GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XV N.° 58 OUTUBRO 1954

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA-N. — Telef. 771943

ANO XV—N.º 58 GAZETA DE MATEMÁTICA OUTUBRO—1954

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda.—Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto.—Telef. 771943—LISBOA-N.

Sobre a não contradição da Matemática

por **Gottfried Köthe**

(Conferência realizada na Faculdade de Ciências de Lisboa em 27 de Abril de 1954)

Foi em fins do século passado que, na teoria dos conjuntos, surgiram alarmantes contradições. A primeira destas antinomias foi descoberta por Burali-Forti em 1897: por um lado consegue-se demonstrar que existe um número ordinal maior do que todos os outros, por outro lado demonstra-se que, para cada número ordinal, existe um outro número ordinal maior do que esse. O próprio fundador da teoria dos conjuntos, G. Cantor, descobriu em 1899 que a noção de conjunto C de todos os conjuntos é em si contraditória: o número cardinal de C deveria ser maior que qualquer outro número cardinal; por outro lado, o conjunto de todos os subconjuntos de C deveria ter um número cardinal maior que o de C, segundo um teorema geral da teoria dos conjuntos.

Reconheceu-se em breve que tais contradições estão intimamente ligadas a certas antinomias de carácter puramente lógico. Uma destas antinomias era conhecida pelos filósofos gregos como o *paradoxo do mentiroso:* «O que eu digo neste momento é falso».

Ainda de carácter puramente lógico é o paradoxo relativo a noções impredicáveis, descoberto pelo filósofo e matemático inglês Bertrand Russell. Um predicado (ou uma noção) diz-se *predicável*, quando pode ser afirmado a respeito de si próprio; caso contrário, diz-se impredicável. Por exemplo, a noção de «noção» é ela mesma uma noção—logo «noção» é um predicado predicável. Mas já a noção de «casa» é impredicável, pois não faz sentido dizer que a noção de «casa» é uma casa.

Consideremos agora a noção de «impredicável». Será esta uma noção impredicável? Não, porque nesse caso seria predicável. É então predicável? Também não, porque nesse caso seria impredicável. Como se vê, ambas as hipóteses conduzem a uma contradição.

Uma outra antinomia lógica é o chamado paradoxo de Richard. Existem certamente números naturais que podem ser definidos com menos de trinta sílabas. Mas, sendo assim, a definição

«*O mais pequeno número natural que não pode ser definido com menos de trinta sílabas*»

conduz a uma contradição, pois é feita na realidade com menos de trinta sílabas.

H. Poincaré por um lado e B. Russell por outro adoptaram o seguinte ponto de vista para explicar as antinomias. As noções predicáveis correspondem a entidades do tipo do conjunto C de todos os conjuntos, que tem por elemento esse mesmo conjunto: tais noções apresentam o carácter de um círculo vicioso, devendo por isso ser eliminadas. Esta qualidade de círculo vicioso patenteia-se claramente no paradoxo de Richard e, nos outros casos, é sempre um tal círculo vicioso que aparece como origem da antinomia.

Parecia então muito simples sair da dificuldade: tratava-se ùnicamente de evitar as definições com essa índole problemática. Mas infelizmente há muitas definições de tal natureza em matemática, sobretudo na análise clássica. Basta dar como exemplo a noção de máximo duma função contínua $f(x)$ num intervalo $[a, b]$, expressa usualmente pela notação

$$\max_{a \leq x \leq b} f(x).$$

Na verdade, o máximo é ele mesmo um dos valores numéricos, pelo conjunto dos quais o máximo é definido.

Mas como é possível que, em matemática, se tenham adoptado definições com tal natureza problemática? Como é possível que sòmente os paradoxos da teoria dos conjuntos nos tenham conduzido a reconhecer este facto deveras inquietante?

A verdade é que só nesse momento se tomou plena consciência de que os matemáticos trabalhavam com uma hipótese filosófica, a que se deu o nome de *ponto de vista platónico*. Consiste esta hipótese em admitir que os números, os conjuntos de números, etc. têm de certo modo uma existência independente de nós, de forma que já está prèviamente decidido, de maneira independente dos nossos conhecimentos, qual é a solução dum dado problema matemático, qualquer que ele seja. Ao matemático competiria ùnicamente «achar» a solução dos problemas, «descobrir» a verdade ou falsidade das proposições. Encarada deste ponto de vista, a definição de máximo é certamente justificada: os valores numéricos de $f(x)$, embora em número infinito, *existem* no sentido platónico — fora de nós, independentemente dos nossos conhecimentos — e a definição limita-se a escolher um desses números, o maior deles.

Foi principalmente Cantor quem sustentou o ponto de vista platónico: para ele os conjuntos infinitos eram entidades efectivamente existentes, e não apenas ficções lógicas. De resto, toda a teoria dos conjuntos, como hoje é ensinada nos cursos universitários, é fundada sobre este ponto de vista: os números cardinais, bem como os números ordinais, só com essa atitude mental podem ser concebidos.

Mas houve sempre filósofos que se opuseram e negaram categòricamente a possibilidade da existência actual dum conjunto infinito. No tempo de Cantor era sobretudo Kronecker quem atacava a teoria dos conjuntos por este lado.

Além disso, o fenómeno dos paradoxos veio demonstrar que o ponto de vista platónico é contraditório, pelo menos para conjuntos *quaisquer* (cujos elementos podem ser, já por si, conjuntos, conjuntos de conjuntos, etc.).

Levanta-se pois a seguinte questão inquietante: se o ponto de vista platónico é inadmissível para os conjuntos infinitos, qual é a garantia de que se possa mantê-la para os números reais ou mesmo para os números naturais? Foi o matemático holandez L. E. J. Brouwer quem, de maneira mais genuina, formulou e desenvolveu o ponto de vista que se exprime abreviadamente nos seguintes termos: a afirmação de que existe um número, verificando tal ou tal propriedade, só tem sentido, quando é dado um processo para calcular esse número, mediante um número *finito* de operações elementares; qualquer outra interpretação é desprovida de sentido. E, na verdade, parece-me bastante difícil compreender o que se pretende significar com uma frase como esta: «Os números naturais existem», desde que se queira interpretá-la no sentido platónico.

Em conformidade com tal crítica, Brouwer deu-se ao cuidado de reconstruir a matemática sobre novos alicerces. Porém esta nova matemática — apelidada de intuïcionista — é muito mais difícil do que a matemática clássica; muitos teoremas simples da análise deixam de ser válidos na matemática intuïcionista, sendo substituidos por teoremas deveras complicados. A escola holandeza tem mantido até hoje o ponto de vista brouweriano e continua a trabalhar no desenvolvimento da matemática intuïcionista.

Pode bem dizer-se que, na actualidade, a crítica radical de Brouwer é reconhecida como inteiramente justificada: o *ponto de vista construtivo* é o único método aceitável para uma reedificação da matemática. Mas, por outro lado, sentiu-se a necessidade de procurar uma solução menos drástica, porquanto a matemática intuïcionista se afasta exageradamente da matemática clássica. A verdade é que os paradoxos, origem de todo este movimento, se manifestaram num domínio bem distante da análise clássica, na qual nenhum paradoxo se tinha apresentado. Foi D. Hilbert quem procurou uma solução que, por um lado, satisfizesse à crítica de Brouwer e, por outro lado, salvaguardasse a análise clássica. O seu programa era demonstrar que a análise clássica não conduz nunca a uma contradição. Sendo assim, mesmo que o ponto de vista platónico fosse na realidade desprovido de sentido, seria possível adoptar como até aqui este ponto de vista e continuar a fazer investigações matemáticas na linha tradicional, sem o perigo de chegar a resultados contraditórios. Mas esta demonstração da não contradição da matemática clássica deveria ser feita por um método construtivo no sentido de Brouwer.

Eu vou tentar esboçar nalgumas palavras o que se entende segundo Hilbert por *métodos construtivos* ou *finitistas*. Estes métodos devem, primeiro que tudo, ter um carácter de evidência, que os dispense de qualquer outro fundamento.

Os objectos das deduções finitistas são sempre agrupamentos finitos de sinais elementares, tais como $|$, $||$, $\smile$, $\frown$, etc. Não se diz nunca que um tal objecto existe sem dar um método de o construir. Um exemplo típico é a representação dos números naturais: começa-se por $|$, $||$; cada sinal que possa ser obtido pela adjunção dum novo traço $|$ a um sinal já construído representa um número natural. Não se concebe nunca a classe de todos estes objectos como um conjunto acabado. Quando se diz que uma dada proposição é verdadeira para *todo* o número natural n, pretende-se dizer que é conhecido um processo demonstrativo que habilita a verificar essa proposição para cada valor particular atribuído a n.

Portanto, o afirmar que uma proposição é verdadeira para todo o número n, implica que se está na posse duma tal demonstração construtiva; dizer que a proposição é falsa para algum valor de n significa que se possui um contra-exemplo, o qual por sua vez, terá de ser controlável por um método construtivo. Neste sentido, o princípio lógico do terceiro excluído deixa de ser válido, pois não se tem a certeza de que toda a questão possa vir a ser decidida pela afirmativa ou pela negativa, podendo assim haver porventura proposições, a respeito das quais não faça sentido dizer que são verdadeiras ou falsas.

Seguindo este método obtém-se uma teoria dos números, de carácter construtivo, que não contém toda a teoria clássica elementar dos números naturais. Portanto, o problema mais simples que se apresenta no programa hilbertiano é o de demonstrar a não contradição da teoria clássica dos números.

A ideia de Hilbert é a seguinte: Analisando os processos clássicos de demonstração há-de reconhecer-se que é impossível chegar com esses processos a uma contradição. Existe um só caminho para alcançar este fim. A teoria dos números é dedutível dos cinco axiomas de Peano por meio das regras da lógica clássica. Só os teoremas demonstráveis deste modo pertencem à teoria clássica dos números.

Ora, para poder analisar as deduções clássicas de maneira precisa, é indispensável *formalizar* a teoria clássica dos números. Quere isto dizer que cada axioma deverá ser dado como um certo agrupamento de sinais elementares (fórmula) e que as deduções deverão consistir em certas operações combinatórias, que transformem uma fórmula dada numa outra que simboliza o resultado da dedução. Estudando tais operações, há então que demonstrar, por deduções finitistas, que é impossível chegar, por essas operações lógicas formalizadas, a um agrupamento de sinais que seja a formalização duma contradição.

A descrição das leis de estrutura duma teoria formalizada, das leis de operações com sinais e as deduções finitistas sobre a teoria formalizada constituem as chamadas *investigações metamatemática sobre a teoria* ou a *metateoria*.

Com esta orientação, a teoria dos números torna-se uma espécie de jogo com sinais, segundo regras bem definidas. É talvez necessário salientar a importância duma tal formalização. A formalização da lógica clássica tinha já sido efectuada por Boole e Frege, de cujos resultados Hilbert se serviu. Esta formalização dá em princípio a possibilidade de obter teoremas na teoria dos números, de maneira puramente mecânica. As modernas máquinas electrónicas de calcular utilizam já, numa certa medida, estas descobertas, pois podem executar operações lógicas elementares; eis aí um campo de aplicação, deveras interessante, da lógica e da teoria dos números formalizada.

