GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CANDIDATOS AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

PUBLICADO POR

J. CALADO, B. CARAÇA, R. L. GOMES, A. MONTEIRO, J. PAULO, H. RIBEIRO, M. ZALUAR

ANO II N.º 6 ABRIL-1941

PREÇO DÊSTE NÚMERO 4$00

DEPOSITÁRIO GERAL - LIVRARIA SÁ DA COSTA - LARGO DO POÇO NOVO - LISBOA

2.º ANO - N.º 6

GAZETA DE MATEMÁTICA

ABRIL DE 1941

Redacção e Administração: Faculdade de Ciências — Rua da Escola Politécnica — Lisboa

EDITOR: JOSÉ DUARTE DA SILVA PAULO

Composto e impresso na Soc. Industrial de Tipografia, Limitada R. Almirante Pessanha, 3 e 5 - Lisboa

O TEOREMA DE ROUCHÉ E A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Pressupomos o leitor de posse dos resultados fundamentais da teoria dos determinantes, dos conceitos de matriz e de característica e das propriedades elementares desta.

1. *Determinação da característica duma matriz.* A determinação metódica da característica duma matriz baseia-se no

Teorema [1] — *É condição necessária e suficiente para que a matriz* $((a_{ij}))$ $(i=1,2,\cdots n;\ j=1,2,\cdots m)$ *tenha característica* k *que exista um determinante da matriz, de ordem* k *não nulo e que sejam nulos os* $(n-k).(m-k)$ *determinantes de ordem* $k+1$ *obtidos daquele orlando-o com uma linha e uma coluna da matriz, das que nêle não entram.*

Exemplo: Seja a matriz

$$\mathbf{A}=\left\|\begin{matrix}1 & 2 & -1 & 5 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -9 & 6 & 2 & 0 & -6\\ 4 & 2 & -3 & 4 & 1 & 3\\ 1 & -11 & 7 & -3 & 0 & -7\end{matrix}\right\|.$$

A sua característica é igual à da matriz

$$\mathbf{B}=\left\|\begin{matrix}1 & 2 & -1 & 5 & 0 & 1\\ 3 & 0 & -2 & -1 & 1 & 2\\ 2 & -9 & 6 & 2 & 0 & -6\end{matrix}\right\|$$

obtida de **A** pela supressão das linhas 4.ª e 5.ª cujos elementos são combinações lineares dos correspondentes das três primeiras linhas, de coeficientes $1,1,0$ e $-1,0,1$, respectivamente.

A característica da matriz **B** e, portanto, a de **A** é igual à da matriz

$$\mathbf{C}=\left\|\begin{matrix}1 & 2 & -1 & 5 & 0\\ 3 & 0 & -2 & -1 & 1\\ 2 & -9 & 6 & 2 & 0\end{matrix}\right\|$$

que se obteve de **B** pela supressão da última coluna, cujos elementos são proporcionais aos correspondentes da 3.ª coluna.

A matriz **C** tem um elemento não nulo, por exemplo o da 1.ª linha e 1.ª coluna, logo, a sua característica é, pelo menos 1.

Mas, o determinante obtido do elemento considerado orlando-o com a 2.ª linha e a 2.ª coluna de **C**, $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=-6$ é diferente de zero e a característica da matriz **C** é, pelo menos, 2.

Orlemos o determinante Δ com a 3.ª linha e a 3.ª coluna de **C**, vem $\Delta_p=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 3 & 0 & -2\\ 2 & -9 & 6\end{vmatrix}=-35.$

Logo, a característica da matriz **C** é, pelo menos, 3 e, é 3, porque desta não pode obter-se determinantes de ordem superior a 3. O determinante Δ_p pode ser considerado determinante principal da matriz **A**.

2. *Resolução de sistemas de equações lineares não homogéneas.* Dá-se o nome de sistema de equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, \cdots x_n$, a todo o sistema da forma

$$1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \cdots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$$

ou, condensadamente, $$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i \qquad (i=1,2,\cdots m)$$

onde a_{ij} e b_i são expressões que não contêm as incógnitas. A a_{ij} dá-se o nome de *coeficientes* e a b_i o de *têrmo independente.*

As equações do sistema 1) são *homogéneas* se $b_i=0$ $(i=1,2,\cdots n)$ e *não homogéneas* se os b_i não são simultâneamente nulos. Só o segundo caso nos interessa, por agora.

Diz-se *solução* do sistema todo o conjunto de n números $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ que substituidos nas incógnitas das equações do sistema as converte, simultâneamente, em identidades.

O sistema 1) diz-se *compatível* (*possível*) ou *incompatível* (*impossível*) se admite ou não soluções. Prova-se que o sistema 1) se fôr compatível, ou tem uma solução única, ou uma infinidade, e dir-se-á então *determinado* ou *indeterminado.* Introduz-se o conceito de grau de indeterminação.

Designaremos por **A** a matriz $((a_{ij}))$ $(i=1,2,\cdots m\ j=1,2,\cdots n)$ dos coeficientes das incógnitas e por **B** a matriz dos coeficientes e dos termos independentes.

Prova-se que, se fôr k a característica da matriz **A**, a característica da matriz **B**, ou é k, ou $k+1$. Aos determinantes de ordem $k+1$ da matriz **B**, obtidos do determinante principal da matriz **A**, que contenham a coluna dos termos independentes, dá-se o nome de *característicos.* Só quando um dos característicos, pelo menos, não fôr nulo a característica da matriz **B** é $k+1$.

Teorema de Rouché [2] — *É condição necessária e suficiente para que o sistema* 1) *seja compatível que as características das matrizes* **A** *e* **B** *sejam iguais (ou, o que é o mesmo, os característicos, se existirem, sejam todos nulos), sendo compatível, o sistema é determinado ou indeterminado se a característica* k *das matrizes* **A** *e* **B** *fôr igual ou inferior ao número* n *de incógnitas* [3].

[1] L. Kronecker (1823-1891). V. demonstração em Bento de Jesus Caraça — *Lições de Álgebra e Análise*, vol I, págs. 274-276.

[2] E. Rouché (1832-1910). V. demonstração em B. J. Caraça, Ob. Cit. pág. 383-387.

[3] É a diferença, sempre positiva, $n-k$ que se denomina *grau de indeterminação.*

Na hipótese da compatibilidade, se fôr k a característica das matrizes **A** e **B**, prova-se que a resolução do sistema 1) se reduz à do sistema

$$2)\ \begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=b_1 \\ \cdots \\ a_{k1}\,x_1+a_{k2}\,x_2+\cdots+a_{kn}\,x_n=b_k \end{cases}$$

ou abreviadamente, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j=b_i \qquad (i=1\,,2\,,\cdots n)$

que se diz *principal* e cuja solução ou soluções satisfazem às restantes equações de 1) (equações *não principais*), as quais são combinações lineares das de 2).

No caso geral, o sistema 2) escrever-se-á

$$\bar{2})\ \begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1k}\,x_k=c_1 \\ \cdots \\ a_{k1}\,x_1+a_{k2}\,x_2+\cdots+a_{kk}\,x_k=c_k \end{cases}$$

ou $\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\,x_j=c_i \qquad (i=1\,,2\,,\cdots k)$ com

$c_i=b_i-(a_{ik+1}\,x_{k+1}+\cdots+a_{in}\,x_n)$, se fôr $\Delta_p=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1k} \\ \cdots \\ a_{k1}\cdots a_{kk}\end{vmatrix}\neq 0$

e, portanto, susceptível de ser tomado como determinante principal.

Ter-se-á $c_i=b_i$ sempre que fôr $n=k$, isto é, sempre que o sistema, sendo compatível, fôr determinado.

Às incógnitas $x_1\,,x_2\,,\cdots x_k$ dá-se a designação de *principais* e às restantes $x_{k+1}\,,\cdots x_n$ a de *não principais.*

A solução ou soluções do sistema $\bar{2})$ são dadas pela

Regra de Cramer[1] — *O valor de cada incógnita é dado por uma fracção cujo denominador é o determinante principal Δ_p e cujo numerador é o determinante obtido de Δ_p pela substituïção da coluna dos coeficientes da incógnita pela coluna dos 2.os membros das equações de $\bar{2}$).*

$$x_i=\frac{\Delta_i}{\Delta_p} \qquad (i=1\,,2\,,\cdots k)\,.$$

Exemplo I. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x-y+2z-t=1 \\ x+y-z-2t=2 \\ 2x+z-3t=2 \\ 2y-3z-t=1. \end{cases}$$

A característica da matriz **A** é 2. A característica da matriz **B** é 3, visto que dos dois característicos um é diferente de zero:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \qquad \Delta_2=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0\,.$$

O sistema dado é incompatível. Não o seria o sistema que se obtém do proposto pela supressão da 3.ª equação.

Exemplo II. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-3y+z=2 \\ 4x-y-z=7 \end{cases}$$

e interpretar geomètricamente o resultado. Determinar as direcções das arestas da figura definida no espaço pelas equações do sistema.

A característica da matriz **A** é 2 e a da matriz **B** é 3, pois o único característico é

$$\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 \end{vmatrix}=-15\neq 0\,.$$

O sistema é incompatível.

Mas, os sistemas formados pelas equações do sistema proposto tomadas duas a duas são todos compatíveis, visto que não existem característicos.

As equações do sistema proposto são as de três planos que se intersectam dois a dois. A figura é um prisma cujas arestas têm a direcção comum $\delta\,(2\,,3\,,5)$.

Exemplo III. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x-2y+3z+t=10 \\ x+y-z=1 \\ 3x+z+t=12\,. \end{cases}$$

A característica da matriz **A** é 2 e a da matriz **B** é também 2, em virtude do anulamento do único caracteristico

$$\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 12 \end{vmatrix}=0 \qquad \Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=3.$$

O sistema é compatível e indeterminado de grau 2.

A regra de Cramer, conduz-nos a

$$x=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 10-3z-t & -2 \\ 1+z & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{3}(12-z-t)$$

$$y=\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & 10-3z-t \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}=\frac{1}{3}(-9+4z+t)\,.$$

Exemplo IV. Estudar o sistema

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \\ x+2y-z=2 \\ 3x+2y+z=3\,. \end{cases}$$

A característica da matriz **A** é 3

$$\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=4.$$

A da matriz **B** é também 3, o único característico é nulo

$$\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0$$

visto que a sua 4.ª linha é a soma das 3 primeiras.

$$x=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\frac{7}{4} \qquad y=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-\frac{5}{4}\,.$$

Exemplo V. Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} (a+b)\,x+(a-b)\,y=a^2+b^2 \\ (a-b)\,x+(a+b)\,y=a^2-b^2\,. \end{cases}$$

Interpretação em geometria analitica no espaço. (I. S. T. — Mat. Gerais, 1.º exame de freq. de 1938-39 — V. *Gaz. Mat.* exerc. 155).

As matrizes **A** e **B** têm, em qualquer hipótese, a mesma característica: 1 se $a=0$ ou $b=0$ e 2 se $a\,,b\neq 0$. Excluímos o caso, sem interêsse, de $a=b=0$.

O sistema proposto é, portanto, sempre compatível. No caso de $a\,,b\neq 0$, a regra de Cramer conduz-nos a $x=a+b$, $y=a-b$.

Se se tem $a=0$ ou $b=0$, as equações do sistema não são distintas reduzem-se a $x+y=a$ ou $x-y=b$, plano perpendicular a Oxy.

Se $a\,,b\neq 0$, as equações do sistema são as de dois planos perpendiculares ao plano Oxy que formam um diedro cuja aresta tem por equações $\begin{cases} x=a+b \\ y=a-b\,. \end{cases}$

(Continua) A. SÁ DA COSTA.

[1] G. Cramer (1704-1752). V. a dedução em B. J. Caraça, — Ob. cit., pág. 375-382.

A LÓGICA MATEMÁTICA E O ENSINO MÉDIO

(CONTINUADO DO N.º 5)

9 — Dada uma proposição condicional $\alpha(X)$, suponhamos que existe uma, e uma só, determinação de X, que representaremos por X^*, para a qual a proposição $\alpha(X)$ é verdadeira [1]. Dêste modo, a proposição $\alpha(X^*)$, incondicionalmente verdadeira, traduz uma propriedade exclusiva de X^*, e será portanto possível *definir* o elemento X^* à custa dessa mesma propriedade: «X^* é o elemento que satisfaz à condição $\alpha(X^*)$», ou, em termos de Lógica matemática, «$(X=X^*)\equiv\alpha(X)$» [2]. Obtém-se, por êste processo, uma *definição lógica* da entidade X^*. Por exemplo, «X é o sucessor de 4» é uma propriedade que pode utilizar-se para definir o número convencionalmente representado pelo símbolo 5, e assim teremos, *por definição*, «5 é o sucessor de 4».

Para que, segundo o processo indicado, uma dada proposição $\alpha(X)$ possa conduzir à definição dum elemento, é evidentemente necessário que *exista* uma, e *uma só*, entidade X^*, que satisfaça à condição $\alpha(X^*)$. Tôda a definição dum elemento deve, portanto, lògicamente, ser precedida duma proposição de *existência* e de *unicidade*. É, contudo, natural admitir a possibilidade de um mesmo elemento ser definido de modos diferentes, isto é, utilizando proposições condicionais distintas; assim, a anterior definição (do número 5) será equivalente à seguinte: «$(X=5)\equiv(X$ é o m. d. c. de 20 e $15)$». Haverá portanto, entre as propriedades dum ser, uma que se toma, *um tanto arbitràriamente*, como propriedade definidora (em geral, produto lógico de um conjunto de propriedades), sendo as restantes consideradas apenas conseqüências da definição. Convém, evidentemente, aceitar como definidora a propriedade que se *afigure* mais simples, — mas compreende-se que, muitas vezes, se torne difícil, até impossível, a determinação duma tal propriedade elementar [3].

Notemos agora que, àlém das definições de elementos, se devem considerar ainda as definições de *classes* (ou de *conjuntos*). O processo é análogo ao anterior: define-se uma classe (ou um conjunto), indicando uma propriedade comum a todos os elementos dessa classe (ou dêsse conjunto), e só a êsses. Exemplos: I) Definição de quadrado perfeito: «$(x$ é *um quadrado perfeito*$)\equiv($Existe um inteiro y tal que $x=y^2)$»; II) Definição de mediatriz dum segmento: «$(X$ é *um ponto da mediatriz do segmento* $\overline{AB})\equiv \text{dist}\,(A,X)=\text{dist}\,(B,X))$». Neste caso, as condições de existência e de unicidade deixam de constituir um motivo de preocupação, visto que o conjunto dos elementos que satisfazem a uma dada proposição condicional $\alpha(X)$ *existe sempre e é único*; pode apenas tal conjunto não conter elemento nenhum (recebe então o nome de *conjunto vazio*) [4]. Assim, existe, e é determinado, o conjunto dos números primos múltiplos de 4, embora tal conjunto seja vazio; anàlogamente, é vazia a classe dos triângulos rectângulos equiláteros.

Devemos, finalmente, referir-nos a definições de *operadores* ou *relações*. Exemplo: Por meio da equivalência «(A recta x é *paralela à* recta $y)\equiv($As rectas x e y pertencem ao mesmo plano) (Não existe nenhum ponto comum a x e a y)», fica definida a relação «paralelo a», entre duas rectas. Não deixaremos, contudo, de afirmar que se pode, mediante um artifício muito simples, fazer entrar êste tipo de definições, no precedente.

