; (ii) A transformação respeita as leis de composição, isto é, se em X está definida uma operação $(.)$ e em Y uma operação $(\circ)$ tem-se, representando por $x^{\cdot}$ o transformado de x, $(x.y)^{\cdot} = x^{\cdot} \circ y^{\cdot}$.

TEOREMA 12. *Toda a álgebra de* BOOLE *finita é isomorfa ao conjunto dos subconjuntos do conjunto dos seus átomos.*

Dem. Consideremos a álgebra de BOOLE $\mathcal{R}(R, \vee, \wedge)$ e o conjunto $\mathcal{B}$ dos subconjuntos do conjunto dos seus átomos, $E = \{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n\}$, algebrizado pelas operações $\cup$ (reunião) e $\cap$ (intersecção).

Estabeleçamos entre $\mathcal{R}$ e $\mathcal{B}$ a correspondência λ assim definida:

$$\lambda \bigvee_1^k a_i = \bigcup_1^k \{a_i\},$$

isto é, a correspondência que faz corresponder ao supremo de átomos de $\mathscr{R}$ a reunião dos conjuntos de $\mathscr{B}$ formados por esses átomos.

(*i*) Vejamos, em primeiro lugar, que se trata de uma correspondência biunívoca:

1) Se $x=y$ então as suas decomposições atómicas só diferem, quando muito, pela ordem dos seus elementos:

$$x=a_{\alpha_1}\vee a_{\alpha_2}\vee\cdots a_{\alpha_k}$$
$$y=a_{\beta_1}\vee a_{\beta_2}\vee\cdots a_{\beta_k}$$

e cada a_{α_i} é igual a um a_{β_j}. Então

$$\lambda x=\lambda(a_{\alpha_1}\vee a_{\alpha_2}\vee\cdots a_{\alpha_k})=\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots a_{\alpha_k}\}$$
$$\lambda y=\lambda(a_{\beta_1}\vee a_{\beta_2}\vee\cdots a_{\beta_k})=\{a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, \cdots a_{\beta_k}\}$$

conjuntos que diferem, quando muito, pela ordem dos seus elementos e, portanto, são iguais; $\lambda x=\lambda y$;

2) Sejam $\lambda x=\{a_{\alpha_1} a_{\alpha_2}\cdots a_{\alpha_k}\}$ e $\lambda y=\{a_{\beta_1} a_{\beta_2}\cdots a_{\beta_k}\}$ elementos iguais de $\mathscr{B}$, isto é, elementos que, quando muito, diferem pela ordem dos átomos.

O elemento λx é imagem de elemento $x=\bigvee\limits_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}$ e o elemento λy é imagem do elemento $y=\bigvee\limits_{j=1}^{k} a_{\beta_j}$, elementos que, quando muito, diferem pela ordem dos átomos e, portanto, são iguais. Fica assim provado que $\lambda x=\lambda y$ implica $x=y$.

(*ii*) Provemos agora, que a transformação λ respeita as leis de composição.

Seja $x=\bigvee\limits_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}$ e $y=\bigvee\limits_{j=1}^{1} a_{\beta_j}$. Pretendemos demonstrar que

a) $\lambda(x\vee y)=\lambda x\cup\lambda y$

b) $\lambda(x\wedge y)=\lambda x\cap\lambda y$

Ora, por um lado,

$$x=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}\right)=\bigcup_{i=1}^{k}\{a_{\alpha_i}\}=\{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots a_{\alpha_k}\}$$
$$y=\lambda\left(\bigvee_{j=1}^{l} a_{\beta_j}\right)=\bigcup_{j=1}^{l}\{a_{\beta_j}\}=\{a_{\beta_1}, a_{\beta_2}, \cdots a_{\beta_l}\}$$

donde

$$(1)\quad \lambda x\cap\lambda y=\{a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k}\}\cup\{a_{\beta_1}\cdots a_{\beta_l}\}=\{a_{\gamma_1}\cdots a_{\gamma_m}\}$$

e $(m, m'\leqq l+k)$

$$(1')\quad \lambda x\cap\lambda y=\{a_{\alpha_1}\cdots a_{\alpha_k}\}\cap\{a_{\beta_1}\cdots a_{\beta_l}\}=\{a_{\theta_1}\cdots a_{\theta_{m'}}\}$$

em que os a_{γ_i} e os a_{θ_i} representam, respectivamente, os elementos a_{α_i} e a_{β_j} sem repetições e os elementos a_{α_i} e a_{β_j} iguais; donde, $m=l+k$ e $m'=0$ quando esses elementos são todos diferentes, isto é, $x\wedge y=0$ e $m=m'=k$ quando esses elementos são todos iguais, isto é, $x=y$.

Por outro lado,

$$(2)\qquad \lambda(x\vee y)=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}\vee\bigvee_{j=1}^{1} a_{\beta_j}\right)=$$
$$=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{m} a_{\gamma_i}\right)=\bigcup_{i=1}^{m}\{a_{\gamma_i}\}=\{a_{\gamma_1}\cdots a_{\gamma_m}\}$$

e

$$(2')\qquad \lambda(x\wedge y)=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{k} a_{\alpha_i}\wedge\bigvee_{j=1}^{1} a_{\beta_j}\right)=$$
$$=\lambda\left(\bigvee_{\substack{i=1\\ j=1}}^{\substack{i=k\\ j=l}}(a_{\alpha_i}\wedge a_{\beta_j})\right)=\lambda\left(\bigvee_{i=1}^{m'} a_{\theta_i}\right)=$$
$$=\bigcup_{i=1}^{m'}\{a_{\theta_i}\}=\{a_{\theta_1}\cdots a_{\theta_{m'}}\}.$$

De (1) e (2) resulta $\lambda(x\vee y)=\lambda x\cup\lambda y$ e de (1') e (2') resulta $\lambda(x\wedge y)=\lambda x\cap\lambda y$ que são as igualdades que pretendiamos provar.

Em particular, tem-se $\lambda(0)=0$ e $\lambda(I)=E$.

Com a demonstração deste teorema fica justificado o Diagrama de Venn como representação de álgebras de Boole finitas. Ficou afinal, provado que toda a álgebra de Boole *finita* é isomorfa a um corpo de conjuntos (precisamente ao corpo dos subconjuntos do conjunto dos seus átomos). Utilizando o axioma de Zermelo, mostra-se que *toda* a álgebra de Boole é isomorfa a um corpo de conjuntos.

BIBLIOGRAFIA

Valère Glivenco, Théorie Générale des Structures, Act. Sc. Ind., 1938, Paris.

A. Monteiro e A. Pereira Gomes, Introdução ao Estudo da Noção de Função Contínua, C. E. M., 1944 Porto.

E, fundamentalmente, parte de um trabalho do Dr. José Morgado acabado de publicar.

Grupos de Isotopia

por Élon Lages Lima*

1. Introdução.

As transformações que se obtêm deformando contìnuamente uma figura sem rasgar nem colar são homeomorfismos desta figura. Mas é evidente que existem homeomorfismos (por exemplo, a reflexão num espelho) que não podem ser obtidos por meio de uma deformação do objecto. Põe-se então o problema de determinar os homeomorfismos (isto é, transformações biunívocas e bicontínuas) que podem ser obtidos a partir da transformação identidade por intermédio de uma deformação contínua, sem rasgar nem colar. Mais geralmente, dados dois homeomorfismos f, g de um objecto X, procura-se saber se o homeomorfismo $f\circ g^{-1}$ pode ser obtido por deformação. Se tal for o caso, é natural considerar f e g como equivalentes. A composição de homeomorfismos induz entre as classes de equivalência assim obtidas uma estrutura de grupo, que chamaremos o *grupo de isotopia de* X, e representaremos por $I(X)$.

O grupo de isotopia de um espaço é portanto um invariante algébrico natural e de fácil descrição. Todavia ele não tem merecido a atenção dos topólogos. A razão para isto pode talvez ser encontrada no facto de que os grupos de isotopia não se enquadram nos padrões abstratos e gerais da topologia moderna. Por exemplo, um dos aspectos peculiares de $I(X)$ é que este grupo não satisfaz nenhum dos axiomas de Eilenberg e Steenrod.

Em [3] calculamos o grupo de isotopia de S^2. No presente trabalho, demonstraremos os isomorfismos entre os grupos de isotopia de R^n, S^n e B^{n+1}. Determinaremos também a modificação que sofre o grupo de isotopia de uma variedade compacta quando dela se omite um número finito de pontos. Queremos agradecer ao nosso colega M. Hirsch por muitas discussões estimulantes.

2. Definições e notações.

Indicaremos com R^n o espaço euclideano de dimensão n; R^1 é a recta e R^2 o plano. O símbolo 0 indica o ponto $(0,0,\cdots,0)\in R^n$. Com $|x|$ indicaremos a norma de $x=(x_1, \cdots, x_n)\in R^n$, isto é, $|x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{1/2}$. B^n e S^{n-1} representam respectivamente a *bola* de dimensão n e *a esfera* de dimensão $n-1$, isto é, $B^n=\{x\in R^n; |x|\leq 1\}$ e $S^{n-1}=\{x\in R^n; |x|=1\}$. B^1 é o intervalo fechado $[-1,+1]$ e S^0 consta dos pontos $-1,+1$. Em geral, S^{n-1} é a fronteira de B^n. O símbolo I significará o intervalo fechado $[0,1]$. O *equador* de S^n é o conjunto dos seus pontos com última coordenada igual a zero. Tal conjunto é evidentemente homeomorfo a S^{n-1}, razão pela qual o indicaremos com S^{n-1}. Representaremos por H_N (resp. H_S) o *hemisfério norte* (resp. o *hemisfério sul*) de S^n, isto é, o conjunto dos pontos de S^n cuja última coordenada é ≥ 0 (resp. ≤ 0). A interseção $H_N \cap H_S$ é o equador S^{n-1}.

Toda aplicação contínua $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$ estende-se a uma aplicação contínua $\tilde{f}: B^n \to B^n$ que consiste em transformar, por meio de uma rotação, o raio de B_n que passa por $x\in S^{n-1}$ no raio que passa por $f(x)\in S^{n-1}$. Mais precisamente, $\tilde{f}$ é definida pelas fór-

* Bolsista do Conselho Nacional de Pesquisas, Brasil.

mulas $\tilde{f}(0)=0, \tilde{f}(y)=|y|\cdot f(y/|y|), y\neq 0$. Tem-se $\widetilde{f\circ g}=\tilde{f}\circ\tilde{g}$ e, se f é a identidade de S^{n-1}, $\tilde{f}$ é a identidade de B^n. Assim, se f é um homeomorfismo de S^{n-1}, $\tilde{f}$ é um homeomorfismo de B^n. (Diremos sempre «homeomorfismo de X» em vez de «homeomorfismo de X sobre X»). Chamaremos $\tilde{f}$ a *extensão radial* de f.

Consideremos S^{n-1} como o equador de S^n. A aplicação $(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \to (x_1, \cdots, x_n, 0)$ induz homeomorfismos de H_N (hemisfério norte de S^n) e H_S (hemisfério sul de S^n) sobre B^n, de modo que podemos considerar esses hemisférios como bolas n-dimensionais cuja fronteira comum é S^{n-1}. Então, dada $f: S^{n-1} \to S^{n-1}$, temos as extensões radiais $\tilde{f}_N: H_N \to H_N$ e $\tilde{f}_S: H_S \to H_S$. As aplicações $\tilde{f}_N$ e $\tilde{f}_S$ coincidem com f em $S^{n-1}=H_N \cap H_S$ e portanto definem uma aplicação $\bar{f}: S^n \to S^n$ (pois $S^n = H_N \cup H_S$) que chamaremos a *suspensão* de f. Tem-se $\overline{f\circ g}=\bar{f}\circ\bar{g}$ e a suspensão da identidade de S^{n-1} é a identidade de S^n. Em particular, se f é um homeomorfismo de S^{n-1}, sua suspensão $\bar{f}$ é um homeomorfismo de S^n.

Dados os espaços topológicos X, Y e as aplicações contínuas $f, g: X \to Y$, uma *homotopia* entre f e g é uma aplicação contínua $F: X \times I \to Y$ tal que $F(x, 0)=f(x)$ e $F(x, 1)=g(x)$ para todo $x \in X$. Quando existe uma homotopia entre f e g são *homotópicas*. A relação «f e g são homotópicas» é reflexiva, simétrica e transitiva, donde reparte o conjunto das aplicações contínuas de X em Y. Se Z é outro espaço, se $f, g: X \to Y$ são homotópicas e $f', g': Y \to Z$ são também homotópicas, então $f'\circ f, g'\circ g: X \to Z$ são homotópicas. Se a aplicação identidade $i: X \to X$ é homotópica a uma aplicação constante $X \to p \in X$, então o espaço X diz-se *contrátil*. Por exemplo, $F(x, t) = (1-t)x$ é uma homotopia entre a aplicação identidade de R^n (resp. de B^n) e a aplicação constante $R^n \to 0$ (resp. $B^n \to 0$). Portanto R^n e B^n são espaços contráteis.

Sejam f, g homeomorfismos de um espaço X. Uma *isotopia* entre f e g é uma homotopia $F: X \times I \to X$ entre f e g tal que, para todo $t \in I$, a aplicação $F_t: x \to F(x, t)$ é um *homeomorfismo* de X. Se existir uma isotopia entre f e g diremos que f e g são *isotópicos*. A relação «f e g são isotopicos» é reflexiva, simétrica e transitiva, donde divide o conjunto $H(X)$ de todos os homeomorfismos de X em classes de equivalência disjuntas, chamadas as *classes de isotopia* de X. Se $f \in H(X)$, indicaremos com $[f]$ a classe de isotopia de f. Se f é isotópico a g e f' é isotópico a g' então $f\circ f'$ é isotópico a $g\circ g'$. Então pondo $[f]\cdot[g]=[f\circ g]$, esta operação é bem definida e introduz uma estrutura de grupo no conjunto $I(X)$ das classes de isotopia de X. O grupo $I(X)$ chama-se o *grupo de isotopia de* $\mathbf{X}$. Observemos que a composição de homeomorfismos dá ao conjunto $H(X)$ uma estrutura de grupo e o conjunto $D(X)$ dos homeomorfismos isotópicos à identidade é um subgrupo normal de $H(X)$ tal que $I(X) = H(X)/D(X)$.

3. Exemplos.

A) Uma *rotação* de R^n é uma transformação linear ortogonal cujo determinante é $+1$. Uma rotação r de R^{n+1} induz um homeomorfismo de S^n que indicaremos ainda com r e chamaremos uma rotação de S^n. Como exemplo de isotopia, demonstraremos que toda rotação de S^n é isotópica à identidade. Isto decorre do Lema 3. 1, que será usado na secção seguinte.

LEMA 3. 1. *Seja* a *um ponto e* r *uma rotação de* S^n. *Dada uma curva contínua* $\alpha: I \to S^n$ *tal que* $\alpha(0)=a$ *e* $\alpha(1)=r(a)$, *existe uma isotopia* $R: S^n \times I \to S^n$ *entre a identidade de* S^n *e a rotação* r *com as seguintes propriedades: para cada* $t \in I$ *o homeo-*

morfismo $R_t : X \to R(x, t)$ *é uma rotação de* S^n *e* $R_t(a) = R(a, t) = \alpha(t)$.

Demonstração. Uma rotação de S^1 consiste simplesmente da multiplicação $x \to x \cdot r$ por um número complexo r de módulo 1. Pondo $R(x, t) = x \cdot \alpha(t)$ obtemos a isotopia requerida. Suponhamos $n > 1$ e o teorema verdadeiro para S^{n-1}. Tomemos em R^{n+1} uma base ortogonal $\{e_1, \cdots, e_{n+1}\}$ tal que $e_{n+1} = a$. Uma rotação R_t de S^n fica determinada pelas imagens $R_t(e_i)$ dos elementos desta base, devendo tais imagens formarem uma base ortonormal com a mesma orientação que a base e_i. Pondo $R_t(a) = \alpha(t)$, devemos ainda definir os vectores ortonormais $R_t(e_1), \cdots, R_t(e_n)$ continuamente em função de t, de modo que a base $\{R_t(e_1), \cdots, R_t(e_n), \alpha(t)\}$ seja positivamente orientada em relação a $\{e_1, \cdots, e_n, a\}$. Ora, para cada $t \in I$, o espaço tangente $V_\alpha(t)$ à esfera S^n no ponto $\alpha(t)$ é ortogonal a $\alpha(t)$, de modo que o problema reduz-se a definir, de modo contínuo, para cada $t \in I$, uma base ortonormal $\{v_1(t), \cdots, v_n(t)\}$ de $V_{\alpha(t)}$ tal que $\{v_1(t), \cdots, v_n(t), \alpha(t)\}$ tenha determinante positivo em relação à base inicial e_i. Além disso, cada $v_j(0)$ deve ser equipolente a e_j e cada $v_j(1)$ equipolente a $r(e_j), j = 1, \cdots, n$. Existem as projecções estereográficas $p_1 : A_1 \to R^n$ e $p_2 : A_2 \to R^n$, onde $A_1 = S^n - a$, $A_2 = S^n - (-a)$. Estas projeções são homeomorfismos sobre R^n (veja [1], pág. 64).

As curvas $C_1^i, \cdots, C_n^i$, imagens dos eixos de R^n por p_i^{-1} são diferenciáveis em R^{n+1} e possuem, em cada ponto $x \in A_i$, vetores tangentes não nulos $Y_1^i(x), \cdots, Y_n^i(x)$, que são funções contínuas de x e formam uma base ortogonal do espaço tangente V_x a S^n no ponto x. Assim, se indicarmos com $X_j^i(x)$ o vector unitário de mesma direcção e sentido que $Y_j^i(x)$, o sistema $\{X_1^i(x), \cdots, X_n^i(x)\}$ é, para cada $x \in A_i$, uma base ortogonal do espaço tangente V_x, a qual chamaremos *base natural* de V_x no sistema de coordenadas y^i. Ora, em virtude da continuidade de α, existe um inteiro positivo p tal que cada subintervalo $I_k = [k/p, k/p + 1/p] \subset I$ satisfaz à condição $\alpha(I_k) \subset A_i$, com $i = 1$ ou 2. Basta então definir os vectores $v_1(t), \cdots, v_n(t)$ para $t \in I_k, k = 1, \cdots, p$, de modo que esta definição seja coerente nas extremidades dos I_k. Procederemos por indução. Para $k = 0$, suponhamos, para fixar as ideias, que $\alpha(I_0) \subset A_2$. Dada a base natural $\{X_1^2(a), \cdots, X_n^2(a)\}$ seja T_0 a transformação ortogonal tal que $T_0 X_j^2(a) = e_j$, $j = 1, \cdots, n$. Ponhamos $v_j(t) = T_0 X_j^2(\alpha(t))$ para $t \in I_0$. Suponhamos agora os $v_j(t)$ definidos para $0 \leq t \leq k/p$ e admitamos, para fixar as ideias, que $\alpha(I_k) \subset A_1$. Seja T_k a transformação ortogonal tal que $T_k X_j^1(\alpha \cdot (k/p)) = v_j(k/p)$, $j = 1, \cdots, n$. Poremos $v_j(t) = T_k X_j^1(\alpha(t))$ para $t \in I_k$, excepto se $k = p - 1$. Neste caso, observamos que os $T_k X_j^1(\alpha(1))$ formam uma base do espaço tangente em $\alpha(1) = r(a)$ com a mesma orientação que a base inicial $\{e_i\}$, Com efeito, começamos com $v_j(0) = e_j$ e prosseguimos por continuidade. Tomando determinantes sempre em relação à base e_i, $det(v_j(t))$ é igual a $+1$ para $t = 0$ e nunca se anula, pois os $v_j(t)$ são sempre linearmente independentes. Logo $det(T_{p-1} X_j^1(\alpha(1))) > 0$. Assim existe uma rotação ρ do espaço a n dimensões tal que $\rho T_{p-1} X_j^1(\alpha(1)) = r(e_j)$ para $j = 1, \cdots, n$. Pela hipótese de indução, existe uma família contínua de rotações $\rho(t), 1 - 1/p < t \leq 1$, tal que $\rho(0) =$ identidade e $\rho(1) = \rho$. Modificamos então a definição dos $v_j(t)$ em I_{p-1} pondo $v_j(t) = \rho(t) T_{p-1} X_j^1(\alpha(t))$ para $1 - 1/p \leq t \leq 1$. Isto conclui a construção da família $\{v_j(t)\}$ e a demonstração do Lema 3. 1 também.