Mas tornemos ao nosso problema da não-contradição da aritmética. Como vimos, é possível formalizar a teoria dos números de tal modo que, deixando de parte ùnicamente o axioma do terceiro excluído, se obtem a teoria dos números construtiva. Trata-se então de demonstrar que a adjunção deste axioma não conduz a contradição. Conseguiu-se fàcilmente demonstrar a não-contradição de certas partes da teoria dos números por métodos bastante elementares, mas o problema geral resistiu durante muito tempo a todos os esforços. No ano de 1931, um trabalho célebre do matemático austríaco Kurt Gödel veio criar uma situação verdadeiramente dramática. Demonstrava ele que, com os métodos finitistas conhecidos nesse tempo, era impossível dar uma demonstração da não-contradição da aritmética. A ideia essencial da sua demonstração consiste em traduzir a metateoria na própria teoria dos números, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre agrupamentos de sinais elementares (fórmulas) e números naturais: consegue-se assim demonstrar que é impossível dar uma demonstração da não-contradição duma teoria formalizada por meio duma metateoria que esteja contida na própria teoria. Gödel demonstrou ao mesmo tempo que existiam teoremas na aritmética formalizada que não podiam ser decididas no âmbito deste formalismo: a teoria formalizada era pois incompleta.

Após o primeiro momento de perplexidade ocasionada por este trabalho, teve-se a intuição de que existia ainda um caminho pelo qual podia haver a esperança de chegar ao fim em vista, que era dar uma demonstração da não-contradição da aritmética. Seria ainda necessário, evidentemente, continuar a fazer uso de métodos finitistas, mas existiriam porventura métodos mais gerais que os anteriores, que não se deixassem, como estes, traduzir na linguagem da aritmética formalizada. E foi o aluno de D. Hilbert, G. Gentzen, quem finalmente, em 1936, conseguiu demonstrar a não-contradição da aritmética, empregando a indução transfinita até ao número ordinal

$$\varepsilon = \omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}} .$$

Mais precisamente, o resultado de Gentzen consiste no seguinte: é possível ordenar as demonstrações da teoria dos números de modo tal que, utilizando os ordinais daquele tipo, se consegue fazer uma espécie de enumeração de todas as demonstrações, pela qual se torna então possível reconhecer que nunca pode ser construída uma combinação de símbolos representativa duma contradição.

À primeira vista fica-se talvez um pouco na dúvida, sobre se esta indução transfinita é ainda um método construtivo; mas essa dúvida desfaz-se prontamente, ao aprofundar o assunto.

Uma outra demonstração mais simples do mesmo facto foi dada em 1951 por P. LORENTZEN [4], que emprega uma espécie de indução ramificada, seguindo a ordem natural de formação das demonstrações, e renunciando portanto a dispô-las artificialmente num conjunto bem ordenado (1). O método usado por LORENTZEN na sua demonstração tem isto ainda de notável: é um método algébrico; a não-contradição da aritmética surge ali como consequência do seguinte *teorema de álgebra*:

«Dado um conjunto parcialmente ordenado C, existe sempre uma álgebra de BOOLE completa, B, que contem C e tal que toda a álgebra de BOOLE completa contendo C é imagem homomorfa de B».

Um outro método ainda mais simples, para demonstrar a não-contradição da aritmética, é desenvolvido por LORENTZEN em [5]. A demonstração apoia-se sobre uma formalização da matemática intuïcionista.

O método de LORENTZEN é ainda aplicável para obter uma demonstração da não-contradição duma grande parte da análise. Mas é preciso notar que não se trata agora exactamente da análise clássica. Partindo do sistema Z_0 não contraditório da lógica clássica e da aritmética, podem definir-se conjuntos e funções sobre Z_0 por métodos construtivos. Os conjuntos e funções assim definidos fornecem os números reais de *primeiro grau*. O sistema Z_1 de números, conjuntos e funções assim obtido é não contraditório e pode-se de novo, a partir de Z_1, definir conjuntos, funções, números reais do *segundo grau*, etc. A reunião do todos os Z_n, para $n = 1, 2, \cdots$ constitui o chamado *primeiro renque*, H_1 (2). E neste primeiro renque obtém-se agora uma análise que já difere muito pouco da análise clássica. Até a teoria de LEBESGUE sobre a integração pode ser reproduzida sem mudança essencial na análise construtiva (LORENTZEN [7]).

Desde logo se reconhece que os graus e os renques desta nova fundamentação da análise estão relacionados com a teoria dos tipos de BERTRAND RUSSELL.

Os números reais e, π são já números reais do primeiro grau e, para todas as aplicações da análise, não chega a sair-se do primeiro renque.

Eu creio que com estes resultados se encontrou já uma base bastante larga. Tem-se mesmo a impressão de que tais resultados são de certo modo definitivos.

Também, sob o aspecto filosófico, é deveras interessante a possibilidade de demonstrar que tudo se passa como se o ponto de vista platónico fosse legítimo para os números naturais. Mas, em compensação, parece impossível legitimar o mesmo ponto de vista para o contínuo clássico, isto é, para o corpo dos números reais. Com efeito, é impossível fazer uma teoria construtiva de *todos* os números reais. É sempre possível, sim, a partir de cada sistema formalizado de números reais, construir um outro sistema que englobe o primeiro — mas nunca se poderá construir definitivamente um formalismo que domine a totalidade dos números reais. Neste sentido o contínuo é inesgotável.

Por esta ordem de ideias, é-se conduzido a uma certa relativização do conceito de número real e mesmo da lógica. Até para a lógica se obtém toda uma hierarquia de diferentes lógicas, cada vez mais ricas: neste sentido, cada demonstração é uma demonstração relativa a determinada lógica. Este campo de investigações lógicas deu origem a uma ciencia inteiramente *sui generis*, que se desenvolve na actualidade.

Mas regressemos ao nosso problema inicial, à teoria dos conjuntos. Aqui a situação é talvez a mais difícil. Por exemplo, a noção de numeralidade tornou-se uma noção relativa. Segundo a teoria de LORENTZEN, um conjunto pode ser não-numerável num dado renque e passar a sê-lo num renque superior. E não se vê qual possa ser agora o sentido dos números cardinais superiores da teoria «naïve» de CANTOR.

Um outro facto notável é este: o axioma de ZERMELO torna-se demonstrável nos domínios construtivos. E GÖDEL [3] demonstrou mesmo que, se um sistema de axiomas para a teoria dos conjuntos é dado e não contraditório, então é possível juntar-lhe o axioma da escolha e mesmo a hipótese do contínuo, sem risco de contradição.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. GENTZEN, Math. Annalen **112** (1936), 493-565.

[2] K. GÖDEL, Monatshefte F. Math. Phys. **38** (1931), 173-198.

[3] K. GÖDEL, *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory*, Princeton, Univ. Press, 1940.

[4] P. LORENZEN, Journ. of symbolic logic **16** (1951), 81-106.

[5] P. LORENZEN, Math. Zeitschrift **53** (1950), 162-201.

[6] P. LORENZEN, Math. Zeitschrift **54** (1951), 1-24.

[7] P. LORENZEN, Math. Zeitschrift **54** (1951), 275-290.

Para uma orientação sobre as questões dos fundamentos da matemática, bem como sobre a lógica matemática, podem servir os dois artigos da nova

(1) Os números entre colchetes referem-se à Bibliografia, que se encontra no fim do artigo (N. de R.).

(2) À falta de melhor, traduzimos aqui por «renque» o termo «marche» empregado pelo autor (N. da R.).

edição da «Enziklopädie des Mathematischen Wissenschaften»: ARNOLD SCHMIDT, Mathematische Grundlagenforschung (Band I 1, Heft 1, Teil II, 1950); H. HERMES e H. SCHOLZ, Mathematische Logik (Band I 1, Heft 1, Teil I, 1952).

Um livro recente muito acessível sobre estes assuntos é o seguinte:

S. C. KLEENE, *Introduction to Metamathematics*, Amsterdam (1952).

NOTA DA REDACÇÃO — O precedente artigo é uma tradução de apontamentos cedidos amàvelmente pelo Prof. G. KÖTHE à Gazeta de Matemática. Ao ilustre professor manifestamos aqui a nossa viva gratidão por nos ter oferecido a possibilidade de tornar conhecida de todos os leitores da Gazeta o conteúdo desta sua conferência de tão vasto interesse, documentando assim um momento da sua brilhante actuação no nosso meio.

Sobre a equivalência de normas em espaços vectoriais

por *Jaime Campos Ferreira* (*)

O artigo presente tem primeiramente o objectivo de chamar a atenção e, se possível, o interesse de alguns estudantes de Matemática das nossas Escolas Superiores para um campo particularmente atraente da Análise moderna. De acordo com esse objectivo, procurou-se dar-lhe uma forma bastante acessível.

Serve ainda para apresentar um pequeno resultado —relativo à possibilidade de definir normas não equivalentes em qualquer espaço vectorial de dimensão infinita [1] — ao qual não me foi possível encontrar qualquer referência, se bem que, pela sua simplicidade, pareça bem pouco provável que não se encontre já publicado.

1. Espaços vectoriais relativos ao corpo real.

No que se segue E representa um conjunto cujos elementos, de natureza qualquer, serão designados por letras latinas minúsculas. O conjunto dos números reais será representado por $\mathbf{R}$ e os seus elementos, em geral, por letras gregas minúsculas.

1. 1. O conjunto E diz-se um *espaço vectorial relativo ao corpo real*, ou simplesmente um *espaço vectorial real*, se

1.º — A cada par $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ de elementos de E corresponde um e um só elemento do mesmo conjunto, que se chamará a *soma de* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ e se representará por $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, de tal forma que resultem verificadas as condições seguintes:

a) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ para quaisquer elementos $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in E$;

b) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ para quaisquer elementos $\mathbf{x},\mathbf{y}\in E$;

c) Dados dois elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ de E existe sempre pelo menos um $\mathbf{x}\in E$ tal que $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

2.º — A cada par $(\xi,\mathbf{x})$ constituido por elementos $\xi\in\mathbf{R}$ e $\mathbf{x}\in E$ corresponde um único elemento $\xi\,.\,\mathbf{x}$ ou $\xi\mathbf{x}\in E$, (*o produto de* ξ *por* $\mathbf{x}$), por forma que:

d) $\xi(\eta\,\mathbf{x})=(\xi\,\eta)\,\mathbf{x}$ quaisquer que sejam $\xi,\eta\in\mathbf{R}$ e $\mathbf{x}\in E$;

e) $(\xi+\eta)\,\mathbf{x}=\xi\,\mathbf{x}+\eta\,\mathbf{x}$ quaisquer que sejam $\xi,\eta\in\mathbf{R}$ e $\mathbf{x}\in E$;

f) $\xi(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\xi\,\mathbf{x}+\xi\,\mathbf{y}$ para todo o $\xi\in\mathbf{R}$ e quaisquer $\mathbf{x},\mathbf{y}\in E$;

g) $1\,.\,\mathbf{x}=\mathbf{x}$ para todo o $\mathbf{x}\in E$.

Obs. — Na definição precedente o corpo real $\mathbf{R}$ pode ser substituido por um corpo qualquer K; E dir-se-á então um espaço vectorial relativo ao corpo K. Para maior simplicidade, porém, só consideraremos aqui espaços vectoriais relativos ao corpo real, o que deve ser sempre subentendido.

1. 2. Com facilidade se prova que das condições impostas na definição anterior resultam várias propriedades para as operações representadas pelos símbolos $+$ e $\cdot$, operações que se denominam, respectivamente, *adição* e *multiplicação por escalares*. Em particular, prova-se que existe um e um só elemento $\mathbf{u}$ de E tal que

$$\mathbf{u}+\mathbf{x}=\mathbf{x}\quad\text{para todo o}\quad \mathbf{x}\in E$$

e também que, para cada $\mathbf{z}\in E$, existe um e um só $\mathbf{z}'\in E$ que verifica a igualdade

$$\mathbf{z}+\mathbf{z}'=\mathbf{u}\,.$$

O elemento acima designado por $\mathbf{u}$ chama-se o *zero* de E; em geral, prefere-se para o representar o símbolo $\mathbf{0}$. $\mathbf{z}'$, o *simétrico de* $\mathbf{z}$, pode representar-se por $-\mathbf{z}$.

(*) Bolseiro do Instituto de Alta Cultura (Centro de Estudos Matemáticos).