Como se vê, uma definição não é, no fundo, mais do que a atribuïção dum nome ou, o que vem a dar o mesmo, a representação por meio dum símbolo, da entidade ou da classe de entidades, que gozam duma certa propriedade: o objectivo é, pois, resumir, por meio dum único símbolo, o que, antes disso, só era exprimível por meio de vários símbolos. Assim, as definições são proposições, incondicionalmente verdadeiras por nossa própria *deliberação*, isto é, por *convenção*, e têm por fim, não só a economia de tempo, como ainda maior clareza de expressão: é, sem dúvida, muito mais cómodo dizer «circunferência» do que «conjunto dos pontos dum plano situados a uma mesma distância de um outro ponto dêsse plano», principalmente, se notarmos que esta noção é de uso correntíssimo em Geometria.

10 — Em qualquer teoria matemática, construída segundo os preceitos da Lógica, começa-se por fixar um certo número de noções (as *noções primitivas*) e um certo número de proposições (os *postulados*), de modo que satisfaçam às seguintes condições: 1) Todas as entidades consideradas nessa teoria se podem definir à custa das noções primitivas; 2) Todas as proposições categóricas que, na mesma teoria, se formulam como verdadeiras (excepto as definições) são conseqüências lógicas dos postulados; 3) Os postulados são compatíveis, isto é, não conduzem a contradição; 4) Nenhuma noção primitiva se pode reduzir, por meio duma definição, às restantes noções primitivas; 5) Nenhum postulado se pode deduzir dos restantes postulados [5]. Em virtude destas condições, os conceitos primitivos não serão susceptíveis de definição, e os postulados serão *indemonstráveis*: uns e outros se aceitam *geralmente*, como dados fornecidos pela *intuïção*, no contacto com a realidade sensível. Assim, por exemplo, na Geometria que se estuda nos liceus, ou Geometria euclidiana, *é uso* tomarem-se, como primitivas, entre outras, as idéias de «ponto», «recta», «plano», «situado entre»; e como postulados, entre outras, as seguintes proposições: «Por dois pontos distintos passa uma recta, e uma só»; «Dados três pontos distintos, pertencentes a uma recta, existe um, e um só dêles, situado entre os restantes»; «Por um ponto exterior a uma recta passa uma, e uma só, paralela a essa recta».

Além dos postulados, consideram-se em Matemática mais dois tipos de proposições: as *definições nominais* e os *teoremas*. As primeiras, de que já tratámos desenvolvidamente no

[1] Pode comparar-se $\alpha(X)$ a uma equação que admite uma solução única X^*; dêste modo, $\alpha(X^*)$ corresponde à identidade em que é convertida essa equação, quando se faz $X=X^*$.

[2] Como já fizemos anteriormente (obs. 2), § 7), usamos o sinal $=$ para exprimir *identidade*; assim «$a=b$» significa que a representa *o mesmo* elemento que b.

[3] A propriedade com que, històricamente, uma entidade se dá a conhecer *pela primeira vez*, nem sempre é a mais indicada para uma definição lógica dessa entidade: é o que sucede por exemplo, com o número π.

[4] Há nisto, é claro, apenas uma convenção: uma extensão natural do conceito de conjunto, em vista da comodidade de linguagem que daí resulta.

[5] As condições 4) e 5) não são indispensáveis para o desenvolvimento lógico da teoria; compreende-se, todavia, a vantagem que há em reduzir a um *mínimo* o número das entidades que não se definem e o das proposições que não se demonstram, sendo óbvio que tal mínimo *existe necessàriamente*.

§ anterior, introduzem novas noções, à custa dos conceitos primitivos, com o objectivo de contribuir para a brevidade e a clareza do discurso. Os teoremas são aquelas proposições, distintas dos postulados e das definições que, segundo a condição 2), se podem deduzir dos postulados, isto é, que são susceptíveis de *demonstração*.

Pode suceder que, dado um teorema α_1, não só seja possível deduzir α_1 dos postulados admitidos, como até exista um postulado α, que seja implicado por α_1, quando se admitem os restantes postulados; isto é, as proposições α e α_1 serão, em tais condições, equivalentes, e poderá substituir-se α por α_1. Isto mostra que a escôlha das proposições que hão-de figurar como postulados, numa dada teoria, apresenta um certo grau de arbitrariedade: devem preferir-se, é claro, as proposições de enunciado mais simples, mas podem surgir neste caso, as mesmas hesitações que apontámos, a respeito das definições. Análoga liberdade de escôlha se verifica para as noções primitivas. Por exemplo, em vez do conceito de «recta», podem tomar-se como primitivos o conceito de «distância (entre dois pontos)», o de «direcção», etc. Anàlogamente, demonstra-se que o postulado das paralelas (Por um ponto exterior a uma recta passa uma paralela a essa recta, e uma só) se pode substituir pelo teorema, segundo o qual a soma dos ângulos internos dum triângulo é igual a um ângulo raso (a última proposição passaria então a ser um postulado e a primeira, um teorema).

Em virtude do que dissémos nos §§ anteriores, fica perfeitamente esclarecido o significado de expressões, tais como «hipótese» e «tese» (dum teorema ou dum postulado), «teoremas recíprocos», etc.

Devemos ainda notar que não existe uma distinção fundamental entre definições e postulados: êstes são apenas, como já se tem dito, definições disfarçadas, que limitam a indeterminação dos conceitos primitivos.

11 — É normal, no ensino médio, para demonstrar (e até para enunciar) um teorema de Geometria, fazer uso de figuras, cujo papel não é, ùnicamente o de facilitar a compreensão da matéria, mas ainda o de substituir uma parte importante da demonstração (ou do enunciado): omitem-se muitas passagens, apenas porque são sugeridas, intuïtivamente, pela figura. Perde-se, dêste modo, em precisão, o que se ganha em clareza, — se pode chamar-se *claro* ao que é *superficial* (1). As propriedades que, intervindo na demonstração dum teorema, não são geralmente invocadas, são as que envolvem os conceitos de «pertence a» e «situado entre», — chamadas *propriedades topológicas*. Por exemplo, o facto de um ponto ser interior ou exterior a um polígono é uma propriedade topológica. Têm de específico estas propriedades não serem alteradas quando, por exemplo, se substituem segmentos iguais por segmentos diferentes, ângulos rectos por ângulos não-rectos, segmentos de recta por convenientes linhas curvas, etc. — contanto que a posição relativa dos pontos seja respeitada (2). Daí o dizer-se que «a Geometria é a arte de raciocinar sôbre figuras mal feitas».

Para que uma demonstração seja impecável, do ponto de vista lógico, é necessário que não dependa, de maneira nenhuma, da figura utilizada, de modo que, abstraindo desta, a demonstração não seja afectada em qualquer pormenor. Não pretendemos, com isto, insinuar que se deva pôr completamente de parte a figura: pelo contrário, há grande vantagem no seu uso (devidamente acautelado), como poderoso auxiliar da intuïção. Não deixaremos, contudo, de aconselhar, como óptimo exercício para combater os hábitos de raciocínio provenientes do uso imoderado das figuras, fazer a demonstração de alguns teoremas, sem recorrer à imagem geométrica intuïtiva. É, porém, necessário, para tal conseguir, além dum conhecimento perfeito de tôdas as propriedades que intervêm na demonstração, o emprêgo dum sistema de notações, muito mais minucioso do que os ordinàriamente adoptados (não esqueçamos que as notações correspondem a verdadeiras definições, e qual o papel simplificador das definições). Os símbolos vêm dêste modo substituir o desenho, o que representa um progresso decisivo no sentido da depuração lógica dos métodos.

12 — Vamos, neste §, introduzir algumas convenções que teremos necessidade de utilizar. Como símbolos representativos de entidades, empregaremos letras do alfabeto latino em redondo: maiúsculas $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \cdots)$, para os pontos; minúsculas, $(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{x}, \cdots)$, para os números; minúsculas encimadas dum traço $(\bar{\mathrm{x}}, \bar{\mathrm{a}}, \cdots)$, para as rectas; minúsculas entre colchetes $([\mathrm{y}], [\mathrm{b}], \cdots)$, para as figuras geométricas em geral. Em particular usaremos letras latinas minúsculas, em itálico, $(a, x, \cdots)$, para designar números inteiros. Quando nada se diga em contrário, estes símbolos representarão seres indeterminados, dentro dos limites impostos pelas condições anteriores: assim, A e B designarão dois pontos *quaisquer, independentes* (coincidentes ou distintos); resulta ainda das convenções estabelecidas que proposições, tais como «A, P e X são pontos», «$\bar{\mathrm{r}}$ e $\bar{\mathrm{y}}$ são rectas» «k é um número» são proposições reconhecidas, uma vez por tôdas, como incondicionalmente verdadeiras, e, por isso mesmo, dispensáveis nos enunciados das outras proposições. O sinal $'$ será aqui utilizado com a mesma função que se lhe atribui vulgarmente (excepto quando se aplica às proposições, caso em que exprime negação).

Em vez do têrmo «igualdade» aplicado às figuras geométricas, usaremos o de «congruência»: «[a] é congruente a [b]» significa o mesmo que, no sentido ordinário, «[a] é igual a [b]»; e escreveremos, para exprimir êste facto, $[\mathrm{a}] \simeq [\mathrm{b}]$, em vez de $[\mathrm{a}] = [\mathrm{b}]$. O sinal $=$ fica reservado para exprimir identidade. Notemos que, no caso dos números, «igualdade» é sinónimo de «identidade».

Adoptaremos ainda as seguintes notações: $\in$ (*pertence a*); $\neq$ (*distinto de*); $\|$ (*paralelo* ou *paralela a*); AB (recta def. por A e por B); $\overline{\mathrm{AB}}$ (segmento de extremos A e B); $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$ (semi-recta que tem por origem A e que passa por B); $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}^{-1}$ (semi-recta oposta a $\widehat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$); $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$ (ângulo convexo cujos lados são $\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{A}$ e $\widehat{\mathrm{O}}\mathrm{B}$) $\bar{a} \cdot \bar{b}$ (ponto de intersecção das rectas $\bar{a}$ e $\bar{b}$); [ABC] (triângulo de vértices A, B e C); $\mathrm{A} \in [\mathrm{P}, \mathrm{Q}]$ (A está situado entre P e Q). Convém ainda ter presentes algumas regras: num triângulo [ABC] o ângulo *oposto* ao lado $\overline{\mathrm{AB}}$ é $\mathrm{A}\widehat{\mathrm{C}}\mathrm{B}$ (as letras exteriores

(1) É inteiramente justificável a orientação *intuïtivo-racional*, que se imprime ao ensino da Geometria, nesta fase de iniciação (ainda não vai longe o tempo em que se ensinava Euclides, à maneira de Euclides...); o que não podemos aceitar, é que muitas vezes se apresente como demonstração, o que *não é demonstração*, e como definição... o que *nada define*.

(2) Poincaré dá intuïtivamente a idéia de «propriedade topológica», dizendo que são topológicas aquelas propriedades duma figura que se conservam, mesmo quando esta é grosseiramente reproduzida por uma criança.

são as que designam os vértices do lado opôsto); AOB^{-1} será um ângulo adjacente a $A\widehat{O}B$ (lado comum $\widehat{O}A$); $A^{-1}\widehat{O}B^{-1}$, o ângulo verticalmente opôsto a $A\widehat{O}B$; AOA^{-1}, um ângulo raso, etc.

13 — Podemos agora, por meio do simbolismo adoptado, enunciar algumas proposições da Geometria euclidiana:

$\pi : ([a] \cong [b]).([b] \cong [c]) \rightarrow ([a] \cong [c])$, (Propriedade transitiva da congruência entre figuras geométricas).

$\theta : (A,B,C$ não são colineares$).(A\widehat{B}C > A\widehat{C}B) \rightarrow (\overline{AC} > \overline{AB})$[1], (Em qualquer triângulo, a um maior ângulo opõe-se um maior lado).

$\alpha : (P,Q,R$ não são colineares$).(P\widehat{Q}R \cong 1$ recto$) \rightarrow (\overline{PR} > \overline{PQ})$, (A hipotenusa dum triângulo rectângulo é sempre maior do que os catetos).

Teorema de Thales: $(M,N,P,Q$ são colineares$).(M'N'P'Q'$ são colineares$).(MM' \| NN' \| PP' \| QQ').(M \neq N).(P \neq Q) \rightarrow$ $\rightarrow \left(\dfrac{\overline{MN}}{\overline{M'N'}} = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}}\right)$.

Veja-se que, por êste processo, a hipótese e a tese ficam sempre postas em relêvo. Além disso, os enunciados em linguagem corrente não são, de nenhum modo, mais precisos do êstes, apresentados em linguagem simbólica. Não esqueçamos ainda que (Obs. 1), § 7)) é indiferente adoptar êste ou aquêle símbolo no enunciado dum teorema, desde que se respeitem as convenções: assim, no enunciado do teorema θ, podemos, por exemplo, substituir A, B, C, respectivamente, por P, Q, R. Em particular, fazendo em α a substituïção: P por R, Q por Q, R por P, a hipótese não muda de aspecto, enquanto a tese toma a forma «$\overline{PR} > \overline{QR}$» (o cateto $\overline{PQ}$ foi substituído pelo cateto $\overline{QR}$, sem que tivesse havido alteração do teorema). É ainda para notar como o enunciado, que apresentamos, do teorema de Thales, inclui todos os casos possíveis: possibilidade de alguns dos pontos M, P, N, Q, coincidirem; arbitrariedade na disposição dos mesmos; possibilidade de as rectas MQ e $M'Q'$ serem paralelas, etc.

Visto que, segundo as propriedades 1) e 2) do § 5, se tem $(\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}) \equiv (\mathfrak{t}' \rightarrow \mathfrak{h}')$, será sempre possível enunciar *um mesmo teorema,* pelo menos de duas maneiras distintas. Assim, o teorema[2] «$(M$ pertence à mediatriz de $\overline{AB}) \rightarrow$ $\rightarrow (\overline{AM} \cong \overline{BM})$» [Qualquer ponto da mediatriz dum segmento é equidistante dos extremos dêsse segmento], pode ainda enunciar-se como segue: «$(\overline{AP} \cong \overline{BP})' \rightarrow (P$ *não* pertence à mediatriz de $\overline{AB})$» [Todo o ponto não equidistante dos extremos dum segmento não pertence à mediatriz dêsse segmento]; notemos ainda que o recíproco dêste teorema é verdadeiro, o que permite substituir a seta pelo sinal $\equiv$.