Corolário 3. 2. *Dada uma rotação* r *de* S^n, *existe uma isotopia* F *entre* r *e a iden-*

tidade de S^n, *tal que para cada* $t \in I$, F_t *é uma rotação de* S^n.

Com efeito, tomemos $a \in S^n$ arbitrário. Como S^n é conexo por arcos, existe uma curva α ligando a e $r(a)$. Então aplicamos o Lema 3. 1.

B) O grupo de isotopia de um espaço X não é, em geral, abeliano. Por exemplo, se X é discreto com p elementos, $I(X)$ é o grupo π_p das permutações de p objetos. Na secção 5 demonstraremos que, se M é uma variedade compacta e A é um subconjunto finito de M, então $I(M-A)=I(M)\times I(A)$ e portanto, se A possui mais de um elemento, $I(M-A)$ não é abeliano.

C) Se Y é um espaço contrátil, duas aplicações $f, g: X \to Y$ são sempre homotópicas. Realmente, seja F uma homotopia entre a aplicação identidade e a aplicação constante $Y \to p \in Y$. Então $F'(x,t) = F(f(x),t)$ é uma homotopia entre f e a aplicação constante $X \to p \in Y$, donde f é homotópica a g. Em particular, dois homeomorfismos de um espaço contrátil são sempre homotópicos. Não é verdade porém que dois homeomorfismos de um espaço contrátil sejam sempre isotópicos. Realmente, como homeomorfismos isotópicos de S^n têm o mesmo grau, existem em $I(S^n)$ pelo menos dois elementos, a saber, a classe da aplicação identidade e a classe da reflexão no plano $x_{n+1}=0$. Então segue-se da proposição 4. 1, que demonstraremos a seguir, que $I(B^{n+1})$ tem pelo menos dois elementos, embora B^{n+1} seja contrátil.

4. Isomorfismos entre $I(R^n)$, $I(S^n)$ e $I(B^{n+1})$.

Indiquemos com $E: H(S^n) \to H(B^{n+1})$ o homomorfismo que associa a cada homeomorfismo f de S^n sua extensão radial $E(f) = \tilde{f}$.

Proposição 4. 1. *O homomorfismo* $E: H(S^n) \to H(B^{n+1})$ *induz um isomorfismo* E *de* $I(S^n)$ *sobre* $I(B^{n+1})$.

Demonstração. Mostraremos em primeiro lugar que $E(D(S^n)) \subset D(B^{n+1})$. Seja f um homeomorfismo de S^n isotópico à identidade Consideremos uma isotopia $F: S^n \times I \to S^n$ então f e a identidade de S^n. Definamos agora $\tilde{F}: B^{n+1} \times I \to B^{n+1}$ pondo $\tilde{F}(x,t) = |x| \cdot F(x/|x|, t)$ se $x \neq 0$ e $\tilde{F}(0,t)=0$. Então $\tilde{F}$ é uma isotopia entre $\tilde{f}=E(f)$ e a identidade de B^{n+1}. Assim E induz um homomorfismo $E: I(S^n) \to I(B^{n+1})$ definido por $E([f]) = [\tilde{f}]$. Este homomorfismo é biunívoco. Realmente, seja $F: B^{n+1} \times I \to B^{n+1}$ uma isotopia entre a extensão radial $E(f)$ do homeomorfismo f de S^n e a identidade de B^{n+1}. Para cada $t \in I$ a aplicação $F_t: x \to F(x,t)$, sendo um homeomorfismo de B^{n+1}, transforma S^n em S^n (isto decorre imediatamente da invariância dos conjuntos abertos de um espaço euclideano por homeomorfismos) e portanto a restrição $F = \tilde{F} | (S^n \times I)$ define uma isotopia entre a restrição $f = E(f) | S^n$ e a identidade de S^n. Isto mostra que o núcleo de E reduz-se à identidade, donde E é biunívoco. Para mostrar que E é sobre $I(B^{n+1})$, usaremos um raciocínio de Alexander [2]. Seja g um homeomorfismo de B^{n+1} e g' a restrição $g | S^n$. Como vimos acima, g' é um homeomorfismo de S^n. Mostraremos que g é isotópico à extensão radial $E(g')$. Para isto, definiremos uma isotopia G que, em cada instante t, é o homeomorfismo de B^{n+1} que coincide com $E(g')$ no interior da bola de raio $1-t$ e centro 0 e, no interior desta bola, coincide com o homeomorfismo g «concentrado» aí. Mais precisamente, definiremos $G: B^{n+1} \times I \to B^{n+1}$ pondo

$$G(x,t) = |x| \cdot g(x/|x|) \text{ se } 1-t \leq |x| \neq 0,$$
$$G(x,t) = (1-t) \cdot g(x/(1-t)) \text{ se } |x| \leq 1-t \neq 0,$$
$$G(0,0) = 0.$$

Verifica-se imediatamente que G é uma isotopia entre g e $E(g')$, e portanto $[g] =$

$=[E(g')]=E([g'])$, donde E é sobre, o que conclui a demonstração.

Tomemos um ponto a na esfera S^n. A projecção estereográfica $p_a: S^n - a \rightarrow R^n$ é um homeomorfismo sobre. (Por simplicidade, escreveremos p em vez de p_a, sempre que não houver perigo de confusão). Dada uma aplicação contínua $f: R^n \rightarrow R^n$, $p^{-1}fp: S^n - a \rightarrow S^n - a$ é contínua e $p^{-1}(f o g)p = (p^{-1}fp)(p^{-1}gp)$. Se f é a identidade de R^n, $p^{-1}fp$ é a identidade de $S^n - a$. Em particular, se f é um homeomorfismo de R^n, $p^{-1}fp$ é um homeomorfismo de $S^n - a$ e portanto pode ser estendido do modo único a um homeomorfismo $\hat{f}$ de S^n pondo-se $\hat{f}(a) = a$, pois S^n é a compactificação de Alexandroff de $S^n - a$. A aplicação $f \rightarrow \hat{f}$ define um homomorfismo $P = P_a: H(R^n) \rightarrow H(S^n)$.

Proposição 4. 2. *O homomorfismo* $\mathrm{P}: \mathrm{H}(\mathrm{R}^n) \rightarrow \mathrm{H}(\mathrm{S}^n)$ *induz um isomorfismo de* $\mathrm{I}(\mathrm{R}^n)$ *sobre* $\mathrm{I}(\mathrm{S}^n)$.

Demonstração. Seja $f \in H(R^n)$ isotópico à identidade por meio de uma isotopia F. Definamos $F^*: (S^n - a) \times I \rightarrow S^n - a$ pondo $F^*(x, t) = p^{-1}(F(p(x), t))$. Então F^* é uma isotopia entre $p^{-1}fp$ e a identidade de $S^n - a$. Para cada $t \in I$, a aplicação $F_t^*: x \rightarrow F^*(x, t)$ é um homeomorfismo de $S^n - a$ e portanto estende-se a um hemeomorfismo $\hat{F}_t$ de S^n pondo-se $\hat{F}_t(a) = a$. Definiremos $\hat{F}: S^n \times I \rightarrow S^n$ por $\hat{F}(x, t) = \hat{F}_t(x)$. Vê-se sem dificuldade que $\hat{F}$ é uma isotopia entre $\hat{f}$ e a identidade de S^n. Por conseguinte o homomorfismo P transforma $D(R^n)$ em $D(S^n)$ e assim induz um homomorfismo $P: I(R^n) \rightarrow I(S^n)$ pondo-se $P([f]) = [\hat{f}]$. Este homomorfismo é biunívoco. Com efeito, dado um homeomorfismo f de R^n, suponhamos que exista uma isotopia F entre $\hat{f}$ e a identidade de S^n. A curva $\alpha: I \rightarrow S^n$ definida por $\alpha(t) = F(a, t)$ é tal que $\alpha(0) = \alpha(1) = a$. Usando o Lema 3. 1 com a rotação r = identidade de S^n, obtemos uma isotopia R entre a identidade e si própria tal que $R(a, t) = \alpha(t)$. Seja $S_t = R_t^{-1}$. Então $S(x, t) = S_t(x)$ define uma isotopia entre a identidade e si própria tal que $S(\alpha(t), t) = a$. Definiremos então $G: S^n \times I \rightarrow S^n$ pondo $G(x, t) = S(F(x, t), t)$. G é uma isotopia entre $\hat{f}$ e a identidade de S^n, tal que $G(a, t) = a$ para todo $t \in I$. Então a restrição $G^* = G \mid (S^n - a) \times I$ é uma isotopia entre $p^{-1}fp$ e a identidade de $S^n - a$. Logo pondo $J(x, t) = p(G^*(p^{-1}(x), t))$ obtemos uma isotopia entre f e a identidade de R^n. Assim, $P([f]) = 1$ implica $[f] = 1$, donde P é biunívoco. Finalmente, dado um homeomofismo g de S^n, seja r uma rotação de S^n tal que $rg(a) = a$. Então $rg = \hat{f}$ onde f é um homeomorfismo de R^n. Ora, pelo corolário 3. 2, r é isotópico à identidade de S^n, donde $[g] = [rg] = [\hat{f}] = P([f])$. Portanto P é sobre, o que demonstra 4. 2.

Corolário 4. 3. *Cada um dos grupos* $\mathrm{I}(\mathrm{B}^1)$, $\mathrm{I}(\mathrm{R}^1)$, $\mathrm{I}(\mathrm{S}^1)$ *e* $\mathrm{I}(\mathrm{B}^2)$ *tem dois elementos.*

Com efeito, S^0 consta dos pontos -1 e $+1$ portanto $I(S^0)$ tem dois elementos. Em virtude de 4. 1, $I(B^1)$ tem também dois elementos: a classe da aplicação identidade e a classe do homeomorfismo $x \rightarrow -x$. Sabemos que B^1 é o intervalo fechado $[-1, +1]$. Ora, todo homeomorfismo do intervalo aberto $(-1, +1)$ é uma função estritamente monótona e portanto estende-se de modo único a um homeomorfismo de B^1. O mesmo ocorre às isotopias e essas extensões induzem um isomorfismo de $I((-1, +1))$ sobre $I(B^1)$. Ora, $(-1, +1)$ é homeomorfo à recta R^1, donde $I(R^1)$ é homeomorfo a $I(B^1)$. Por 4. 2, $I(S^1)$ é isomorfo a $I(R^1)$ e por 4. 1 $I(B^2)$ é isomorfo a $I(S^1)$, onde estes grupos constam de 2 elementos cada um.

Dado um homeomorfismo de f de S^n, sua suspensão $\bar{f}$ é um homeomorfismo de S^{n+1}; se g é outro homeomorfismo de S^n, $\overline{fog} = \bar{f} o \bar{g}$. Portanto a aplicação $f \to \bar{f}$ define um homomorfismo $S: H(S^n) \to H(S^{n+1})$.

Proposição 4. 4. *O homomorfismo* $S: H(S^n) \to H(S^{n+1})$ *induz um homomorfismo* S *do grupo de isotopia* $I(S^n)$ *no grupo de isotopia* $I(S^{n+1})$.

Demonstração. Devemos mostrar que se $f \in H(S^n)$ é isotópico à identidade então sua suspensão $\bar{f} \in H(S^{n+1})$ é isotópica à identidade. Seja $F: S^n \times I \to S^n$ uma isotopia entre f e a identidade de S^n. Considerando o hemisfério norte $H_N \subset S^{n+1}$ como uma bola de dimensão $n+1$, obtemos, como na demonstração de 4. 1, uma isotopia $\widetilde{F}_N$ entre a extensão radial $\tilde{f}_N$ e a identidade de H_N. Anàlogamente obtemos uma isotopia $\widetilde{F}_S$ entre $\tilde{f}_S$ e a identidade de H_S. Como $\widetilde{F}_N$ e $\widetilde{F}_S$ coincidem com F em $S^n \times I = (H_N \cap H_S) \times I$, definimos uma isotopia $\bar{F}: S^{n+1} \times I \to S^{n+1}$ entre $\bar{f}$ e a identidade de S^{n+1} pondo $\bar{F}(x,t) = \widetilde{F}_N(x,t)$ se $x \in H_N$ e $\bar{F}(x,t) = \widetilde{F}_S(x,t)$ se $x \in H_S$.

O homomorfismo $S: I(S^n) \to I(S^{n+1})$ é um isomorfismo sobre se $n=0,1$. Para $n \geq 2$, é um problema aberto determinar o núcleo e a imagem de S.

5. Um teorema sobre isotopia em variedades compactas.

O objectivo desta secção é generalizar a proposição 4. 2.

Uma *variedade topológica de dimensão* n é um espaço topológico M (de Hausdorff) conexo, tal que todo ponto $x \in M$ possui uma V_x homeomorfa ao espaço euclideano R^n. V_x será chamada uma *vizinhança coordenada* do ponto x. Toda variedade M é um espaço localmente conexo e localmente compacto. Por simplicidade, suporemos ainda que a topologia de M é definida por meio de uma métrica, o que acontece por exemplo se M possui uma base enumerável de abertos. Esta restrição não é lògicamente necessária mas simplificará a demonstração de 5. 4. Indicaremos então com $d(x,y)$ a distância entre 2 pontos $x, y \in M$. Exemplos de variedades de dimensão $n: R^n, S^n$ e todo subconjunto aberto de uma variedade de dimensão n. Uma variedade topológica de dimensão 1 é homeomorfa a R^1 ou a S^1.

No restante desta secção, consideraremos uma variedade *compacta* M de dimensão $n \geq 2$ e um subconjunto finito $A = \{a_1, \cdots, a_p\} \subset M$.

Lema 5. 1. *Sejam* $a \in M$ *e* $W_1, \cdots, W_p$ *abertos disjuntos de* M *tais que* $\bigcup W_i \cup a$ *é aberto em* M. *Então existe um único índice* $j, 1 \leq j \leq p$, *tal que* $W_j \cup a$ *é aberto em* M.

Demonstração. Seja V uma vizinhança *conexa* de a tal que $V \subset \bigcup W_i \cap a$. Como $\dim M \geq 2$, $V - a$ é conexo. Além disso, $V - a \subset \bigcup W_i$. Portanto $V - a = \bigcup (W_i \cap (V-a))$. Sendo os $W_i \cap (V-a)$ abertos disjuntos, a conexão de V implica que todos eles são vazios com exeção de um, $W_j \cap (V-a) = V - a$. Segue-se que $V \subset W_j \cup a$, o que implica imediatamente que $W_j \cup a$ é aberto. Suponhamos agora que $W_k \cup a$ seja aberto, $k \neq j$. Então existe uma vizinhança V' de a tal que $V' \subset W_k \cup a$. Portanto $V \cap V' \subset (W_i \cup a) \cap \cap (W_k \cup a) = a$, donde $V \cap V' = a$, o que é absurdo pois $V \cap V'$ é um conjunto aberto.

Observação. É fácil ver que o lema 5. 1 é falso numa variedade de dimensão 1.

Para uso nos dois Lemas seguintes, convencionaremos chamar *entorno* de um ponto $a \in A$ a todo o conjunto aberto $V \subset M - A$ tal que $V \cup a$ é aberto em M. Em outras palavras, um entorno de a é um conjunto da forma $V = V^* - a$, onde $V^* \subset M$ é uma vizinhança de a que não contém nenhum outro ponto de A.

LEMA 5. 2. *Sejam* f *um homeomorfismo de* $M - A$ *e* $V_1, \cdots, V_p$ *entornos disjuntos dos pontos* $a_1, \cdots, a_p$ *respectivamente. Então existe uma única permutação* σ *dos índices* $1, \cdots, p$ *tal que* $f(V_1), \cdots, f(V_p)$ *são entornos (disjuntos) dos pontos* $a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p)}$ *respectivamente.*

Demonstração. O complementar de $\bigcup V_i$ em $M - A$ é compacto e portanto é também compacto o complementar de $\bigcup f(V_i)$ em $M - A$. Isto significa que $\bigcup f(V_i) \bigcup A$ é aberto em M, donde $\bigcup f(V_i)$ é um entorno de cada elemento de A, isto é, $\bigcup f(V_i) \bigcup a_j$ é aberto em M para cada índice j. Pelo Lema 5. 1, dado j, existe um único índice $\rho(j)$ tal que $f(V_{\rho(j)})$ é um entorno de a_j. A aplicação $j \rightarrow \rho(j)$ é uma permutação dos índices $1, \cdots, p$. Para prová-lo, basta mostrar que, para cada índice k existe um j com $k = \rho(j)$. Realmente, o fecho $K = \overline{f(V_k)}$ intersecta A pois do contrário K seria um compacto tal que $f(V_k) \subset K \subset M - A$. Então $f^{-1}(K)$ seria um compacto tal que $V_k \subset \subset f^{-1}(K) \subset M - A$ e assim V_k não seria um entorno de $a_k \in A$. Seja $a_j \in A \cap K$. Então $f(V_{\rho(j)})$ é um entorno de a_j, donde $f(V_{\rho(j)}) \cap f(V_k) \neq \phi$, o que obriga $k = \rho(j)$. Chamando de σ à permutação ρ^{-1}, vê-se que $f(V_j) = = f(V_{\rho\sigma(j)})$ é um entorno de $a_{\sigma(j)}$. Para concluir a demonstração, resta sòmente provar a unicidade de σ. Seja τ uma permutação satisfazendo à condição do Lema. Para cada índice i, $f(V_i)$ é um entorno de $a_{\tau(i)}$. Tomando $j = \sigma^{-1}\tau(i)$, temos $a_{\sigma(j)} = a_{\tau(i)}$. Portanto $f(V_i)$ é um entorno de $a_{\sigma(j)}$. Ora, $f(V_j)$ também goza desta propriedade, donde $f(V_j) \cap f(V_i) \neq \phi$. Segue-se que $i = j$. Isto significa que, para todo i, $\sigma^{-1}\tau(i) = i$, donde $\sigma = \tau$.

LEMA 5. 3. *Todo homeomorfismo* f *de* $M - A$ *estende-se de modo único a um homeomorfismo* $\hat{f}$ *de* M.

Demonstração. Sendo $M - A$ denso em M, a unicidade de $\hat{f}$ é evidente. Para demonstrar a existência, tomemos entornos $V_1, \cdots, V_p$ como no Lema 5. 2. Assim obtemos a permutação σ tal que $f(V_i)$ é um entorno de $a_{\sigma(i)}$. Ponhamos então $\hat{f}(x) = f(x)$ para $x \in M - A$ e $\hat{f}(a_i) = a_{\sigma(i)}$ para $a_i \in A$. Resta verificar que $\hat{f}$ é contínua em cada ponto $a_j \in A$. Seja U um entorno arbitrário de $a_{\sigma(j)}$ contido em $f(V_j)$. Aplicando novamente o Lema 5. 2, desta vez com o homeomorfismo f^{-1} e os entornos $f(V_1), \cdots \cdots, f(V_{j-1}), U, f(V_j), \cdots, (V_p)$, obtemos uma permutação τ tal que $V_i = f^{-1}f(V_i)$ é um de $a_{\tau\sigma(i)}, i \neq j$, e $f^{-1}(U)$ é um entorno de $a_{\tau\sigma(i)}$. Ora, V_i é um entorno de a_i; como os V_i são disjuntos, isto obriga a $\tau\sigma(i) = i$ para $i \neq j$. Consequentemente $\tau\sigma(j) = j$ também. Assim $f^{-1}(U)$ é um entorno de a_j, mostrando que $\hat{f}$ é contínua no ponto a_j.