[1] Ver 3.5.

Vê-se ainda fàcilmente que a solução da equação $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$, exigida em *c*), é única e precisamente $\mathbf{x}=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$. A expressão $\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$ pode simplicar-se para $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

Algumas outras propriedades de demonstração muito simples são as seguintes:

$$\begin{aligned} \xi\,.\,\mathbf{0}&=\mathbf{0} && \text{para todo o } \xi\in\mathbf{R}\,; \\ 0\,.\,\mathbf{x}&=\mathbf{0} && \text{» » »}\ \mathbf{x}\in E\,; \\ (-1)\,.\,\mathbf{x}&=-\mathbf{x} && \text{» » »}\ \mathbf{x}\in E\,; \\ \xi\,.\,\mathbf{x}&=\mathbf{0} && \text{implica } \xi=0 \text{ ou } \mathbf{x}=\mathbf{0}. \end{aligned}$$

1.3. Vejamos agora alguns exemplos de espaços vectoriais reais:

1.° — *O espaço cartesiano a* n *dimensões reais*, $\mathbf{R}^n$, constituido por todos os elementos $\mathbf{x}$ da forma

$$\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n),$$

em que $\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$ é uma sucessão de n números reais.

A multiplicação pelo escalar $\alpha\in\mathbf{R}$ é definida pela relação

$$\alpha\,\mathbf{x}=(\alpha\,\xi_1,\alpha\,\xi_2,\cdots,\alpha\,\xi_n)$$

e a adição por

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$

para $\mathbf{x}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ e $\mathbf{y}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$.

2.° — O espaço $\mathbf{P}$, constituido por todos os polinómios na variável real ζ, com elementos da forma

$$\mathbf{x}=\alpha_0\zeta^k+\alpha_1\zeta^{k-1}+\cdots+\alpha_k$$

em que k é um inteiro não negativo e $\alpha_0,\alpha_1,\cdots\alpha_k$ são números reais quaisquer (só podendo ser $\alpha_0=0$ se $k=0$). As definições de adição de dois polinómios e de multiplicação de um polinómio por um número real são as usuais.

3.° — O espaço constituido por todas as funções reais da variável real ζ com um mesmo domínio de existência é também um espaço vectorial. O mesmo se passa com o espaço das funções limitadas, ou das funções contínuas, ou ainda das funções diferenciáveis num mesmo domínio. A adição e a multiplicação por escalares supõem-se definidas pela forma habitual.

Seria possível dar muitos mais exemplos, mas estes bastam para nos apercebermos da generalidade do conceito de espaço vectorial. Muitos conjuntos de grande interesse na Análise, em especial determinadas classes de funções, podem ser encarados, de uma forma absolutamente natural, como espaços vectoriais; em consequência, todos os resultados que se deduzem no estudo do conceito abstrato de espaço vectorial são inteiramente aplicáveis a esses conjuntos, sem necessidade de demonstrações particulares para cada caso.

2. Independência linear; base e dimensão de um espaço vectorial

2.1. Os elementos $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_k$ de um espaço vectorial E dizem-se *linearmente independentes* se a igualdade $\xi_1\mathbf{x}_1+\xi_2\mathbf{x}_2+\cdots+\xi_k\mathbf{x}_k=\mathbf{0}$ implica $\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_k=0$.

A definição anterior é aplicável apenas no caso em que os elementos considerados são em número finito. O conceito de independência linear pode, porém, definir-se para além desse caso, pela forma seguinte: diz-se que os elementos de um subconjunto infinito C do espaço vectorial E são *linearmente independentes*, quando toda a parte finita de C for constituida por elementos linearmente independentes.

Ex.: No espaço cartesiano $\mathbf{R}^n$, os elementos $\mathbf{e}_1=(1,0,0,\ldots,0)$, $\mathbf{e}_2=(0,1,0,\ldots,0),\ldots,\mathbf{e}_n=(0,0,0,\ldots,1)$ são linearmente independentes. No espaço $\mathbf{P}$ do ex. 2.° de 1.3, são linearmente independentes as potências inteiras não negativas da variável ζ.

Um conjunto $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ (finito ou infinito) de elementos de um espaço vectorial E diz-se uma *base* de E quando

1.° — $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ é constituido por elementos linearmente independentes.

2.° — Todo o elemento $\mathbf{x}\in E$ é susceptível de uma representação da forma

$$\mathbf{x}=\sum_\alpha \xi_\alpha\,\mathbf{x}_\alpha$$

subentendendo-se, naturalmente, que os coeficientes ξ_α serão todos nulos, excepto um número finito. (Atendendo à independência linear dos elementos de $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ imediatamente se reconhece que uma tal representação tem de ser única).

Ex.: É fácil verificar que o conjunto constituido pelos elementos $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n$, acima considerados, é uma base do espaço $\mathbf{R}^n$; também o conjunto $(1,\zeta,\zeta^2,\cdots\zeta^n,\cdots)$ constitui uma base do espaço vectorial $\mathbf{P}$.

2.2. A propósito do conceito de base surgem já naturalmente algumas questões interessantes: em primeiro lugar, *todo o espaço vectorial terá uma base?* *Desde que se admita o célebre axioma de* Zermelo, *pode dar-se a esta pergunta uma resposta afirmativa* (1); e é logo imediato o reconhecimento da existência de uma infinidade de bases distintas, para qualquer espaço vectorial.

Assim, por exemplo, no caso do espaço $\mathbf{R}^n$, poderemos tomar como base qualquer conjunto de n elementos da forma

$$(\xi_1,0,0,\cdots,0),(0,\xi_2,0,\cdots,0),\cdots,(0,0,0,\cdots,\xi_n),$$

(1) Supõe-se sempre excluido o caso de um espaço vectorial constituido por um único elemento: o zero.

desde que seja $\xi_i \neq 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$. Outra base de $\mathbf{R}^n$ é o conjunto constituído pelos elementos

$$(1,0,0,\cdots,0),(1,1,0,\cdots,0),\cdots,(1,1,1,\cdots,1).$$

Também sob a condição $\xi_i \neq 0, (i=1,2,\cdots,n)$, qualquer conjunto da forma $(\xi_1,\xi_2\zeta,\xi_3\zeta^2,\cdots,\xi_{n+1}\zeta^n,\cdots)$ é uma base do espaço vectorial $\mathbf{P}$.

Nestes últimos exemplos observa-se que todas as bases do espaço $\mathbf{R}^n$ que considerámos têm o mesmo número — n — de elementos; no caso do espaço $\mathbf{P}$, as bases indicadas são também sempre constituidas por uma infinidade numerável de elementos do espaço. Apresenta-se-nos assim uma outra questão de grande importância: *terão todas as bases de um dado espaço vectorial o mesmo número de elementos?*

A resposta é de novo afirmativa: *pode provar-se que o número cardinal da base de um espaço vectorial não varia quando essa base se substitui por outra*, constituindo precisamente esse número uma característica do espaço, à qual se dá o nome de *dimensão.*

3. Espaços normados

3.1. Suponhamos agora que a cada elemento $\mathbf{x}$ de um determinado espaço vectorial real E se associa um número real $p(\mathbf{x})$, por forma que se satisfaçam as condições seguintes:

a) $p(\mathbf{x}) \geqslant 0$ para todo o $\mathbf{x} \in E$;

b) $p(\mathbf{x}) = 0$ se é só se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$;

c) $p(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant p(\mathbf{x}) + p(\mathbf{y})$ para todo o par de elementos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$;

d) $p(\xi\mathbf{x}) = |\xi|\, p(\mathbf{x})$ para todo o $\mathbf{x} \in E$ e todo o $\xi \in \mathbf{R}$.

Diz-se então que $p(\mathbf{x})$ é uma *norma sobre o espaço* E, ou que este espaço é um *espaço normado* (pela norma $p(\mathbf{x})$).

Obs. — A noção de espaço normado pode ser dada com maior generalidade. Pode definir-se da mesma maneira uma norma sobre um conjunto E que seja um espaço vectorial relativo a um corpo K, desde que em K esteja definido um valor absoluto, isto é, uma aplicação $\xi \to |\xi|$ de K em $\mathbf{R}$ satisfazendo as condições: $|\xi| \geqslant 0$; $|\xi| = 0$ se e só se $\xi = 0$; $|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|$; $|\xi\eta| = |\xi|\,|\eta|$, para quaisquer $\xi, \eta \in K$.

3.2. Vejamos alguns exemplos simples de normas:

1.º — A distância euclideana do ponto $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ à origem $\mathbf{0} = (0, 0, \cdots 0)$, definida pela expressão

$$p_1(\mathbf{x}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2}$$

é uma norma sobre o espaço $\mathbf{R}^n$.

Ainda no mesmo espaço, sendo $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, qualquer das expressões

$$p_2(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$$

$$p_3(\mathbf{x}) = \max(|\xi_1|, |\xi_2|, \cdots, |\xi_n|)$$

determina uma norma.

2.º — No espaço vectorial constituído por todas as funções reais de variável real definidas e limitadas num mesmo domínio D, o extremo superior dos módulos dos valores assumidos por cada função no domínio D é uma norma.

3.3. Sabe-se bem que, partindo, por exemplo, do conceito de distância euclideana, é possível introduzir no espaço $\mathbf{R}^n$ certas noções de grande interesse, como as de vizinhança de um ponto, de conjunto aberto, de interior de um conjunto, etc ; e sabe-se também que é primordial o papel desempenhado por tais noções na definição de alguns conceitos fundamentais da Análise (como os de limite e de continuidade, por exemplo), e no estudo de propriedades que com esses conceitos se relacionam.

É fácil ver agora que uma norma $p(\mathbf{x})$ sobre um determinado espaço vectorial E permite definir nesse espaço noções inteiramente análogas, facto que se pode exprimir dizendo que a norma $p(\mathbf{x})$ introduz uma *topologia* no espaço E.

Assim, sendo $\mathbf{x}_0$ um elemento qualquer de E e ε um número positivo, podemos definir a *vizinhança* ε *de* $\mathbf{x}_0$ como o conjunto $V_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ de todos os elementos $\mathbf{x} \in E$ tais que

$$p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) < \varepsilon$$

As definições de conjunto aberto, conjunto fechado, interior, exterior e fronteira de um conjunto, etc., decorrem agora da anterior definição de vizinhança exactamente como no caso do espaço $\mathbf{R}^n$. Por exemplo, um subconjunto M de E será um *conjunto aberto* se, para todo o $\mathbf{x} \in M$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que $V_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset M$.

E também o conceito de limite de uma sucessão se pode introduzir por uma forma idêntica à habitual: diz-se que a sucessão $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_n, \cdots$ de elementos de E tem por *limite* o elemento $\mathbf{x}_0 \in E$ quando para cada $\varepsilon > 0$ existe um número natural N_ε tal que para $n > N_\varepsilon$ seja $\mathbf{x}_n \in V_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$.

Suponhamos agora que E e F são dois espaços vectoriais, $p(\mathbf{x})$ uma norma sobre E e $q(\mathbf{y})$ uma norma sobre F. Se $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é uma *aplicação* de E em F (isto é, uma função unívoca definida em E e de contradomínio contido em F), dizemos que, quando $\mathbf{x}$ tende para $\mathbf{x}_0 \in E$, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ tende para o *limite* $\mathbf{y}_0 \in F$, e escrevemos

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0$$

se a cada δ corresponde um ε por forma que

$$0 < p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) < \varepsilon \quad \text{implique} \quad q(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{y}_0) < \delta .$$

A generalização da definição de continuidade é igualmente imediata, podendo também usar-se os mesmos termos do caso clássico: $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é *contínua* no ponto $\mathbf{x}_0 \in E$ se para cada vizinhança W de $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ existe uma vizinhança V de $\mathbf{x}_0$ tal que $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in W$ para todo o $\mathbf{x} \in V$.