14—Proponhamo-nos demonstrar agora o teorema α, enunciado no § anterior, admitindo como verdadeiros o teorema θ do mesmo § e o teorema β seguinte: «$(U, V, X$ não são colineares$)(U\widehat{V}X \cong 1$ recto$) \rightarrow (U\widehat{X}V < U\widehat{V}X)$». Para isso, representemos por $\mathfrak{h}_1$ e $\mathfrak{h}_2$, respectivamente, as proposições «P, Q, R não são colineares» e «$P\widehat{Q}R \cong 1$ recto»; a hipótese $\mathfrak{h}$ de α será então $\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h}_1 . \mathfrak{h}_2$. De $\mathfrak{h}$ resulta, pelo teorema β: $P\widehat{Q}R > P\widehat{R}Q$ (prop. ∂); de $\mathfrak{h}_1$ e ∂, deduz-se, conforme θ: $\overline{PR} > \overline{PQ}$ (tese $\mathfrak{t}$ do teorema α, que dêste modo fica demonstrado). Podemos pôr em evidência tôdas as passagens da demonstração, utilizando o seguinte esquema (a chaveta indica que se deve tomar o produto lógico das proposições abrangidas):

$$\mathfrak{h} \equiv \mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \left.\begin{matrix} \partial \\ \mathfrak{h}_1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \mathfrak{t},$$

ou, mais simplesmente, $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1 \partial \rightarrow \mathfrak{t}$, donde $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{t}$ (teorema α); a implicação $\mathfrak{h} \rightarrow \partial$ (ou, o que é equivalente, $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}_1 \partial$) *não é mais do que o teorema* β; por outro lado, a implicação $\mathfrak{h}_1 \partial \rightarrow \mathfrak{t}$ *vem a ser o teorema* θ. Para reconhecer a identidade entre estas implicações e os teoremas indicados, basta fazer nos enunciados uma conveniente mudança dos símbolos, tendo em vista a obs. 1) do § 7. Pode escrever-se ainda (§ 8): $\beta \rightarrow \alpha$ (segundo θ).

Nesta demonstração empregou-se, como se vê, um único silogismo: mas raramente isto acontece. O exemplo seguinte dará uma idéia do número surpreendente de propriedades que se aplicam numa demonstração, aparentemente simples, de Geometria elementar.

Seja o teorema γ seguinte: «Todo o ângulo inscrito numa circunferência é congruente a metade do ângulo ao centro correspondente»; e demonstremos êste teorema no caso em que um dos lados do ângulo inscrito passa pelo centro da circunferência; isto é, demonstremos o teorema γ^*, cuja hipótese $\mathfrak{h}^*$ é o produto lógico das condições: $\mathfrak{h}_1$: $[x]$ é uma circunferência de centro em O; $\mathfrak{h}_2$: $A \in [x]$; $\mathfrak{h}_3$: $B \in [x]$; $\mathfrak{h}_4$: $C \in [x]$; $\mathfrak{h}_5$: $A \neq B$; $\mathfrak{h}_6$: $A \neq C$; $\mathfrak{h}_7$: $B \neq C$; $\mathfrak{h}_8$: $O \in BC$; e cuja tese $\mathfrak{t}$ é a condição: $A\widehat{B}C \cong \frac{1}{2} A\widehat{O}C$. Para a demonstração, suponhamos conhecidas as seguintes proposições categóricas verdadeiras: δ_1 — *Definição de «diâmetro» duma circunferência;* γ_1: «$[k]$ é uma circunferência de centro em $O)(\overline{PQ}$ é um diâmetro de $[k])(R \in [k])(R \neq P)(R \neq Q) \rightarrow (O, P, R$ não são colineares$)$»; δ_2 — *Definição de «circunferência de centro em O;* γ_2: «$(A, B, C$ não são colineares$)(\overline{AB} \cong \overline{AC}) \rightarrow (A\widehat{C}B \cong \frac{1}{2} B\widehat{A}C^{-1})$[3]»; γ_3: «$(\overline{XY}$ é um diâmetro duma circunferência de centro em $C) \rightarrow$ $\rightarrow (C \in [X,Y])$»; γ_4: $(P \in [M, N]) \rightarrow (A\widehat{P}N^{-1} \cong A\widehat{P}M)(A\widehat{M}N \cong$ $\cong A\widehat{M}P)$;» γ_5 — *Propriedade transitiva da congruência entre ângulos;* γ_6: «$(A\widehat{B}C \cong P\widehat{Q}R) \rightarrow \left(\frac{1}{2} A\widehat{B}C \cong \frac{1}{2} P\widehat{Q}R\right)$». Posto isto, virá, sucessivamente: ∂_1: $\overline{BC}$ é um diâmetro de $[x]$ (de $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_3, \mathfrak{h}_4, \mathfrak{h}_7$ e $\mathfrak{h}_8$, por δ_1)[4]; ∂_2: A, O, B não são colineares (de $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_5, \mathfrak{h}_6$ e ∂_1, por γ_1); ∂_3: $\overline{OA} \cong \overline{OB}$ (de $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2$ e $\mathfrak{h}_3$, por δ_2); ∂_4: $A\widehat{B}O \cong \frac{1}{2} AOB^{-1}$ (de ∂_2 e ∂_3, por γ_2); ∂_5: $O \in [B,C]$ (de $\mathfrak{h}_1$ e ∂_1, por γ_3); ∂_6: $(A\widehat{O}B^{-1} \cong A\widehat{O}C)(A\widehat{B}C \cong A\widehat{B}O)$ (de ∂_5, por γ_4); $\partial_7 \equiv \mathfrak{t}$: $A\widehat{B}C \cong \frac{1}{2} A\widehat{O}C$ (de ∂_4 e ∂_6, pelas propriedades

[1] Admitimos aqui, como óbvia, a seguinte equivalência: «$(A,B,C$ não são colineares$) \equiv (A, B, C$ são os vértices dum triângulo$)$».

[2] Admítimos aqui, como teorema, o que no § 7 aceitámos como definição. Tomamos agora, como definidora, a seguinte proposição: «A *mediatriz dum segmento* é a perpendicular ao meio dêsse segmento».

[3] Conseqüência dos teoremas: «Qualquer ângulo externo dum triângulo é congruente à soma dos internos opostos» e «Em qualquer triângulo a lados congruentes opõem-se ângulos congruentes».

[4] Quando, por exemplo, escrevemos: «∂_1 ... (de ∂_2 e ∂_3, por γ_2)» pretendemos com isto afirmar que $\partial_2 \partial_3 \rightarrow \partial_4$, sendo esta implicação equivalente ao teorema (on postulado) γ_2. Se, em vez dum teorema ou postulado, se tratar duma definição, ter-se-á, mais do que uma implicação simples ($\rightarrow$) — uma equivalência ($\equiv$). Note-se que foram omitidos os sinais . nos produtos lógicos.

γ_5 e γ_6 combinadas). Tem-se, pois, $\mathfrak{h} \to \mathfrak{t}$, como se pretendia demonstrar. Deixamos ao cuidado do leitor a construção dum esquema análogo ao do exemplo anterior.

15 — Na maior parte das demonstrações, em Geometria elementar, é necessário recorrer à intervenção de elementos que não figuram no enunciado, mas que se consegue eliminar antes de atingir o têrmo dos raciocínios. Tais elementos são introduzidos por meio de ***hipóteses adicionais,*** cujo papel consiste portanto em tornar exequível a demonstração. Assim, para demonstrar o teorema: «Se, num triângulo $[PQR]$, se tem $\overline{PQ} > \overline{PR}$, será também $P\hat{R}Q > P\hat{Q}R$», faz-se intervir um ponto M (elemento estranho), tal que: $M \in PQ$, $\overline{PM} \cong \overline{PR}$ (hipótese adicional); então, visto que $\overline{PQ} > \overline{PR}$, o ponto M ficará situado entre P e Q, e portanto será $P\hat{R}Q > P\hat{R}M$; por outro lado, como $P\hat{M}R \cong P\hat{R}M$ (visto os lados $\overline{PM}$ e $\overline{PR}$ do triângulo $[PMR]$ serem congruentes, *por construção*), ter-se-á $P\hat{R}Q > P\hat{M}R$; àlém disso, $P\hat{M}R$ será maior do que $P\hat{Q}R$, por ser ângulo externo do triângulo $[MQR]$, opôsto a $M\hat{Q}R = P\hat{Q}R$, e assim virá (tese do teorema): $P\hat{R}Q > P\hat{Q}R$ [1]. O elemento M foi, como se vê, eliminado. Averiguemos, no entanto, em que medida é legítimo êste procedimento, tão usual em Geometria elementar.

Seja $\mathfrak{h}(X) \to \mathfrak{t}(X)$ o teorema a demonstrar, e suponhamos que foi possível estabelecer a implicação $\mathfrak{h}(X) . \mathfrak{a}(X, Y) \to \mathfrak{t}(X)$, em que $\mathfrak{a}(X, Y)$ representa uma hipótese adicional, introdutora do elemento estranho Y. Então, para que, da última implicação, se possa deduzir a primeira, basta que se verifique a seguinte condição de existência: «Qualquer que seja a determinação X^* de X que verifique a proposição $\mathfrak{h}(X)$, *existe, pelo menos, uma* determinação Y^* de Y para a qual é verdadeira a proposição $\mathfrak{a}(X^*, Y)$». Com efeito, seja X^* uma determinação de X que verifica $\mathfrak{h}(X)$ e, supondo verificada a condição anterior, designemos por Y^* um elemento tal que a proposição $\mathfrak{a}(X^*, Y^*)$ seja verdadeira; então, em virtude da implicação estabelecida, a proposição $\mathfrak{t}(X^*)$ também será verdadeira. Assim, tôda a determinação de X que verifique $\mathfrak{h}(X)$ verificará também $\mathfrak{t}(X)$: isto quere dizer que se tem $\mathfrak{h}(X) \to \mathfrak{t}(X)$.

Além disso, é fácil ver que, se esta condição se não verificar, nada se pode concluir. Portanto, sempre que se introduzirem elementos estranhos numa demonstração, é preciso ter o cuidado de estabelecer as respectivas proposições de existência. Assim, no exemplo apresentado, deve acrescentar-se que *o ponto* M *existe, necessàriamente,* em virtude do seguinte postulado: «Dados um segmento $\overline{AB}$, uma recta a e um ponto $P \in a$, existe, para cada lado de P, um, e um só ponto M, tal que: $M \in a$, $\overline{PM} \cong \overline{AB}$».

Tornemos agora ao teorema γ do § anterior. O seu enunciado, em linguagem simbólica, obtém-se a partir do de γ^*, suprimindo apenas as condições $\mathfrak{h}_6$ e $\mathfrak{h}_8$, na hipótese dêste. Então, para demonstrar o teorema em tôda a sua generalidade, bastará demonstrá-lo em cada um dos seguintes casos: $\mathfrak{p}_1$: $(A \neq C).(O \in BC)$; $\mathfrak{p}_2$: $(A \neq C).(O \in BA)$; $\mathfrak{p}_3$: $A = C$; $\mathfrak{p}_4$: $(A \neq C).(\widehat{BO}$ é interior a $A\hat{B}C)$; $\mathfrak{p}_5$: $(A \neq C).(\widehat{BO}$ é exterior a $A\hat{B}C)$. Com efeito, tem-se, como fàcilmente se verifica, representando por $\mathfrak{h}$ a hipótese de γ: $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{h}\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{h}\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{h}\mathfrak{p}_4 + \mathfrak{h}\mathfrak{p}_5 \equiv \mathfrak{h}(\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 + \mathfrak{p}_4 + \mathfrak{p}_5) \equiv \mathfrak{h}$; isto é, os casos considerados são todos os possíveis. Mas as implicações $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_1 \to \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_2 \to \mathfrak{t}$ coincidem com o teorema γ^*, já demonstrado; por outro lado, é óbvio que se tem $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_3 \to \mathfrak{t}$; resta-nos pois provar que se tem $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_4 \to \mathfrak{t}$ e $\mathfrak{h}\mathfrak{p}_5 \to \mathfrak{t}$, visto que, pela adição lógica ordenada de tôdas estas implicações, se obtém $\mathfrak{h} \to \mathfrak{t}$. Ora, para demonstrar as duas últimas implicações, basta introduzir um ponto D, tal que: $D \in [x]$, $D \in BO$, $D \neq B$; êsse ponto *existe, necessàriamente,* em virtude do seguinte teorema: «Tôda a recta que passa por um ponto interior a uma circunferência encontra esta em dois pontos distintos». Então, virá, no caso $\mathfrak{p}_4$: $A\hat{B}C \cong A\hat{B}D + D\hat{B}C$; e no caso $\mathfrak{p}_5$: $A\hat{B}C \cong A\hat{B}D - C\hat{B}D$ ou $A\hat{B}C \cong C\hat{B}D - A\hat{B}D$; mas, em qualquer dos casos, os ângulos $A\hat{B}D$ e $C\hat{B}D$ têm um lado que passa pelo centro, o que permite aplicar-lhes o teorema γ^*: dêste modo se chega, fàcilmente, à tese do teorema, sendo eliminado o ponto D, elemento auxiliar.

16 — Nos exemplos apresentados, a demonstração consistiu em passar ***da hipótese para a tese,*** por meio de várias implicações, equivalentes a outras tantas proposições categóricas, conhecidas como verdadeiras (teoremas, postulados ou definições). Por êste processo, são formuladas, umas após outras, diversas proposições condicionais, de modo que: 1) tôda a proposição, que não faça parte da hipótese do teorema ou duma hipótese adicional, é conseqüência lógica de algumas (ou mesmo tôdas) formuladas anteriormente; 2) a última proposição formulada coincide com a tese. Equivale isto a dizer (§ 8), que, partindo de proposições admitidas como verdadeiras, se é conduzido à proposição que se pretende demonstrar, pela aplicação sucessiva de silogismos. O caso mais simples será aquêle em que a hipótese fica ligada à tese por uma cadeia linear de proposições: $\mathfrak{h} \to \mathfrak{d}_1 \to \mathfrak{d}_2 \to \cdots \to \mathfrak{d}_{n-1} \to \mathfrak{t}$ (donde $\mathfrak{h} \to \mathfrak{t}$); mas será êste também o caso menos freqüente. Em geral os raciocínios são mais complicados: apresentam-se ramificações muito variadas, em que as proposições se combinam entre si, quer pela soma lógica, quer pelo produto lógico.

Devemos contudo notar que não é esta a única maneira de proceder, o único método possível de demonstração: poderá ainda adoptar-se a marcha inversa, isto é, ***da tese para a hipótese,*** ou, o que vem a dar o mesmo, ***da proposição a demonstrar, para as proposições categóricas admitidas como verdadeiras.*** O primeiro método é chamado *sintético* ou *dedutivo: várias* proposições (pelo menos duas!) combinam-se entre si, por meio do raciocínio *dedutivo,* para conduzir a uma proposição *única;* o seguudo método é chamado *analítico* ou *redutivo: reduz-se,* em última *análise,* a veracidade duma *única* proposição, à veracidade de *de duas ou mais* proposições. O método sintético é o mais conveniente para a exposição duma teoria já construída; o método analítico é o mais indicado para a investigação, quando se pretende saber se uma dada proposição é ou não verdadeira.

Ocupar-nos-emos adiante, dum terceiro método de demonstração.