Dado um homeomorfismo $f \in H(M - A)$, indicaremos com $\hat{f} \in H(M)$ sua extensão a M e com $\sigma(f) \in H(A)$ a restrição $\hat{f} | A$, a qual se identifica com a permutação σ tal que $f(a_i) = a_{\sigma(i)}$. É imediato que $\widehat{f \circ g} = \hat{f} \circ \hat{g}$ e $\sigma(f \circ g) = \sigma(f) \circ \sigma(g)$, de modo que a aplicação $f \rightarrow (\hat{f}, \sigma(f))$ define um homomorfismo $P : H(M - A) \rightarrow H(M) \times H(A)$, onde $H(M) \times H(A)$ indica o produto directo destes grupos. Observemos que $H(A) = I(A) = = \pi_p =$ grupo das permutações de p objectos.

PROPOSIÇÃO 5. 4. *O homomorfismo* P *definido acima induz um isomorfismo* P *do grupo de isotopia* $I(M - A)$ *sobre o produto directo* $I(M) \times I(A)$ *dos grupos de isotopia* $I(M)$ *e* $I(A)$.

Demonstração. Mostraremos primeiro que P transforma $D(M - A)$ em $D(M) \times D(A)$, isto é, que se $f \in H(M - A)$ é isotópico à identidade então $\sigma(f)$ é a permutação identidade e $\hat{f}$ é isotópico à identidade de M. Com efeito, seja $F : (M - A) \times I \rightarrow M - A$ uma isotopia entre f e a identidade de $M - A$. Para cada $t \in I$, $F_t : x \rightarrow F(x, t)$ é um homeomorfismo de $M-A$. Logo existe $\sigma=\sigma(F_t)$ tal que $\lim F(x,t)=a_{\sigma(j)}$ quando $x\to a_j$, $x\in M-A$, para todo $a_j\in A$. Mostraremos que $\sigma(F_t)$ não depende de t. Como $\sigma(F_1)$ é o elemento identidade de $H(A)$, concluiremos que $\sigma(f)=\sigma(F_0)$ é o elemento identidade de $H(A)$. Para isto, basta mostrar que existe $\delta>0$ tal que $|t-t'|<\delta$ implica $\sigma(F_t)=\sigma(F_{t'})$. Ora, seja $e>0$ tal que $e<\min\{d(a_i,a_j), i\neq j=1,\cdots,p\}$. Existe $\delta>0$ tal que $|t-t'|<\delta$ implica $d(F(x,t), F(x,t'))<e$ para todo $x\in M-A$. Fixemos t,t' como acima e um índice j. Sejam $\sigma'=\sigma(F_{t'})$. Fazendo $x\to a_j, x\in M-A$, temos $d(a_{\sigma(j)},a_{\sigma'(j)})=\lim d(F(x,t),F(x,t'))\leq e$, donde $a_{\sigma(j)}=a_{\sigma'(j)}$. Sendo j arbitrário, $\sigma=\sigma'$, o que demonstra que $\sigma(f)$ é a permutação identidade. Ponhamos em seguida $\hat{F}(x,t)=$ $=F(x,t)$ para $x\in M-A, t\in I$ e $\hat{F}(a_j,t)=$ $=a_{\sigma(j)}$ para $a_j\in A$. Dado $e>0$, existem $\eta,\delta>0$ tais que $d(x,a_j)<\eta$ e $|t-t_0|<\delta$ implicam $d(F(x,t_0),a_j)<e/2$ e $d(F(x,t),$ $,F(x,t_0))<e/2$, donde $d(F(x,t),a_j)<e$. Isto mostra que $\hat{F}: M\times I\to M$ é contínua em $A\times I$ e portanto é uma isotopia entre $\hat{f}$ e a identidade.

Assim, se pusermos $P([f])=([\hat{f}],\sigma(f))$, obteremos um homomorfismo bem definido $P: I(M-A)\to I(M)\times I(A)$. O facto de que P é um isomorfismo sobre resultará dos Lemas 5. 5, 5. 6 e 5. 7, que demonstraremos a seguir.

LEMA 5. 5. *Seja* $\mathrm{B}\subset\mathrm{M}$ *um subconjunto fechado e* $\alpha:\mathrm{I}\to\mathrm{M}$ *uma curva contínua tal que* $\alpha(I)\subset\mathrm{M}-\mathrm{B}$. *Então existe uma família contínua* $\mathrm{h_t},\mathrm{t}\in\mathrm{I}$, *de homeomorfismos de* M, *tais que* $\mathrm{h_0}=$ *identidade,* $\mathrm{h_t}(\alpha(\mathrm{t}))=\alpha(0)$ *e* $\mathrm{h_t(b)=b}$ *para todo* $\mathrm{t}\in\mathrm{I}$ *e* $\mathrm{b}\in\mathrm{B}$. *Se* $\alpha(0)=$ $=\alpha(1)=a$ *então existe também uma família contínua* $\mathrm{k_t},\mathrm{t}\in\mathrm{I}$, *de homeomorfismos de* M *tais que* $\mathrm{k_0}=\mathrm{k_1}=$ *identidade,* $\mathrm{k_t(b)=b}$ *para todo* $\mathrm{b}\in\mathrm{B}$ *e* $\mathrm{t}\in\mathrm{I}$ *e, além disso,* $\mathrm{k_t(h_t(a))=a}$.

Demonstração. Existe um inteiro $m>0$ tal que, para $I_j=[j/p,(j+1)/p], j=0,\cdots,m-1$, tem-se $\alpha(I_j)\subset V_j$, onde os V_j são vizinhanças coordenadas em M, contidas em $M-B$. Suporemos ainda que $a\in V_j$ implica $V_j=V_0$, o que é sempre possível fazer. Definiremos a família h_t indutivamente, para $t\in I_j$, de modo que esta definição seja coerente nas extremidades. Seja $f_0: V_0\to R^n$ um homeomorfismo tal que $f_0(\alpha(0))=0$. Para $t\in I_0$, poremos $h_t(x)=x$ se $x\notin V_0$ e $h_t(x)=f_0^{-1}(f_0(x)-$ $-f_0(\alpha(t)))$ se $x\in V_0$. Note-se que h_t em V_0 consiste da translação $y\to y-f_0(\alpha(t))$ de R^n transportada para V_0. Como uma translação induz a aplicação identidade no infinito, segue-se que $h_t(x)\to x_0$ se $x\in V_0$ tende para o ponto x_0 da fronteira de V_0. Portanto h_t é contínua na fronteira de V_0, donde é homeomorfismo de M. Tem-se evidentemente $h_0=$identidade, $h_t(\alpha(t))=\alpha(0)$ e $h_t(b)=b, b\in B$. Alem disso h_t depende contìnuamente de t. Suponhamos agora h_t definido para $0\leq t\leq j/m$ de modo a satisfazer a estas condições e definamos h_t para $t\in I_j$. Seja $f_j: V_j\to R^n$ um homeomorfismo tal que $f_j(\alpha(j/m))=0$. Poremos, para $t\in I_j, h_t(x)=h_{j/m}(x)$ se $x\notin V_j$ $h_t(x)=h_{j/m}f_j^{-1}(f_j(x)-f_j(\alpha(t)))$ se $x\in V_j$. Vê-se imediatamente que esta definição de h_t dá a $h_{j/m}$ o mesmo valor que a anterior e que cumpre as condições requeridas, o que completa a primeira parte da demonstração. Para demonstrar a segunda parte, admitamos $\alpha(0)=\alpha(1)=a$. Então $h_0(a)=h_1(a)=a$ e a curva fechada $t\to h_t(a)$ inteiramente contida em V_0. Com efeito, se $t\in I_0$, é evidente que $h_t(a)\in V_0$. Suponhamos que $h_t(a)\in V_0$ para $0\leq t\leq j/m$. Então, se $t\in V_j$, ou $a\in V_j$, o que implica $h_t(a)\in V_j=V_0$, ou então $a\notin V_j$, caso em que $h_t(a)=h_{j/m}(a)\in V_0$ pela hipótese de indução. Seja então $k_t, t\in I$, o homeomorfismo de M definido por $k_t(x)=f_0^{-1}(f_0(x)-$ $-f_0h_t(a)))$ se $x\in V_0, k_t(x)=x$ se $x\notin V_0$. A família k_t assim definida satisfaz às condições requeridas na segunda parte do Lema 5. 5.

LEMA 5. 6. *Seja* $f \in H(M-A)$ *tal que* $\hat{f} \in H(M)$ *é isotópico à identidade e* $\sigma(f)$ *é o elemento identidade de* $H(A)$. *Então* f *é isotópico à identidade.*

Demontração. Seja $G_0 : M \times I \to M$ uma isotopia entre $\hat{f}$ e a identidade. Ponhamos $\alpha_1(t) = G_0(a_1, t)$. Usando o Lema 5. 5 com $B = \emptyset$ e $\alpha = \alpha_1$, obtemos as famílias de homeomorfismos h_t^1 e k_t^1 satisfazendo às condições ali estipuladas. Ponhamos agora $G_1(x, t) = h_{2t}^1 G_0(x, 2t)$, $x \in M$, $0 \leq t \leq 1/2$ e $G_1(x, t) = k_{2-2t}^1 h_{2-2t}^1(x)$, $x \in M$, $1/2 \leq t \leq 1$. Isto define uma isotopia $G_1 : M \times I \to M$ entre $\hat{f}$ e a identidade de M, tal que $G_1(a_1, t) = a_1$ para todo $t \in I$. Seja agora $\alpha_2(t) = G_1(a_2, t)$. Então $\alpha_2(t) \in M - a_1$. Usando o Lema 5. 5, desta vez com $B = \{a_1\}$ e $\alpha = \alpha_2$ obtemos as famílias de homeomorfismos h_t^2 e k_t^2, $t \in I$, com as propriedades ali mencionadas. Pomos então $G_2(x,t) = h_{2t}^2 G_1(x, 2t)$, $x \in M$, $0 \leq t \leq 1/2$ e $G_2(x, t) = k_{2t-2}^2 h_{2t-2}^2(x)$, $x \in M$, $1/2 \leq t \leq 1$. Isto define uma isotopia $G_2 : M \times I \to M$ entre $\hat{f}$ e a identidade, tal que $G_1(a_1, t) = a_1$, $G_2(a_2, t) = a_2$, para todo $t \in I$. Prosseguindo anàlogamente, concluiremos a existência de uma isotopia $G = G_p$ entre $\hat{f}$ e a identidade, tal que $G(a_i, t) = a_i$, $i = 1, \cdots, p$, para todo $t \in I$. Então $G' = G \mid (M - A) \times I$ é uma isotopia entre f e a identidade, o que demonstra o Lema 5. 6,

LEMA 5. 7. *Dado um homeomorfismo* $g \in H(M)$ *e uma permutação* $\sigma \in H(A)$, *existe um homeomorfismo* $f \in H(M)$ *isotópico a* g *e tal que* $f(a_i) = a_{\sigma(i)}$, *isto é, tal que* $g = \hat{f}$ *e* $\sigma = \sigma(f)$.

Demonstração. Como M é conexo por arcos, existe uma curva $\alpha_1 : I \to M$ tal que $\alpha_1(0) = a_{\sigma(1)}$ e $\alpha_1(1) = g(a_1)$. Usando o Lema 5. 5, obtemos um homeomorfismo h^1 de M, isotópico à identidade e tal que $h^1(g(a_1)) = a_{\sigma(1)}$. Pondo $f^1 = h^1 g$, vemos que f^1 é isotópico a g e $f^1(a_1) = a_{\sigma(1)}$. Suponhamos por indução, definido o homeomorfismo f^{j-1}, isotópico a g e tal que $f^{j-1}(a_i) = a_{\sigma(i)}$ para $i = 1, \cdots, j-1$. Ponhamos $B = \{a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(j-1)}\}$. Como a dimensão de M é ≥ 2, $M - B$ é conexo, logo existe uma curva $\alpha_j : I \to M$, $\alpha_j(I) \subset M - B$, tal que $\alpha_j(0) = a_{\sigma(j)}$, $\alpha_j(1) = f^{j-1}(a_j)$. Usando o Lema 5. 5, com B e α_j, obtemos o homeomorfismo h^j, isotópico à identidade, tal que $h^j(b) = b$ para $b \in B$ e $h_j(f^{j-1}(a_j)) = a_{\sigma(j)}$. Então $f^j = h^j f^{j-1}$ é um homeomorfismo de M, isotópico a g, tal que $f^j(a_i) = a_{\sigma(i)}$, $i = 1, \cdots j$, o que completa a indução. Poremos $f = f^p$ e o Lema 5. 7. estará demonstrado.

Para completar os resultados desta secção observemos que, se M é uma variedade compacta de dimensão 1 (isto é, se M é homeomorfa ao círculo S^1), e $A = \{a_1, \cdots, a_p\} \subset M$, então $M - A = C_1 \cup \cdots \cup C_p$ onde os C_i são conexos abertos, disjuntos e homeomorfos à recta R^1. Logo, dar um homeomorfismo f de $M - A$ consiste em dar uma permutação $\sigma = \sigma(f)$ dos C_i, isto é, dos índices $1, \cdots, p$ e, para cada índice i, um homeomorfismo $f_i : C_i \to C_{\sigma(i)}$. Indiquemos com Z_2 o grupo de dois elementos. A aplicação $f \to (f_1, \cdots, f_p, \sigma)$ induz um isomorfismo de $I(M - A)$ sobre o grupo que consiste das sequências $x = (x_1, \cdots, x_p, \sigma)$ com $x_i \in Z_2$ e σ uma permutação de p objetos, sendo o produto neste grupo definido por $xy = (x_{\tau(1)} y_1, \cdots, x_{\tau(p)} y_p, \sigma\tau)$, se $y = (y_1, \cdots, y_p, \tau)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. H. A. NEWMAN, *Topology of plane sets of points*. Cambridge University Press, 1951. (2nd. edition).

[2] J. W. ALEXANDER, *On the deformations of an n-cell*. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 9 (1923) 406-407.

[3] E. LIMA, *Homeomorfismos e isotopias numa esfera*. (A aparecer na *Gazeta de Matemática*).

Problemas fundamentais da teoria da aproximação funcional

por *Luís G. M. de Albuquerque*

1. Introdução.

Considere-se o seguinte exemplo, bem conhecido, de aproximação funcional:

Seja $f(x)$ uma função de variável real que pode ser desenvolvida em série inteira de x

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{1. 1}$$

em dado intervalo $[-\rho,\rho]$; e designemos por $s_m(x)$ a soma dos $m+1$ primeiros termos de (1. 1):

$$s_m(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k .$$

A série (1. 1) é uniformemente convergente em $[-\rho,\rho]$, e sabe-se que, para $\delta>0$, é possível determinar o inteiro $N(\delta)$ de tal modo que se tem

$$|f(x)-s_m(x)|<\delta \tag{1. 2}$$

qualquer que seja $x\,\epsilon\,[-\rho,\rho]$, desde que $m>N(\delta)$. Assim, fixado nestas condições um valor m de n, $s_m(x)$ é um polinómio de grau m em x e coeficientes conhecidos

$$a_k=\frac{1}{k!}f^{(k)}(o) \quad (k=1,2,\cdots m); \tag{1. 3}$$

e a função dada, $f(x)$, pode ser substituida em todo o intervalo $[-\rho,\rho]$ por este polinómio, com um erro de módulo inferior a δ.

Neste caso particular o problema da aproximação funcional consiste, portanto, em substituir num intervalo conhecido uma dada função por outra, em geral mais simples, de modo que o erro resultante dessa substituição não exceda uma quantidade prèviamente fixada.

Este exemplo sugere, no entanto, um outro problema. Considere-se a função de variável real, $f(x)$, definada em $[a,b]$, e tome-se o polinómio de grau m e coeficientes quaisquer

$$p_m(x)=\sum_{k=0}^{m}\alpha_k x^k ; \tag{1. 4}$$

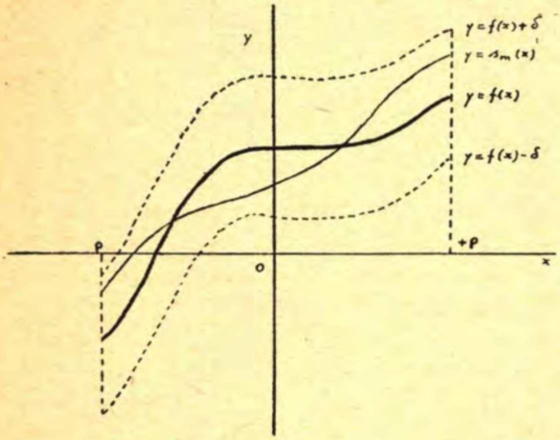
que valores α_k^0 devem ser atribuidos aos coeficientes α_k do polinómio (1. 4) para que, sendo

$$p_m^0(x)=\sum_{k=0}^{m}\alpha_k^0 x^k ,$$

se tenha

$$\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-p_m^0(x)|=\min_{\alpha_k}\max_{a\leq x\leq b}|f(x)-p_m(x)|\,? \tag{1. 5}$$

Se existe um polinómio $p_m^0(x)$ nestas condições diremos que ele é a *melhor aproximacão* de $f(x)$ em (a,b) dada por um polinómio de grau m. Se $f(x)$ é desenvolvível em série inteira, $[a,b]$ é o intervalo de convergência e $m>N(\delta)$, o mínimo procurado é decerto inferior a δ. Mas deve se observar que os dois problemas apresentados são bem diferentes. No primeiro caso são conhecidos os coeficientes (1. 3) dos polinómios a construir, e pretende-se determinar o grau de um polinómio que faz o módulo (1. 2) inferior a uma quantidade dada inicialmente. À solução $s_m(x)$ corresponde uma curva $y=s_m(x)$ contida entre $y=f(x)+\delta$ e $y=f(x)-\delta$ em $[-\rho,\rho]$ (figura); e todo o polinómio de coeficientes (1. 3) e grau superior a m satisfaz ao problema. No segundo caso, pelo contrário, fixa-se o grau do polinómio $p_m(x)$, e procuram-se os valores dos coeficientes



desse polinómio que tornam mínimo o valor $\max_{a \lesseqgtr x \lesseqgtr b} |f(x) - p_m(x)|$; à solução $p_m^0(x)$ pode corresponder uma curva que saia fora da faixa limitada por $y = f(x) + \delta$ e $y = f(x) - \delta$.

O primeiro destes problemas entra no quadro da teoria das séries de funções. Quanto ao segundo, que foi resolvido pelo primeiro de dois célebres teoremas de WEIERSTRASS demonstrados em 1885, constitue juntamente com os resultados obtidos por TCHEBICHEF, um dos primeiros passos da teoria da aproximação funcional.

Notemos agora que designando por distância de $f(x)$ a $p_m(x)$ em (a, b) o

$$\max_{a \lesseqgtr x \lesseqgtr b} |f(x) - p_m(x)|,$$

o problema resolvido pelo teorema de WEIERSTRASS pode-se enunciar assim: dada uma função $f(x)$, determinar o polinómio de grau m para o qual é mínimo o valor daquela distância.

Nada impede, porém, que a noção de distância entre $f(x)$ e $p_m(x)$ não seja compreendida doutro modo. Se admitirmos, por exemplo, que se designa por distância de $f(x)$ a $p_m(x)$ em (a, b), o valor do integral

$$(1.\ 6) \qquad \int_a^b [f(x) - p_m(x)]^2 dx.$$

o enunciado do problema tem outra significação; e se existe um polinómio $p_m(x)$ que torna mínimo o integral (1. 6), diremos que ele é *a melhor aproximação em média* de $f(x)$ em (a, b).

O que fica escrito já nos permite enunciar com toda a generalidade o problema fundamental da teoria da aproximação funcional(1).

Consideremos definidas sobre um dado conjunto de pontos P *de um espaço com qualquer número de dimensões, as funções* f(P) *e* $\varphi(\mathrm{P}; \lambda_1, \cdots \lambda_n)$, *dependendo esta última de* n *parâmetros arbitrários* $\lambda_1, \cdots \lambda_n$; *pretende-se determinar o valor destes parâmetros de tal modo que a distância entre as funções* f(P) *e* $\varphi(\mathrm{P}; \lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ *seja mínima no conjunto considerado.*

É claro que a solução do problema assim enunciado dependerá da noção de distância entre duas funções que se tenha convencionado introduzir.