Se acrescentarmos que, ao longo deste processo de generalização, se conserva a maior parte das propriedades essenciais relativas aos conceitos considerados, ver-se-á com clareza até que ponto o caminho seguido é natural.

3.4. O conceito de norma, que acima se introduziu, e as considerações que a seu respeito foram feitas, sugerem-nos agora mais alguns problemas:

1.º — *Será sempre possível definir uma norma sobre um dado espaço vectorial?*

2.º — *Se $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$ são duas normas sobre um mesmo espaço E, qual é a condição para que as duas normas introduzam nesse espaço a mesma topologia?*

Verificaremos adiante que *é sempre possível definir num espaço vectorial uma infinidade de normas*, ficando assim resolvida a primeira questão. Quanto à segunda comecemos por esclarecê-la um pouco melhor: o que se pretende é saber as condições em que, dos dois sistemas de vizinhanças de cada elemento $\mathbf{x}_0 \in E$ que, a partir das normas $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$, são definidos pelas expressões

$$p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) < \varepsilon \qquad q(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) < \delta$$

(ε e δ números positivos arbitrários), resultam exactamente os mesmos conjuntos abertos, os mesmos conjuntos fechados, a mesma noção de limite, etc.

Segundo um resultado elementar da Topologia Geral, *condição necessária e suficiente para que tal aconteça é que qualquer das vizinhanças de cada um desses sistemas contenha uma vizinhança do outro* (para todo o $\mathbf{x}_0 \in E$). E é fácil reconhecer que *esta condição é satisfeita se e só se existem dois números positivos α e β tais que*

$$\alpha\, p(\mathbf{x}) \leqslant q(\mathbf{x}) \leqslant \beta\, p(\mathbf{x}) \qquad \text{qualquer que seja } \mathbf{x} \in E .$$

Quando existem dois números α e β nas condições anteriores, as normas $p(\mathbf{x})$ e $q(\mathbf{x})$ dizem-se *equivalentes:* elas introduzem então, no espaço vectorial E, a mesma topologia.

Assim, as três normas $p_1(\mathbf{x})$, $p_2(\mathbf{x})$, $p_3(\mathbf{x})$ sobre o espaço $\mathbf{R}^n$, que foram definidas em **3.2.**, são equivalentes, como se vê pelas relações

$$p_3(\mathbf{x}) \leqslant p_1(\mathbf{x}) \leqslant p_2(\mathbf{x}) \leqslant n\, p_3(\mathbf{x})$$

cuja justificação é imediata.

De resto, não é difícil demonstrar que *quaisquer duas normas sobre o espaço $\mathbf{R}^n$ são equivalentes*, isto é que, sobre um espaço de dimensão finita, todas as normas introduzem a mesma topologia (1).

3.5. Surge naturalmente nesta altura uma nova questão: *serão os espaços $\mathbf{R}^n$ os únicos que gosam desta propriedade ou, pelo contrário, haverá espaços de dimensão infinita em que todas as normas sejam equivalentes?*

Responderemos a esta pregunta mostrando que, *dado um espaço vectorial de dimensão infinita, é sempre possível definir sobre ele normas não equivalentes.*

Seja E um espaço vectorial real (2) de dimensão finita ou infinita e $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ uma base de E. Se $\mathbf{x}$ designa um elemento qualquer do espaço E, sabe-se que existe uma representação da forma $\mathbf{x} = \sum_\alpha \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \mathbf{x}_\alpha$, em que os coeficientes $\xi_\alpha^{\mathbf{x}}$ são números reais (todos nulos, excepto um número finito), univocamente determinados pelo elemento $\mathbf{x}$.

Designemos por f uma qualquer aplicação da base $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ no conjunto $\mathbf{R}^+$ dos números positivos. Nestas condições, verifica-se imediatamente que a expressão

$$p_f(\mathbf{x}) = \sum_\alpha f(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \right| ,$$

em que $f(\mathbf{x}_\alpha)$ representa o valor da aplicação f no ponto $\mathbf{x}_\alpha$ da base, define uma norma sobre E. (Repare-se que assim se confirma a resposta que foi dada à 1.ª questão enunciada em **3.4.**).

Admitamos agora que a dimensão de E é infinita. Existe então sempre um conjunto numerável $C = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \cdots, \mathbf{x}_n^*, \cdots)$, contido na base $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ do espaço E. Consideremos duas aplicações f_1 e f_2 (de $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ em $\mathbf{R}^+$), que satisfaçam as condições:

$$f_1(\mathbf{x}_n^*) = 1 \qquad f_2(\mathbf{x}_n^*) = n$$

para todo o $\mathbf{x}_n^* \in C$, sendo arbitrária a definição de f_1 e f_2 nos pontos do complementar de C em $\{\mathbf{x}_\alpha\}$.

(1) Segundo um teorema da teoria dos espaços localmente convexos, *são idênticas todas as topologias localmente convexas separadas sobre qualquer espaço de dimensão finita*, resultado de que o facto acima apontado é um caso particular.

(2) De acordo com a observação final de **1.1.**, supõe-se que E é um espaço vectorial real; a demonstração serve, porém, passo por passo, para o caso mais geral de um espaço vectorial relativo a um corpo qualquer munido de um valor absoluto, a que se fez referência em **3.1.** (Obs.).

Tomando as duas normas

$$p_1(\mathbf{x}) = \sum_\alpha f_1(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \right| \quad \text{e} \quad p_2(\mathbf{x}) = \sum_\alpha f_2(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}} \right|,$$

e designando por M um número real arbitrário, é

$$\frac{p_2(\mathbf{x}_n^*)}{p_1(\mathbf{x}_n^*)} = \frac{\sum_\alpha f_2(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}_n^*} \right|}{\sum_\alpha f_1(\mathbf{x}_\alpha) \left| \xi_\alpha^{\mathbf{x}_n^*} \right|} = \frac{f_2(\mathbf{x}_n^*)}{f_1(\mathbf{x}_n^*)} = n > M,$$

desde que n seja suficientemente grande.

As normas $p_1(\mathbf{x})$ e $p_2(\mathbf{x})$ não são, portanto, equivalentes, ficando assim provado o que se propunha (1).

É evidente que na definição das aplicações f_1 e f_2 se pode usar uma larga margem de arbitrariedade, sem deixar de atingir o mesmo resultado. No caso de f_2, por exemplo, pode substituir-se a expressão $f_2(\mathbf{x}_n^*) = n$, (para todo o $\mathbf{x}_n^* \in C$), por $f_2(\mathbf{x}_n^*) = \varphi(n)$, sendo $\varphi(n)$ um qualquer infinitamente grande com n. Escolhendo infinitamente grandes de ordens diversas, obter-se-ão sempre normas não equivalentes (duas a duas), vendo-se portanto imediatamente que *há possibilidade de determinar infinitas normas por forma que todas introduzam em* E *topologias distintas.*

A noção de corpo rígido em Relatividade Restrita (*)

por **Ruy Luís Gomes**

Em cinemática clássica diz-se que *um corpo ou sistema de pontos materiais é rígido se a distância de dois quaisquer dos seus pontos não varia com o tempo.*

Mas é preciso não esquecer que (em cinemática clássica), tanto o tempo como a distância (de posições simultâneas) têm carácter absoluto, isto é, não dependem do sistema admissível (2) em que são medidos.

Esta simples observação mostra que se quizermos utilizar aquela definição no domínio da Relatividade Restrita, temos de a interpretar convenientemente, pois é necessário esclarecer em que referencial devemos calcular distâncias e tempo, uma vez que os seus valores variam de referencial para referencial.

Ora quem pela primeira vez considerou o problema dos corpos rígidos em Relatividade Restrita foi o célebre físico alemão, Max Born, que adoptou a seguinte definição (3): *um corpo move-se (em relação a um sistema admissível) como um corpo rígido, se as linhas de universo dos seus pontos são curvas equidistantes.* Mas este enunciado tem ainda uma certa ambiguidade.

Na verdade, se considerarmos o caso particular de um corpo rígido em repouso num sistema admissível, as linhas de universo de dois dos quaisquer dos seus pontos terão equações da forma

$$x_i = v_i\, t + a_i$$
$$x_i = v_i\, t + b_i$$

e embora a sua distância (4) $I_{\mathrm{u}}^{\mathrm{v}}$ se mantenha constante (no tempo de qualquer sistema admissível), o certo é que o seu valor depende de um elemento u, estranho ao corpo em questão.

Consequentemente, só a distância I^{v} está ligada *apenas* ao próprio corpo e este facto é que leva a completar a definição de M. Born nos seguintes termos: *um corpo move-se como corpo rígido, se as linhas de universo dos seus pontos são curvas equidistantes no espaço e no tempo do próprio corpo.*

Para estudar o problema da rigidês em Relatividade Restrita temos, pois, de calcular I^{v}, mas adaptando a doutrina desenvolvida no nosso artigo anterior (4) ao caso de P e Q terem movimentos quaisquer.

Ora tratando um corpo sólido como um caso particular de um meio contínuo tridimensional, os seus diferentes pontos ficarão completamente individuados por meio de três parâmetros η_1, η_2, η_3. E a linha de universo do ponto genérico (η_1, η_2, η_3) terá as equações

$$(1) \qquad x_i = x_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3, t),$$

sendo x_i, t coordenadas admissíveis quaisquer.

É evidente que *(1)* generalizam (3), artigo anterior.

Introduzindo um *tempo local* (5), nomeadamente o *tempo próprio* τ do ponto (η_1, η_2, η_3) do corpo em

(1) Daqui se segue imediatamente o recíproco do teorema citado em (3); portanto: *condição necessária e suficiente para que sejam idênticas todas as topologias localmente convexas separadas sobre um espaço vectorial* E *é que a dimensão de* E seja *finita.*

(*) Não temos notícia de este assunto ter sido já tratado por autores portugueses e isso constitui, só por si, motivo para o considerarmos nesta revista, tanto mais que permite acrescentar novos esclarecimentos ao problema das *distâncias próprias.*

(2) O tempo é até independente de todo o referencial e a própria distância de posições simultâneas é um invariante de um grupo mais amplo do que o de Galileu.

(3) *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips* — Annalen der Physik, 30 (1909).

(4) Sobre a noção de distância em Relatividade Restrita, *Gazeta de Matemática*, n.º 57, p. 3, 4.

(5) Consultar G. Herglotz — *Über den vom Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als »starr« zu bezeichnenden Körper*, Annalen der Physik, 31 (1910).

questão, tempo que varia com t segundo uma equação da forma

$$(2) \qquad \tau = \tau(\eta_1, \eta_2, \eta_3, t), \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} > 0,$$

podemos representar as linhas de universo dos pontos do corpo pelas equações paramétricas

$$(3) \qquad \begin{aligned} x_i &= x_i(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) \\ t &= t(\eta_1, \eta_2, \eta_3, \tau) \end{aligned},$$

com a vantagem de ficar em evidência o *tempo próprio* τ e não o tempo admissível t.

Nestes termos um deslocamento elementar dx_i, dt do ponto (η_1, η_2, η_3) é caracterizado por

$$(4) \qquad \begin{aligned} dx_i &= \frac{\partial x_i}{\partial \tau} d\tau \\ dt &= \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \end{aligned},$$

pois $d\eta_1 = d\eta_2 = d\eta_3 = 0$. E as equações (4) substituem (6′), artigo anterior.