17 — Apliquemos o método analítico à demonstração do seguinte teorema: «($\bar{u}$ é perpendicular ao meio de $\overline{AB}$) $(P \in \bar{u}) \to (\overline{AP} \cong \overline{BP})$». Designemos por M o ponto $\bar{u} . AB$, que, por hipótese, é o ponto médio de $\overline{AB}$. Então, para que

[1] Neste exemplo e nos seguintes, limitamo-nos, para maior brevidade, a *esboçar* a demonstração, à maneira ordinária, fazendo um largo apêlo à intuïção.

se verifique a condição $\overline{AP} \cong \overline{BP}$ (tese), basta que se tenha $[AMP] \cong [BMP]$ e $\widehat{AMP} \cong \widehat{BMP}$ (visto que, em triângulos congruentes, a ângulos congruentes se opõem lados congruentes); mas a última congruência resulta da hipótese, pois que, sendo u (ou MP) perpendicular a AB, os ângulos $\widehat{AMP}$ e $\widehat{BMP}$ serão rectos e portanto congruentes: resta-nos, pois, a condição $[AMP] \cong [BMP]$; mas, como os triângulos $[AMP]$ e $[BMP]$ são rectângulos, e um cateto dum é congruente a um cateto do outro (o lado $\overline{MP}$ comum), a última congruência será satisfeita, desde que se tenha $\overline{AM} \cong \overline{BM}$; ora, esta condição resulta imediatamente da hipótese, pois, como dissemos, M é o ponto médio de $\overline{AB}$: assim o teorema fica demonstrado.

Muitas vezes, as demonstrações feitas pelo método analítico são conduzidas de modo que o têrmo inicial seja a proposição dada, α, e o têrmo final, uma proposição, ω, conhecida como verdadeira, conforme o seguinte esquema: $\alpha \longleftarrow \alpha_1 \longleftarrow \cdots \longleftarrow \alpha_n \longleftarrow \omega$. É claro que, na redução de α a α_1, de α_1 a α_2, etc., intervêm proposições conhecidas, em geral distintas de ω, mas na demonstração é atribuída a esta um papel de relêvo, como se a veracidade de α ficasse reduzida, por êste processo, à veracidade de ω, e só à dessa proposição — o que não é exacto.

Em geral, aplica-se êste método, quando as sucessivas proposições são mesmo equivalentes entre si. São dêste género as demonstrações que, vulgarmente, se apresentam como «verificações de identidades», em que a passagem de cada têrmo para o seguinte é feita com a aplicação dos chamados «princípios de equivalência das equações». Exemplo: Seja o teorema: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a\,b}$ [1]; para a sua demonstração consideremos, sucessivamente, as seguintes proposições, *equivalentes entre si:* $(\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a\,b})^m$, $(\sqrt[m]{a})^m \cdot (\sqrt[m]{b})^m = (\sqrt[m]{a\,b})^m$, $a\,b = a\,b$; mas a última proposição é incondicionalmente verdadeira (trata-se duma identidade): logo, também a primeira, *equivalente a esta,* será incondicionalmente verdadeira, e assim o teorema está demonstrado. Notemos que, neste exemplo, intervieram não só os princípios de equivalência, mas ainda: 1) propriedade relativa à potência dum produto; 2) definição de potência; 3) propriedades da igualdade.

(Continua) JOSÉ SEBASTIÃO E SILVA

[1] Em virtude das convenções adoptadas no § 12, a hipótese dêste teorema («a e b são números» e «*m* é um número inteiro») é supérflua, e assim o teorema fica reduzido à tese, proposição incondicionalmente verdadeira neste caso. Supomos, é claro, que se trata aqui apenas de raízes positivas.

EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Licenciaturas em ciências físico-químicas e em ciências matemáticas, cursos preparatórios das escolas militares e curso de engenheiro geógrafo.

555 — Para que valores de m são reais e desiguais as quatro raízes da equação: $2x^4-(3m-2)\,x^2+m^2-4=0$. R: *Para que as quatro raízes sejam reais e desiguais é necessário e suficiente que o descriminante, a soma e o produto das raízes da equação resolvente* $2x^2-(3m-2)\,x+m^2-4=0$, *sejam positivos, o que torna as suas raízes reais, desiguais e positivas. Quere dizer será:* $(3m-2)^2-8m^2+32>0$; $3m-2>0$ *e* $m^2-4>0$. *Estas desigualdades são satisfeitas: a 1.ª para qualquer valor real de* m; *a 2.ª para* $m>2/3$ *e a 3.ª para valores de* m *tais que* $m>2$ *ou* $m<-2$. *Satisfazem pois às três desigualdades simplesmente os valores de* m *reais tais que* $m>2$. J. C.

556 — Aplique a fórmula do desenvolvimento do binómio de Newton ao desenvolvimento de $(1+x)^4$. R: $(1+x)^4 = 1+4x+6x^2+4x^3+x^4$. J. C.

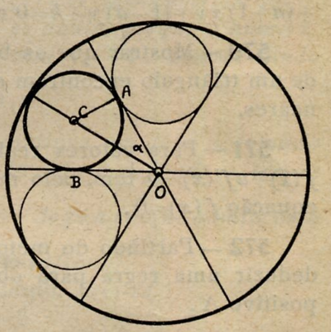
557 — Defina algèbricamente o logarítmo do número N no sistema de base a. Calcule o logarítmo de 16 no sistema de base 2. R: *Chama-se logaritmo do número* N *no sistema de base* a *ao número* x *tal que* $a^x=N$. *Assim* $\log_2 16=x$, $2^x=16$ $x=4$. J. C.

558 — Os comprimentos das bases de um trapézio rectângulo são $16^m,32$ e $13^m,86$ e o da altura é $4^m,29$. Calcule recorrendo ao cálculo logarítmico, os valores dos ângulos do trapézio. R: *Como é óbvio dois dos ângulos são rectos e os outros dois são os ângulos agudos dum triângulo rectângulo de que os catetos são* $4^m,29$ *e* $2^m,46=16^m,32-13^m,86$. *E será então* $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2,46}{4,29}$ *donde* $\log \operatorname{tg}\alpha=0,39094+\bar{1},36754=\bar{1},75848$ *e* $\alpha=29^\circ\,49'\,52''$ *e* $\beta=60^\circ\,10'\,8''=90^\circ-29^\circ\,49'\,52''$. J. C.

559 — Verifique a igualdade: $\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$. R: $\operatorname{sen}(a+b)\operatorname{sen}(a-b)=(\operatorname{sen} a\cos b+\operatorname{sen} b\cos a)\times(\operatorname{sen} a\cos b-\operatorname{sen} b\cos a)=\operatorname{sen}^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b\cos^2 a=\operatorname{sen}^2 a\cos^2 b-\operatorname{sen}^2 b(1-\operatorname{sen}^2 a)=\operatorname{sen}^2 a(\cos^2 b+\operatorname{sen}^2 b)-\operatorname{sen}^2 b=\operatorname{sen}^2 a-\operatorname{sen}^2 b$. J. C.

560 — Determine, sem recorrer às tábuas, os valores de: $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)$ e de $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13}{3}\pi\right)$. R: $\cos 75^\circ=\cos(30^\circ+45^\circ)=\cos 30^\circ\cos 45^\circ-\operatorname{sen} 30^\circ\operatorname{sen} 45^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$; $\operatorname{tg}\left(-\dfrac{13}{3}\pi\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{13}{3}\pi=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}=-\sqrt{3}$. J. C.

561 — Considere uma circunferência de raio r. Trace uma outra circunferência de raio $\dfrac{r}{3}$ e que seja tangente interiormente à primeira. Demonstre que há um número inteiro de circunferências nas condições da 2.ª e que são tangentes entre si. R: *Da figura, considerando o triângulo* $[OAC]$, *deduz-se que* $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{AC}{OC}=\dfrac{1}{2}$ *donde* $\alpha=30^\circ$ *e portanto* $\widehat{AOB}=60^\circ$. *Como* $360^\circ=6\cdot 60^\circ$ *conclue-se que há um número inteiro de circunferências nas condições do enunciado; êsse número é evidentemente* 6. J. C.



562 — Numa divisão, com resto diferente de zero ¿qual é o menor número de unidades que pode juntar ao dividendo sem alterar o resto? Justifique a resposta. R: *Tem-se* (1) $D=dq+r$, $r<d$; *adicionando* m *a ambos os membros de* (1) *vem* (2) $m+D=dq+r+m$. *Para que* m *seja o menor número nas condições do enunciado, deverá ser* (3) $m+D=d(q+1)+r$ *ou atendendo a* (2) *e* (3) $r+dq+m=d(q+1)+r$ *e portanto* $m=d$. J. C.

I. S. C. E. F. — 11 de Outubro de 1940

563 — *a)* Quais são as superfícies de revolução mais importantes que conhece? Como podem ser geradas? Dê as suas definições como lugares geométricos. Descreva-as sumàriamente. *b)* É dado um triângulo isósceles cuja altura é igual ao dôbro da base. Faz-se girar êsse triângulo em tôrno da base; exprima a área do sólido obtido em função da altura do triângulo. R: *b) O sólido gerado é constituido por dois cones da base comum e simétricos em relação ao plano desta. A área do sólido é, portanto, o dôbro da área lateral de um dos cones. Qualquer dêstes tem por base um círculo de raio* $r=2b$, *sendo* b *a base do triângulo dado, e por altura* $h=b/2$. *Logo* $S=2\sqrt{17}\,b\pi$.

564 — Determinar o raio da base e a altura dum cone circular recto sabendo que o seu volume é $\frac{4}{3}\pi a^3$ e que a sua área total é πb^2. Discussão. R: *O enunciado conduz ao sistema*

$$\begin{cases} \frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{4}{3}\pi a^3 \quad g^2=r^2+h^2 \\ \pi r(g+r)=\pi b^2 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} r^2h=4a^3 \\ r^4+r^2h^2=(b^2-r^2)^2 \end{cases} \quad donde$$

$$r=\pm\frac{\sqrt{b^4\pm\sqrt{b^8-128b^2a^6}}}{2b}.$$ *Condição de possibilidade* $b^6>128a^6$ *e o problema terá duas soluções.*

565 — Determinar m de modo que a fracção $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+2x+m}$ seja positiva para todo o valor real de x. Justifique a determinação. R: *A fracção dada será positiva se a desigualdade* $x^2+2x+m>0$ *se verificar qualquer que seja* x *real, visto que o numerador é sempre positivo o que conduz a* $m\geq 1$.

566 — Seja um triângulo rectângulo de catetos b e c e seja $b+c=S$, $b-c=S'$. Exprimir em função de S e S' a razão das áreas do triângulo e do seu círculo circunscrito. R: *Tem-se imediata e sucessivamente* $b=\frac{S+S'}{2}$, $c=\frac{S-S'}{2}$, $a^2=\frac{1}{2}(S^2+S'^2)$

$A_t=\frac{1}{8}(S^2-S'^2)$, $A_c=\frac{\pi}{8}(S^2+S'^2)$, *donde* $\frac{A_t}{A_c}=\frac{S^2-S'^2}{S^2+S'^2}\cdot\frac{1}{\pi}$.

567 — Determinar o maior e o menor valor que pode tomar a soma do seno com o coseno dum mesmo ângulo. R: *A soma* $S=\operatorname{sen}\alpha+\cos\alpha=\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ *pode escrever-se* $S=2\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\,.\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. *Como se reconhece, imediatamente,* S *será máximo quando o fôr* $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$, *ou o que é o mesmo, quando fôr* $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=1$ *e, portanto,* $\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{4}$ (k *inteiro*).

568 — Defina progressão aritmética. Resolva o seguinte problema: Numa progressão aritmética de $n+1$ termos, conhece-se a soma s dos n primeiros termos e a soma S dos n últimos. Calcular os elementos da progressão. R: *A relação* $a+S=s+a+rn$ *dá-nos* $r=\frac{S-s}{n}$ *e a relação* $a+S=\frac{1}{2}(2a+rn)(n+1)$ *conjuntamente com o resultado anterior* $a=\frac{(3-n)S+(n-1)s}{2n}$ *e podemos calcular os elementos da progressão.*

As soluções dos exercícios 565 a 568 foram-nos cedidas pelo assistente Dr. Augusto Sá da Costa.

ÁLGEBRA SUPERIOR

F. C. C. — 2.º exame de freqüência, 1940

569 — Determinar h de maneira que a equação $a^2+ay^2+(a+1)xy+(1-a)y+h=0$ represente duas rectas.

570 — Mostrar que as bissectrizes dos ângulos externos de um triângulo encontram os lados opostos em pontos colineares.

571 — Para valores reais de a, mostrar que a equação $f(x)+af'(x)=0$ tem, pelo menos, tantas raízes reais como a equação $f(x)=0$.

572 — Partindo do método de aproximação de Newton, deduzir uma regra para obter a raiz quadrada do número positivo A.

573 — ¿Qual é a condição para que a equação $x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0$ tenha duas raízes cuja soma seja igual à soma das outras duas?

F. C. L. — 2.º Exame de freqüência, Maio e Junho de 1940

574 — Complete, de forma que seja recíproca, e resolva a equação $6x^6+5x^5-44x^4+44x^2+\cdots=0$. R: *Os termos que faltam são* $-5x$ e -6. *As raizes são* $\pm 1, 2, 1/2, -3, -1/3$.

575 — Deduza a equação da circunferência que passa por $P(0,1)$ e forma com a circunferência $x^2+y^2-3x+4y+5=0$ um sistema de eixo radical r_1, sendo r_1 tangente a $x^2+y^2-2x-4y-5=0$ no ponto $P(0,5)$. R: $6(x^2+y^2)-35x+13y-45=0$.

576 — Deduza as equações duma recta que passe pelo ponto P e faça com OX e OZ ângulos de 45º e 60º respectivamente; P é traço da recta $x=2z-6$, $y=3z-1$ no plano π; π é um plano paralelo a $x-y+\sqrt{2}z-7=0$, cortando a esfera $x^2+y^2+z^2-4x+2y-20=0$ segundo uma circunferência de raio igual a 3. R: $\frac{x-\left[\frac{20}{\sqrt{2}-1}-6\right]}{\sqrt{2}}=\frac{y-\left[\frac{30}{\sqrt{2}-1}-6\right]}{1}=\frac{z-\frac{10}{\sqrt{2}-1}}{1}$.

577 — Resolva a equação $2x^5-x^4-11x^3+16x^2-30x+36=0$. R: $2, -3, \frac{3}{2}, \pm\sqrt{2}\,i$.

578 — Calcule a área do paralelogramo definido pelas rectas de equações $2x-5y+14=0$, $5x+y-19=0$, $2x-5y-13=0$ e $5x+y+8=0$. R: $S=27$.

579 — Deduza as equações da recta definida pelos pontos P_1 e P_2; P_1 é um dos pontos da esfera $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$, em que o raio é paralelo a $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{-2}=\frac{z+3}{1}$, e P_2 é o ponto de encontro das rectas r_1 e r_2 de equações $x=5z-2$,

$y=z$ e $z=x-2$, $y=2x-5$. R: $\frac{x}{3}=\frac{z-2}{-1}$, $y=1$ *e* $\frac{x-4}{-1}=\frac{y+3}{4}=\frac{z-4}{-3}$.

580 — Resolva a equação $5x^5+6=0$ usando o método das equações recíprocas. R: $-\sqrt[5]{\frac{6}{5}}$, $\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\cdot\frac{1+\sqrt{5}\pm\sqrt{2(\sqrt{5}-5)}}{4}$, $\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\cdot\frac{1-\sqrt{5}\pm\sqrt{2(\sqrt{5}+5)}}{4}$.

581 — Deduza a equação da circunferência que passa por P_1 e é tangente a r_1 no ponto $P_2(-3,-1)$; P_1 é a intersecção de $3x-2y-3=0$ com a mediana relativa ao vértice A do triângulo definido pelos pontos $A(0,-1)$ $B(1,3)$ $C(5,1)$, e r_1 é paralela ao lado BC do mesmo triângulo. R: $6(x^2+y^2)+19x-22y-25=0$.