2. Espaços vectoriais.

Tomemos o conjunto E constituído pelos elementos $x, y, \cdots$, a que chamaremos pontos ou vectores, a respeito dos quais está definida uma relação de tal modo que, dados $x, y \in E$, se tenha $x = y$ ou $x \neq y$, gozando $x = y$ das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva(2). Seja ainda $\mathfrak{K}$ o corpo dos números complexos $\alpha, \beta, \cdots$.

O conjunto E é um *espaço vectorial* (ou *linear*) a respeito do corpo $\mathfrak{K}$ quando:

---

(1) N. I. ACHIESER, *Vorlesungen über Approximations-theorie*, Berlim, 1953, pág. 1.

(2) Conf. o artigo de J. DIONÍSIO: *Os espaços métricos e a Análise clássica: o método do ponto fixo*, *Gazeta de Matemática*, n.os 62 e 63, § 1.

$v_1)$ se define sobre E um operador $+$, adição de vectores, a respeito do qual E é um grupo abeliano, isto é, de tal maneira que se verificam os seguintes axiomas:

$v_1')$ se $x, y \in E$, o vector $z = x + y \in E$ fica univocamente determinado;

$v_1'')$ $x + y = y + x$;

$v_1''')$ há em E um vector zero, $0 \in E$, tal que $x + 0 = x$ qualquer que seja $x \in E$.

$v_2)$ se define um produto αx dos elementos de $\mathfrak{K}$ pelos vectores de E, de tal modo que, para $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$ e $x, y \in E$, se tem:

$v_2')$ $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ e $(\alpha + \beta) x = = \alpha x + \beta x$;

$v_1'')$ $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha \cdot \beta) x$;

$v_2''')$ existe em $\mathfrak{K}$ uma unidade, $1 \in \mathfrak{K}$, tal que $1 \cdot x = x$, para todo o $x \in E$.

Como exemplos de espaços vectoriais citaremos:

I) *O espaço* $\mathrm{E_n}$ *de elementos definidos por* n *números complexos ou reais*

$$\mathrm{x} \equiv \{\mathrm{a}_1, \cdots \mathrm{a_n}\}, \mathrm{y} \equiv \{\mathrm{b}_1, \cdots \mathrm{b_n}\}, \cdots$$

com n *qualquer, finito,* desde que definamos a adição de dois elementos x e y por:

$$x + y = \{a_1 + b_1, \cdots a_n + b_n\}$$

e o produto de qualquer $\alpha \in \mathfrak{K}$ por um elemento x assim:

$$\alpha x \equiv \{\alpha \cdot a_1, \cdots \alpha \cdot a_n\},$$

é um espaço vectorial: as condições $v_1)$ e $v_2)$ verificam-se desde que $0 \equiv \{0, \cdots, 0\}$ seja considerado como vector zero de E_n.

Em particular, os vectores do plano euclidiano e do espaço euclidiano constituiem espaços vectoriais, E_2 e E_3, relativamente ao corpo de números reais, quando a adição definida por $v_1)$ é a adição vectorial, e o produto dado por $v_2)$ tem o sentido corrente do produto de um escalar por um vector.

II) *O espaço* C *das funções contínuas* $\mathrm{x(t)}, \mathrm{y(t)}, \cdots$ *definidas num dado conjunto fechado e limitado,* D, *é um espaço vectorial relativamente ao corpo dos números reais* (1). Para que os axiomas $v_1)$ e $v_2)$ sejam verificados bastará tomar como vector zero a função $x(t) \equiv 0$ em D, e manter as definições habituais de adição de funções e de produto de uma função por um número real.

III) *O espaço* P *dos polinómios de coeficientes reais ou imaginários* é também num espaço vectorial, relativamente ao corpo correspondente, desde que se mantenha o sentido algébrico na adição de dois polinómios ou no produto de um número por um polinómio.

3. Bases. Variedades lineares.

Dados num espaço vectorial E n vectores não nulos $x_k \in E\,(k = 1, \cdots, n)$, sejam $\alpha_k\,(k = = 1, \cdots, n)$ n números quaisquer do corpo $\mathfrak{K}$; se a relação linear

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k = 0 \tag{3. 1}$$

tem soluções distintas da solução trivial $\alpha_k = 0\,(k = 1, \cdots, n)$, diremos que os vectores x_k são *linearmente dependentes.* No caso contrário os x_k são *linearmente independentes,* constituindo um *sistema linearmente independente de ordem* n (n é o número de vectores).

Um sistema de infinitos vectores $x_k\,(k = = 1, 2, \cdots)$ é linearmente independente quando qualquer número finito de vectores do sistema é linearmente independente.

Teorema A. *É condição necessária e suficiente para que os vectores não nulos* $\mathrm{x_k}$ $(\mathrm{k} = 1, 2, \cdots \mathrm{n})$ *sejam linearmente dependentes,*

(1) J. J. Dionísio no artigo citado, Exemplo 2, § 2, mostrou que C é um espaço métrico.

que algum x_j, *com* $2 \leqq j \leqq n$, *seja uma combinação linear dos anteriores.*

Demonstração. Algum x_j há-de ser linearmente dependente com os vectores que o precedem, pois em virtude da hipótese esta afirmação tem ao menos lugar para $j = n$; seja x_r o primeiro vector nestas condições $(r \leqq n)$

$$(3.\ 2) \qquad \sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i = 0$$

não pode ser $\alpha_r = 0$, de contrário (3. 2) dava $\sum_{i=1}^{r-1} \alpha_i x_i = 0$, e x_i não seria o primeiro vector com a propriedade indicada; com $\alpha_r \neq 0$ tira-se de (3. 2):

$$x_r = - \sum_{i=1}^{r-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_r} x_i$$

e esta relação mostra que x_r é uma combinação linear dos $x_i (i = 1, \cdots, r-1)$ que o antecedem; assim, a condição é necessária. Mas também é suficiente. Se o primeiro vector nas condições do enunciado é x_n, a afirmação é trivial. Seja então $x_r (r < n)$ o primeiro vector que é combinação linear dos anteriores; é claro que os $x_i (i = 1, \cdots, r)$ são linearmente dependentes e $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i x_i$ tem a solução não trivial $\alpha_i = \alpha_i^0 (i = 1, 2, \cdots r)$; nestas condições também $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ tem a solução não trivial

$$\alpha_i = \alpha_i^0 (i = 1, \cdots, r), \alpha_i = 0 (i = r+1, \cdots, n),$$

e os $x_i (i = 1, 2, \cdots n)$ são linearmente dependentes.

Suponhamos que é n a maior ordem dos sistemas linearmente independentes contidos num dado espaço vectorial E; e seja

$$(3.\ 3) \qquad B \equiv |x_1, \cdots, x_n| \quad \text{ou} \quad |x_k|_{k=1,\cdots,n}$$

um desses sistemas; nestas condições chamaremos a B uma *base* do espaço E, dizendo-se que ele tem *dimensão* n.

Qualquer vector $x \in E$ é linearmente dependente com os vectores da base

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha x = 0$$

e como não pode ser $\alpha = 0$ (de contrário os vectores da base seriam linearmente dependentes) tem-se, com $\beta_i = - \alpha_i / \alpha$

$$(3.\ 4) \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$$

isto é: *cada vector* $x \in E$ *pode-se exprimir como combinação linear dos vectores de qualquer base do espaço.* A representação (3. 4) do vector x nos vectores da base é única: pois se tivessemos $x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i$, subtraindo de (3. 4) obtinhamos $\sum_{i=1}^{n} (\beta_i - \gamma_i) x_i = 0$, que só pode ter a solução trivial $\beta_i = \gamma_i$. Os coeficientes $\beta_i (i = 1, \cdots, n)$, univocamente determinados, chamam-se as componentes do vector $x \in E$ relativos à base B.

Por outro lado, considerando o espaço vectorial E (dimensão n), de base $|x_k|_{k=1,2,\cdots n}$, conclui-se não ser possível exprimir linearmente todos os vectores do espaço em menos de n vectores linearmente independentes $y_1, \cdots y_m (m < n)$; porque se assim fosse, os vectores $x_k (k = 1, \cdots n)$ podiam-se definir como combinações lineares dos $y_i (i = 1, \cdots m)$; nesse caso teriamos os x_k como n combinações lineares distintas de $m < n$ vectores, e eles seriam linearmente dependentes, (como o leitor verificará recorrendo à teoria dos sistemas de equações lineares homogéneas) em discordância com a hipótese de ser $|x_k|_{k=1,\cdots n}$ uma base.

Admitamos agora que, por maior que seja n, é sempre possível destacar do espaço E um sistema de n vectores linearmente independentes. Diz-se então que E *tem dimensão infinita*, e qualquer sistema infinito de vectores linearmente independentes constitui uma base (infinita) do espaço. Esta definição não nos autoriza, contudo, a substituir para este caso a soma por uma série na igualdade (3. 4); só em espaços vectoriais que verificam novas condições isso é legitimo, como teremos oportunidade de referir adiante.

Seja E um espaço vectorial de dimensão finita ou infinita, e $x_1, x_2, \cdots x_r$ ($r \leqq n$, se n é a dimensão finita do espaço) r vectores linearmente independentes de E; seja V o conjunto de todos os vectores de E que se podem exprimir como combinações lineares dos $x_k (k = 1, 2, \cdots r)$:

$$x \in V \text{ quando } x = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k x_k ;$$

é $V \subset E$, e como $O \in V$ (combinação dos x_k que corresponde a $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \cdots r$) é V *um sub-espaço vectorial de dimensão* r *e com a base* $\mathrm{B} = \{\mathrm{x}_1, \cdots \mathrm{x}_r\}$; diremos que V *é uma variedade linear do espaço vectorial* E, *gerada pela base* B.

Sejam agora M_1 e M_2 dois sistemas de vectores de E, e $B_1 \subset M_1$, $B_2 \subset M_2$ os conjuntos constituídos pelo maior número de vectores linearmente independentes de M_1 e M_2; os dois sistemas considerados dizem-se *equivalentes* quando se identificam as variedades lineares geradas por B_1 e B_2. É claro que esta circunstância tem lugar quando, e só quando, cada vector de um dos sistemas M_1 ou M_2 se pode exprimir como combinação linear de vectores do outro.

Consideremos alguns exemplos. O espaço E_n considerado em I) do número precedente tem a dimensão n, pois pode-se tomar como base de E_n o sistema de vectores linearmente independentes

$$e_1 = \{1, 0, \cdots 0\}, \; e_2 = \{0, 1, \cdots 0\}, \cdots \cdots e_n = \{0, 0, \cdots 1\};$$

as componentes de qualquer vector

$$x = \{a_1 \, a_2, \cdots a_n\}$$

nesta base são $a_i (i = 1, 2, \cdots n)$ pois

$$x = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \cdots + a_n e_n .$$

Do mesmo modo: o conjunto dos polinómios de grau $< n$ e coeficientes quaisquer, P_{n-1}, é um espaço vectorial de dimensão n com a base

$$(3.\ 5) \qquad B \equiv \{1, t, t^2, \cdots, t^{n-1}\} .$$

Como exemplo de espaço com dimensão infinita serve o espaço P dos polinómios, referido no exemplo III) do número 2. Qualquer que seja n a combinação linear $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k = 0$ só tem a solução trivial $\alpha_k = 0 (k = 0, \cdots, n)$; deste modo os vectores

$$1, t, t^2, \cdots t^n, \cdots$$

constituem um sistema infinito linearmente independente, que pode ser tomado como base de P.

Finalmente: $P_n \subset P$ é uma variedade linear deste último espaço, gerada pela base (3. 5).

4. Espaços vectoriais normados. Espaços separáveis e completos. Espaço de Banach.

Um espaço vectorial E, definido sobre o corpo $\mathfrak{K}$, diz-se *normado* quando a cada $x \in E$ se faz corresponder um número real $\|x\| \geq 0$, a *norma de* x, tal que se verifiquem as seguintes condições:

n_1) $\|x\| = 0$ se e só se $x = 0$;

n_2) $\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, com $\alpha \in \mathfrak{K}$;

n_3) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$.

Se na última condição a igualdade tem lugar quando e só quando $y = \alpha x$, diz-se que a *norma é forte*.

Todo o espaço vectorial normado é metrizável, isto é, pode-se nele definir uma função de distância sobre cada par ordenado de elementos $x, y \in E$, de tal modo que se verifiquem as condições δ_1) e δ_2)(1) exigidas para que E seja um espaço métrico: na verdade, pondo $\delta(x, y) = \|x - y\|$ tem-se $\delta(x, y) = 0$ quando e só quando $x = y$, e δ_1) é válida; por outro lado, $x - y = (x - z) + (z - y)$ donde, em virtude de n_1) e n_2) $\delta(x, y) \leqq \delta(x, z) + \delta(y, z)$, e δ_2) também se verifica.

Assim, a sucessão $\{x_n\}$ de vectores de um espaço vectorial normado E tem por limite um vector x quando $\delta(x, x_n) < \varepsilon$ para $n > N(\varepsilon)$; ou, o que é o mesmo, quando $\|x - x_n\| < \varepsilon$ para $n > N(\varepsilon)$.

Também se conclui logo que a norma $\|x\|$ é uma função contínua de x, quer dizer, se $x_n \to x$ também $\|x_n\| \to \|x\| \, (n \to \infty)$; pois se $x_n \to x$ é $\|x_n - x\| \to 0$ e, para $n > N(\varepsilon)$, $\|x - x_n\| < \varepsilon$; mas como $x_n = x + (x_n - x)$, em virtude de n_3) é $\|x_n\| \leqq \|x\| + \|x_n - x\|$ ou $\|x_n\| - \|x\| \leq \|x_n - n\|$; anàlogamente $\|x\| - \|x_n\| \leqq \|x_n - x\|$. É portanto

$$\big| \|x\| - \|x_n\| \big| < \varepsilon$$

para $n > N(\varepsilon)$ como desejávamos.

No artigo citado (§ 1), J. J. Dionísio indicou que dada uma sucessão $\{x_n\}$ de elementos de um espaço métrico E, a condição de Cauchy

$$(4.\ 1) \qquad \delta(x_n, x_m) < \varepsilon \quad \text{para} \quad n, m > N(\varepsilon)$$

não implicava necessàriamente a existência de um limite da sucessão. Porém, se a condição de Cauchy é suficiente para garantir que o limite de $\{x_n\}$ existe, diz-se que o *espaço é completo*(2). Note-se que a condição para que um espaço vectorial normado, E, seja completo pode ser expressa doutro modo: *o espaço é completo se para toda a sucessão de vectores* $\{\mathrm{x_n}\}$ *de* E *que satisfaça à condição* $\lim\limits_{m,n\to\infty} \|\mathrm{x_n} - \mathrm{x_m}\| = 0$ *existe um vector* $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathrm{x} - \mathrm{x_n}\| = 0$.

(1) V. J. J. Dionísio, art. cit. § 1.

(2) No § 2 daquele trabalho o Autor dá exemplos de espaços métricos nestas condições.

Um espaço vectorial normado completo diz-se um *espaço de* Banach. De todo o espaço vectorial normado E se pode obter um espaço de Banach: basta juntar aos vectores de E os elementos limites que não pertencem ao espaço e são definidos por sucessões $\{x_n\}$ de E que satisfazem à condição de Cauchy. O espaço de Banach assim obtido é o fecho $\bar{E}$ de E (sendo E denso em $\bar{E}$).

Um espaço vectorial normado é *separável* quando E contém um sub-conjunto numerável, $N \subset E$, denso em E. Ou seja: quando existe uma sucessão numerável de elementos de E, $\{x_n\}$, tal que sendo $\delta > 0$ e $x \in E$ arbitràriamente escolhidos, pelo menos um elemento $x_{n'}$, de $\{x_n\}$ verifica a condição:

$$\delta(x, x_{n'}) = \|x - x_{n'}\| < \delta .$$

Vamos indicar alguns exemplos:

II) *O espaço* C *das funções contínuas definidas num dado conjunto limitado e fechado,* D, (já indicado no número 2) é um espaço vectorial normado desde que se tome como norma de $x(t) \in C$

$$\|x(t)\| = \sup_{x \in D} |x(t)| .$$

Esta definição respeita a métrica introduzida no art. cit. de J. J. Dionísio (§ 2, exemplo (3)).

O espaço C é completo quando se tome a convergência uniforme como noção de convergência; pois toda a série uniformemente convergente de funções contínuas tem por soma uma função contínua.

IV) *O espaço* m *das sucessões limitadas,* $\mathrm{x} = \{a_i\}_1^\infty$ *com* $|a_i| < \mathrm{M}$, *é um espaço de* Banach. J. J. Dionísio mostrou (1) que m é um espaço

(1) Art. cit., § 2, exemplo (2).

métrico *completo*; resta-nos, portanto, indicar que também é um espaço *vectorial normado*: para o que definiremos como norma de qualquer $x \in m$ o valor $\|x\| = \sup_i |a_i|$; o leitor verificará fàcilmente que tem lugar as condições n_1), n_2) e n_3), e que é respeitada a métrica definida no artigo citado.

V) *O espaço* $P[a, b]$ *dos polinómios de variável real e coeficientes quaisquer definidos num dado intervalo limitado e fechado* $[a, b]$, *é um espaço vectorial normado separável.* Como em III) verificariamos que $P[a, b]$ é um espaço vectorial; mas podemos definir a norma de qualquer $p(t) \in P[a, b]$ de modo análogo à do exemplo II):

$$p(t) = \sup_{t \in [a, b]} |p(t)|.$$

Como o conjunto dos polinómios cujos coeficientes têm parte real e parte imaginária racionais é numerável e denso em $P[a, b]$, o espaço é separável.

5. Espaço de Hilbert.

Chama-se *espaço de* HILBERT a todo o espaço vectorial E, definido sobre um corpo $\mathfrak{K}$, onde se defina uma operação denominada *produto escalar (interno ou hermítico)* do seguinte modo: a todo o par ordenado de vectores $x, y \in E$ corresponde um número complexo (x, y) — o seu *produto escalar* — que verifica as condições:

e_1) $(y, x) = \overline{(x, y)}$ ($\overline{a}$ conjugado de a);

e_2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$ com $\alpha, \beta \in \mathfrak{K}$;

e_3) $(x, x) \geqq 0$, tendo lugar a iguadade quando e só quando $x = 0$.

e_2) exprime a linearidade do produto escalar relativamente ao primeira factor; recorrendo a e_1 o leitor poderá estabelecer que a linearidade em relação ao segundo factor se exprime por:

e_2') $(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}(x, y) + \overline{\beta}(x, z)$

O produto escalar definido por e_1), e_2) e e_3) goza de propriedades importantes. Assim:

(5. 1) $\quad (\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2 \cdot (x, x)$;

de facto, empregando e_1) e e_2) tem-se:

$$(\alpha x, \alpha x) = \alpha(x, \alpha x) = \alpha\overline{(\alpha x, x)} = \alpha \cdot \overline{\alpha}\,\overline{(x, x)} = |\alpha|^2 \cdot (x, x)$$

pois se é $\alpha = \rho e^{i\theta}$, $\overline{\alpha} = \rho \cdot e^{-i\theta}$, e portanto $\alpha \cdot \overline{\alpha} = \rho^2$. Por outro lado:

(5. 2) $\quad |(x, y)| \leqq \sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}$;

tome-se um vector z tal que $(z, z) = 1$ e seja $(x, z) = \alpha$; tem-se:

$$0 \leqq (x - \alpha z, x - \alpha z) = (x, x) - (x, \alpha z) - (\alpha z, x) + |\alpha|^2 \cdot (z, z)$$

ou $\quad 0 \leqq (x, x) - |\alpha|^2 \quad$ (*)

pois $(z, z) = 1$ e $(x, \alpha z) + (\alpha z, x) = 2 \cdot \alpha \cdot \overline{\alpha} = 2|\alpha|^2$; de (*) tira-se

$$|\alpha|^2 = |(x, z)|^2 \leqq (x, x)$$

e pondo $z = \dfrac{y}{\|y\|}$, qualquer que seja y, fica

$$\left|\left(x, \frac{y}{\|y\|}\right)\right|^2 \leqq (x, x)$$

ou $\quad |(x, y)|^2 \leqq (x, x) \cdot \|y\|^2 = (x, x) \cdot (y, y)$

como desejavamos demonstrar [1]

Note-se que em (5. 2) o sinal de igualdade só tem lugar quando $x = \alpha z$ (em virtude de e_3), e portanto quando $x = \dfrac{\alpha}{\|y\|} y = \beta y$; isto é: na expressão (5. 2) é válido o sinal de

---

[1] C. J. EVERETT e H. J. RYSER, «The Gram Matrix and HADAMARD Theorem», *American Math. Montly*, vol. 53 (1946), p. 21.

igualdade quando x e y são linearmente dependentes. (5. 2) é correntemente designada por *desigualdade de* CAUCHY-BUNJAKOWSKI.