Anàlogamente as equações (6), artigo anterior, são substituídas por

$$(5) \qquad \begin{aligned} \delta x_i &= \sum \frac{\partial x_i}{\partial \eta_k} \delta \eta_k + \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \delta \tau \\ \delta t &= \sum \frac{\partial t}{\partial \eta_k} \delta \eta_k + \frac{\partial t}{\partial \tau} \delta \tau \end{aligned},$$

em que não figura um deslocamento finito $\Delta' x_i, \Delta' t$ mas apenas um deslocamento elementar $\delta x_i, \delta t$, e entre dx_i, dt e δx_i, δt, subsiste a relação de ortogonalidade

$$(6) \qquad \Sigma \delta x_i \, dx_i - c^2 \delta t \, dt = 0.$$

Finalmente, a distância de dois pontos vizinhos η_i e $\eta_i + \delta \eta_i$, medida na variedade própria de η_i e no instante τ é dada por

$$(7) \qquad \delta \sigma^2 = \Sigma \delta x_i^2 - c^2 \delta t^2.$$

E dizer que o corpo ou sistema dos pontos η_i *se move como corpo rígido é dizer que* $\delta \sigma^2$ *não depende de* τ.

É esta a interpretação que deve ser dada ao enunciado de Max Born e foi precisamente nela que se baseou G. Herglotz para *demonstrar* (1) *que um corpo rígido tem apenas três graus de liberdade e não seis como na cinemática clássica.*

Deixamos essa demonstração para um outro artigo; neste queremos acrescentar sòmente a expressão de $\delta \tau^2$ em termos de η_i e τ.

Substituindo em (7) δx_i e δt pelos seus valores (5), virá

(1) $g_{44} \neq 0$ pois todo ponto material tem velocidade menor que a luz e isso exige $g_{pq} \, d\eta_p \, d\eta_q = g_{44} (d\eta_4)^2 < 0$, dando efectivamente $g_{44} < 0$, para $d\eta_i = 0$.

$$(8) \qquad \delta \sigma^2 = \sum_{p,q} g^{pq} \delta \eta_p \delta \eta_q, \qquad p, q = 1, \cdots, 4,$$

em que $\eta_4 = \tau$.

Mas como a relação de ortogonalidade, expressa também em η_i e τ, tem a forma geral.

$$(9) \qquad \sum_{p,q} g_{pq} \delta \eta_p \, d\eta_q = 0,$$

resulta, no caso que nos interessa,

$$(10) \qquad \sum_p g_{p4} \delta \eta_p = 0,$$

pois os deslocamentos $d\eta_p$ de um ponto de corpo são caracterizados por $d\eta_1 = d\eta_2 = d\eta_3 = 0$ e $d\eta_4 = d\tau \neq 0$.

Eliminando agora $\delta \eta_4$ por intermédio de (10) ou (1)

$$(10') \qquad \delta \eta_4 = \frac{\sum_i g_{i4} \delta \eta_i}{-g_{44}}, \quad i = 1, 2, 3,$$

vem

$$(11) \qquad \delta \sigma^2 = \sum g_{ik} \delta \eta_i \delta \eta_k + \frac{(\Sigma g_{i4} \delta \eta_i)^2}{-g_{44}}$$

ou seja finalmente

$$(12) \qquad \delta \sigma^2 = \sum \gamma_{ik} \delta \eta_i \delta \eta_k,$$

em que

$$(13) \qquad \gamma_{ik} = g_{ik} + \frac{g_{i4} \, g_{k4}}{-g_{44}}.$$

A condição de rigidez exprime-se, portanto, pelas equações

$$\frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial \tau} = 0:$$

um corpo move-se como corpo rígido se os coeficientes γ_{ik} *da forma* (12), *que dá a distância própria do corpo, não dependem do tempo próprio* τ.

Assim, em particular, os sistemas de inércia são sistemas rígidos, pois neles

$$\delta \sigma^2 = \sum \delta x_i^2$$

não depende do tempo próprio t.

Nota — O último artigo saiu com numerosas gralhas, quási todas felizmente de fácil correcção.

Assim, na página 4 deve escrever-se, na primeira coluna,

$$l_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = -\frac{(\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r})^2}{v^2 - c^2} + \mathbf{r}^2,$$

e na segunda

$$\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow l_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = l_{\mathbf{0}}^{\mathbf{v}}$$

$$\theta = 0 \rightarrow l_{\mathbf{0}}^{\mathbf{v}} = (1 - \beta^2) \, l_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}},$$

e, três linhas abaixo, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalmente as fórmulas (14') e (15) devem escrever-se

(14') $(v^2-c^2)\,\mathbf{u}|\mathbf{r}-2 \quad \mathbf{v}|\mathbf{r}\,(\mathbf{u}|\mathbf{v}-c^2)=0$

(15) $\mathbf{u}|[(v^2-c^2)\mathbf{r}-2\,\mathbf{v}|\mathbf{r}\,.\,\mathbf{v}]=-2\,\mathbf{v}|\mathbf{r}\,.\,c^2$.

Além destas gralhas é necessário ainda observar, como salientou o Prof. MIRA FERNANDES (1), que as soluções u, dadas pela equação (15), *não constituem um plano, como aí erradamente se disse.*

Fazendo

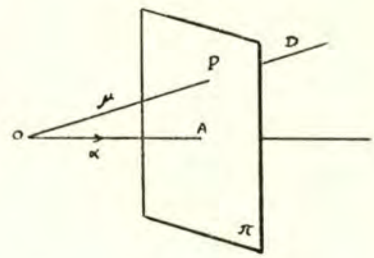
$$-\boldsymbol{\alpha}=\frac{v-c}{\mathbf{v}|\mathbf{r}}\mathbf{r}-2\,\mathbf{v}\,,$$

(15) toma a forma

$$\mathbf{u}|\boldsymbol{\alpha}=-2\,c^2,$$

donde se conclui que a projecção de $\mathbf{u}$ sobre $\boldsymbol{\alpha}$ é igual a $\dfrac{2\,c^2}{\operatorname{mod}\boldsymbol{\alpha}}$.

Sendo O uma origem qualquer a partir da qual construímos o vector $\boldsymbol{\alpha}$, e π um plano ortogonal a $\boldsymbol{\alpha}$, cortando a direcção de $\boldsymbol{\alpha}$ no ponto A tal que $\mathbf{OA}=\dfrac{2\,c^2}{\operatorname{mod}\boldsymbol{\alpha}}$, *em qualquer direcção* $\mathbf{OD}$ que encontra π no ponto P, o vector $\mathbf{u}=P-0$ satisfaz ao problema.



As soluções de (15) são, pois, *uma* para cada direcção*:* aquela cuja projecção sobre $\boldsymbol{\alpha}$ é a constante $\dfrac{2\,c^2}{\operatorname{mod}\boldsymbol{\alpha}}$.

Se tivermos em conta a condição suplementar $u^2<c^2$, as soluções possíveis formarão um *cone* de raio $\mathbf{AP}=c^2\dfrac{d^2}{1+d^2}$, em que $d^2=\dfrac{(v^2-c^2)}{(\mathbf{v}|\mathbf{r})^2}\left(\dfrac{r}{2c}\right)$.

A classroom note on the proof of Schur's lemma (*)

by Hugo Ribeiro

Let $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ be vector spaces over the same field, $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{B}$ non void families of linear mappings respectively on $\mathfrak{M}$ into $\mathfrak{M}$ and on $\mathfrak{N}$ into $\mathfrak{N}$, and F a linear mapping on $\mathfrak{N}$ into $\mathfrak{M}$ such that for any $B\in\mathfrak{B}$ there is $A\in\mathfrak{A}$ for which $AF=FB$. Schur's lemma says, now, that if $\mathfrak{B}$ is irreducible (2) then either F is the null mapping or it is non singular (and $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ have same dimension).

To prove this we first, remark that if we disregard, above, the word «linear» and substitute «vector spaces over the same field» by «sets», then we immediately obtain the following (involving just sets and mappings): if $\mathfrak{D}\subset\mathfrak{M}$ is such that for any $A\in\mathfrak{A}$, $A(\mathfrak{D})\subset\mathfrak{D}$ and if $\mathfrak{Z}$ is the set of all elements of $\mathfrak{N}$ having image in $\mathfrak{D}$, under F, then for any $B\in\mathfrak{B}$, $B(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{Z}$. (In fact, for any $B\in\mathfrak{B}$, $AF(\mathfrak{Z})=FB(\mathfrak{Z})$ for some $A\in\mathfrak{A}$, but $A(\mathfrak{D})\subset\mathfrak{D}$, hence $AF(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{D}$, so that $B(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{Z}$).

We have now the Schur's lemma, as a corollary, by just taking as $\mathfrak{D}$ the null subspace of $\mathfrak{M}$ and using some basic knowledge on linear mappings: for, then, $\mathfrak{Z}$ is a subspace of $\mathfrak{N}$ and, since on one hand for any $B\in\mathfrak{B}, B(\mathfrak{Z})\subset\mathfrak{Z}$ and on the other hand $\mathfrak{B}$ is supposed irreducible, we will have that either $\mathfrak{Z}$ is $\mathfrak{N}$ or it is the null subspace of $\mathfrak{N}$, hence either F is the null mapping or it is non-singular (3).

(1) Numa carta que nos dirigiu, donde *transcrevemos* os desenvolvimentos que seguem.

(*) We are grateful to Prof. N. JACOBSON for the following references to the same type of reasoning used in this proof: N. JACOBSON, The Theory of Rings, Am. Math. Soc., 19, p. 57, R. BRAUER, On sets of matrices with coefficients in a division ring. Tran. Am. Math. Soc., vol. 49, 1941, p. 514.

(2) That is, no proper subspace of $\mathfrak{N}$ is left invariant by all $B\in\mathfrak{B}$.

(3) Presented to the 1951 meeting of the Nebraska Section of the Mathematical Association of America.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

INSTITUTO DE MATEMÁTICA DE MENDOZA

Por iniciativa de seu Reitor, Dr. Y. FERNANDO CRUZ e sob a orientação do matemático português Dr. ANTÓNIO MONTEIRO, a Universidade Nacional de Cuyo (Argentina) criou em Mendoza um novo sector de seu Departamento de Pesquisas Científicas denominado *Instituto de Matemática*, o qual se devotará à pesquisa, formação de pesquisadores e difusão dos conhecimentos matemáticos, em colaboração com instituições análogas do país e do estrangeiro. O corpo científico do Instituto é constituido pelos matemáticos MISCHA COTLAR (Director), A. MONTEIRO, R. RICABARRA, E. ZARANTONELO, A. CALDERÓN, O. VARSAVSKY, G. KLIMOVSKY, M. GUTIERREZ BURZACO, O. VILLAMAYOR e D. VOELKER, além de um grupo de estudiosos procedentes de outras universidades argentinas. Os primeiros seminários programados tratarão de operadores não limitados, cones e aplicações à análise, transformação de LAPLACE, grupos de homotopia, hidrodinâmica matemática, teoria dos jogos e estrategia, teoria dos aneis e lógica matemática. O Instituto convidou o professor IRVING E. SEGAL, da Universidade de Chicago, Estados Unidos, a realizar cursos em sua séde. Serão publicados uma revista e fascículos com o material básico dos seminários. As actividades regulares do Instituto serão iniciadas em Março de 1954, sendo o seguinte o seu endereço: San Lorenzo 110, Mendoza, Argentina.

L. N.

(Nota extraída do «Boletin del Centro de Cooperacion Cientifica de la Unesco para America Latina», n.° 10, Jan-Fev. 1954).

INSTITUTO INTERNACIONAL DE ESTATÍSTICA

A 28.ª sessão do Instituto Internacional de Estatística realizou-se em Roma de 6 a 12 de Setembro de 1953.

Ainda que não estivesse incluido no programa da reunião, que compreendia sobretudo assuntos de produção, agricultura, standartização, etc., houve mais de uma dezena de comunicações de Estatística Matemática. Além de alguns matemáticos italianos, como CHERUBINO e FINETTI, participaram na reunião: BOREL, FRÉCHET e DARMOIS (França); R. FISHER e KENDALL (Inglaterra); HOTEING e MORGENSTERN (U. S. A.); SIXTO RIOS (Espanha), e outros.