582 — Calcule a distância da recta r_1 à recta r_2; r_1 é eixo radical do sistema formado pelas esferas de equações $x^2+y^2+z^2-3x+2y+z-12=0$, $x^2+y^2+z^2+x-z=0$, $x^2+y^2+z^2+2y-6=0$ e r_2 é a recta de equações $x=3z-1$, $y=z+2$. R: $d=1/\sqrt{6}$.

583 — Escreva uma equação de 4.º grau que admita as raízes 1 e 2 e cujo primeiro membro dê de resto -90 e -144 quando dividido por $(x+1)$ e $(x+2)$ respectivamente. R: $(x+1)(x+2)(x+4)(x-4)=0$.

584 — Deduza a equação duma recta que faça com OY um ângulo de 30º e passe à distância 2 do centro da circunferência $x^2+y^2+2x-6=0$. R: $x-\sqrt{3}y-3=0$ *e* $x-\sqrt{3}y+5=0$.

585 — Deduza as equações da perpendicular comum às rectas r_1 e r_2 e que as encontra; r_1 passa em $P_1(1,0,0)$ e é paralela a OZ, r_2 passa em $P_2(1,-1,1)$ e é paralela a $\frac{x+5}{-2}=\frac{z-1}{-3}$, $y=0$. R: $\begin{cases} x=1 \\ z=1. \end{cases}$

586 — Desembarace a equação $2x^5+5x^4-120x^3+12x^2-x+3=0$ do têrmo em x^3. R: $2x^5+25x^4-428x^2-1073x-767=0$ *e* $2x^5-25x^4+822x^2-3043x+3273=0$.

587 — Dadas as rectas r_1 e r_2 deduza a equação duma recta que passe pelo ponto de abcissa 5 da recta r_1 e forme com as rectas dadas um triângulo de área $S=7$; $r_1\equiv 3x-2y-7=0$, $r_2\equiv x+4y-7=0$. R: $2x+y-14=0$ *e* $x-3y+7=0$.

588 — Deduza a equação do plano que passa pelo centro da circunferência Γ e pelo centro da esfera $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ e que é paralelo a OY; Γ é a intersecção da esfera $3(x^2+y^2+z^2)-18x-30y-12z-5=0$ com o plano YOZ. R: $2x+z-2=0$.

589 — Servindo-se da regra dos sinais de Descartes indique quais as possíveis distribuïções das raízes da equação $x^5-4x^3-3x^2+x-2=0$ nos campos positivo, negativo e imaginário. R: *As distribuïções possíveis são:* a) *3 pos., 2 neg., 0 imag.;* b) *3 pos., 0 neg., 2 imag.;* c) *1 pos., 2 neg., 2 imag.;* d) *1 pos., 0 neg., 4 imag.*

590 — Deduza a equação da recta que passa pela intersecção de r_1 e r_2 e é paralela a r_3; $r_1\equiv 3x-y+7=0$, $r_2\equiv 2x-y+5=0$; r_3 é bissectriz de um dos ângulos formados pelas rectas $5x-2y-1=0$ e $2x-5y-13=0$. R: $r'\equiv x+y+1=0$ *ou* $r''\equiv x-y+3=0$.

591 — Deduza a equação da esfera que passa pela origem das coordenadas e forma com a esfera Σ um sistema de plano radical π; Σ é tangente ao plano $2x-y+2z-6=0$ no ponto $P_1(1,-2,1)$ e com o centro no plano $3x-2z+1=0$, π é um plano paralelo ao plano $2x-y-2z+6=0$ à distância 2 do centro de Σ. R: $5(x^2+y^2+z^2)+22x+4y-2z=0$ *e* $7(x^2+y^2+z^2)+2x+26y+26z=0$.

Os exercícios 574 a 591 e respectivas soluções foram-nos cedidos pelo assistente Dr. J. Pais Morais.

I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência, 17-6-1940.

592 — Determinar um polinómio do 5.º grau que satisfaça à relação $P(x)+P'(x)-P''(x)-P'''(x)+P^{IV}(x)-P^{V}(x)=\frac{x^5}{5!}+\frac{x^4}{4!}$. Estudar a equação $P(x)=0$ e determinar as suas raízes reais com uma casa decimal. R: *Seja* $P(x)=a_0x^5+a_1x^4+a_2x^3+a_3x^2+a_4x+a_5$; *será* $P'(x)=5a_0x^4+4a_1x^3+3a_2x^2+2a_3x+a_4$, $-P''(x)=-20a_0x^3-12a_1x^2-6a_2x-2a_3$, $-P'''(x)=-60a_0x^2-24a_1x-6a_2$, $P^{IV}(x)=120a_0x+24a_1$, $-P^{V}(x)=-120a_0$.

De $P+P'-P''-P'''+P^{IV}-P^{V}=\frac{x^5}{5!}+\frac{x^4}{4!}$, *vem*

$$\begin{cases} a_0=1/5! \\ 5a_0+a_1=1/4! \\ -20a_0+4a_1+a_2=0 \\ -60a_0-12a_1+3a_2+a_3=0 \\ 120a_0-24a_1-6a_2+2a_3+4_4=0 \\ -120a_0+24a_1-6a_2-2a_3+a_4+a_5=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_0=1/5! \\ a_1=0 \\ a_2=1/3! \\ a_3=0 \\ a_4=0 \\ a_5=0 \end{cases}$$

e, finalmente, $P(x)=x^5/5!+x^3/3!$. *A equação* $x^5/5!+x^3/3!=0$, *ou, o que é o mesmo, a equação* $x^5+20x^3=0$ *admite, como imediatamente se reconhece, a raiz nula (tripla) e as raizes imaginárias conjugadas* $\pm 2\sqrt{5}i$, *logo escrever-se-á* $P(x)=1/5!\,.\,x^3(x^2+20)=0$.

593 — Estudar e representar geomètricamente a função $y(x)=\frac{e^x}{x-1}$. R: *Estudo da função* $y=\frac{e^x}{x-1}$.

Domínio: *Os intervalos* $(-\infty,1)$ *e* $(1,+\infty)$ *abertos.*

Valores particulares: *Nunca se anula, porque o numerador nunca se anula. Para* $x=0$ *vem* $y=-1$. *Tem-se ainda*
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x-1}=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x-1}=0.$$

Continuïdade: *A função é contínua em todo o domínio de definição. Para* $x=1$ *a função não é definida e tem-se*
$$\lim_{x\to1-0}\frac{e^x}{x-1}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1+0}=+\infty;$$
logo a função admite uma descontinuïdade de 2.ª espécie (salto infinito).

Máximos e mínimos. Crescimento. *Tem-se*
$$y'=\frac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2}=e^x\frac{x-2}{(x-1)^2},\quad y'=0\longleftarrow x=2,$$
$$y''=\frac{e^x(x-1)^2-2e^x(x-2)}{(x-1)^3}=e^x\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^3},\quad y''(2)=e^2$$
e a $x=2$ *corresponde um mínimo para a função:* $y=e$.

Reconhece-se imediatamente que nos intervalos abertos $(-\infty,1)$, $(1,2)$ *e* $(2,+\infty)$ *os sinais de* y' *são respectivamente* $-$, $-$, $+$; *logo, a função é decrescente nos dois primeiros intervalos e crescente no último.*

Inflexões. Sentido da concavidade. $y''=e^x\frac{x^2-4x+5}{(x-1)^3}$, $y''=0\longleftarrow x^2-4x+5=0\longleftarrow x=2\pm i$ *e não há inflexões.*

A segunda derivada é negativa no intervalo aberto $(-\infty, 1)$ *e positiva no intervalo aberto* $(1, +\infty)$, *visto que o seu sinal depende ùnicamente do denominador, pois é sempre* $e^x > 0$ *e* $x^2 - 4x + 5 > 0$.

I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência, 24-6-1940

594 — Utilizar o desenvolvimento em série para o cálculo com um êrro inferior a 10^{-3}, das ordenadas dos pontos de inflexão da curva de equação $y = e^{-2x^2}$. R: *A função* $y = e^{-2x^2}$ *é par, logo basta determinar os pontos de inflexão de abcissa positiva para que todos fiquem determinados.* $y' = -4xe^{-2x^2}$, $y'' = -4e^{-2x^2} + 16x^2 e^{-2x^2} = e^{-2x^2}(16x^2 - x)$, $y'' = 0 \leftarrow 16x^2 - 4 = 0 \leftarrow x = \pm 1/2$, $y''' = (16x^2 - 4)\, 4xe^{-2x^2} + e^{-2x^2} . 32x$, $y'''(1/2) = 16e^{-1/2} \neq 0$ *e* $y'''(-1/2) = -16e^{-1/2} \neq 0$. *Logo, os pontos* $(-1/2, e^{-1/2})$ *e* $(1/2, e^{-1/2})$ *são de inflexão.*

$$e^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4 . 2!} - \frac{1}{8 . 3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n n!} + \dots$$

Tratando-se duma série alterna, é um limite superior do resto o valor absoluto do primeiro têrmo desprezado.

$$e^{-1/2} = 1 - 0{,}5 + 0{,}125 - 0{,}020\overline{8} + 0{,}002\overline{6} - \frac{1}{1840} + \dots$$

No cálculo do 4.º e do 5.º termos cometem-se erros inferiores a 10^{-4}.

Por outro lado se considerarmos apenas os 5 primeiros termos da série, cometeremos um êrro inferior a $\frac{1}{1840}$.

O êrro absoluto será portanto inferior a $\frac{1}{10000} + \frac{1}{10000} + \frac{1}{1840} = \frac{684}{920000} > \frac{1}{1345}$, *logo* $e^{-1/2} \sim 1 - 0{,}5 + 0{,}125 - 0{,}0208 + 0{,}0026 = 0{,}6068$ *é um valor aproximado a menos de* 10^{-3}, *como se pretendia.*

595 — Dada a função $z = x^{\log y} . y^{\log x}$ verificar que

$$\frac{x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}} = 2 \log (x . y) - 1.$$

R: *A função* $y = x^{\log y} . y^{\log x}$ *pode pôr-se sob a forma* $z = e^{2 \log x \log y}$, *donde:* $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x} 2 \log y e^{2 \log x \log y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{y} 2 \log x e^{2 \log x \log y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} 2 \log y e^{2 \log x \log y} + \frac{1}{x^2} 4 \log^2 y e^{2 \log x \log y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{y^2} 2 \log x e^{2 \log x \log y} + \frac{1}{y^2} 4 \log^2 x e^{2 \log x \log y}$. $A = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^{2 \log x \log y}(-\log y + 2 \log^2 y + \log x - 2 \log^2 x)$.

$B = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y} = 2e^{2 \log x \log y}(\log y - \log x)$.

$$\frac{A}{B} = \frac{\log x - \log y + 2 \log^2 y - 2 \log^2 x}{\log y - \log x} = 2 \frac{\log^2 y - \log^2 x}{\log y - \log x} - 1 = 2 \log (xy) - 1$$

596 — Dado o vector $u = aI + bJ + cK$ 1.º) mostrar que os 3 vectores $u_1 = u \wedge I$, $u_2 = u \wedge J$, $u_3 = u \wedge K$ são coplanares e paralelos a um plano perpendidular ao vector u; 2.º) verificar que $u_1 \wedge u_2 + u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_1 = (a + b + c)\, u$; 3.º) determinar os ângulos que formam, dois a dois, os vectores u_1, u_2, u_3. R: $u = aI + bJ + cK$, $u_1 = u \wedge I = cJ - bK$, $u_2 = u \wedge J = -cI + aK$, $u_3 = u \wedge K = bI - aJ$. *São coplanares:* $u_1 \wedge u_2 | u_3 = \begin{vmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & c \end{vmatrix} = 0$.

Qualquer dos três vectores u_1, u_2, u_3 *é perpendicular a* u, *logo os três são paralelos a qualquer plano perpendicular a* u. $u_1 \wedge u_2 = acI + bcJ + c^2K$, $u_2 \wedge u_3 = a^2 I + abJ + acK$, $u_3 \wedge u_1 = abI + b^2J + bcK$; $u_1 \wedge u_2 + u_2 \wedge u_3 + u_3 \wedge u_1 = a(a + b + c)I + b(a + b + c)J + c(a + b + c)K = (a + b + c)\, u$. *Tem-se:*

$$\cos (u_1 \wedge u_2) = \frac{-ab}{\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}}, \quad \operatorname{sen} (u_1 \wedge u_2) = \frac{c\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{b^2 + c^2} \cdot \sqrt{a^2 + c^2}},$$

$\operatorname{tg} (u_1 \wedge u_2) = -\frac{c}{ab} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, *e expressões análogas para os outros ângulos.*

As soluções dos exercícios 592 a 596 são do assistente Dr. A. Sá da Costa.

I. S. T. — Alguns pontos do 2.º ex. de freq., 1940

597 — Discutir e resolver o sistema

$$\begin{cases} (a-1)^2 x + (a^2 - 1) y = (a+1)^2 \\ (2a - 1) x + (a + 1) y = a^2 - 1 \end{cases} \quad (a \text{ parâmetro variável}).$$

R: *A característica da matriz dos coeficientes será* 2 *ou* 1 *conforme fôr* $a \neq 0, \pm 1$, *ou* $a = 0, \pm 1$.

No primeiro caso, $a \neq 0, \pm 1$, *trata-se dum sistema de Cramer, portanto, compatível e determinado e ter-se-á:* $x = y = \frac{(a+1)(a-3)}{a-1}$, *coordenadas do ponto de intersecção das rectas representadas pelas equações do sistema.*

Se $a = 0, -1$, *o sistema é compatível, porque o único característico se anula para qualquer daqueles dois valores de* a $\Delta_c = a(a+1)(a^2 - 5a + 2)$, *e simplesmente indeterminado. As equações do sistema não são distintas e representam a mesma recta* — $x - y - 1 = 0$ *ou* $x = 0$.

Se $a = 1$, *o sistema é incompatível, pois é* $\Delta_c \neq 0$, *e as equações do sistema representam duas rectas paralelas — a recta no infinito do plano* Oxy *e a recta de equação* $x + 2y = 0$.

598 — Achar a excentricidade da cónica $x^2 - 2xy - 5y^2 - 2x + 6y = 0$ (eixos rectangulares).

599 — Sendo M o ponto de encontro do plano $z = 2$ com a recta $r \begin{cases} z = 2x + 1 \\ y + z = 4 \end{cases}$ achar o conjugado harmónico de M, em relação aos pontos A e B de encontro de r com os planos YOZ e XOZ.

600 — Mostrar que a série $\sum_1^\infty \left(\operatorname{tg} \frac{x}{n}\right)^2$ é convergente para todos os valores de x. R: *A série de termo geral* $v_n = \frac{x^2}{n^2}$ *é convergente para todos os valores de* x. *Prova-o a aplicação do critério de Raabe* $\lim_{n \to \infty} n\left(\frac{v_n}{v_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} n\left(\frac{x^2 (n+1)^2}{x^2 . n^2} - 1\right) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^2 + n}{n^2} = 2 > 1$, *qualquer que seja* x, *finito e não nulo.*

Comparemos com esta a série proposta: $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\right)^2 = 1 \neq 0, \infty$; *as duas séries têm o mesmo carácter e a série dada é pois convergente qualquer que seja* x.