A definição de produto escalar e a desigualdade (5. 2) dão ainda lugar a

$$(5.\,3) \qquad \sqrt{(x+y\,,x+y)} \leqq \sqrt{(x\,,x)} + \sqrt{(y\,,y)}\,,$$

que deixamos ao leitor o trabalho de estabelecer a partir de $0 \leqq (x+y\,,x+y)$. Importa assinalar que o sinal de igualdade é válido em (5. 3) nas mesmas condições em que aparece em (5. 2), isto é, quando x e y são linearmente dependentes.

A metrização de um espaço de HILBERT é imediata: basta que nele se introduza como norma de qualquer $x \in E$ o valor real

$$(5.\,4) \qquad \|x\| = \sqrt{(x\,,x)}\,;$$

esta função satisfaz, com efeito, às condições que fixamos no número 4 para a definição de uma norma: sendo $(x\,,x)=0$ quando e só quando $x=0$, ter-se-à $\|x\|=0$ nas mesmas condições, e tem lugar n_1); por outro lado, em consequência de e_1) vem $\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x\,,\alpha x)} = \sqrt{|\alpha|^2 \cdot (x\,,x)} = |\alpha| \cdot \|x\|$, e verifica-se n_2); finalmente, em virtude de (5. 3) pode-se escrever $\|x+y\| = \sqrt{(x+y\,,x+y)} \leqq \sqrt{(x\,,x)} + \sqrt{(y\,,y)} = \|x\| + \|y\|$, e é respeitado o axioma n_3). Deste modo, o espaço de HILBERT é um espaço vectorial normado e, como tal, metrizável. E atendendo à observação que fizemos a respeito do sinal de igualdade em (5. 3), segue-se que em n_3) só será, neste caso, válido o sinal de igualdade desde que se tenha $x=\beta y$; ou seja: *no espaço de* HILBERT *a norma definida por* (5. 4) *é sempre forte.*

Obs. Alguns autores (por exemplo: N. I. ACHIESER e I. M. GLASSMANN, *Theorie der linearen Operatoren im* HILBERT-RAUM, Berlim, 1954) designam pelo nome de espaços de HILBERT os espaços vectoriais normados metrizáveis pela noção de produto escalar e *completos.*

Exemplos de espaços de HILBERT:

V) *O espaço* l^2 *das sucessões infinitas de números complexos*

$$x = \{a_n\}_1^\infty\,, y = \{b_n\}_1^\infty\,, \cdots$$

para os quais

$$\sum_1^\infty |a_n|^2 < \infty\,, \quad \sum_1^\infty |b_n|^2 < \infty\,, \cdots$$

é um espaço de HILBERT *completo e separável.* (Os números $a_n\,, b_n\,, \cdots (n=1\,,2\,,\cdots)$ serão designados por componentes dos vectores $x\,,y\,,\cdots$).

Na verdade pode-se definir a adição de dois vectores $x\,,y \in l^2$ assim $x+y = \{a_n+b_n\}_1^\infty$, pois a série $\sum\limits_1^\infty |a_n+b_n|^2$ é convergente em virtude da desigualdade

$$(1) \qquad |\alpha+\beta|^2 \leqq 2|\alpha|^2 + 2|\beta|^2 \, (^1)$$

e as condições v_1) verificam-se desde que se tome $0 = \{0\,,0\,,\cdots 0\,,\cdots\}$. O produto de um vector $x \in l^2$ por um número α (real ou complexo) fica definido por $\alpha x = \{\alpha a_n\}_1^\infty$, sendo válidas as condições v_2), como é manifesto. Finalmente, pode-se introduzir como produto escalar de quaisquer dois vectores $x\,,y \in l^2$ o número

$$(5.\,5) \qquad (x\,,y) = \sum_1^\infty a_n \overline{b}_n$$

pois a série que aparece no segundo membro é convergente em virtude de ser $|\alpha \cdot \beta| \leqq$

---

[1] Tem-se $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$ donde

(2) $\quad |\alpha+\beta|^2 \leqq |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2 \cdot |\alpha| \cdot |\beta|$;

mas para a e b reais $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \geqq 0$, portanto $2ab \leqq a^2 + b^2$ e $2|\alpha| \cdot |\beta| \leqq |\alpha|^2 + |\beta|^2$ (3) o que, substituindo em (2) dá a desigualdade (1), como desejavamos.

$\leqq \frac{1}{2} |\alpha|^2 + \frac{1}{2} |\beta|^2$ (desigualdade (3) da nota anterior) e as condições e_1), e_2) e e_3) são verificadas: as duas últimas são imediatas e a primeira resulta de:

$$\sum_1^\infty a_n \overline{b}_n = \lim_{r\to\infty} \sum_1^r a_n \overline{b}_n = \lim_{r\to\infty} \overline{\sum_1^r \overline{a}_n b_n} = \overline{\sum_1^\infty \overline{a}_n b_n}.$$

Em consequência de (5. 4) e (5. 5) a norma de qualquer vector $x \in \{a_n\}_1^\infty \in l^2$ é dada por:

$$(5.6)\qquad \|x\| = \sqrt{(x,x)} = \sqrt{\sum_1^\infty a_n \overline{a}_n} = \sqrt{\sum_1^\infty |a_n|^2}.$$

Assim, l^2 é um espaço de HILBERT. Para mostrarmos que ele é separável basta considerar o conjunto N dos vectores de l^2, distintos de 0, para os quais as componentes são números complexos racionais (isto é da forma $\alpha + i\beta$, com α e β racionais); como N é numerável e denso em l^2, este espaço é separável.

Falta provar que l^2, é completo. Seja $x^{(k)} = \{a_n^{(k)}\}_{n=1}^\infty (k=1,2,\cdots)$ uma sucessão de vectores de l^2 que verifica a condição de CAUCHY

$$(4)\qquad \|x^{(r)} - x^{(s)}\| = \sqrt{\sum_1^\infty |a_n^{(r)} - a_n^{(s)}|^2} < \varepsilon$$

para $r, s > k(\varepsilon)$; ora qualquer que seja o número inteiro e positivo m

$$|a_m^{(r)} - a_m^{(s)}| \leqq \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |a_n^{(r)} - a_n^{(s)}|^2} < \varepsilon$$

para $r, s > k(\varepsilon)$; e assim, cada sucessão dos valores de qualquer componente, $\{a_m^{(k)}\}_{k=1}^\infty$, verifica também a condição de CAUCHY e, como tal, tem um limite a_m

$$(5)\qquad \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} = a_m \quad (m = 1, 2, \cdots).$$

Da desigualdade (4) tira-se, qualquer que seja o inteiro e positivo v e com $r, s > k(\varepsilon)$,

$$\sqrt{\sum_{n=1}^v |a_n^{(r)} - a_n^{(s)}|^2} < \varepsilon;$$

fazendo $s \to \infty$ e tendo em atenção (5) vem

$$\sqrt{\sum_{n=1}^v |a_n^{(r)} - a_n|^2} \leqq \varepsilon,$$

desigualdade que é válida qualquer que seja v, o que permite escrever

$$(6)\qquad \|x^{(r)} - x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |a_n^{(r)} - a_n|^2} \leqq \varepsilon,$$

onde é $x = \{a_n\}_1^\infty$, o que prova ser $\lim_{r\to\infty} x^{(r)} = x$; mas como, qualquer que seja $r > k(\varepsilon)$, é $x^{(r)} - x = \{a_n^{(r)} - a_n\} \in l^2$ porque, em virtude de (6), se tem $\sum_{n=1}^\infty |a_n^{(r)} - a_n|^2 \leqq \varepsilon^2$, segue-se $x \in l^2$ e o espaço é completo (1).

VI) Seja $L^2[a,b]$ *o conjunto das funções* $x(t)$ *definidas no intervalo finito* $[a,b]$, *mensuráveis e cujo quadrado do valor absoluto é* L-*integrável.* $L^2[a,b]$ *é um espaço de* HILBERT *completo,* pois: Sendo $x(t), y(t) \in L^2[a,b]$, também $x(t) + y(t) \in L^2[a,b]$, visto que a soma de duas funções mensuráveis é uma função mensurável, e $|x(t) + y(t)|^2$ é L-integrável em $[a,b]$ por ser (2)

$$|x(t) + y(t)|^2 \leqq 2|x(t)|^2 + 2|y(t)|^2;$$

como vector nulo do espaço torna-se uma função que seja nula em *quase todo* o intervalo $[a,b]$.

Por outro lado, se $x(t) \in L^2[a,b]$ é $\alpha x(t) \in L^2[a,b]$, qualquer que seja o número α; e fica definido o produto de um vector por um número.

(1) Esta demonstração encontra-se, por exemplo, em N. I. ACHIESER e I. M. GLASSMANN, *loc. cit.*, pág. 7.

(2) Conf. a desigualdade (1) do exemplo anterior.

O produto escalar de dois vectores $x(t), y(t) \in L^2[a,b]$ é dado por

$$(5.\ 7) \qquad (x,y) = \int_a^b x(t) \cdot y(t)\, dt$$

pois (desigualde (3) do exercício anterior)

$$|x(t) \cdot y(t)| \leqq \frac{1}{2}|x(t)|^2 + \frac{1}{2}|y(t)|^2$$

garante a existência do integral do segundo membro de

$$\left| \int_a^b x(t) \cdot y(t)\, dt \right| \leqq \int_a^b |x(t) \cdot y(t)|\, dt$$

e, portanto, a existência do integral que intervem em (5. 7).

Conclui-se que $L^2[a,b]$ é um espaço de HILBERT, ficando a norma de qualquer $x(t) \in L^2[a,b]$ determinada por

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2\, dt}$$

Falta-nos verificar que $L^2[a,b]$ é um espaço completo(1). Seja $\{x_n(t)\}_1^\infty \in L^2[a,b]$ uma sucessão que satisfaz à condição de CAUCHY

$$\|x_n(t) - x_m(t)\| < \sqrt{\varepsilon} \quad \text{ou}$$
$$\int_a^b |x_n(t) - x_m(t)|^2\, dt < \varepsilon$$

para $n, m > N(\varepsilon)$; considere-se a sucessão crescente de números inteiros e positivos $k_1 < k_2 < \cdots < k_i < \cdots$ tal que

$$\int_a^b |x_{k_{i+1}}(t) - x_{k_i}(t)|^2\, dt < \frac{1}{8^i} \quad (i = 1, 2, \cdots);$$

o conjunto A_i dos pontos de $[a,b]$ para os quais

$$|x_{k_{i+1}}(t) - x_{k_i}(t)| \geqq 1/2^i$$

tem medida $m(A_i) < 1/2^i$, pois sendo $A_i \subset \subset [a,b]$ vem:

$$\frac{1}{8^i} > \int_a^b |x_{k_{i+1}}(t) - x_{k_i}(t)|^2\, dt \geqq$$
$$\geqq \int_{A_i} |x_{k_{i+1}}(t) - x_{k_i}(t)|^2\, dt \geqq \frac{1}{4^i} m(A_i)$$

donde se tira, como desejavamos

$$(1) \qquad m(A_i) < \frac{1}{2^i}.$$

As desigualdades

$$|x_{k_{s+1}}(t) - x_{k_s}(t)| < \frac{1}{2^s}$$
$$|x_{k_{s+2}}(t) - x_{k_{s+1}}(t)| < \frac{1}{2^{s+1}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

são simultâneamente verificadas no intervalo $I_s \subset [a,b]$ dado por

$$(2) \qquad I_s = [a,b] - (A_s + A_{s+1} + \cdots)$$

em virtude da propriedade aditiva generalizada da medida-L e de (1):

$$m([a,b] - I_s) = m\left(\sum_{n=s}^{\infty} A_n\right) =$$
$$= \sum_{n=s}^{\infty} m(A_n) < \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

ou seja

$$(3) \qquad m([a,b] - I_s) < \frac{1}{2^{s-1}};$$

mas de (2) tira-se

$$I_s \subset I_{s+1} \subset \cdots \subset [a,b]$$

donde

$$\lim_{s\to\infty} I_s = I \subset [a,b]$$

sendo, em resultado de (3)

$$(4) \qquad m([a,b] - I) = \lim_{s\to\infty} m([a,b] - I_s) = 0.$$

(1) Seguimos N. I. ACHIESER e I. M. GLASSMANN, *loc. cit.*, pág. 23. O leitor encontra outra demonstração em I. P. NATANSON, *Theorie der Funktionen einer reeller Veranderlichen*, Berlim 1954, pág. 169.

Como para $n > m > s$ é

$$|x_{k_n}(t) - x_{k_m}(t)| \leqq \sum_{r=m}^{n-1} |x_{k_{r+1}}(t) - x_{k_r}(t)|$$

$$< \sum_{r=m}^{n-1} \frac{1}{2^r} < \frac{1}{2^{m-1}}$$

segue-se que a sucessão $\{x_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ converge uniformemente em cada um dos conjuntos I_s; então converge uniformemente em I, ou seja (conf. (4)) em quase todos os pontos de $[a, b]$.

Definamos então uma função $x(t)$ assim:

$$(5) \quad \begin{cases} x(t) = \lim\limits_{r\to\infty} x_{k_r}(t) & \text{para} \quad t \in I \\ x(t) = 0 & \text{para} \quad t \in [a, b] - I \end{cases}$$

Ora a sucessão considerada verifica a condição de CAUCHY e por isso $(I_s \subset [a, b])$

$$\int_{I_s} |x_m(t) - x_{k_r}(t)|^2 \cdot dt \leqq$$

$$\leqq \int_a^b |x_m(t) - x_{k_r}(t)|^2 dt < \varepsilon$$

desde que $m, k_r > N(\varepsilon)$; mas dada a convergência uniforme de $\{x_{k_r}(t)\}_{r=1}^{\infty}$ em I_s obtem-se tomando o limite quando $r \to \infty$ e tendo em atenção (5):

$$\int_{I_s} |x_m(t) - x(t)|^2 dt < \varepsilon$$

qualquer que seja I_s; ou

$$\| x_m - x \| = \sqrt{\int_a^b |x_m(t) - x(t)|^2 \cdot dt} < \sqrt{\varepsilon}$$

Assim se conclui que $x_m(t) - x(t) \in L^2[a, b]$, portanto $x(t) \in L^2[a, b]$; e, ao mesmo tempo, que $\lim\limits_{m\to\infty} x_m(t) = x(t)$, como desejavamos concluir [1].

---

[1] Esta demonstração ainda podia servir, com pequenas alterações, no caso em que $[a, b]$ è infinito (N. I. ACHIESER e I. M. GLASSMANN, *loc. cit.*, pág. 24).

PEDAGOGIA

Notas sobre o ensino da matemática em Portugal

por ***Hugo Ribeiro***

As seguintes notas foram escritas em Outubro de 1956 quando interrompemos por umas horas a nossa visita à família e amigos em Portugal para responder à questão [1], que nos foi verbalmente posta, das nossas impressões sobre a situação da Matemática em Portugal e as soluções imediatas a dar-lhe. Não se fundamenta em nenhum estudo sistemático do problema, mas antes em observações feitas em parte de longe e ligadas a reminiscências muito vivas e directas de tempos passados.

1. Já não há, com a mesma agudeza, o problema fundamental reconhecido por ANTÓNIO MONTEIRO e que o próprio, a J. I. M. e o I. A. C. tentaram resolver criando entre os jóvens estudiosos portugueses a confiança nas suas capacidades para a investigação matemática.

---

[1] Não foi a Redacção nem nenhum dos elementos que a constitui que entrevistou o Prof. HUGO RIBEIRO, simplesmente este, como dedicado Amigo da Gazeta ofereceu à consideração dos leitores o resultado dessa entrevista.

2. Por falta de tradição de investigação matemática nas nossas universidades, por causa do nosso isolamento relativo, por causa do desenvolvimento — e com orientações essencialmente novas — da Matemática nos países de língua alemã e depois nos de língua inglesa e, por outro lado, por motivo da nossa dependência cultural quase exclusiva da França, onde esse desenvolvimento tem sido tardio, as principais ideias de desde há mais de quarenta anos ou não têm sido assimiladas ou têm sido desordenada e insuficientemente assimiladas e factos fundamentais, que deviam constituir parte da formação matemática de qualquer estudante, são desconhecidos. A qualidade da nossa produção matemática ressente-se disto e o que é mais grave é que a consciência desta situação parece estar frequentemente ausente. Da qualidade dum trabalho matemático publicado pode ter-se uma ideia (embora grosseira, e sem dúvida em alguns casos errónea) através das revistas na *Mathematical Reviews* e no *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzegebiete* e, melhor, através da natureza e frequência das referências a ele feitas noutros trabalhos de reputação melhor estabelecida.

Leiam-se sistemáticamente as revistas de trabalhos matemáticos de Portugal. Ver-se-á que, frequentemente, temos publicado resultados que ignorávamos serem já conhecidos na literatura matemática e notar-se-á ainda a frequente ausência em trabalhos portugueses duma apreciação da importância relativa de resultados e métodos já clássicos.

3. O problema fundamental, hoje, é o de, sem perdermos aquela confiança, que, parcialmente pelo menos, foi criada, tomarmos consciência do nosso actual semi-amadorismo, da urgente necessidade entre nós de uma educação matemática digna deste nome, da necessidade urgente de uma Escola Matemática. Isto seria indispensável resolver mesmo quando só desejássemos a formação de bons professores, ou um ensino futuro capaz, ou a existência de matemáticos que venham a trabalhar como eficientes técnicos nas indústrias ou agências do governo.

4. A ausência de uma tradição de estudo tem que ser compensada por um combate às três causas mais aparentes da nossa deficiente e, sobretudo, desequilibrada educação matemática:

1.ª A insuficiência e os vícios de hábitos quanto à informação bibliográfica;

2.ª O isolamento relativo de bons centros de estudos;

3.ª A actual organização e os actuais programas da licenciatura em Ciências Matemáticas.

Qualquer programa que, com estes objectivos em vista e não outros, se proponha resolver os problemas da Matemática em Portugal, eficientemente, neste momento, tem que ter em conta os seguintes pontos fundamentais:

a) O acesso fácil a bibliotecas bem apetrechadas e organizadas.

b) A modificação radical do programa da licenciatura em Ciências Matemáticas substituindo-o por um, não rígido, de licenciatura em Matemática.

c) A visita demorada, em cada semestre, de pelo menos um investigador de reputação e também de sólida e moderna formação matemática tão universal quanto possível.

d) A concessão a jovens estudiosos de bolsas de longa duração e com o objectivo da sua formação matemática, em universidades estrangeiras com melhor *curriculum*, de preferência a bolsa de curta duração e com a preocupação principal de especialização estreita.

e) O apoio financeiro à única revista matemática portuguesa de reputação internacional estabelecida — a *Portugaliae Mathematica*.

f) O apoio material e aproveitamento conveniente das energias, dedicação e experiência dos matemáticos portugueses, presentemente no país ou fora dele, e das suas *Sociedade Portuguesa de Matemática*, revistas como a *Gazeta de Matemática*, etc.

g) A experiência de cursos de férias e outros de aperfeiçoamento da preparação matemática dos nossos actuais professores dos liceus e universidades.

h) A iniciativa de traduções de livros, monografias, etc. de importância fundamental.

i) A informação objectiva que conduza à melhor compreensão dos problemas reais, por meio de inquéritos — à organização da investigação e do ensino em países avançados, aos licenciados portugueses, etc.