Para o próximo biénio foi eleito presidente do Instituto, G. DARMOIS. A 29.ª sessão realizar-se-á no Rio de Janeiro em 1955.

M. Z.

COLÓQUIO SOBRE AS FUNÇÕES DE VÁRIAS VARIÁVEIS

C. B. R. M. Março de 1953

O Centro Belga de Investigação Matemática (C. B. R. M.) dedicou a sua 5.ª reunião internacional, que teve lugar em Março de 1953 em Bruxelas, à teoria das funções de várias variáveis. Os anteriores foram consagrados à Geometria Algébrica (1949 e 1952) à Topologia das variedades fibradas (1950) e à Geometria Diferencial (1951)*. Os próximos colóquios deverão ser consagrados às equações às derivadas parciais. Participaram vários matemáticos belgas e estrangeiros convidados pelo Centro. Transcrevemos a seguir a lista das conferências feitas já publicadas**:

F. SEVERI — *Quelques problèmes se rapportant aux fonctions analytiques de plusieurs variables.*

P. LETONG — *Fonctions plurisousharmoniques; mesures de* RADON *associées. Application aux fonctions analytiques.*

H. CARTAN — *Variétés analytiques complexes et cohomologie.*

J. P. SERRE — *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de* STEIN.

P. ROQUETTE — *L'Arithmétique des fonctions abéliennes.*

H BEHNKE — *Généralisation du théorème de* RUNGE *pour les fonctions multiformes de variables complexes.*

K. STEIN — *Analytische Projektion komplexer Mannigfaltigkeiten.*

E. MARTINELLI — *Sur l'extension des théorèmes de* CAUCHY *aux fonctions de plusieurs variables complexes.*

W. SAXER — *Sur les domaines de normalité des fonctions méromorphes de plusieurs variables.*

S. BERGMAN — *Kernel function and extended classes in the theory of functions of complex variables.*

M. Z.

* Vidè *Gazeta de Matemática* n.os 43, 48, 51 e 55.

** *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables*, GEORGES THONE, Liège et Messon & Cie. Paris, 1953.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS – 1954

De 2 a 9 de Setembro de 1954 teve lugar em Amsterdam o Congresso Internacional de Matemáticos.

No decurso da sessão de abertura, foram atribuídas as medalhas Fieds aos Professores J. P. Serre e K. Kodaira, pelo Presidente da Comissão das Medalhas de 1954, Prof. H. Weyl, que fez uma alocução sobre os trabalhos científicos dos matemáticos premiados.

Os trabalhos do Congresso estavam repartidos por 5 secções: I) Álgebra e teoria dos números ; II) Análise; III) Geometria e topologia; IV) Probabilidades e estatística; V) Física matemática e matemáticas aplicadas; VI) Lógica e fundamentos; VII) Filosofia, história e educação. As sessões de trabalho consistiam em conferências ou comunicações de vária duração: uma hora, meia hora e quinze minutos. Fizeram conferências duma hora os seguintes Professores: P. S. Alexandrov, K. Borsuk, R. Brauer, D. Van Dantzig, J. Dieudonné, S. Goldstein, G. Hajós, Harish-Chandra, B. Jessen, A. N. Kolmogorov, A. Lichenerowicz, J. von Neumann, J. Neymann, S. M. Nikolskii, B. Segre, G. L. Siegel, E. Stiefel, A. Tarski, E. C. Titchmarsh e K. Yosida; e conferências de trinta minutos os seguintes Professores: *Secção I*, H. Davenport, P. Erdös, E. Hlawka, N. Jacobson, H. Maasz, A. Néron, D. G. Northcott; *Secção II*, H. A. L. Behnke, F. Bureau, M. L. Cartwright, K. Chandrasekharam, L. Erdèly, W. K. Hayman, E. Hille, K. Kodaira, P. J. Myrberg, C. Pauc, A. Zigmund; *Secção III*, G. Ancochea, H. S. M. Coxeter, B. Eckmann, H. Freudenthal, D. Montgomery, H. S. Ruse, J. P. Serre, K. Yano; *Secção IV*, D. Blackwell, R. Fortet; *Secção V*, L. Collatz, G. Fichera, M. R. Hestenes, J. Kampé de Fériet, F. Rellich, J. J. Stoker, A. Weinstein; *Secção VI*, P. Lorenzen, J. Barkley; *Secção VII*, C. T. Daltry e K. Piene.

As conferências de menor duração eram geralmente seguidas de discussão ou pedidos de esclarecimento.

Já se encontra publicado o vol. II dos «Proceedings» do Congresso, que contém os resumos das comunicações enviados com uma certa antecedência. Foi superior a 1.500 o número de membros regulares do Congresso; cerca de 500 investigadores comunicaram resultados seus. Particularmente notável a afluência de jóvens. Uma parte importante das comunicações foi feita por assistentes, recém-licenciados ou mesmo estudantes, subsidiados pelos governos dos respectivos países e acompanhados pelos professores com os quais trabalham. Como sempre, uma das principais vantagens do Congresso consistiu no estabelecimento de relações e na ampla troca de impressões entre matemáticos das mais diversas proveniências.

A Delegação Oficial Portuguesa ao Congresso era presidida pelo Prof. José Vicente Gonçalves. Representava a Faculdade de Ciências do Porto o Prof. Jaime Rios de Sousa. Foi anunciado como representante da Sociedade Portuguesa de Matemática o Engenheiro António Gião, que não poude comparecer.

J. S. S.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

Por iniciativa do Instituto de Matemática Pura e Aplicada do Conselho Nacional de Pesquisas, Rio de Janeiro, encontram-se no Brasil onde permanecerão pelo período de um ano, os matemáticos Alexandre Grothendieck, da Universidade de Nancy, França e George Mostow, da Universidade Johns Hopkins, Baltimore, Estados Unidos.

O primeiro está ministrando em São Paulo um curso sobre espaços vectoriais topológicos e teoria da integração e o segundo realiza no Rio de Janeiro cursos sobre grupos de Lie e topologia algébrica. A convite também do conselho Nacional de Pesquisas, esteve durante dois meses no Brasil o professor Alexandre Weinstein, do Instituto de Dinâmica dos Flúidos e Matemática Aplicada, de Maryland, Estados Unidos. Durante esse tempo, realizou conferências no Rio de Janeiro, em São José dos Campos e em São Paulo sobre hidrodinâmica e aproximação de autovalores.

L. N.

CENTENÁRIO DO NASCIMENTO DE TORRES QUEVEDO

A Academia R. das Ciências de Madrid celebrou em Fevereiro passado o centenário do nascimento do notável engenheiro espanhol Torres Quevedo, famoso inventor.

A comemoração oficial teve lugar a 11 de Fevereiro e nela tomaram a palavra, entre outros, o Prof. P. Puig Adam sobre «Torres Quevedo, el calculo mecanico y la automatica» e o Eng J. Campos Estrens, presidente do Conselho de Obras Públicas, sobre «Torres Quevedo, ingeniero de caminos». As conferências de carácter científico, que tiveram lugar a 12, 13 e 14 do mesmo mês, foram a do Prof. C. Manneback sobre máquinas calculadoras electrónicas, a do Prof. L. Couffignal, sobre os progressos mais recentes de Cibernética e a do Prof. A. Ghizzetti sobre as investigações em curso no Instituto Nac. de Aplicações do Cálculo, de Roma.

M. Z.

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE GEOMETRIA DIFERENCIAL — Estraburgo, 1953

O «Centre National de la Recherche Scientifique» francês promoveu a organização dum colóquio internacional de Geometria Diferencial que teve lugar em Estraburgo de 26 a 31 de Maio deste ano. No colóquio participaram numerosos matemáticos franceses e estrangeiros. Deve-se principalmente aos Profs. C. Ehresmann e A. Lichnerowicz a organização desta reunião científica.

Realizaram-se as seguintes conferências, seguidas, como é habitual, de discussão:

E. T. Davies, (Southampton) — *Invariant theory of contact transformations.*

P. Dedecker, (Bruxelles) — *Calcul des variations; formes différentielles et champs géodésiques.*

H. Rund, (Bonn) — *Finsler geometry applied analytical dynamics.*

M. Villa, (Bologna) — *Recherche de types particuliers de transformations ponctuelles.*

T. J. Willmore, (Durham) — *Local and global properties of the harmonic riemannian spaces.*

E. Heinz, (Goettigen) — *Ein Satz über die Gaussche Krümmung ein Minimalfläche mit einer eineindentigen Projection auf eine Ebene.*

E. Bompiani (Roma) — *Procédés différentiels pour trouver des caractères de certaines variétés algébriques.*

S. S. Chern, (Chicago) — *Infinite continuous groups.*

Ch. Ehresmann, (Strasbourg) — *Structures infinitésimales et pseudogroupes de Lie.*

P. Libermann, (Strasbourg) — *Sur certaines structures infinitésimales régulières.*

A. Lichnerowicz, (Paris) — *Espaces homogènes kähleriens.*

B. Eckmann, (Zurich) — *Sur les structures complexes et presque complexes.*

N. H. Kuiper, (Wageningen) — *Sur les surfaces localement affines.*

J. L. Koszul, (Strasbourg) — *Sur certains espaces de Lie.*

A. Weil, (Chicago) — *Points infiniment voisins sur les variétés.*

R. Thom, (Strasbourg) — *Variétés différentiables cobordantes.*

L. Schwartz, (Paris) — *Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe.*

Souriau, (Tunis) — *Géométrie différentielle symplectique.*

G. Reeb, (Strasbourg) — *Sur certaines propriétés des espaces de Finsler et de Cartan.*

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO 3.º CICLO DO ENSINO LICEAL E DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — Ano de 1954 — Ponto 1.

3781 — Resolva a inequação

$$1-\frac{2\,(x-1)^3}{3}<\frac{1}{6}\,(x-\sqrt{2})\,(x+\sqrt{2})-\frac{2}{3}\,x^3$$

R: *A inequação proposta é equivalente sucessivamente às seguintes:* $6-4\,(x^3-3\,x^2+3\,x-1)<x^2-2-4\,x^3$; $11\,x^2-12\,x+12<0$. *Os zeros do primeiro membro da última inequação são os números* $x_1=(6+i\sqrt{96}):11$ *e* $x_2=(6-i\sqrt{96}):11$ *e o trinómico, para qualquer valor real de* x *toma sempre o sinal do coeficiente de* x^2*; por isso a inequação não tem soluções reais.*

3782 — Simplifique a fracção

$$\frac{x^2+(\sqrt{a}-\sqrt{b})\,x-\sqrt{ab}}{x^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,x+\sqrt{ab}}$$

R: *A fracção pode escrever-se:* $[(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{b})]:[(x-\sqrt{a})(x-\sqrt{b})]$ *por serem* $-\sqrt{a}$ *e* $+\sqrt{b}$ *as raizes do numerador e* $+\sqrt{a}$ *e* $+\sqrt{b}$ *as raizes do denominador. A fracção simplificada será* $(x+\sqrt{a}):(x-\sqrt{a})$.

3783 — Desenvolva

$$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^8$$

Simplificando os seus termos. Verifique o desenvolvimento para $x=4$.

R: *Será* $(\sqrt{x}+1/\sqrt{x})^8=(x+1)^8:(\sqrt{x})^8=(x^8+8\,x^7+28\,x^6+56\,x^5+70\,x^4+56\,x^3+28\,x^2+8\,x+1):x^4=x^4+8\,x^3+28\,x^2+56\,x+70+56:x+28:x^2+8:x^3+1:x^4$.

3784 — Escreva a equação do 1.º grau que tem para raizes

$$x=13\,t+5$$
$$y=10\,t-1$$

Sendo t um número inteiro qualquer.