601 — Estudar a curva: $y^2+xy-2x^2+y+5x+3=0$ (eixos rectangulares; traçado gráfico aproximado).

602 — Verificar analìticamente que as rectas que unem os meios das arestas opostas do tetraedro $ABCD$ são concorrentes. Achar as coordenadas do ponto de concurso. $A\,(0,0,0)$; $B\,(6,0,0)$; $C\,(4,8,0)$; $D\,(2,2,10)$.

603 — *a)* Mostrar que a série $\sum \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$ para $x=0,1$ é convergente *b)* e calcular a sua soma com 6 decimais exactos. R: a) *A aplicação do critério d'Alembert à série proposta* $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}(2n-1)}{x^{2n-1}(2n+1)}\right|=x^2.\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=x^2$ *diz-nos que é* $(-1,1)$ *o seu intervalo de convergência. A série é convergente para* $x=0,1$. b) *A série escreve-se* $\frac{1}{10}+\frac{1}{3.10^3}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\,10^{2n-1}}+\cdots$

Seja $R_p=\frac{1}{(2p+1)\,10^{2p+1}}+\cdots$. *É uma majorante do resto a série* $10^{-1}+10^{-3}+\cdots+10^{-2p+1}+\cdots$ *cujo resto* $\bar{R}_p$ *tem por soma* $\bar{R}_p=\frac{10^{-2p-1}}{1-10^{-2}}=\frac{10^2}{10^{2p+1}\,(10^2-1)}=\frac{1}{99.10^{2p-1}}$.

Determinemos p *de tal modo que* $\bar{R}_p\leq 10^{-6}\rightarrow\frac{1}{99.10^{2p-1}}\leq\frac{1}{10^6}$, $99.10^{2p-1}\geq 10^6$, $99.10^{2p-7}\geq 1\rightarrow p\geq 3$.

Então, por ser $R_p<\bar{R}_p$, *será* $R_p<10^{-6}$ *para* $p\geq 3$.

Finalmente $S_3=0,1+0,003\,333+0,000\,055=0,103\,388$ *é um valor aproximado a menos de* 10^{-6} *da soma da série proposta.*

604 — Dada a cónica $x^2-2xy-3x+1=0$, determinar as tangentes paralelas à recta $2x+y-1=0$. Fazer o respectivo traçado gráfico.

605 — Achar as equações da recta que encontra as rectas $\begin{cases}x=2z+3\\y=2z+7\end{cases}$ e $\begin{cases}x=2z+1\\y=3z+2\end{cases}$ e é paralela a OX. R: *As equações reduzidas duma recta paralela a* Ox *são* $y=p\,,z=q$. *Para que esta recta encontre as rectas dadas, é necessário e suficiente que* p *e* q *satisfaçam, simultâneamente, a* $p=2q+7$ *e* $p=3q+2$ *donde* $p=17$ *e* $q=5$.

606 — Achar o desenvolvimento da série inteira da função $f(x)=\text{arctg}\,\frac{a+x}{1-ax}$ (a constante) e indicar o respectivo raio de convergência.

607 — Achar o diâmetro da cónica $2x^2-3xy+4y^2-2x-1=0$ perpendicular à recta que passa pelos pontos $A\,(0,4)$ e $B\,(-2,0)$.

608 — Achar a equação do plano que passa pelo ponto $A\,(2,1,-1)$ e é paralelo à recta $x=2z+3$, $y=2$ e perpendicular ao plano $2x+3y-4z+5=0$.

As soluções dos exercícios 597, 600, 605 e 605 são do Dr. Augusto Sá da Costa.

CÁLCULO INFINITESIMAL

F. C. L. — 2.º Exame de freqüência, Maio e Junho de 1940

609 — Deduza as equações das assíntotas da curva $x^3-xy^2-2ay+a^3=0$.

610 — Calcule $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}$.

611 — Calcule a área limitada pelas duas parábolas $y^2-2x=0$ e $x^2-4y=0$.

R: $A=\int_0^{2\sqrt[3]{4}}\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[\frac{1}{3}\,(2x)^{3/2}-\frac{x^3}{12}\right]_0^{2\sqrt[3]{4}}=\frac{8}{3}$.

M. Z.

612 — Determine os pontos singulares da curva $x^4-a^2\,(x^2+y^2)=0$.

613 — Calcule $\int^4\frac{\sqrt{1+x^3}}{x}\,dx$.

614 — Determine a área da superfície gerada pela rotação em tôrno de OX do arco de curva $6xy=x^4+3$ compreendido entre as rectas $x=1$ e $x=2$.

615 — Determine os pontos de inflexão da curva $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$ e as tangentes nesses pontos. R: *Tem-se* $y'=\frac{-2a^3x}{(x^2+a^2)^2}$, $y''=\frac{6a^3x^2-2a^5}{(x^2+a^2)^3}$, $y'''=\frac{12a^3x(x^2+a^2)-6x(6a^3x^2-2a^5)}{(x^2+a^2)^4}$. *As raízes de* $y''=0$ *ou da equação* $3x^2-a^2=0$ *são* $a/\sqrt{3}$ *e* $-a/\sqrt{3}$, *valores que não anulam* y'''. *Os pontos de inflexão da curva, que tem o eixo das ordenadas por eixo de simetria, são* $(a/\sqrt{3},3a/4)$ *e* $(-a/\sqrt{3},3a/4)$ *e as tangentes pedidas, notando que* $y'_{a/\sqrt{3}}=-9/8\sqrt{3}$ *e* $y'_{-a/\sqrt{3}}=9/8\sqrt{3}$, *têm por equações* $Y-3a/4=-9/8\sqrt{3}\,(X-a/\sqrt{3})$ *e* $Y-3a/4=9/8\sqrt{3}\,(X+a/\sqrt{3})$.

M. Z.

616 — Calcule $I=\int\frac{\cos^2 x}{\cos x-\text{sen}\,x}\,dx$. R: *Fazendo* $\text{tg}\,\frac{x}{2}=t$ *donde* $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\text{sen}\,x=\frac{2t}{1+t^2}$ *e* $dx=\frac{2dt}{1+t^2}$ *vem* $I=\int\frac{2\,(1-t^2)^2\,dt}{(1-t^2-2t)\,(1+t^2)^2}=A\log\left(t+1-\sqrt{2}\right)+B\log\left(t+1+\sqrt{2}\right)+C\log\,(t^2+1)+D\,\text{arc tg}+\frac{Et+F}{t^2+1}+\text{const.}$

M. Z.

617 — Determine o volume do sólido compreendido entre os planos $x=0$ e $x=6$, limitado pela superfície gerada pela rotação em tôrno de OX da curva: $\begin{cases}(x-8)\,y^2=2x\,(x-6)\\z=0.\end{cases}$

R: $V=\pi\int_0^6 y^2\,dx=2\pi\int_0^6\frac{x(x-6)}{x-8}\,dx=2\pi\int_0^6\left(x+2-\frac{16}{8-x}\right)dx=$ $=2\pi\left[x^2/2+2x+16\log\,(8-x)\right]_0^6=2\pi(18+12+16\log 2-16\log 8)=$ $=2\pi\,(30-16\log 4)$.

M. Z.

I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência, 17-6-1940.

618 — Determinar as curvas planas para as quais o raio de curvatura é inversamente proporcional à abcissa.

619 — Integrar a equação $y^{IV}+2k^2y''+k^4y=x^2+1$ (k constante).

620 — Determinar a evoluta e o raio de curvatura da curva $y=3e^{x/3}$.

621 — Determinar os máximos e mínimos da função $u=z-x-y$ sôbre a esfera $x^2+y^2+z^2=4$. R: *Trata-se dum problema de máximos e mínimos condicionados, fácil, de resto, de reduzir por eliminação a um problema de duas variáveis independentes.*

As soluções do sistema: $x^2+y^2+z^2=4$, $x-y=0$ *e* $x-z=0$ *dão-nos os pontos de estacionaridade da função* u *que são* $x=y=z=\pm 2/\sqrt{3}$.

M. Z.

I. S. C. E. F. — 2.º Exame de freqüência, 24-6-1940

622 — Integrar a equação $2y\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\left[2+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]$.

623 — Escrever as equações do plano osculador e do plano normal da curva $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ x^2+z^2=9 \end{cases}$.

624 — Calcular o volume limitado pela superfície $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{4}=2z$ e pelo plano $z=3$. R: *A superfície dada é um parabolóide elíptico tendo* OZ *por eixo e tangente na origem ao plano* $z=0$. *O volume é medido por* $V=\iint_A(3-x^2/4-y^2/8)\,dxdy$, *sendo* A *a área limitada pela elipse* $x^2/12+y^2/24=1$, *projecção de* $x^2/2+y^2/4=2z$, $z=3$ *sôbre* OXY. *Façamos a mudança de variáveis* $x=2X$, $y=\sqrt{8}Y$; *atendendo a que* $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(X,Y)}\right|=4\sqrt{2}$, *temos* $V=4\sqrt{2}\iint_{A'}(3-X^2-Y^2)\,dXdY$, *sendo* A′, *transformado de* A, *o círculo limitado por* $X^2+Y^2=3$; *introduzindo agora coordenadas polares, vem, finalmente,*

$$V=4\sqrt{2}\iint_{A'}(3-\rho^2)\rho\,d\rho\,d\theta=4\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}(3\rho-\rho^3)\,d\rho=18\sqrt{2}\pi.$$

M. Z.

625 — Mostrar que a equação homogénea $Pdx+Qdy=0$ admite o factor integrante $\lambda=\dfrac{1}{Px+Qy}$. R: *Por hipótese* $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ *e* P *e* Q *homogéneas do mesmo grau; é preciso provar que* $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{P}{Px+Qy}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{Q}{Px+Qy}\right)$, *o que é fácil escrevendo as expressões destas derivadas e notando que é* $mP=\dfrac{\partial P}{\partial x}x+\dfrac{\partial P}{\partial y}y$ *e* $mQ=\dfrac{\partial Q}{\partial x}x+\dfrac{\partial Q}{\partial y}y$ *(teorema de Euler).*

M. Z.

I. S. T. — 2º. exame de freqüência, 1940

626 — Integrar a equação $y''-7y'+10y=2\operatorname{sen}2x$. R: *Trata-se de integrar uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes com segundo membro. A equação homogénea correspondente* $y''-7y'+10y=0$ *tem por equação característica* $\alpha^2-7\alpha+10=0$ *de raízes* 2 *e* 5 *e admite, portanto, o integral geral* $C_1e^{2x}+C_2e^{5x}$. *Atendendo à forma especial do 2.º membro é possível determinar um integral particular da equação completa que, somado ao integral geral da homogénea dá o integral geral da equação dada. O integral particular é da forma* $Y=a\operatorname{sen}2x+b\cos 2x$ *e para determinar as constantes* a *e* b *basta substituir* Y, Y' *e* Y'' *na equação proposta e identificar. Obtem-se assim* $Y''-7Y'-10Y=(6a+14b)\operatorname{sen}2x+(6b-14a)\cos 2x=2\operatorname{sen}2x$, *e, identificando:* $6a+14b=2$, $3b-7a=0$, *donde* $a=3/58$, $b=7/58$.

O integral geral da equação dada é pois: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{5x}+\dfrac{3}{58}\operatorname{sen}2x+\dfrac{7}{58}\cos 2x$.

M. Z.

627 — Determinar as curvas planas para as quais a área do trapesóide limitado pela curva, pelo eixo dos xx e por duas ordenadas, é proporcional ao comprimento de arco limitado pelas mesmas ordenadas.

628 — Calcular o integral duplo $\iint_A x\,dx\,dy$ sendo A a área limitada pelas rectas $y=0$, $y=x$ e $2x+y=2$. R: A *é a área limitada pelo triângulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$ *e* $(2/3,2/3)$. *Tem-se:* $I=\iint_A x\,dx\,dy=\int_0^{2/3}dy\int_y^{1-\frac{y}{2}}x\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2/3}\left[\left(1-\frac{y}{2}\right)^2-y^2\right]dy=\frac{1}{2}\int_0^{2/3}\left(1-y-\frac{3}{4}y^2\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left[y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{4}\right]_0^{2/3}=\frac{5}{27}.$$

A integração por outra ordem exige a decomposição de A *em* A_1 *e* A_2 *feita pela recta* $x=2/3$ *e tem-se neste caso:*

$$\iint_{A_1}x\,dx\,dy=\int_0^{2/3}dx\int_0^x x\,dy=\int_0^{2/3}x^2\,dx=\frac{2^3}{3^4},\quad \iint_{A_2}x\,dx\,dy=$$

$$=\int_{2/3}^1 dx\int_0^{2-2x}x\,dy=2\int_{2/3}^1(x-x^2)\,dx=\left[x^2-\frac{2}{3}x^3\right]_{2/3}^1=\frac{7}{3^4}$$ *donde*

$$I=\frac{2^3+7}{3^4}=\frac{5}{27}.$$

M. Z.

629 — Determinar os pontos de inflexão da curva $x^4-9x^2+27y=0$. R: *Tem-se* $y=-\dfrac{1}{27}(x^4-9x^2)$, $y'=-\dfrac{1}{27}(4x^3-18x)$, $y''=-\dfrac{1}{9}(4x^2-6)$, $y'''=-\dfrac{8}{9}x$. *A equação* $y''=0$ *ou* $2x^2-3=0$ *tem as raízes* $\pm\sqrt{6}/2$, *valores para os quais* $y'''_{\sqrt{6}/2}<0$ *e* $y'''_{-\sqrt{6}/2}>0$. *Os pontos* $(\sqrt{6}/2,5/12)$ *e* $(-\sqrt{6}/2,5/12)$ *são pontos de inflexão da curva dada.*

M. Z.

I. S. T. — 2.º Exame de freqüência, 1940

630 — Determinar os pontos múltiplos da curva $x^4-2y^3-3y^2-2x^2+1=0$.

631 — Dada a curva $\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ \operatorname{sen}x=\dfrac{y}{2} \end{cases}$ escrever as suas equações paramétricas em função do arco s e determinar as coordenadas do centro de curvatura no ponto $\left(\dfrac{\pi}{2},2,0\right)$.

632 — Determinar para a equação $p^2x-2py+4x=0$ o integral geral e as soluções singulares, se as houver.

633 — Determinar as curvas planas para as quais o comprimento de arco AD, contado a partir duma certa origem A, é proporcional ao coeficieute angular da tangente em P.

MECÂNICA RACIONAL

F. C. P. — 1.º Exame de freqüência, 1940

634 — Um ponto P descreve uma elipse de semi-eixos a e b de tal modo que se verifica a lei das áreas relativamente ao centro O da curva.

a) Calcular as componentes da aceleração de P segundo os eixos da trajectória em função das coordenadas cartesianas de P referidas a estes eixos.

b) Calcular o valor numérico desta aceleração quando P se encontra num dos vértices da curva sôbre o eixo menor. Dados numéricos: $a=4m$; $b=2m$; velocidade de P à sua passagem por uma das extremidades do eixo maior da elipse $v=30\,m/min$.

635 — É dada num plano π uma circunferência C de raio r e centro O. Uma régua AB assente em π está animada duma translacção uniforme rectilínea de velocidade V formando um ângulo de 60^o com AB. Supondo que são P e Q os pontos de intersecção de AB com C calcular:

c) As velocidades de P sôbre a circunferência e sôbre a régua AB no momento em que a distância de O a AB é $60\,cm$ $(r=1m$; $V=5\,cm/min)$.

d) A velocidade de aproximação (ou de afastamento) dos pontos P e Q no instante considerado.