5. Umas palavras de explicação de alguns destes pontos afiguram-se necessárias:

a) O acesso fácil a tais bibliotecas deve entender-se para todos os estudantes desde os primeiros anos e estender-se a todos os estudiosos mesmo quando ocupados em trabalhos fora da universidade. É importante centralisar os livros e revistas existentes, continuar completando colecções e conseguir o afluxo contínuo de tudo o que se for publicando com algum valor; mas é indispensável tornar atraente a consulta e o trabalho nessas bibliotecas. E é aconselhável utilisar estudantes interessados, que necessitem de ajuda financeira, como bibliotecários «part-time».

b) O novo programa deve ser fácilmente adaptável a novas condições que mudam constantemente. Os actuais cursos de Desenho, Geometria Descritiva, Geodesia, Astronomia e Mecânica Celeste interessarão a alguns engenheiros ou a astrónomos, não a matemáticos. Estamos longe da época dum Pedro Nunes ou mesmo dum Daniel da Silva. Um programa razoável de formação como matemático é elástico e assenta, hoje, essencialmente, numa sucessão de cursos de Álgebra (desde a Álgebra Linear á Teoria de Galois), uma sucessão de cursos de Geometria (desde a Geometria euclideana e projectiva à Topologia e à Geometria diferencial) e uma sucessão de cursos de Análise (passando pelas teorias das funções de variável complexa e de variável real às equações diferenciais, análise funcional, etc.), tomando-se em conta a interdepência e interpenetração dos assuntos das três sucessões. (Leia-se, por exemplo, a lição de despedida do presidente da *Mathematical Association of America*, Saunders Mac Lane, num dos números do *American Mathematical Monthly* de 1954. Estudem-se os programas da Universidade de Chicago, da Escola Politécnica Federal de Zürich, etc.) No início haverá um curso de Cálculo Infinitesimal porventura servindo simultâneamente, a futuros matemáticos, engenheiros, físicos, etc. E são indispensáveis:

1.º Pelo menos um Seminário obrigatório (de assunto variável) para o contacto com literatura recente ou clássica importante e para criar hábitos de análise crítica, de discussão e de trabalho em comum;

2.º Cursos complementares variáveis e de carácter mais avançado e especial (Teoria dos Conjuntos, Estatísca, Cálculo numérico e instrumentos de cálculo, Lógica, Questões relativas à Física Teórica ou ao ensino elementar, Teoria dos Números, etc.); para obtenção do diploma, uma prova de capacidade de leitura em língua inglesa e outra em língua alemã ou russa devem ser exigidas.

c) O objectivo deve ser contribuir para melhorar a qualidade do futuro ensino através duma melhor formação matemática dos professores. O método deve ser o trabalho de seminário (acompanhado, quando necessário, de pequenos cursos ou conferências) de nível adaptado a cada caso individual ou de pequenos grupos — com o fim de desenvolver ou criar hábitos de estudo correctos e fazer viver a experiência da obtenção de resultados próprios em problemas das fronteiras do conhecimento. Não se trata nem da aquisição de técnicas de cálculo, nem da aquisição de ideias gerais que seriam necessàriamente superficiais. Deverá restringir-se os assuntos de que cada professor se ocupe simultâneamente e escolhê-los de acordo com as especialisações dos que orientam o trabalho e com os centros de interesse dos professores que se estão aperfeiçoando. Para os professores dos liceus devem, desde o início, incluir-se trabalhos relativos aos Fundamentos da Geometria, à Àlgebra, a uma introdução aos Fundamentos da Análise, à Teoria dos números, e (em forma de conferências) ao cálculo numérico e gráfico e instrumentos de cálculo.

MOVIMENTO MATEMÁTICO

REUNIÃO DOS MATEMÁTICOS DE EXPRESSÃO LATINA

Sob a iniciativa da União Matemática Italiana e da Sociedade Matemática de França e graças ao apoio do Governo francês e da Municipalidade de Nice, realizar-se-á no Centro Universitário Mediterrâneo de Nice de 12 a 19 de Setembro de 1957 a Reunião dos Matemáticos de Expressão Latina. Esta reunião terá a forma de colóquio, compreendendo nove conferências sobre assuntos escolhidos nos domínios seguintes:

1 — Geometria diferencial e Topologia;
2 — Álgebra e geometria algébrica;
3 — Equações às derivadas parciais;
4 — Probabilidades e Física matemática.

Serão antecipadamente distribuídos aos congressistas resumo das conferências; estas serão seguidas de longa discussão a que são convidados de participar os matemáticos presentes.

As inscrições e pedidos de informação devem ser dirigidos até 31 de Julho próximo para Réunion des Mathématiciens d'Expression Latine, Société Mathématique de France, 11, rue Pierre Curie, Paris 5.^{e}.

J. G. T.

XI REUNIÃO DA COMISSÃO INTERNACIONAL PARA O ESTUDO E O MELHORAMENTO DO ENSINO DA MATEMÁTICA

A Comissão Internacional para o Estudo e Melhoramento do Ensino da Matemática (1) efectuou a sua XI reunião em Madrid, de 21 a 28 de Abril p. p., sobre o tema «O papel do concreto no ensino da matemática».

Como foi salientado nas conferências dos professores P. Puig Adam, chefe da delegação espanhola, e W. Servais, chefe da delegação belga, o mundo moderno vai precisar, em escala cada vez maior, de cientistas e técnicos dotados de boa preparação matemática. Daqui a necessidade urgente de remodelar, não só os programas de matemática, mas ainda os métodos de ensino desta disciplina, desde a escola primária até a universidade. O ensino da matemática — afirmaram aqueles professores, — deverá, muito mais do que até hoje, assentar numa base intuitiva, concreta, heurística. O objectivo desta orientação não é apenas o de tornar o ensino mais aliciante, contribuindo para que a matemática deixe de ser o tradicional suplício para a maioria dos rapazes; mas também, e sobretudo, o de levar o aluno a reelaborar, espontânea e progressivamente, os esquemas lógicos da matemática, até a sua fase mais racional e abstracta, para depois, inversamente, aprender a utilizá-los nas suas aplicações concretas. Só assim ele tomará plena consciência da origem e da estrutura lógica, bem como do significado humano, isto é, da finalidade de tais esquemas.

(1) Veja-se o artigo «Matemática clássica ou matemática moderna, no ensino secundário?», de Emma Castelnuovo, em G. M., n.º 65.

Os trabalhos do Congresso consistiram essencialmente em sessões de seminário repartidas por diversas secções (modelos, filmes fixos, filmes móveis, etc.) em lições experimentais, feitas perante a assistência e seguidas de discussão, a alunos de escolas primárias e secundárias, espanholas, francesas e italianas, e em projecções de filmes, também seguidas de discussão. O Congresso era acompanhado de uma extensa e deveras interessante exposição de modelos matemáticos, de vários tipos e várias proveniências.

O Prof. G. Choquet, professor da Sorbonne e presidente da referida Comissão Internacional, proferiu na Academia de Ciências de Madrid uma conferência sobre «A moderna teoria do potencial».

A delegação portuguesa ao Congresso era constituída pelo signatário e pelos senhores dr. J. J. Gonçalves Calado, professor do Liceu Pedro Nunes e delegado da Sub-Comissão Portuguesa do Ensino Matemático Internacional, dr. J. Furtado Leote, professor metodólogo do Liceu Pedro Nunes e eng. A. dos Santos Heitor, professor metodólogo do Ensino Técnico. Entre outras coisas, os professores portugueses puderam, mais uma vez, aperceber-se de que os programas para as escolas estrangeiras são, dum modo geral, muito mais desenvolvidos e aprofundados do que entre nós.

J. Sebastião e Silva

4.º CONGRESSO DOS MATEMÁTICOS AUSTRÍACOS

Parece que os congressos dos matemáticos austríacos conquistaram em pouco tempo uma sólida posição no círculos dos matemáticos de todo o mundo.

Prova-o não apenas o número sempre crescente de participantes, mas também cada uma das muitas manifestações oficiais e não oficiais de aplauso e apoio às suas realizações.

O IV Congresso realizou-se de 17 a 22 de setembro passado, em Viena, pouco espaçado dos anteriores: II Congresso em 1949 em Innsbruck, III Congresso em 1952 em Salzburg. Reuniu cerca de 500 pessoas de 27 países diferentes que em cinco secções discutiram as teses apresentadas:

I — Algebra e Teoria dos números;

II — Análise;

III — Geometria e Topologia;

IV — Matemáticas Aplicadas;

V — Filosofia e História da Matemática.

O próximo Congresso está marcado para 1960.

A *Gazeta de Matemática* deseja vivamente que os matemáticos portugueses nele se façam representar devidamente, com a sua presença e os seus trabalhos.

O quadro seguinte dá idea geral sobre a importância e extensão da notável reunião científica:

Países	Participantes	Comunicações					
		I	II	III	IV	V	Total
Alemanha	169	13	20	14	6	3	56
Austria	68	4	3	8	7	—	22
Belgica	7	—	1	3	—	—	4
Canada	1	—	1	—	—	—	1
Costa do Ouro	1	—	—	—	—	—	—
Dinamarca	2	1	1	—	—	—	2
Espanha	4	—	1	1	1	—	3
Estados Unidos	9	—	—	2	1	—	3
Finlandia	1	—	1	—	—	—	1
França	37	3	5	8	2	—	8
Grã-Bretanha	21	5	2	5	6	—	16
Grécia	7	—	1	1	—	—	2
Holanda	16	4	—	1	—	1	6
Hungria	25	4	5	2	5	—	16
Itália	51	3	2	5	6	—	16
Iugoslávia	26	1	9	4	3	—	17
Japão	1	—	—	—	—	—	—
Noruega	7	1	—	—	—	1	2
Polónia	5	1	3	1	—	—	5
Roménia	6	—	3	—	—	—	3
Suécia	5	—	1	—	1	—	2
Sudão	1	—	—	—	—	—	—
Suiça	9	—	2	—	—	—	2
Tchecoslovaquia	7	2	2	1	1	—	6
Turquia	4	—	2	1	—	—	3
União Soviética	4	—	3	1	—	—	4
Vietnam	1	—	—	—	1	—	1
Total	495	42	68	57	35	5	207

J. G. T.

PROF. LAURENT SCHWARTZ

Esteve entre nós, de 2 a 13 de Março último, o Prof. Laurent Schwartz da Sorbonne, que veio, a convite do Instituto de Alta Cultura, realizar algumas conferências no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa. Numa das salas da Faculdade de Ciências, o ilustre matemático francês proferiu quatro conferências subordinadas ao título «Teoria das distribuições e suas aplicações à matemática e à física». Em apresentação preliminar, o Prof. José F. Ramos e Costa descreveu, em termos bastante elucidativos, a carreira científica do conferencista, pondo em devido relevo a importância e o alcance da teoria que valeu, a LAURENT SCHWARTZ, uma rápida consagração entre matemáticos e físicos teóricos do mundo inteiro. Nestas conferências, que despertaram o mais vivo interesse entre a variada assistência, o Prof. SCHWARTZ, depois de recordar alguns conceitos e resultados fundamentais da teoria das distribuições, enveredou para o campo das aplicações e abordou o estudo das equações de convolução de tipo hiperbólico, considerando depois, em especial, o caso da equação das ondas.

O Prof. SCHWARTZ proferiu também, num anfiteatro da Faculdade de Ciências de Lisboa, uma conferência sobre o tema: «A escola BOURBAKI; sua influência no pensamento matemático contemporâneo». Esta conferência dedicada por SCHWARTZ aos estudantes daquela Faculdade que lhe tinham prestado sugestiva e cativante homenagem à sua chegada ao Aeroporto, foi seguida por um vasto auditório que se informou, com iniludível agrado, da actividade verdadeiramente prodigiosa, desse mirífico personagem NICOLAS BOURBAKI, cujos antecedentes e vida real darão que fazer aos historiadores pelos séculos vindouros.

O Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa está de parabéns pela preciosa colaboração que lhe foi assim prestada pelo criador da teoria das distribuições e digno representante de M. NICOLAS BOURBAKI.

J. Sebastião e Silva

ADMISSÃO AO ESTÁGIO

Exame de admissão ao estágio do 8.º grupo no Liceu Normal de D. João III (Coimbra — Ano de 1953).

4219 — Resolva o sistema

$$x\,y\,(x+y)=y\,z\,(y+z)=x\,z\,(x+z)=2\,a^3$$

e discuta a solução.

R: *Como o sistema se não modifica quando permutamos circularmente as incógnitas, segue-se que o sistema se satisfaz para* $x=y=z$. *Nestas condições é* $x^3=a^3$, *e portanto* $x=y=z=a\cdot e^{\frac{2k\pi}{3}i}$ $(k=0,1,2)$.

4220 — Determine dois números inteiros cujo produto seja igual a metade do produto dos mesmos números aumentados cada um de três unidades.

R: *A equação que traduz o problema é* $2\,a\,b=(a+3)\,(b+3)$, *ou seja* $a\,b=3\,(a+b+3)$; *desta igualdade resulta que um dos números* a *ou* b *é múltiplo de* 3; *supondo* $a=3\,m$ (*com* m *inteiro*), *a equação vem* $3\,b\,m=3\,(3\,m+b+3)$, *ou* $b=3+\dfrac{6}{m-1}$. *Notando agora que* b *é inteiro, tem de ser* $m-1$ *divisor de* 6:

$$m-1=1,2,3 \;\textit{ou}\; 6$$

o que dá $m=2,3,4,7$ *conduzindo aos sistemas de soluções:* $a=6,b=9$; $a=9,b=6$; $a=12,b=5$; *e* $a=21,b=4$. *As duas primeiras não são distintas porque a ordem dos números é permutável.*

4221 — Sobre os lados de um quadrilátero convexo $ABCD$ consideram-os os pontos A', B', C' e D' que dividem interiormente cada um dos lados na razão $m:n$. Demonstre que sendo S a área de $ABCD$ e S' a área de $A'B'C'D'$ é verdadeira a relação

$$\frac{S}{S'}=\frac{m^2+n^2}{(m+n)^2}$$

R: *O enunciado deduz-se directamente recorrendo à Geometria Analítica, tomando um sistema de eixos com origem* A, *de modo que as coordenadas dos quatro vértices do quadrilátero dado são* $A\,(0,0)$, $B\,(x',0)$, $C\,(x'',y'')$, $D\,(x''',y''')$.

4222 — Sendo os arcos x e y dados pelo sistema

$$\begin{cases}\operatorname{sen} a+\operatorname{sen}(a+x)+\operatorname{sen}(a+y)=0\\ \cos a+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0\end{cases}$$

provar que as extremidades dos três arcos a, $a+x$ e $a+y$, tendo a mesma origem, são vértices de um triângulo equilátero.

R: *Notando que as equações do sistema dado se podem escrever*

$$(1)\qquad \begin{cases}2\operatorname{sen}\left(a+\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=-\operatorname{sen} a\\[2mm] 2\cos\left(a+\dfrac{x+y}{2}\right)\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}=-\cos a\end{cases}$$

obtem-se

$$\operatorname{tg}\left(a+\frac{x+y}{2}\right)=\operatorname{tg} a$$

donde

$$x + y = 2k\pi \qquad (k \text{ int.}^o).$$

Entrando com este valor na primeira das equações (1), *vem também:*

$$\pm 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos \frac{x-y}{2} = -\operatorname{sen} a$$

donde (*para* $a \neq k\pi$)

$$\cos \frac{x-y}{2} = \pm 1 \quad ou \quad x - y = 2k'\pi \pm \frac{2\pi}{3} \qquad (k' \text{ int.}^o).$$

Do valor da soma e da diferença entre x *e* y *obtem-se a solução*

$$x = (k + k')\pi \pm \frac{2\pi}{3} \quad e \quad y = (k - k')\pi \mp \frac{2\pi}{3}$$

que satisfazem à condição do enunciado.

No caso de ser $a = k\pi$, *a segunda das equações* (1) *daria*

$$\pm 2 \cdot \cos \frac{x-y}{2} = -1$$

o que conduzia ainda ao mesmo resultado.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. L. — MATEMÁTICAS GERAIS — **2.º exame de frequência — 1957.**

Ponto n.º 1

4223 — Estabeleça a equação da esfera que é tangente ao plano $x + y + 2(z-1) = 10$ e contém a circunferência

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 8y + 27 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

4224 — Defina intervalo de convergência de uma série $S(x) = \Sigma \alpha_n x^n$ e descreva um processo para a sua determinação.

Mostre que $S(x)$ tem sempre algum ponto de convergência, qualquer que seja a sucessão α_n. Qual é esse ponto?

Se $S(a)$ converge e $S(-a)$ diverge, qual o intervalo de convergência? Razão disso.

Estude $S(x) = \sum \frac{x^{2n+1}}{2^{n+1}(n^2-1)}$ (intervalo de convergência e natureza de série no extremo superior desse intervalo).

4225 — Defina função contínua $f(x)$ em X fechado, e mostre

a) $Y = f(X)$ é sempre limitado.

b) Se uma tal função se anula sobre $x_n \to a$ (*a* ponto de acumulação de X), qual é o valor de $f(a)$?

c) Considere $f(x) = x^n \cos \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ com n natural. Calcule $\omega(0)$. Com que valor $f(0)$ fica $f(x)$ contínua no ponto $x = 0$?

d) Determine $f'(x)$ $(x \neq 0)$ e $f'(0)$ $(n > 1)$ e indique o menor valor de n para o qual $f'(x)$ é contínua no ponto $x = 0$.

4226 — *a*) Usando o teorema de BINET-CAUCHY, relacione a característica do produto $P = AB$ com as características de A e B.

Se A é regular, que particularidade se verifica? Justifique.

b) Determine k de modo que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & k \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

tenha um valor próprio nulo.

c) Valores e vectores próprios da matriz para esse valor de k.

Ponto n.º 2

4227 — Um plano é tangente à esfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6z - 5$$

e o seu traço em XOY é a recta de equações

$$y = ax + 1, \quad z = 0.$$

a) Dê a equação desse plano.

Variando a, cada posição daquela recta é sempre traço de um plano tangente:

b) Determine o valor de a ao qual corresponde um plano tangente paralelo a Oz.

c) Dê as equações do lugar dos pontos da esfera que são pontos de contacto dos diversos planos tangentes correspondentes aos diferentes valores de a.

4228 — Defina convergência uniforme de $S(x) = \Sigma u_n(x)$ no conjunto X e mostre que, sendo Σa_n absolutamente convergente e $\left|\frac{u_n(x)}{a_n}\right| \leqslant 1$ para todo o x de X, $S(x)$ converge uniformemente em X.

b) Sendo $u_n(x)$ contínua em X (fechado), e designando x_0 um ponto de acumulação de X, qual o limite de $S(x)$ ao tender x para x_0?

c) Estude a série $\sum_0^\infty \frac{1-2^n}{2+n^2}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}$ (intervalo de convergência e natureza da série nos seus extremos).

4229 — Designe $f(x)$ uma função definida e crescente em (a, b), contínua em qualquer intervalo $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ mas não contínua em (a, b). Mostre que existem $f(a+0)$ e $f(b-0)$, relacione esses valores com $f(a)$ e $f(b)$, respectivamente, e supondo $f(a+0) . f(b-0) < 0$ mostre que é $f(x') = 0$ com algum x' interior a (a, b).

Se, mantendo as restantes condições, se consente um número finito de pontos de descontinuidade interiores a (a, b), mostre que $\omega(x)$ tem valores extremos.

Calcule $\omega(0)$ e $f'(0)$ para

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{4+e^{1/x^2}} \, (x \neq 0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

4230 — *a*) Mostre, que sendo independentes as n $(< m)$ primeiras linhas da matriz $A = |a_i^k|$ $(m \times n)$ são compatíveis a n primeiras equações do sistema

$$\begin{cases} a_1^1 x_1 + \cdot \cdot + a_1^n x_n = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_m^1 x_1 + \cdots + a_m^1 x_n = b_m \end{cases}$$

Indique um determinante principal e a condição de possibilidade do sistema.

b) Usando os teoremas de Cramer e Rouché, discuta e resolva o sistema

$$\begin{cases} x - \ y + z + 2u = -1 \\ 2x + 3y - z + \ u \ = 3 \\ x + 2y - z - \ u \ = 3 \\ 2x + 2 \quad\ z + \alpha u \ = \beta \end{cases}$$

para diferentes valores de α e β.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de Frequência — Curso Geral — 2-957.