R: *O enunciado do problema não é suficientemente claro pois uma solução seria* $x+y=23t+4$ *e há uma infinidade de equações que, nestes termos, verificam o enunciado como fàcilmente se reconhece. Julga-se que se pretende uma equação em* x *e* y *do 1.º grau cujas soluções inteiras sejam dadas por aquelas fórmulas e nessas condições a equação será* $x=13\times(y+1):10+5$ *ou ainda* $10x-13y=63$.

3785 — Defina permutações de 4 letras. Escreva-as de modo a mostrar a sua lei de formação e verifique o seu número pela fórmula respectiva.

R: $P_4=4!=24$.

3786 — A área dum rectângulo é igual a 20 m² e o seu perímetro igual a 16 m. Determine o ângulo que fazem entre si as diagonais.

R: *Se forem* x *e* y *os lados do rectângulo as suas medidas serão as raizes da equação* $X^2-8X+20=0$ *e portanto* $X=4\pm 2i$; *logo não existe nenhum rectângulo com aquelas medidas.*

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Físico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1954 — Ponto n.º 1.

3787 — Provar que, se dois números naturais não são divisíveis por 3, ou a sua soma ou a sua diferença é divisível por 3.

R: *Se dois números naturais não são divisíveis por* 3 *ou são da forma* $3n+1$ *ou da forma* $3p-1$. *Se os dois são da mesma forma, digamos* $3n+1$ *e* $3m+1$ *a sua diferença* $3n+1-(3m+1)=3(n-m)$ *é um múltiplo de* 3. *Se são um da forma* $3m+1$ *o outro da forma* $3p-1$ *a sua soma* $3m+1+3p-1=3(m+p)$ *é um múltiplo de* 3.

3788 — Determinar o menor quadrado perfeito que é múltiplo de 4536.

R: *Como* $4536=2^3\times3^4\times7$ *o número pedido é evidentemente* $4536\times2\times7=63504$.

3789 — Quais os valores de a para os quais $50+a$ é divisível por a? Justificar.

R: *Como* a *tem de dividir* 50 *por dividir a outra parcela da soma,* a *será um divisor de* 50 *e portanto um dos números* 1, 2, 5, 10, 25, *ou* 50.

3790 — Determinar os três menores múltiplos inteiros positivos de 28 que divididos por 15 dão o resto 9.

R: *Os múltiplos de* 28 *são da forma* $28x$ *onde* x *é um inteiro, e portanto terá que ser* $28x=15y+9$ *para que divididos por* 15 *dêm resto* 9. *Trata-se agora de determinar as três menores (para* x*) soluções inteiras e positivas daquela equação. Por simples substituição é fácil ver que* 3 *é o primeiro valor de* x *para o qual se verifica o enunciado e as soluções daquela equação são da forma* $x=3+15m$ *e* $y=5+28m$. *Como só nós interessam os valores de* x *teremos os valores* 3, 18 *e* 33 *e portanto os múltiplos de* 28 *pedidos são* **84, 504** *e* **924**.

3791 — Determinar m de modo que $x^2-2mx+5m+6$ seja positivo para todos os valores reais de x.

R: *Como se trata de um trinómio do segundo grau, em* x, *basta que o descriminante seja negativo, isto é, que seja* $m^2-(5m+6)<0$, *ou* $m^2-5m-6<0$; *como as raizes deste segundo trinómio são* $m_1=6$ *e* $m_2=-1$ *basta que seja* $-1<m<6$ *para que se verifiquem as condições do enunciado.*

3792 — Determinar os valores de x que tornam iguais o 4.º e o 5.º termos do desenvolvimento de $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{x-3}\right)^7$.

R: *Os 4.º e 5.º termos do desenvolvimento são da forma* $T_4={}^7C_3\left(-\frac{1}{x-3}\right)^3\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4$ *e* $T_5={}^7C_4\times\left(-\frac{1}{x-3}\right)^4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3$. *Como além disso é* ${}^7C_3={}^7C_4$ *obtem-se* $-\left(\frac{1}{x-3}\right)^3\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^4=\left(\frac{1}{x-3}\right)^4\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^3$ *ou ainda* $-\frac{x}{2}=\frac{1}{x-3}$ *e* $x(x-3)+2=0$ *ou* $x^2-3x+2=0$ *equação que tem as raizes* $x_1=2$ *e* $x_2=1$ *que por serem diferentes de* 3 *são os valores procurados.*

Exame de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras—Ano de 1954

I

3793 — As raizes da equação $x^2-(2m+1)x+4m=0$ (em que $m>1$) representam as medidas dos catetos dum triângulo rectângulo. Exprima a medida da hipotenusa do referido triângulo em função do parâmetro m. (Atendo ao teorema de Pitágoras).

R: *Se forem* x_1 *e* x_2 *as raizes da equação é* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$; *se designarmos por* h *a hipotenusa será* $h_1^2=x_1^2+x_1^2$, *e, por isso,* $h^2=(2m+1)^2-8m=(2m-1)^2$ *donde é* $h=2m-1$; *a solução* $1-2m$ *não serve por ser* $m>1$, *pois seria então* $1-2m<0$.

3794 — Quantos números pares maiores do que 10.000 se podem formar com os algarismos 0, 2, 5, 7 e 8 e de modo que em cada número não figurem algarismos repetidos?

R: *Os números terão que conter 5 algarismos e* P_5 *será o seu número total contando aqueles que começam por zero em número de* P_4; *estão em* P_5 *incluídos também os que terminam por* 7 *e por* 5. *De modo que para obtermos o número pedido teremos que subtrair a* P_5 *o número* P_4 *e depois* $(P_4-P_3)\times 2$ *porque* P_4-P_3 *é o número de números formados com aqueles algarismos que terminam por* 5 *ou* 7 *e não começam por zero. Assim teremos*

$$P_5-P_4-2(P_4-P_3)=P_5-3P_4+2P_3=$$
$$=2.3.4.5-3.2.3.4+2.2.3=2.3(20-12+2)=60.$$

II

3795 — Calcule $f(x)=\left[\sec\left(x+\frac{7\pi}{2}\right)-\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}\right]:$ $:\operatorname{sen} x$ para $x=\pi/4$.

R: $f(\pi/4)=[\operatorname{sen}(\pi/4+7\pi/2)+\operatorname{tg} 5.\pi/4]:\operatorname{sen}\pi/4=$ $=(\sqrt{2}-1):\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2}$ por ser $\operatorname{tg} 5\pi/4=1$, $\operatorname{sen}\pi/4=\sqrt{2}/2$ e $\sec 15\pi/4=\sqrt{2}$.

3796 — Verifique a identidade $(\operatorname{cosec} x+\sec x)^2:(\operatorname{cosec}^2 x+\sec^2 x)=1+\operatorname{sen} x\cos x$.

R: *Como* $\operatorname{cosec} x+\sec x=(\operatorname{sen} x+\cos x):(\operatorname{sen} x\cos x)$ *será o primeiro membro de igualdade proposta:* $(\operatorname{sen} x+\cos x)^2$ *e portanto igual a* $1+2\operatorname{sen} x\cos x$.

III

3797 — Quais são os números inferiores a 200 cuja *diferença* é 96 e cujo *máximo divisor comum* é 24? Justifique a resposta.

R: *Sejam* a *e* b *os números e* d *o seu máximo divisor comum. Será* $a=d.p$ *e* $b=d.q$ *onde* p *e* q *são números primos entre si. Assim será* $a=24.p$ *e* $b=24.q$ *e* $a-b=96=24(p-q)$ *de modo que é* $p-q=4$, *por outro lado tem que ser* $a=24.p<200$ *e* $b<200$ *donde é* $p<9$ *e* $q<9$. *Os valores de* p *e* q *só podem por isso ser ou* 7 *e* 3 *ou* 5 *e* 1. *Os números serão então ou* 168 *e* 72 *ou* 120 *e* 24.

3798 — Demonstre que a soma de quatro inteiros *consecutivos* não divisíveis por 5 é divisível por 5, mas não é divisível por 4.

R: *Sejam* $5n+1, 5n+2, 5n+3$ *e* $5n+4$ *os números consecutivos nas condições do enunciado. A sua soma é* $20n+10$ *que é múltiplo de* 5. *Esta soma não é um múltiplo de* 4 *porque sendo-o a primeira parcela, o não é a segunda.*

Soluções dos n.os 3781 a 3798 de J. Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de frequência — 25 de Março de 1954.**

3799 — Sendo $f(x)=\frac{a+x}{a-x}$ resolva os seguintes problemas:

a) Determine os pontos de intersecção da imagem de $f(x)$ com os eixos e escreva a equação da circunferência que passa por esses pontos, com centro na recta $X=1$.

b) Escreva a equação geral da tangente à imagem de $f(x)$.

Calcule a por forma que a recta $Y=X+1$ faça um ângulo de 60° com a tangente à curva no ponto $x=0$.

c) Calcule $f^{(n)}(x)$, $Pf(x)$ e $P(Pf(x))$.

R: $(-a,0)$ e $(0,1)$ *são os traços. Sejam* $\alpha=1$ *e* β *as coordenadas do centro; a substituição das coordenadas dos traços na equação* $(x-1)^2+(y-\beta)^2=r^2$ *conduz a:* $1+(1-\beta)^2=r^2$ *e* $(a+1)^2+\beta^2=r^2$ *daqui resultam:* $\beta=\frac{1-2a-a^2}{2}$ $\quad r^2=1+\frac{(a+1)^4}{4}$.

A equação da circunferência é:

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{1-2a-a^2}{2}\right)^2=1+\frac{(a+1)^4}{4}.$$

A equação geral da tangente:

$$Y-\frac{a+x}{a-x}=\frac{2a}{(a-x)^2}(X-x)$$

que no ponto $x=0$ *conduz à equação* $Y=\frac{2}{a}X+1$.

Para determinar a *de modo que* $Y=X+1$ e $Y=\frac{2}{a}X+1$ *façam ângulo de* 60° *deverá ser*

$$\sqrt{3}=\left|\frac{1-\frac{2}{a}}{1+\frac{2}{a}}\right| \quad \text{donde vem} \quad 3\left(1+\frac{2}{a}\right)^2=\left(1-\frac{2}{a}\right)^2$$

ou $a^2+8a+4=0$; $a=-4\pm2\sqrt{3}$.

$$f(x)=\frac{a+x}{a-x}\;;\; f'(x)=\frac{2a}{(a-x)^2}\;;\; f''(x)=$$
$$=2a\cdot\frac{2}{(a-x)^3}\;;\; f'''(x)=2a\cdot 2\cdot\frac{3}{(a-x)^4}\;;\cdots;$$
$$;\; f^{(n)}(x)=\frac{2a\cdot n!}{(a-x)^{n+1}}$$

$\frac{x+a}{-x+a}=-1+\frac{2a}{-x+a}$ *donde* $P\,f(x)=-x-$

$-2a\log(a-x)+C^{te}\quad P(P\,f(x))=-\frac{x^2}{2}-$

$=2a\,P\log(a-x)+x\cdot C^{te}+C^{te}$ *onde se deve substituir*

$$P\,1\cdot\log(a-x)=x\cdot\log(a-x)+P\frac{x}{a-x}=$$
$$=x\log(a-x)+P-1+\frac{a}{a-x}=x\log(a-x)-$$
$$-x-a\log(a-x).$$

II

3800 — Prove que uma sucessão de termos positivos decrescentes tem limite finito. Considere uma sucessão $S)\,u_1, k, u_2, k, \cdots, k, u^n, k\cdots$ onde a constante k alterna com os termos positivos decrescentes da sucessão u_n de limite $l\geqslant 0$: com $k<l, k=l, k>l$ indique para cada caso, os limites máximo e mínimo da sucessão S) e os limites de Weierstrass do conjunto dos valores dos seus termos. Quando é que a sucessão S) tem limite? Justifique todas as suas respostas.