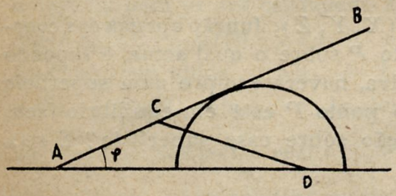
636 — Um disco circular C de raio r rola sem resvalar sôbre uma recta fixa Δ de modo que a velocidade do seu centro, O neste movimento é V constante. Ao mesmo tempo o plano π do disco gira em volta de Δ com velocidade angular ω também constante.

e) Qual é o eixo do movimento helicoidal tangente ao movimento que resulta dos dois movimentos acima definidos e calcular o passo do movimento?

f) Qual é a superfície axoide móvel?

g) Quanto vale em função de V e de ω a aceleração do ponto A da periferia do disco diametralmente oposto ao ponto I de contacto de C com Δ?

637 — Duas barras rectilíneas AB, CD articuladas em C sôbre AB movem-se sôbre um plano π de tal modo que A e D percorrem uma recta Ox emquanto que AB se mantém constantemente tangente a uma circunferência de raio R centrada sôbre Ox.



h) Sabendo que a velocidade de A é $4\,m/min$ e que a sua aceleração é constantemente nula, traçar, para o instante em que AB forma um ângulo de 30^o com Ox, os diagramas das velocidades e das acelerações e deduzir dêles os valores da aceleração de D e da aceleração angular de CD.

Dados numéricos $AB=6m$; $CD=3m$; $AC=2m$; $R=2m$. (*Indicação*: para obter a direcção da aceleração de C procurar gràficamente a tangente ao hodógrafo do movimento dêste ponto pelo método exposto no curso para a cissoide).

638 — Em que casos existe num dado instante num sólido em movimento mais de um ponto sem aceleração.

Soluções:

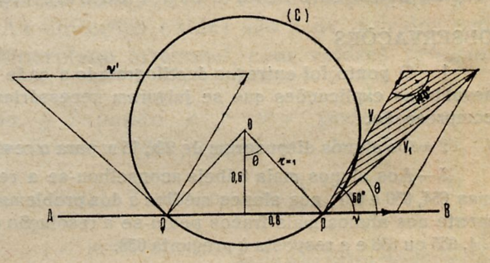
634 — *a) Equação da elipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. *Lei das áreas* $xy'-yx'=C$ *(movimento no sentido de* Ox *para* Oy $C>0$).

Temos sucessivamente $\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}=0$, $y'=-\frac{b^2x}{a^2y}x'$, $\left(-\frac{b^2x^2}{a^2y}-y\right)x'=C$, $x'=-\frac{Cy}{b^2}$, $y'=+\frac{Cx}{a^2}$; *donde* $x''=-\frac{C}{b^2}\cdot y'=-\frac{C^2}{a^2b^2}\cdot x$, $y''=-\frac{C^2}{a^2b^2}\cdot y$.

A aceleração (central) é proporcional à distância.

b) Para a posição considerada é $P(0,b)$ *logo* $x''=0$, $y''=-\frac{C^2}{a^2b^2}\cdot b=-\frac{C^2}{a^2b}$ (dimens. $\lambda\tau^{-2}$). *Mas* $C=a.v\,\text{sen}(90^o)=120\,m^2/min$, *logo* $|a_P|=\left|\frac{120^2}{16\times 2}\right|=450\,m/min^2$.

635 — *c) Temos* $\binom{P}{AB}+\binom{AB}{C}=\binom{P}{C}$ *e as respectivas velocidades:* v *dirigida segundo* AB, V *dada e* V_1 *tangente a* C. *Como é* $\mathbf{V_1=V+v}$ V_1 *e* v *ficam determinadas, conhecida* V.

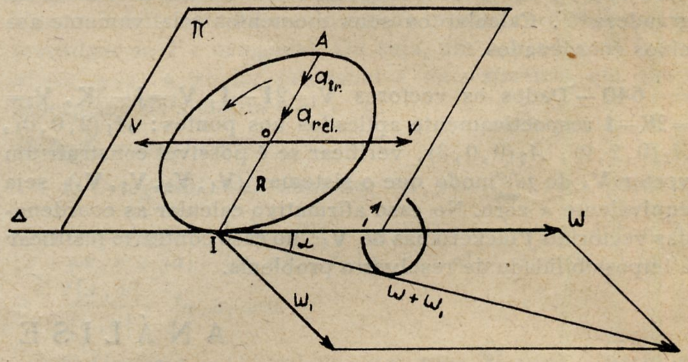


E da figura tira-se:

$$\frac{v}{\text{sen}(60^o-\theta)}=\frac{V}{\text{sen}\,\theta}=\frac{V_1}{\text{sen}\,120^o}\quad \textit{donde:}\quad v=V\cdot\frac{\text{sen}(60^o-\theta)}{\text{sen}\,\theta}=$$

$$=5\,\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0{,}6-\frac{1}{2}\,0{,}8}{0{,}8}=0{,}75\,\text{cm/min};\quad V_1=V\cdot\frac{\text{sen}\,\theta}{\text{sen}\,120^o}=4\,\text{cm/min}.$$

d) A velocidade de afastamento de Q *e* P *é* $\mathbf{v'}-\mathbf{v}$, *isto é, tem para grandeza a* soma *das grandezas das velocidades* v' *e* v. *correspondentes à posição considerada.*



636 — *e) Como o ponto* I *tem velocidade nula nos dois movimentos considerados, o movimento resultante é tangente a uma rotação em volta do eixo* $\mathbf{w}+\mathbf{w_1}$ *onde* $\mathbf{w_1}$ *é normal a* π *e tem para grandeza* $\frac{V}{R}$. *O passo do movimento é portanto nulo.*

f) Por ser constante o ângulo α e por $\mathbf{w}+\mathbf{w}_1$, *se projectar ortogonalmente em π tangencialmente à circunferência que limita o disco, a superficie axoide móvel é um hiperboloide regrado de revolução.*

g) A aceleração de A *pode calcular-se pela aplicação do teorema de Coriolis. O movimento relativo será* $\begin{pmatrix} C \\ \pi \end{pmatrix}$, *o de transporte* $\begin{pmatrix} \pi \\ \text{Obs.} \end{pmatrix}$ *(rotação* $\mathbf{w}$*) e finalmente o movimento absoluto é o que resulta dêstes e aquêle para o qual se pretende conhecer a aceleração de* A.

Temos pois: $a_{rel}=R\omega_1^2=R\dfrac{V^2}{R^2}=\dfrac{V^2}{R}$ *(centro das acelerações em* O); $a_{tr}=2R\omega^2$, $a_{Cor}=2\omega\wedge\mathbf{v}_r=0$ *por* $\mathbf{v}_r$ *ter suporte paralelo ao de ω (rot. de transporte). Será então* $a_A=\dfrac{V^2}{R}+2R\omega^2$.

637 — *h)* Resolução a publicar no próximo número.

638 — *A resposta a esta pregunta encontra-se por exemplo em Gaston Julia «Cours de Cinématique de la Faculté des Sciences de Paris». págs. 44 e 45.* O assunto foi tratado na aula teórica como êste autor o expõe no livro citado.

OBSERVAÇÕES

1 — O ponto foi entregue dactilografado a cada aluno, dando-se em seguida as explicações que se julgaram necessárias para a sua perfeita compreensão.

2 — Os alunos dispuzeram de 2 h, 15 m para o resolver.

3 — Aos alunos mais hábeis aconselhou-se a resolução dos problemas 634, 636 e 637; aos alunos médios a dos problemas 634, 635 e 636; finalmente aos alunos mais fracos pediu-se a resolução de um dos problemas 634, 635 ou 636 e a resposta à pregunta 638.

4 — Embora durante as aulas práticas se procure incutir no espirito dos alunos a idéia de que o emprêgo dos métodos gráficos exige grande perfeição nos traçados, no exame, devido à escassez do tempo, consentiu-se que os alunos traçassem as perpendiculares à vista ou com o transferidor.

— Os problemas 634 a 638 e respectivas soluções foram-nos cedidos pelo Prof. Doutor Rodrigo Sarmento de Beires.

F. C. P. — Exercícios de revisão, Dezembro de 1938

639 — Sôbre a recta representada pelas equações $x-y+z=1$, $x+y-z=2$ está localizado um vector deslizante de grandeza 2. Calcular os seus momentos relativamente aos eixos coordenados.

640 — Dados os vectores $\mathbf{V}_1=2\mathbf{I}-\mathbf{J}$, $\mathbf{V}_2=\mathbf{J}-3\mathbf{K}$, $\mathbf{V}_3=2\mathbf{K}-\mathbf{I}$ respectivamente aplicados nos pontos: $A_1(2,0,0)$, $A_2(0,2,0)$, $A_3(0,0,3)$, verificar se é possível construir um vector $\mathbf{V}_4$ de tal modo que o sistema $(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3, \mathbf{V}_4)$ seja equivalente a zero. No caso afirmativo calcular as coordenadas vectoriais Pluckerianas de $\mathbf{V}_4$; no caso contrário justificar a impossibilidade de resolver o problema.

641 — Desenhar três vectores paralelos $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2, \mathbf{V}_3$ de valores algébricos respectivamente iguais a $-1, 4, -3$ relativamente a um vector unitário $\mathbf{U}$. As distâncias dos suportes de $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_2$ e de $\mathbf{V}_2$ e $\mathbf{V}_3$ são: 2 e 3 cm. Construir um funicular dêstes vectores e da forma do funicular deduzir se o sistema é particularmente reductível. Dizer, além disso, onde deveria ser aplicado o vector $\mathbf{V}_2$ para o sistema ser equivalente a zero. (Supõe-se que as posições dos vectores $\mathbf{V}_1$ e $\mathbf{V}_3$ se conservam).

642 — Um sistema de vectores deslizantes tem para elementos de redução na origem das coordenadas os seguintes vectores: $\mathbf{V}=2\mathbf{I}-2\mathbf{J}$, $\mathfrak{M}_0=-\mathbf{I}+\mathbf{J}$. Escrever as equações do eixo central do sistema e determinar um torsor que lhe seja equivalente, escrevendo a equação do plano do binário e indicando a grandeza dos vectores que o formam e a sua distância.

643 — Dado um campo de momentos dizer se existe sempre algum ponto do espaço onde o vector momento seja paralelo a uma recta dada. Justificar a resposta.

644 — Dado um sistema de vectores deslizantes existirão sempre duas rectas conjugadas do sistema perpendiculares entre si? Justificar a resposta.

645 — Calcular a abscissa do centroide da área plana limitada pela sinusoide $y=\operatorname{sen} x$ e pela recta $y=\dfrac{3}{5\pi}x$, quando a função associada é $\mu=1$. Indicar também os limites do integral que é ainda necessário calcular para obter a ordenada do centroide considerado.

Os exercicios 639 a 645 foram-nos cedidos pelo Prof. Doutor Rodrigo Sarmento de Beires.

I. S. T. — 2.º exame de freqüência, 1940

646 — Dado o sistema material

$$m_1=2\begin{cases} x_1=0 \\ y_1=2 \\ z_1=3 \end{cases} \qquad m_2=1\begin{cases} x_2=1 \\ y_2=-2 \\ z_2=2 \end{cases} \qquad m_3=4\begin{cases} x_3=-1 \\ y_3=2 \\ z_3=0 \end{cases}$$

escrever a equação do elipsoide de inércia em relação à origem e averiguar se algum dos eixos coordenados é eixo principal de inércia nalgum dos seus pontos.

647 — Dada a fôrça $F(X, Y, Z)$, função apenas das coordenadas (x, y, z) do ponto P sôbre o qual actua, e supondo que ela não é conservativa, haverá sempre uma superfície $f(x, y, z)=0$, tal que o ponto P está em equilíbrio (sem atrito) em qualquer posição sôbre essa superfície? E se a fôrça fôr conservativa?

648 — Determinar a lei de fôrças paralelas a Oy, sob cuja acção um fio flexível e inextensível toma, como figura de equilíbrio, a da curva $y=x^3+1$.

ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — 2.º Exame de freqüência, 22 de Maio de 1940

649 — Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} \frac{z\,dz}{(z^4-2z^3+3z^2-4z+2)(z-3)}$ sendo γ uma circunferência de raio 2 e centro na origem.

650 — Determine o integral geral da equação $x^2y^2y''+2x^2yy'^2-xy^2y'-y^3=0$. (Diferencial exacta).

651 — Determine o integral geral da equação:

$$(2x-3)^3y'''+2(2x-3)^2y''+2(2x-3)y'-4y=3\cos[\log(2x-3)^2].$$

PROBLEMAS DIVERSOS

PROBLEMA PROPOSTO

652 — Sejam $Q_1=[\eta_0, \eta_1, \cdots \eta_n]$ e $Q_2=[\xi_0, \xi_1, \cdots \xi_n]$ dois pontos do espaço projectivo de n dimensões e

$$a_0\,\xi_0+a_1\,\xi_1+\cdots+a_n\,\xi_n=0$$

a equação de um hiperplano π.

Se Q_0 e Q_1 não pertencerem a π, é sempre possível determinar uma linha (stetiger Weg) — $\zeta_i=f_i(t)$, f_i função contínua — que passe pelos dois pontos e não intersecte o hiperplano π.

Nota—Escrever $f_i(t)=(1-t)\eta_i+t\xi_i$ [1].

Comparar êste resultado com o que se passa no espaço não-projectivo.

[1] Schreier-Sperner — «Analytische Geometrie» — II — pag. 142.

R. L. G.

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PROPOSTOS NOS N.^os 4 e 5

431 — 1) *Convenções.*—Designarei por $e_1\ e_2 \cdots e_n$ os vectores que suporei sempre ortogonais unitários, de forma á que, sendo $x=x^i e_i$, $y=y^i e_i$. Seja $x^i=x_i=x \mid e_i$.

2) *A função* $\mu(x)$. — A generalidade da função $\mu(x)$ tem de ser limitada por T dever ser um operador linear: $T(x+y)=$ $=Tx+Ty$, $T(\lambda x)=\lambda Tx$ o que dá $\mu(x+y)=\mu(x)+\mu(y)$, $\mu(\lambda x)=\lambda\mu(x)$ ou finalmente $\mu(x)=x^i\mu_i$ (em que $x=x^i e_i$, $\mu_i=\mu(e_i)$).

3) *A transformação* $Tx=x+\mu a$. — Sendo $x=x^i e_i$, $a=a^i e_i$, $\mu(x)=x^i\mu_i$ vem $x'=Tx=x^i e_i+x^k\mu_k a^i e_i=e_i(x^i+x^k\mu_k a^i)=$ $=e^i x'^i$ em que $x'^i=x^i+x^k\mu_k a^i=\alpha^i_k x^k$ em que $\alpha^i_k=\delta^i_k+\mu_k a^i$.