Teoria

4231 — Teorema de Kronecker e dependência linear.

4232 — Produto externo e produto misto de vectores — definição, propriedades e significado geométrico.

Prática

4233 — Se z_1, z_2 e z_3 são complexos correspondentes aos vértices (contados no sentido directo) dum triângulo no plano de Argand, de lados a, b, c e ângulos A, B, C, prove que

$$\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{a}{b}(\cos C + i \operatorname{sen} C)$$

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = \frac{c}{b}(\cos A - i \operatorname{sen} A)$$

($i \rightarrow$ unidade imaginária) e, em seguida, utilizando a identidade

$$(z_1 - z_2) + (z_2 - z_3) + (z_3 - z_1) = 0$$

prove que

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

4234 — Mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega \\ 1 & \omega^3 & \omega & \omega^4 \\ 1 & \omega^4 & \omega^3 & \omega^2 \end{vmatrix}^2 = 125$$

sendo ω uma raíz complexa da unidade, de índice 5. Não se esqueça que ω é uma raíz primitiva e por isso é

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0$$

4235 — Considere o sistema

$$\begin{cases} x + 2y + az = 11 \\ 2x - \ y + 3z = c \\ x + 7y + 3z = 24 \end{cases}$$

e determine os valores de a e c para que o sistema seja:

1.º indeterminado
2.º impossível
3.º determinado.

Resolva no primeiro caso.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame de Frequência — Curso de Química — Fev. 1957.

4236 — Verifique que $\sqrt{3}$ não é um número racional e escreva duas classes contíguas de números racionais que definam $\sqrt{3}$.

4237 — Mostre que, sendo $u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$ uma sucessão convergente, pode extrair dela uma infinidade de sucessões, distintas a partir de certa ordem, convergentes para o mesmo limite.

4238 — Mostre que a função

$$f(x,y)=\frac{(2x+3)\,x^3+y\,(x^2+y^2)}{(2x+3)\,(x^2+y^2)}$$

é contínua no ponto $(0,0)$.

4239 — Determine se a função $e^z(\operatorname{sen} z-1)$ é periódica e calcule os valores de z que a tornam nula.

4240 — Mostre que o conjunto dos múltiplos de 6 e o conjunto dos múltiplos de 3 formam dois grupos e que um deles é invariante do outro. Construa o respectivo grupo factor e aplique o teorema da homomorfia.

4241 — Dada uma multiplicidade vectorial a 4 dimensões, encontre uma base independente para a submultiplicidade gerada pelos vectores $(1,1,2,-1)$, $(2,1,-1,0)$, $(8,5,1,-2)$.

4242 — $\mathfrak{M}_5$ é um módulo com respeito a um corpo e tem 5 dimensões. $\mathfrak{a},\mathfrak{b},\mathfrak{c} \in \mathfrak{M}_5$ são 3 vectores independentes. Determine quantos vectores independentes há no conjunto $\mathfrak{C}=\{\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2,\mathfrak{m}_3,\mathfrak{m}_4,\mathfrak{m}_5\}$, com:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1 &= 7\mathfrak{a}+3\mathfrak{b}-23\mathfrak{c}\\
\mathfrak{m}_2 &= 11\mathfrak{b}-17\mathfrak{c}\\
\mathfrak{m}_3 &= 57\mathfrak{c}\\
\mathfrak{m}_4 &= 19\mathfrak{a}+13\mathfrak{c}\\
\mathfrak{m}_5 &= \mathfrak{a}+93\mathfrak{b}+197\mathfrak{c}.
\end{aligned}$$

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência ordinário — 15-2-57.

4243 — *a*) Dada a tabela de valores $\begin{array}{c|ccccc} x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4\\ \hline u & 2 & 1 & m & 17 & n\end{array}$ dum polinómio do terceiro grau, determinar m e n por forma que a soma das suas raízes seja igual à unidade.

b) Aplicar a teoria dos determinantes ao estudo do sistema

$$\begin{aligned}
x &= 6-y-z\\
u &= 1+z\\
z &= 1+y\\
y &= z
\end{aligned}$$

R: a) *O problema pode resolver-se, por exemplo, do seguinte modo: o polinómio* $p_0x^3+p_1x^2+p_2x+p_3$ *satisfaz às condições*

$$\begin{cases}
p_3=2\\
p_0+p_1+p_2+p_3=1\\
8p_0+4p_1+2p_2+p_3=m\\
27p_0+9p_1+3p_2+p_3=17\\
64p_0+16p_1+4p_2+p_3=n\\
-\dfrac{p_1}{p_0}=1
\end{cases}$$

e deste sistema obtem-se com muita facilidade a solução

$$\begin{cases}
p_0=1\\
p_1=-1\\
p_2=-1\\
p_3=2\\
m=4\\
n=46\,.
\end{cases}$$

b) *A matriz do sistema* $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&0&-1\\0&0&-1&1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$ *é singular e tomando para determinante principal* $\Delta=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{vmatrix}=1$ *constrói-se o único determinante característico* $\Delta'=\begin{vmatrix}0&1&1&6\\1&0&0&1\\0&0&-1&1\\0&0&1&0\end{vmatrix}=-1$ *que, sendo diferente de zero, justifica a impossibilidade do sistema* (*teorema de* Rouché).

4244 — *a*) Provar que o resto da divisão do polinómio $f(x)$ por $(x-a)$ é $f(a)$ e apresentar a regra que permite obter os coeficientes do polinómio cociente. Quando estes e o resto são positivos, que é a em relação aos zeros de $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, etc.? Porquê?

Achar o resto da divisão de $f(x)$ por $\prod_{i=1}^{n}(x-x_i)$, supondo conhecidos os restos da divisão de $f(x)$ por $(x-x_i)$ $(i=1,\cdots n)$.

b) Anunciar a condição necessária e suficiente para que dois polinómios $f(x)$ e $g(x)$ admitam raízes comuns. Definir sub-resultante de índice i.

Supondo que $f(x)$ e $g(x)$ admitem em comum uma única raíz, designando por R_1 o sub-resultante de índice 1 e por R_1^1 o determinante que se obtem de R_1 substituindo os elementos da última linha pelos correspondentes na penúltima linha do resultante mostrar que, se for λ a raíz comum, $R_1 \lambda + R_1^1 = 0$ e inversamente.

4245 — *a*) Definir produto de matrizes e mostrar que o produto de duas matrizes hermíticas A e B só é matriz hermítica quando A e B são permutáveis.

Enunciar o teorema de Binet-Cauchy e provar que para as matrizes $U(m \times n)$ e $V(n \times m)$ se tem $|UV| = 0)$ com $m > n$.

b) Definir valores próprios $\lambda_r (r=1, \cdots n)$ da matriz $C = |c_i^k|$ e mostrar que $\Sigma c_r^r = \Sigma \lambda_r$ e $\pi \lambda_r = |C|$.

Provar que as matriz C e $T^{-1} C T$ tem os mesmos valores próprios.

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º exame de frequência extraordinário — 3-4-57.**

4246 — Resolver os seguintes problemas:

a) Achar a equação das raízes comuns dos dois polinómios

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$
$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0.$$

b) Estudar o sistema

$$\begin{aligned} x + \lambda y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ \lambda x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

pela teoria dos determinantes.

R: *O resultante* R *dos dois polinómios pode obter-se adoptando a seguinte disposição de cálculo*

1	−2	1	−2	
	1	−3	−4	12
−1	−1	−5	14	
1	−7	15	−2	
7	1	5	−14	

$$R = \begin{vmatrix} -1 & -5 & 14 \\ -7 & 15 & -2 \\ 1 & 5 & -14 \end{vmatrix} = 0$$

e o primeiro sub-resultante diferente de 0 *é* $R_1 = \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ -7 & 15 \end{vmatrix} = -50$.

Como $R_1^1 = \begin{vmatrix} -1 & 14 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 100$ *a equação das raízes comuns é* $-50x + 100 = 0 \cdot x = 2$ *é pois a raiz comum aos dois polinómios.*

b) *O sistema é homogéneo e portanto admite a solução nula* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. *Se fôr indeterminado admitirá também soluções não nulas, isto é, se* $\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, *condição que é satisfeita com* $\lambda = 1$. *O grau de indeterminação será dois e o sistema é equivalente à equação* $x + y + z = 1$.

4247 — Como se justifica a determinação do *m. d. c.* de dois polinómios A e B pelo método das divisões sucessivas?

Enuncie o teorema de Euler.

Considerando o polinómio $f(z) = p_0 z^n + p_1 z^{n-1} + + \cdots + p_n$ de coeficientes reais, provar que o limite excedente do módulo dos zeros de $f(z)$ é $\Gamma = \dfrac{P_0 + \text{máx. } P_i}{P_0}$, com $|p_i| = P_i$.

Mostrar que se o polinómio admite a raíz $a + bi$ também admite a raíz $a - bi$ e apresentar o resto da divisão de $f(z)$ por $z^2 - a$.

4248 — Provar que o quadrado de um determinante qualquer é determínante simétrico.

Considerando a substituição linear $y_i = a_i^\alpha x_\alpha$ $(i = 1, \cdots n; \alpha = 1, \cdots n)$ com módulo de transformação $|A| = |a_i^k|$ qual é a substituição inversa? Se $z_i = b_i^\alpha y_\alpha$, qual é o módulo de transformação de $z_i = c_i^\alpha x_\alpha$?

Mostrar que os valores λ que satisfazem à relação $y_i = \lambda x_i$ são os valores próprios de $|a_i^k|$.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final — 10-1955.**

4249 — Dado um cone achar a natureza da secção nele efectuada pelo segundo bissector. Determinar um ponto da secção.

4250 — Dada uma superfície de revolução achar o plano tangente paralelo a uma direcção, sendo dado o meridiano onde existe o ponto de contacto.

4251 — Mostrar que o centro dum anel é um sub--anel.

4252 — Mostrar que o ideal direito gerado pelo idempotente $e=e^2$ é de forma $e\mathfrak{A}$.

4253 — Seja $(1, 2, \cdots n)$ um conjunto de números inteiros e seja f uma aplicação deste conjunto num conjunto $E\,[f(i) \in E]$. Seja $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ permutação do grupo simétrico e defina-se a nova aplicação

$$\sigma f = f'$$

por

$$\sigma f(i) = f(\sigma^{-1} i) .$$

Mostre que a correspondência $f \to \sigma f$ é biunívoca.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **2.º exame de frequência — 2.ª chamada — 28-5-57.**

4254 — Dado o subespaço de R_5

$$L \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + \qquad x_5 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 + 2x_5 = 2 \\ x_1 - \qquad\qquad x_3 - x_4 = 3 , \end{cases}$$

determine a sua parte imprópria quando da passagem a P_5. Determine pontos linearmente independentes de L (em P_5) que o gerem.

4255 — Seja L um subespaço de P_n e Q_0, Q_1, Q_2 três pontos distintos e não colineares. Mostre que o plano definido pelos três pontos está contido em L.

4256 — Dado o hiperbolóide de revolução gerado por uma recta enviezada com o eixo e um ponto, verifique se o ponto pertence ao hiperbolóide. Dado um ponto anterior determine o plano tangente que passa pelo ponto e tem o ponto de contacto sobre um paralelo.

4257 — Dado um cone e uma recta determine os pontos de intersecção de cone com a recta.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame final — (1.ª chamada) — 7-1955.**

4258 — É dado um anel simples $\mathfrak{A}$ tal que $\mathfrak{A}^2=\mathfrak{A}$. Mostre que a característica do anel é de ordem prima ou infinita. Anel simples é todo aquele que tem sòmente como ideais bilaterais o ideal zero e o ideal unidade.

4259 — É dado um grupo $\mathfrak{G}$; sabendo que $\mathfrak{H}$ contido no centro é um invariante, mostre que sendo $\mathfrak{G}/\mathfrak{H}$ cíclico, então $\mathfrak{G}$ é abeliano.

4260 — Dado $\dfrac{x^p - 1}{x - 1} = x^{p-1} + \cdots + 1$ mostre que o polinómio que se obtém substituindo x por $x+1$ é irredutível em $\mathfrak{R}[x]$ em que $\mathfrak{R}$ é o corpo dos racionais.

4261 — Mostre que sendo A matriz diagonal, qualquer potência de A é diagonal. Sendo A normal mostre que existe B também normal tal que $B^k = A$ qualquer que seja $K > 0$.

4262 — Sendo $f(x)$ e $g(x)$ dois polinómios e tendo f grau maior do que g, mostre que se $f(x) + i\,g(x)$ tem todas as raízes imaginárias e do mesmo lado do eixo real, o polinómio

$$F(x) = p \cdot f(x) + q \cdot g(x)$$

tem todas as raízes reais e distintas para quaisquer valores reais de p e q.

F. C. L. — Álgebra Superior — **Exame de 2.ª frequência — 1956.**

4263 — Reduza a um polinómio nas funções simétricas fundamentais,

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2 x_3 + (x_1 - x_3)^2 x_2 + (x_2 - x_3)^2 x_1$$

4264 — Prove o teorema fundamental relativo aos polinómios simétricos.

Estabeleça a regra do peso e do grau.

4265 — Quantas raízes positivas, negativas e imaginárias tem o polinómio,

$$f(x) = x^5 - x^4 + 1 .$$

Justifique: Até quantas variações pode ter o transformado de Graeffe de $f(x)$?

Calcular esse transformado.

4266 — *a*) Condição necessária e suficiente relativa à série de Sturm de um polinómio $f(x)$ de grau n para que este tenha n raízes reais e distintas. Justifique:

b) Mostre que sendo os coeficientes iniciais da sucessão de Sturm alternadamente positivos e negativos, a sucessão não pode ser completa.

F. C. L. — Álgebra Superior — **2.º exame de frequência 27-5-57.**

4267 — *a*) Dê, justificando, a condição necessária e suficiente, relativa aos valores próprios de uma transformação linear A, para que esta seja nilpotente.

b) Sendo q o índice dessa transformação, suponha que é

$$d(F_0)=1 \qquad (F_0 \text{ espaço nulo de } A)$$

$$d(F_0^{j+1})=d(F_0^j)+1 \qquad (j=1,2,\cdots,q-1).$$

Mostre que estas condições implicam certo valor para o índice q.

c) Indique a base do espaço em que a matriz de A assume a forma de Jordan e construa esta matriz.

4268 — *a*) Relacione os valores próprios e os vectores próprios de duas transformações lineares em $\mathcal{E}_{(n)}$ inversas uma da outra.

b) Relacione também os multiplicidades algébrica e geométrica dos valores próprios.

c) Relacione os polinómios mínimo e característico.

4269 — *a*) Mostre que o subespaço F gerado pelos vectores próprios de uma *t. l.* A em $\mathcal{E}_{(n)}$ é invariante para A.

b) Se A é hermítica, prove que $F^{\perp}$ também é invariante para A. Que concluir pode extrair?

4270 — *a*) Seja A uma *t. l.* com uma base ortogonal de vectores próprios e que admite valores todos da forma $e^{i\alpha}$. Verifique que A é unitária.

b) Renunciando à ortonormalidade da base de vectores próprios, A permanece no entanto semelhante a uma matriz unitária. Justifique.

4271 — Reduza a um polinómio nas funções simétricas fundamentais a função

$$(x_1+x_2)^3\,x_3^2+(x_1+x_3)^3\,x_2^2+(x_2+x_3)^3\,x_1^2$$

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.ª **frequência** — 1.ª **chamada** — **19-2-57.**

4272 — Dado um anel simples $\mathfrak{S}=e_1\mathfrak{S}+\cdots+e_n\mathfrak{S}$ em que os e_j são idempotentes ortogonais primitivos provar que $\mathfrak{S}$ é um anel simples de Noether.

4273 — Supondo que $\mathfrak{A}$ é soma directa de ideais bilaterais simples $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1+\cdots+\mathfrak{A}_n$, se for $\mathfrak{B}$ um ideal bilateral de $\mathfrak{A}$, provar que é

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{B}+\mathfrak{A}_{i_1}+\cdots+\mathfrak{A}_{i_t}$$

4274 — Dado um módulo $\mathfrak{M}-\Omega$, provar que a totalidade dos endomorfismos-Ω que aplicam $\mathfrak{M}$ num submódulo $\mathfrak{N}-\Omega$ constitui um anel.

Provar que este conjunto constitui um ideal esquerdo em relação à totalidade dos endomorfismos-Ω de $\mathfrak{M}$.

4275 — Provar que num grupo finito são válidas as duas condições de cadeia.

F. C. L. — Álgebra Superior — 1.ª **frequência** — 2.ª **chamada** — **15-3-54.**

4276 — O comutador $\mathfrak{C}$ dum grupo $\mathfrak{G}$ é o grupo gerado pelos elementos da forma $a\,b\,a^{-1}\,b^{-1}$.

Se $\mathfrak{G}$ for o produto directo dos invariantes $\mathfrak{G}_1,\cdots,\mathfrak{G}_n$

$$\mathfrak{G}=\mathfrak{G}_1\times\mathfrak{G}_2\times\cdots\times\mathfrak{G}_n$$

mostre que $\mathfrak{C}=\mathfrak{C}_1\times\mathfrak{C}_2\times\cdots\times\mathfrak{C}_n$ em que $\mathfrak{C}_i$ é o comutador de $\mathfrak{G}_i$.

4277 — Seja $\mathfrak{A}$ um domínio de integridade (comutativo) e $\mathfrak{B}$ o seu anel de cocientes. Prove que $\mathfrak{B}$ tem unidade e que as características dos dois anéis são iguais.

4278 — Seja $\mathfrak{A}$ um anel e $\mathfrak{B}$ um seu ideal bilateral. Mostre que o radical de $\mathfrak{B}$ é $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{B}$, sendo $\mathfrak{R}$ o radical de $\mathfrak{A}$.

4279 — Se $\mathfrak{S}$ for um anel em que todo o ideal direito é gerado por um idempotente e em $\mathfrak{S}$ for válida a condição ascendente de cadeia provar que $\mathfrak{S}$ é semisimples.

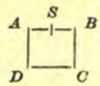
GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. L. — Geometria Projectiva — **Exame final** — **6-1955.**

4280 — Defina as gerações pontual e tangencial projectiva das cónicas, e enuncie os teoremas de Desargues e Sturm, e os respectivos casos limite.

4281 — Defina homologia plana e enuncie o teorema que permite definir a sua característica, e o respectivo corolário; defina homologia especial e homologia harmónica, enuncie as propriedades que respeitam às rectas limites de uma homologia, e defina as homologias particulares que conhece.

4282 — Defina quádricas regradas, enumere-as; enuncie os teoremas que respeitam às quádricas duplamente regradas e os que se referem às gerações de tais quádricas mediante formas projectivas de primeira espécie.

4283 — Considere a circunferência inscrita num quadrado $[A\,B\,C\,D]$, 

, e defina uma homologia de centro no ponto S, que converta essa circunferência numa parábola de direcção assintótica AD, passando pelo ponto S. Diâmetro conjugado com a direcção de AC. Eixo e vértice da parábola.

4284 — Defina uma hipérbole circunscrita a um trapézio isósceles dado $[A\,B\,C\,D]$. Assíntotas e eixo da hipérbole, e um par de diâmetros conjugados.

F. C. L. — Geometria Projectiva — **Exame de 1.ª frequência — 1.ª chamada — 8-2-57.**

4285 — Defina projectividade entre duas formas de 1.ª espécie. Defina semelhança e igualdade. Escreva a equação duma projectividade. Supondo esta em coordenadas abcissas escreva as coordenadas dos pontos unidos.

4286 — Defina involução circular. Considere um feixe em involução circular. Pelo centro S do feixe faça passar uma circunferência e construa, justificando, o seu eixo de projectividade e o seu polo.

4287 — Defina elementos conjugados e elementos polares em relação a uma cónica. Diga como se pode aproveitar uma cónica para definir uma involução sobre as formas de primeira espécie do seu plano.