4) *T ortogonal.* (Definiremos produtos internos $x \mid y=x^i y^i$). — Supondo que a não é isótropo, tornaremos a unitário multiplicando μ por um factor conveniente. Escolhemos o sistema coordenado de forma que $e_n=a$, o que dá $a^k=\delta^k_n$. A condição $\alpha^i_k\alpha^i_l=\delta_{kl}$ escreve-se $(\delta^i_k+\mu_k\delta^i_n)(\delta^i_l+\mu_l\delta^i_n)=\delta_{kl}$ ou, notando que $\delta^i_k\delta^i_l=\delta_{kl}$, $\delta^i_k[\mu_k\delta^i_l+\mu_l\delta^i_k+\delta^i_n\mu_k\mu_l]=0$ ou $\mu_k\delta^n_l+\mu_l\delta^n_k+$ $+\mu_k\mu_l=0$ fazendo $k\neq n$, $l\neq n$ vem $\mu_k\mu_l=0$ $k=1\cdots n-1$, fazendo $k=l=n$ vem $2\mu_n+\mu_n^2=0$ desprezando a solução sem interêsse $\mu_n=0$, temos $\mu_n=-2$, o que dá $\mu(x)=-2(x \mid a)$ [a unitário]. Esta expressão, tendo o carácter tensorial dum invariante, é válida com quaisquer coordenadas e é fácil ver que o operador $Tx=x-2(x \mid a).a$ é ortogonal, pois muda o sinal da componente segundo a e conserva as outras. a é direcção unida com valor próprio -1, e as $n-1$, direcções do hiperplano perpendicular a a são unidas com o valor próprio $+1$.

5) *T unitário* (produto interno $x \mid y=x^i\bar{y}^i$); tomando ainda a unitário para vector cordenado e_n, a condição $\alpha^i_k\bar{\alpha}^i_l=\delta_{kl}$ escreve-se $(\delta^i_k+\mu_k\delta^i_n)(\delta^i_l+\bar{\mu}_l\delta^i_n)=0$, $\mu_k\delta^n_l+\bar{\mu}_l\delta^n_k+\mu_k\bar{\mu}_l=0$; fazendo $k=l\neq n$ vem ainda $\mu_k=0$, $k=1,\cdots n-1$ e para $k=l=n$, $\mu_n+\bar{\mu}_n+\mu_n\bar{\mu}_n=0$; seja $\mu_n=r+is$ vem $2r+r^2+s^2=0$ ou, introduzindo um parâmetro real t $\mu_n=-\dfrac{2}{(1+t^2)}(1+it)$ ou, passando para coordenadas gerais (a unitário) $\mu(x)=$ $=-\dfrac{2}{(1+t^2)}(1+it)(x \mid a)$; para $t=0$ vem a solução real já obtida para o caso de T ser ortogonal.

6) *T de projecção.* — Suponhamos que T anula as componentes segundo os vectores coordenados $e_1\cdots e_p$ e conserva os componentes segundo $e_{p+1}\cdots e_n$. Será então $\alpha^i_k=0$, $i=1\cdots p$, $\alpha^i_k=\delta^i_k$, $i=p+1\cdots n$ ou $\begin{cases}\delta^i_k+\mu_k a^i=0 & i=1\cdots p\\ \delta^i_k+\mu_k a^i=\delta^i_k & i=p+1\cdots n\end{cases}$ ou $\begin{cases}\mu_k a^i=-\delta^i_k & i=1\cdots p\\ \mu_k a^i=0 & i=p+1,\cdots n\end{cases}$ não sendo os μ_i todos nulos serão todos os a^i, para $i=p+1\cdots n$, e no caso de serem nulos todos os μ^i menos um μ_l, poderá ser $a^l\neq 0$, ou $a^l=-\dfrac{1}{\mu^l}$ (seria fácil de ver geomètricamente que a soma a x dum vector de direcção fixa não poderia anular uma variedade de E_n a mais de 1 dimensão). A tradução disto em notação de produto interno é $\mu_l=-\dfrac{1}{\sqrt{(a \mid a)}}$, $\mu(x)=-\dfrac{x \mid a}{a \mid a}$ é então, supondo de novo a unitário $Tx=x-(x \mid a)a$, que é evidentemente uma projecção ao longo de a sôbre o hiperplano perpendicular a a. As direcções unidas são a de a (valor próprio 0) e as do hiperplano ortogonal, com valores próprios iguais a 1.

7) *T simetria.* — Supondo $x \mid y=x^i y^i$ podemos tomar para $e_1\cdots e_{n-1}$ as direcções do hiperplano de simetria, e para e_n a direcção normal. Terá de ser $\begin{cases}Tx \mid e_i=x \mid e_i\\ Tx \mid e_n=-x \mid e_n\end{cases}$, $\begin{cases}x^i+x^k\mu_k a^i=x^i\\ x^n+x^k\mu_k a^n=-x^n\end{cases}$, $\begin{cases}x^k\mu_k a^i=0\\ x^k\mu_k a^n=-2x^n\end{cases}$, dada a arbitrariedade dos x^k terá de ser $a^i=0$, $i=1\cdots n-1$, $x^k\mu_k=-\dfrac{2x^n}{a^n}$ em forma tensorial $\mu(x)=-\dfrac{2(x \mid a)}{a \mid a}$. Isto prova que a tem de ter comprimento não nulo, pois numa direcção isótropa não pode ser tomada para direccão cordenada. Supondo agora que a é unitário, vem $\mu(x)=-2(x \mid a)$, $Tx=x-2(x \mid a)a$ (igualdade com carácter tensorial). As direcções unidas são as de a (valor próprio -1) e as direcções ortogonais a a (valor próprio $+1$). Vê-se ainda que se foi conduzido ao mesmo resultado que ao investigar se T é ortogonal. Ou seja, um operador da forma $x'=x+\mu(x).a$ se for ortogonal é uma simetria, em que o hiperplano de simetria é $a \mid y=0$.

Mário de Alenquer

Dedução mais simples:

4) *Ortogonal.* — O símbolo $[x,y]=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, permite-nos escrever $[Tx, Tx]=[T'Tx, x]=[x,x]$ ou $[x+\mu a, x+\mu a]=[x,x]$, $2\mu[a,x]+\mu^2[a,a]=0$, $\mu(x)=$ $=-\dfrac{2[a,x]}{[a,a]}$, $[a,a]\neq 0$.

5) *Unitária.* — O símbolo $(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\bar{x}_i\bar{y}_i$, permite-nos escrever $(Tx, Tx)=(\bar{T}'Tx, x)=(x,x)$ ou $(x+\mu a, x+\mu a)=(x,x)$, $[(a,a)=1]$, $\bar{\mu}(a,x)+\mu\overline{(a,x)}+\mu\bar{\mu}=0$ $[\mu+(a,x)][\bar{\mu}+\overline{(a,x)}]-|(a,x)|^2=0$, $\mu+(a,x)=e^{i\theta}(a,x)$, $\mu(x)=(e^{i\theta}-1).(a,x)$. E o mesmo símbolo leva imediata-

mente à forma de μ para os outros operadores — *projecção* e *simetria.*

NOTA — As deduções do autor estão bem; mas ressentem-se da circunstância de não pertencerem ao domínio natural dos respectivos problemas — problemas de operadores em um espaço real ou complexo onde se definiu prèviamente um *produto interno.*

R. L. G.

548 — *a)* A transformação $\bar{x}=Tx$ definida por $\bar{x}^i=l^i_k\,x^k$ representará uma rotação em tôrno da origem se forem invariantes: α) a distância de dois pontos: $d(\bar{x}\,\bar{y})=d(x\,y)$, β) a orientação de um triedro.

A condição β) é satisfeita se fôr positivo o determinante $|l^i_k|$. A primeira condição exprime-se: $\sum_i(\bar{x}^i-\bar{y}^i)^2=\sum_i(x^i-y^i)^2$ ora $\sum_i(\bar{x}^i-\bar{y}^i)^2=(\bar{x}^i-\bar{y}^i)(\bar{x}^i-\bar{y}^i)=(l^i_k\,x^k-l^i_h\,y^h)(l^i_u\,x^u-l^i_v\,y^v)=$ $=l^i_k\,l^i_u\,x^k\,x^u+l^i_h\,l^i_v\,y^h\,y^v-2l^i_h\,l^i_v\,x^h\,y^v$ e $\sum_i(x^i-y^i)^2=\sum_i(x^i)^2+$ $+\sum_i(y^i)^2-2\sum_i x^i\,y^i$ e identificando as duas expressões vem $l^i_h\,l^i_u=\delta_{kv}$ como condição necessária e suficiente, acrescentando-lhe $|l^i_k|>0$. Estas duas condições caracterizam a matriz ortogonal de determinante $+1$.

b) Seja $w=c^i\,e_i$ o vector unitário do eixo das rotações. Qualquer vector $P-O$ tem uma componente segundo w e uma componente perpendicular a w: $P-O=[(P-O)\,|\,w]\,w+$ $+\{(P-O)-[(P-O)\,|\,w]\,w\}=(Q-O)+(R-O)$. A rotação deixa invariante $Q-O$; $R-O$ sendo perpendicular a w é transformado em $\bar{R}-O=(R-O)\cos\theta+[w\wedge(R-O)]\,\mathrm{sen}\,\theta$, donde $\bar{P}-O=\bar{Q}-O+\bar{R}-O=(Q-O)+(R-O)\cos\theta+[w\wedge(R-O)]\,\mathrm{sen}\,\theta=$ $=[(P-O)\,|\,w]\,w+\{(P-O)-[(P-O)\,|\,w]\,w\}\cos\theta+w\wedge\{(P-O)-$ $-[(P-O)\,|\,w]\,w\}\,\mathrm{sen}\,\theta=[(P-O)\,|\,w]\,(1-\cos\theta)\,w+(P-O)\cos\theta+$ $+w\wedge(P-O)\,\mathrm{sen}\,\theta$. Tomando coordenadas $\bar{P}-O=(x^i\,c_i)(1-$ $-\cos\theta)\,.\,c^k\,e_k+x^k\,e_k\cos\theta+e^{..k}_{ji}\,c^j\,x^i\,e_k\,\mathrm{sen}\,\theta=e_k\,\{x^i\,[c_i\,c^k(1-\cos\theta)+$ $+\delta^k_i\cos\theta+e^{..k}_{ji}\,c^j\,\mathrm{sen}\,\theta]\}$, ou $l^k_i=c_i\,c^k(1-\cos\theta)+\delta^k_i\cos\theta+e^{..k}_{ji}\,c^j\,\mathrm{sen}\,\theta$, que é a expressão pedida.

c) Fazendo $i=k$ vem (sem somação) $l^i_i=c_i\,c^i(1-\cos\theta)+\cos\theta$ ou em coordenadas cartesianas ortogonais $l^i_i=(c_i)^2(1-\cos\theta)+$ $+\cos\theta$, donde $c_i^2=\dfrac{l^i_i-\cos\theta}{1-\cos\theta}$ e somando em i os valores de l^i_i e notando que $\sum(c_i)^2=1$ vem $\sum_i l^i_i=1+2\cos\theta$. Vê-se imediatamente que $B=1+\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\,w\wedge$ em que w é o vector $(c_1\,c_2\,c_3)$. É também $B'=1-\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\,w\wedge$. A igualdade $\bar{x}=(B')^{-1}\,Bx$ escreve-se $B'\,\bar{x}=Bx$, ou $\bar{x}-\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\,w\wedge\bar{x}=x+\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\,w\wedge x$, ou

(1) $\bar{x}-x=\mathrm{tg}\,\dfrac{\theta}{2}\,w\wedge(x+\bar{x})$. Consideremos o paralelogramo de vértices $O, x, \bar{x}, x+\bar{x}$. A igualdade (1) exprime que: *a)* $\bar{x}-x$ é perpendicular a $\bar{x}+x$, ou seja que as diagonais do paralelogramo considerado são perpendiculares, e que êle é um losango: ou seja x e $\bar{x}$ tem o mesmo comprimento; *b)* $\bar{x}-x$ é perpendicular a w.

As condições *a)* e *b)* chegam para caracterizar uma rotação em tôrno de w. Verifica-se igualmente que o ângulo dessa rotação é θ, notando que $\bar{x}-x$ existe num plano perpendicular a w, e que o comprimento de $w\wedge(x+\bar{x})$ também perpendicular a w, é a projecção de $x+\bar{x}$ sôbre o dito plano.

Mário de Alenquer

NOTA — Solução original para a qual se poderá apenas repetir a observação relativa ao problema 431.

R. L. G.

552 — Seja $S=\sum\limits_{m,\,n=2}^{\infty}n^{-m}$. Sendo S uma série de termos positivos podemos escrever $S=\sum\limits_{n=2}^{\infty}S_n$, em que $S_n=\sum\limits_{m=2}^{\infty}n^{-m}$.

Ora S_n é uma progressão geométrica, donde $S_n=\dfrac{n^{-2}}{1-n^{-1}}=$ $=\dfrac{1}{n(n-1)}\cdot$ Portanto $S=\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n-1)}+\cdots$; mas $\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$, donde $S=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\cdots+$ $+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\cdots$ e os termos desta série destroem-se 2 a 2 à excepção do primeiro, donde vem $S=1$.

Mário de Alenquer

NOTA — A resolução do problema anterior conduz ao cálculo da soma da série numérica convergente $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n(n-1)}$, cujo têrmo geral pode escrever-se $u_n=\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$.

A aplicação do teorema adiante enunciado resolve, simultâneamente, o problema do estudo do seu carácter e do cálculo da sua soma.

«Se o têrmo geral duma série númerica fôr da forma $u_n=\sum\limits_{i=0}^{p}a_i\,\varphi(n+i)$, com $\sum\limits_{i=0}^{p}a_i=0$, e se $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)$ é finito, a serie de têrmo geral u_n é convergente e a sua soma é $S=a_0\varphi(1)+(a_0+a_1)\varphi(2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_{p-1})\varphi(p)+(a_1+2a_2+$ $+\cdots+p\,a_p)\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)$».

É imediato que o têrmo geral da série dada satisfaz à condição necessária de convergência $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=0}^{p}a_i\,\varphi(n+i)=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)\,.\,\sum\limits_{i=0}^{p}a_i=0$. Por outro lado é $S_n=a_0\,\varphi(1)+$ $+(a_0+a_1)\,\varphi(2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_{p-1})\,\varphi(p)+(a_1+a_2+\cdots+$ $+a_p)\,\varphi(n+1)+\cdots+(a_{p-1}+a_p)\,\varphi(n+p-1)+a_p\,\varphi(n+p)$ e $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a_0\varphi(1)+(a_0+a_1)\varphi(2)+\cdots+(a_0+a_1+\cdots+a_{p-1})\varphi(p)+$ $+(a_1+2a_2+\cdots+p\,a_p)\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(n)$.

A. Sá da Costa

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Agros. Revista dos Estudantes de Agronomia. Ano XXIII — n.os 4, 5 e 6.

Técnica. Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.os 116, 117 e 118 (Janeiro, Fevereiro e Março de 1941.

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

A Direcção da S. P. M, na sua última reünião, deliberou dirigir uma circular aos associados pedindo o envio de comunicações científicas para leitura em reüniões da Sociedade a realizar em breve.

Serão também possìvelmente organizadas séries de conferências.

REFERÊNCIAS

A Direcção da «Gazeta de Matemática» agradece muito reconhecida as referências feitas pelo «Diário de Lisboa» no seu número de 2 de Abril e pelo «Jornal de Comércio e das Colónias» em 7 de Abril.