4288 — Num eixo orientado r de origem O estabeleceu-se uma correspondência entre as pontuais p e p' tal que a distância PP' iguale constantemente o triplo de OP.

a) Escreva a equação dessa correspondência; classifique-a, justificando.

b) Determine os pontos de fuga, norma e pontos unidos.

c) Considere a pontual p projectada a partir de S e a pontual p' a partir de S', estando S e S' equidistantes de r (distância 6 cm). Classifique a correspondência entre os dois feixes obtidos. Trace um par de raios homólogos paralelos e um par de raios homólogos cruzando-se à distância de 3 cm de r.

4289 — Ao ponto M de r faz-se corresponder o ponto M' de r tal que a soma dos inversos das suas distâncias a um ponto fixo A é igual a 2. Equação da correspondência e sua classificação. Pontos unidos (determinação gráfica e analítica). Procure o lugar dos pontos que projectam ortogonalmente os pontos unidos. Considere S_0 um desses pontos mais afastados de r. Projecte a partir de S_0 as duas pontuais e determine um par de raios homólogos com a inclinação mútua de $\frac{\pi}{4}$.

ANÁLISE INFINITESIMAL

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — **1.ª Frequência — 1.ª chamada — 11-1-56.**

4290 — Considere a quádrica de equação

$$2\,x^2 - 2\,x\,z + 3\,y^2 + 2\,z^2 - 9 = 0\,.$$

a) Determine o seu centro e direcções principais.

b) Classifique a quadrática.

c) Seja E o sub-conjunto de R_3 formado pelos vértices da superfície.

Como são constituídos o derivado, o interior, o exterior e a fronteira do conjunto E?

d) Escreva uma equação canónica da quádrica.

4291 — Seja

$$\begin{cases} x = l_1\,x' + l_2\,y' + l_3\,z' + x_0 \\ y = m_1\,x' + m_2\,y' + m_3\,z' + y_0 \\ z = n_1\,x' + n_2\,y' + n_3\,z' + z_0 \end{cases}$$

uma transformação de coordenadas.

a) Qual a condição para que a transformação seja ortogonal, isto é, para que tanto as coordenadas x, y, z como x', y', z' digam respeito a triedros tri-rectângulos?

b) Se $f(x, y, z)$ for uma função com derivadas de segunda ordem e se operarmos a transformação indicada mostre que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z'^2}$$

se a transformação for ortogonal.

c) No caso particular em que f é polinómio do segundo grau em x, y, z mostre que a igualdade anterior nos conduz a um dos invariantes conhecidos da teoria das quádricas.

F. C. L. — Cálculo Infinitésimal — **1.ª Frequência — 2.ª chamada — 18-1-56.**

4292 — Defina conjunto complementar de um conjunto, indique a classificação dos pontos de um conjunto que resulta das relações deste com o seu complementar. Defina fronteira de um conjunto e enuncie os teoremas que respeitam a tal conceito.

4293 — Vectores colineares e coplanares: definições, posição relativa e condições necessárias e suficientes para que tais casos se verifiquem.

4294 — Funções de variação limitada: definição e propriedades.

Considere em particular o caso das funções contínuas de variação limitada.

4295 — Dada a quádrica de equação

$$3x^2-8xy+3y^2-5z^2+5=0$$

a) determine o seu centro e planos principais;

b) classifique a quádrica;

c) Seja E o sub-conjunto de R_3 (espaço ordinário) assim constituído: P pertence a E se e só se o ponto P pertence a um diâmetro principal. Dar as coordenadas de 3 pontos de E, não colineares e indicar como são constituídos o derivado, o interior, o exterior e a fronteira de E.

d) Escreva uma equação canónica da superfície.

4296 — Seja $\Phi=f(u)$ uma função derivável qualquer da variável

$$u=lx+my+nz-ct$$

com l, m, n e c constantes.

a) Mostre que Φ verifica a igualdade

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}$$

desde que l, m e n representem os cosenos directores de uma direcção.

b) Que valor deve ter a variável t (considerada como parâmetro) para que o plano

$$lx+my+nz-ct=0$$

fique tangente à quádrica

$$2x-3xy-2z=4\,?$$

I. S. T. — Cálculo Infinitesimal — Exame de Frequência — 11-2-57.

4297 — Seja $V(x,y,z)$ uma função homogénea de grau n e harmónica, e $\vec{r}$ o vector da distância $xI+yJ+zK$. Determine as condições para que o vector $\vec{r}\wedge(\vec{r}\wedge \operatorname{grad} V)$

a) seja um gradiente

b) seja um rotacional

c) seja harmónico.

4298 — Considere a família de parábolas $y=3a^3x^2-a$ e determine a sua envolvente; determine a envolvida correspondente ao ponto $\left(x=\frac{1}{9},\ y=-2\right)$ da envolvente e o raio de curvatura da envolvente e da envolvida nesse ponto a — parâmetro da família.

4299 — Considere duas funções $f(x,y)$ e $g(x,y)$ contínuas e deriváveis num domínio e anulando-se num ponto (a,b) desse domínio. Deduza por aplicação da fórmula de Taylor, as condições para que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\frac{f(x,y)}{g(x,y)}\quad \text{seja bem determinado.}$$

4300 — Demonstre que as projecções duma curva torsa sobre os seus planos rectificante e normal tomados num ponto, apresentam nesse ponto, respectivamente, uma inflexão e uma reversão.

F. C. L. — Cálculo Infinitesimal — 2.ª Frequência — 2.ª Chamada — 7-5-57.

4301 — Defina comprimento de um arco de linha rectificável, indique uma condição necessária e suficiente para que uma linha plana seja rectificável e enuncie as propriedades que respeitam às linhas planas rectificáveis.

4302 — Defina envolvente de uma família de superfícies, características e aresta de reversão; enuncie as propriedades da envolvente e aplique os conceitos definidos à determinação da equação geral das superfícies cilíndricas.

4303 — Defina contacto de ordem n entre uma linha e uma superfície, escreva as condições analíticas para tal contacto, interprete geomètricamente as condições de contacto da 1.ª ordem; defina conceito de osculação; indique, justificando a ordem de contacto do plano osculador num ponto duma linha torsa e defina plano osculador estacionário.

4304 — Determine e caracterize os pontos singulares da curva plana de equação

$$2x^3+6xy^2-3x^2+3y^2=0.$$

4305 — Determine uma equação cartesiana da superfície que é o lugar geométrico das perpendiculares à superfície de equação

$$a^2 y^2 = x^2 (b^2 - z^2)$$

conduzidas pelos pontos da geratriz de equações

$$z = c\,, \quad x\sqrt{b^2 - c^2} - a\,y = 0$$

sendo $a\,,b$ e c constantes.

I. S. T. — Cálculo Infinitesimal — **1.º exame de frequência — 27-6-56.**

4306 — Calcule $\Delta \dfrac{f(r)}{g(r)}$ sendo $\vec{r}$ o vector da distância $xI + yJ + zK$. É dada em coordenadas polares a função $V = \dfrac{r}{1 + \cos\theta}$; Quais as linhas equipotenciais correspondentes a V? Calcule $grad\,V$

4307 — Determinar $x\,,y\,,z$ tais que $x+y+z=N$ e que tornem $x^a y^b z^c$ máximo. (N, a, b, c números dados).

O conceito de superfície equipotencial e de gradiente poderá ajudar a classificar o ponto de estacionaridade? Aplique.

4308 — Se uma curva plana é dada em coordenadas polares $r = f(\theta)$ e se $U = \dfrac{1}{r}$, mostre que a curvatura da curva é dada por $\left(\dfrac{d^2 U}{d\theta^2} + U\right) \operatorname{sen}^3 \psi$ sendo ψ o ângulo entre o raio vector e a tangente.

4309 — Quando é que uma linha assintótica duma superfície pode ser também uma geodésica? Interprete neste caso o teorema de Meusnier.

4310 — Sabendo que as linhas de curvatura duma superfície podem ser definidas como sendo as curvas em que as normais à superfície admitem envolvente, quando é que uma linha de curvatura poderá ser geodésica? Poderá justificar a definição de linhas de curvatura, dada anteriormente?

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

117 — J. Bass — **Curso de Matemática** — Masson et C.ie, Éditeurs—916 pags. 8.500 frs.—Paris, 1956.

Este livro contém, com alguns complementos, a matéria dos cursos que o Autor professa na Escola Nacional Superior de Aeronautica e na Escola Nacional Superior de Minas de Paris.

Destina-se assim aos alunos das grandes escolas de engenharia mas prestará também óptimos serviços aos candidatos à licenciatura em ciências físicas. O leitor deverá já possuir determinados conhecimentos elementares de análise e geometria analítica e poderá aumentar notàvelmente a sua cultura matemática com o objectivo de obter uma boa especialização técnica.

A obra não é um tratado de matemáticas aplicadas; não se utiliza a linguagem das aplicações e o leitor não tem necessidade de possuir prèviamente determinados conhecimentos técnicos. Pelo contrário é através das aquisições no campo matemático que poderá em seguida abordar a mecânica, a hidrodinâmica, a resistência de materiais, a física geral, a electricidade, etc.

O autor nunca perde a oportunidade de mostrar, sob forma de exemplos, como se aplicam as matemáticas. Mas estes exemplos que são particularmente orientados para a mecânica racional não constituem passagens essenciais na estruturação do curso e podem ser deixados de lado num primeiro estudo.

Se bem que o livro não seja escrito para futuros matemáticos, está apresentado sob forma precisa e o Autor nunca deixou de manter relativo rigor ao longo de toda a obra. Entretanto, para redigir em cerca de 900 páginas os elementos que constituem a cultura matemática de base dum engenheiro tornou-se necessário entrar em certos compromissos. Se se não hesitou em utilizar as teorias modernas quando estas poderiam simplificar a exposição, reduziu-se no entanto sensìvelmente as passagens puramente abstractas que, sem inconvenientes de maior, são apresentados sob forma intuitiva.

Para que as teorias expostas se tornem proveitosas o Autor faz a respectiva aplicação sob a forma de exercícios. Muitos exemplos são assim apresentados no texto e por meio deles se indica como efectuar um cálculo numérico, como utilizar a noção de convergência uniforme, o teorema dos resíduos, o cálculo simbólico, como integrar sistemas de equações diferenciais, obter soluções das equações às derivadas parciais de segunda ordem, etc. Este livro, destinado assim a futuros engenheiros, é apresentado ao público em prefácio por Darmois; são deste professor as seguintes palavras: L'ouvrage de M. Bass vise à la fois à donner effectivement les connaissances nécessaires, à permettre les sondages en profondeur, et a permettre la lecture d'ouvrages modernes, qui font progresser en direction des synthèses donc j'ai parlé.

Je pense que l'utilisateur de cet ouvrage éprouvera un sentiment de sécurité par l' ampleur des matières auxquelles il peut avoir accès, un sentiment de plaisir en résolvant les problèmes posés...

Je souhaite que le livre de M. Bass, qui est l'excellent aboutissement d'un long et necessaire effort, donne ces sentiments à ceux qui l'étudieront...»

Os diversos capítulos da obra são:

I — Álgebra linear, (101 págs.) — Espaços vectoriais, Matrizes, Espaço hermítico, Álgebra tensorial, Aplicações, Bibliografia, Exercícios.

II — Integrais simples, (124 págs.) — Conjuntos e funções, Integrais definidos, Cálculo dos integrais simples, Cálculo numérico dos integrais definidos, Séries numéricas e integrais generalisados, Bibliografia, Exercícios.

III — Funções definidas por séries ou integrais, (118 págs.)—Séries de funções, Funções definidas por integrais, Séries de Fourier, Funções ortogonais, Integrais de Fourier, Bibliografia, Exercícios.

IV — Curvas, Integrais curvilíneos, Aplicações, (54 págs.) — Teoria das curvas, Integrais curvilíneos, Planímetros e integradores, Bibliografia, Exercícios.

V — Superfícies, Integrais múltiplos, Aplicações, (168 págs.) — Integrais duplos, Teoria das superfícies, Integrais múltiplos, Integrais de superfícies, Fórmulas de análise vectorial, Integrais múltiplos generalisados, Funções eulerianas, Cálculo simbólico, Bibliografia, Exercícios.

VI — Funções analíticas, (110 págs.) — Derivada duma função de variável complexa, Noções sobre a representação conforme, Funções elementares, Integração de funções analíticas, Séries de funções analíticas, Teorema dos resíduos, Aplicações, Bibliografia, Exercícios.

VII — Equações e sistemas diferenciais, (76 págs.) — Generalidades, Sistemas lineares, Equações lineares de segunda ordem, Funções de Bessel, Métodos numéricos, Bibliografia, Exercícios.

VIII — Equações às derivadas parciais, Potenciais, (92 págs.) — Equações lineares de primeira ordem, Equações não lineares de primeira ordem, Equações lineares de segunda ordem, Estudo de alguns exemplos, Potenciais newtonianos, Bibliografia, Exercícios.

Anexo A — Cálculo das variações (26 págs. com exercícios).

Anexo B — Noções sobre ábacos (12 págs.).

Formulário — Índice dos matemáticos citados — Bibliografia geral — Índice alfabético, (35 págs.).

118 — R. Risser e C. E. Traynard — **Les Principes de la Statistique Mathématique** — (Livre I: Séries Statistiques). — 2.ª ed. rev. e aumentada. — XVI + 196 págs., 3500 fr. — Gauthier-Villars, Paris, 1957.

Trata-se de uma obra integrada no Tratado de Cálculo das Probabilidades de E. Borel e cuja reedição revista é de assinalar perante a parca bibliografia francesa sobre a matéria. Vem assinada por autores de certa estatura mas, infelizmente, acha-se redigida segundo uma orientação que, na opinião do crítico, a tornam de utilidade duvidosa para qualquer dos diferentes tipos de clientela que se possam considerar. Para os recém-iniciados, pelo menos, não é certamente aconselhável, com a sua irregular exposição da metodologia, a falta de exemplos nalguns pontos cruciais que pedem melhor esclarecimento, a ausência quase completa de figuras e gráficos que auxiliem a intuição, o tosco indiciamento remissivo, a notação pouco feliz e discordante dos usos estabelecidos, a inexistência de exercícios. A própria linguagem é por vezes imprecisa; tal quando se aponta

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

como a «distribuição teórica de N objectos simètricamente em torno duma média tomada para origem» (pág. 20).

Este primeiro volume da obra consagra-se ao estudo das distribuições, aos problemas de amostragem e às aplicações às sondagens e ao controle da qualidade das manufacturas. Para um segundo volume anuncia-se distribuições a duas variáveis, correlação regressão e séries cronológicas.

Dois aspectos que surpreenderam o crítico foram o rateio do pouco espaço disponível pelos vários assuntos e a arrumação destes nos vários capítulos. Assim, por exemplo, dedicam-se 20 páginas aos sistemas de curvas de Pearson, Charlier e Romanovsky, em contraste com umas 12 páginas ao todo consagradas às distribuições oriundas da normal e respectivas aplicações; e situa-se uma discussão dos quadros rectangulares *(contingency tables)* ao lado de pormenores sobre levantamentos por amostragem. A distribuição de STUDENT mal se vislumbra num obscuro parágrafo, ao passo que se reserva um capítulo inteiro ao menos interessante problema da destrinça de duas distribuições sobrepostas.

Todavia, a deficiência realmente importante que se encontra no livro é a falta de generalidade com que são enunciados e resolvidos os problemas. A despeito de, como os autores afirmam, pretenderem «sistematizar as doutrinas da Estatística Matemática», nunca chegam a expôr metòdicamente os fundamentos de dois dos principais capítulos dessa ciência — ensaios de hipóteses e estima de parâmetros – não aflorando sequer o terceiro — delineamento de experiências. Os ensaios de hipóteses, por exemplo, aparecem disseminados ao longo do livro da forma menos sistemática possível, escorados em vagas referências ao «nível de probabilidade» e à «verosimilhança» da «hipótese nula».

Mas há ainda lugar para fazer vários outros reparos importantes, entre os quais avultam os seguintes.

O capítulo II, intitulado «médias e momentos», enferma de um fraco realce perante o leitor incauto da distinção que é necessário fazer entre os conceitos de distribuição de probabilidades e distribuição de frequências: veja-se o § 9 a respeito da função característica logo a seguir a dois parágrafos àcerca de momentos das distribuições de frequências e correcções de SHEPPARD.

No capítulo III faz-se a discussão clássica do sistema de curvas de PEARSON, com longo e tedioso pormenor; mas não se enuncia com generalidade o problema do ajustamento de curvas, nem se referem os objectivos desse ajustamento, nem tampouco se explicita claramente o método dos momentos, embora o mesmo seja aplicado às curvas de PEARSON e a outras (1).

Mais adiante, ao considerar o «test of goodness of fit» de K. PEARSON, os autores não frizam que só *aproximadamente* segue $\sum \frac{(n_i - n\,p_i)^2}{n\,p_i}$ a lei do χ^2. Também não explicitam as aplicações do resultado, o que este crítico considera uma omissão inexplicável. De resto, todo o tratamento da versátil distribuição do χ^2 fornece outro exemplo da má sistematização de que padece a obra: veja-se o que acontece na pág. 124, em que se aproveita a aditividade do χ^2 sem prévia justificação.

É também lamentável que na exposição do problema da comparação das médias de dois universos normais com diferentes variâncias se tenha omitido a solução exacta de WELCH-ASPIN (2), quando afinal se gastam quase duas páginas a descrever uma solução aproximada e já ultrapassada.

Resumindo, para não alongar mais: estamos em presença duma obra demasiado afastada das concepções estatísticas modernas, a despeito da sua recente data de publicação. Os autores justificam o seu pendor decididamente teórico dirigindo-a aos leitores «providos não só duma larga cultura matemática como também de conhecimentos precisos na matéria de Cálculo das Probabilidades». No entanto, duvidamos que alguém, mesmo com generosa dose de tais conhecimentos, possa através deste livro aprender qualquer coisa de Estatística — essa ciência esquiva cujos estudantes tanta dificuldade têm em descobrir textos de qualidade no meio da avalanche que o mercado lhes vem oferecendo.

M. A. Fernandes Costa

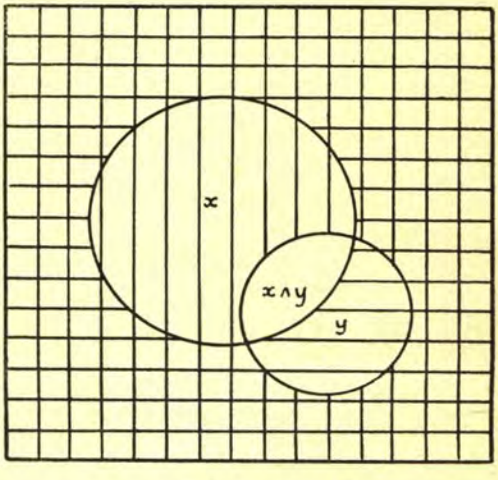
(1) V. «The calculation of marriage and maternity rates; their graduation by frequency curves» in *Boletim do Instituto dos Actuários Portugueses*, N.º 7, e «On the graduation of discrete frequency distributions», *ibid.*, N.º 8. No primeiro destes artigos demos um processo simplificando e extremamente potente de ajustamento tanto de curvas de PEARSON como doutras mais gerais pelo método dos momentos. No segundo expomos um método análogo de ajustamento duma classe muito geral de distribuições discretas, das quais se consideram neste livro três casos particulares (binomial, POISSON e PASCAL).

(2) V. *Gazeta de Matemática*, N.º 63-64.

Corrigenda ao artigo

Introdução às Álgebras de Boole

1 — Por lapso não se incluíu a figura que segue, citada na página 3, coluna 1, linha 7 a contar do fim.



2 — O nome do autor é J. C. VINHA NOVAIS.

3 — Na bibliografia deve ler-se: ...parte de um trabalho do Dr. JOSÉ MORGADO de que se acaba de publicar o 1.º fascículo.

GAZETA DE MATEMÁTICA

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos
Assinatura relativa a 1957 (4 números) 50 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1957, quando pedidas directamente, assinaturas de quatro números, ao preço de escudos 50, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRASADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática.* Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 65 { cada número simples	17$50
» » duplo	35$00

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA».

Concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 35$00

ADMINISTRAÇÃO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»
Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA-N. — Telefone 77 19 43