Tome a sucessão em que os termos $u^n=\frac{\log n}{n}+\frac{a\cdot n+1}{n+1}$ alternam com $v_n=b\cdot\log\left(\frac{n+b}{n}\right)^n$. Determine a relação entre as constantes a e b para que a sucessão tenha limite. Conclua que a sucessão não tem limite sempre que $a<0$ e indique, neste caso, os valores dos limites máximo e mínimo.

R: $\lim\frac{\log n}{n}+\lim\frac{a\,n+1}{n+1}=a\,;b.\lim n.\log\left(1+\frac{b}{n}\right)=$ $=b\cdot\lim n\cdot\frac{\xi b}{n}=b^2\cdot\lim\xi=b^2$. *Os sub-limites deverão ser iguais e portanto* $a=b^2$ *nunca possível se* $a<0$.

III

3801 — Demonstre que, com $H>0$, a série $H\varepsilon_1-H\varepsilon_2+H\varepsilon_3-\cdots$ onde $\lim\limits_{n=\infty}\varepsilon_n=+0$, é convergente. Mostre também que, se $\lim\limits_{n-\infty}n^\alpha\cdot\varepsilon_n=l\neq 0,\infty$ a mesma série é absolutamente convergente com $\alpha>1$ e simplesmente convergente com $\alpha\leqslant 1$. Determine o intervalo de convergência absoluta da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+2^{n-1})\,x^{n-1}$ e mostre que a sua soma é $S=\frac{x^2-4x+2}{(1-x)^2(1-2x)}$.

R: *Pondo* $u_n=(-1)^{n-1}\cdot H\cdot\varepsilon_n$ *vem*

$$|S_{n+p}-S_n|=|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|=|(-1)^n H\,\varepsilon_{n+1}+$$
$$+\cdots+(-1)^{n+p-1}H\,\varepsilon_{n+p}|=H\cdot|\varepsilon_{n+1}-(\varepsilon_{n+2}-\varepsilon_{n+3})-\cdots|$$

se supusermos agora que o símbolo $\lim\limits_{n=\infty}\varepsilon_n=+0$ *significa que* ε_n *tende monotonamente para zero, então os parêntesis* $(\varepsilon_{n+2}-\varepsilon_{n+3})\cdots$ *são positivos e pode concluir-se que* $|S_{n+p}-S_n|\leqslant H\cdot\varepsilon_{n+1}$ *donde se conclui, só então, a convergência da série.*

Como $|u_n|=|(-1)^{n-1}H\,\varepsilon_n|=H\,\varepsilon_n$ *a razão*

$$\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^\alpha}}=H\cdot n^\alpha\cdot\varepsilon_n,$$

por ser $\lim n^\alpha\,\varepsilon_n=l\neq 0,\infty$, *tende para limite finito. As duas séries terão a mesma natureza.*

Para calcular o intervalo de convergência absoluta da série tem-se que calcular o limite de $|x|\cdot\frac{n+1+2^n}{n+2^{n-1}}$.

Como 2^{n-1} *tende mais ràpidamente para infinito que* n, *o cociente* $\frac{n+1+2^n}{n+2^{n-1}}$ *tem o mesmo limite que o cociente* $\frac{2^n}{2^{n-1}}$.

Então o intervalo de convergência é dado por $2|x|<1$. *Como o termo geral* $(n+2^{n-1})\,x^{n-1}$ *se decompõe em* $n\,x^{n-1}+(2x)^{n-1}$ *a soma da série, para valores de* x *tais que* $|x|<\frac{1}{2}$, *é igual à soma das somas das duas séries* $\sum\limits_{n=1}n\,x^{n-1}$ *e* $\sum\limits_{n=1}(2x)^{n-1}$.

Para a primeira série tem-se

$$(1-x)\,S_n=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-n\,x^n=$$
$$=\frac{1-x^n}{1-x}-n\,x^n$$

o que nos dá $\sum\limits_{n-1}n\,x^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$.

Por outro lado

$$\sum_{n=1}(2x)^{n-1}=\frac{1}{1-2x}.$$

Temos pois

$$S=\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{1}{1-2x}=\frac{2-4x+x^2}{(1-x)^2(1-2x)}.$$

IV

3802 — Seja $f(x)$ limitada no seu domínio X e $\underline{a}$ um ponto de acumulação deste conjunto. Defina $\overline{f(a)}$, $\underline{f(a)}$ e a oscilação $w(a)$ de $f(x)$.

Que pode afirmar sobre o $\lim\limits_{x=a} f(x)$ quando $w(a)=0$? Prove a sua afirmação.

Estude a continuidade de $f(x)=e^{-x^2}$ e $g(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ em $x\,\infty$ e mostre que a uma das funções se pode aplicar o teorema de Rolle no intervalo $(-\infty,+\infty)$.

Demonstre o teorema de Rolle.

R: *Se forem* $L(a,\varepsilon)$ *e* $l(a,\varepsilon)$ *os limites superior e inferior weierstrassianos dos valores da função na parte nunca vazia do domínio* X *que cai na vizinhança* ε *do ponto* a, *vem:* $\overline{f(a)}=\lim\limits_{\varepsilon=0} L(a,\varepsilon)$; $\underline{f(a)}=\lim\limits_{\varepsilon=0} l(a,\varepsilon)$; $w(a)=\overline{f(a)}-\underline{f(a)}$.

Estes limites existem sempre, próprios ou impróprios, qualquer que seja o modo como ε *tende para zero.*

A oscilação $w(a)$ *é positiva ou nula, e acaba-se a sua definição dizendo que* $w(a)=+\infty$ *sempre que um ou dois limites* $\underline{f(a)}, \overline{f(a)}$ *forem impróprios.*

Tem-se sempre $L(a,\varepsilon) \geqslant f(x) \geqslant l(a,\varepsilon)$ *e portanto* $\overline{f(a)} \geqslant f(a+0) \geqslant f(a-0) \geqslant \underline{f(a)}$ *e os limites laterais existem sempre* $w(a)=0$ *e necessàriamente iguais: a função tem sempre limite quando a oscilação é nula e esse limite é igual ao valor comum, finito,* $\overline{f(a)}=\underline{f(a)}=\lim\limits_{x=a}(x)$.

Se o ponto a *pertence ao domínio* X *então:*

$$\lim_{x=a} f(a)=f(a)\cdot\lim_{x=-\infty} e^{-x^2}=\lim_{x=+\infty} e^{-x^2}=0\,;$$

$$;\ \lim_{x=-\infty}\frac{1}{1+e^{-x}}=0\,;\ \lim_{x=+\infty}\frac{1}{1-e^{-x}}=1\,.$$

O teorema de Rolle *aplica-se à primeira função.*

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 2.º Exame de frequência — 3 de Junho de 1954.

I

3803 — Dada a função $z=f(x,y)$ assim definida:
1.º — $f(x,y)=0$ se $x+\pi y=0$.

2.º — $f(x,y)=x\cdot y\cdot\cos\dfrac{\pi x+\frac{\pi^2}{2}y}{x+\pi y}$ para qualquer outro par de valores (x,y).

a) Calcular $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, $f''_{xy}(0,0)$ e $f''_{yx}(0,0)$. É aplicável o teorema de Schwarz no ponto $(0,0)$?
b) Mostrar que a função é homogénea e verificar com $f(x,y)$ a identidade de Euler.

R: *Os cálculos das derivadas em* $(0,0)$ *são directos, a partir das definições:* $\lim\limits_{x=0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=f'_x(0,0)$; *a origem é um dos pontos que faz* $x+\pi y=0$ *e portanto* $f(0,0)=0$, $f(x,0)$, *quando* $x\neq 0$, *é dado pela segunda expressão analítica* $f(x,0)=0$; *então a razão incremental é sempre* $\dfrac{0}{x}=0$, *logo* $f'_x(0,0)=0$. *Do mesmo modo se calcula* $f'_y(0,0)=0$.

Para calcular $f''_{xy}(0,0)$ *temos que calcular* $\lim\limits_{y=0}\dfrac{f'_x(0,y)-f'_x(0,0)}{y}$ *e para isso vamos calcular em primeiro lugar* $f'_x(0,y)$. Tem-se por definição:

$f'_x(0,y)=\lim\limits_{x=0}\dfrac{f(x,y)-f(0,y)}{x}$ *mas* $f(0,y)=0$ *e*

portanto $\lim\limits_{x=0} y\cdot\cos\dfrac{\pi x+\frac{\pi^2}{2}y}{x+\pi y}=y\cdot\cos\dfrac{\pi}{2}=0$.

Então resulta $f''_{xy}(0,0)=0$.

Para calcular $f''_{yx}(0,0)=\lim\limits_{x=0}\dfrac{f'_y(x,0)-f'_y(0,0)}{x}$ *temos que calcular em primeiro lugar o valor de* $f'_y(x,0)$.

Este é dado por $\lim\limits_{y=0}\dfrac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=$

$=\lim\limits_{y=0} x\cos\dfrac{\pi x+\frac{\pi^2}{2}y}{x+\pi y}=x\cos\pi=-x$. *Resulta então* $f''_{yx}(0,0)=-1$.

A homogeneidade e a identidade de Euler, *verifica-se como para qualquer outra função em qualquer região do plano onde não há pontos da recta* $x+\pi y=0$.

Vai-se portanto tirar o que for preciso à segunda expressão analítica da função.

II

3804 — Defina zero simples e prove que tal zero é isolado e que a função muda de sinal quando x passa por ele.

Se no intervalo (a,b) a sucessão de Fourier é de 5.ª ordem e apresenta as seguintes variações:

	a	b
$f\ (x)$	+	—
$f'\ (x)$	—	+
$f''\ (x)$	+	+
$f'''\ (x)$	—	0
$f^{IV}\ (x)$	+	+
$f^{V}\ (x)$	—	—

Indique, justificando, o número de zeros de $f(x)$ em (a,b). Baseando-se na resposta anterior diga se $f(x)$ poderia ser um polinómio de grau par e coeficientes reais sendo a e b respectivamente os limites deficiente e excedente dos zeros. Porque?

Utilizando a sucessão de Fourier verifique que o polinómio $x^4-4x^3+8x^2-8x+4$ só tem raízes imaginárias. Calcule-as sabendo que uma raíz é dupla e apresente a decomposição do polinómio em factores primos.

R: *Provemos que* $f'''(x)$ *imediatamente à esquerda de* b *tem sinal negativo; com efeito, se em* $b-\varepsilon$ *tivesse sinal positivo,* $f'''(x)$ *teria um zero no interior de* (a,b) *e teria entre esse zero e* b, *um máximo o que daria para* $f^{IV}(x)$ *um zero no interior de* (a,b) *que não é acusado pela respectiva sucessão de* FOURIER.

Então em $b-\varepsilon$ *os sinais da sucessão de* FOURIER *de* $f(x)$ *são os mesmos que na coluna* b *depois de substituir o zero pelo sinal negativo.*

A função $f''(x)$ *não tem zeros no intervalo* (a,b); *pode pois encurtar-se a sucessão de* FOURIER, *de acordo com a definição, e ficarmos apenas com as tres primeiras funções. Perda de uma variação, logo,* $f(x)$ *tem um só zero real no intervalo* (a,b).

Os limites deficiente e excedente dos zeros do polinómio $x^4-4x^3+8x^2-8x+4$ *são respectivamente* 0 *e* 1.

	0	1
$x^4-4x^3+8x^2-8x+4$	+	+
$4(x^3-3x^2+4x-2)$	—	0
$4(3x^2-6x+4)$	+	+
$24(x-1)$	—	0
24	+	+

Por um estudo semelhante ao anterior tomam-se os sinais em $1-\varepsilon$, *substituindo os zeros por sinais negativos. A sucessão reduz-se às duas primeiras funções e o polinómio não tem zeros reais. Representando por* $a+bi$ *a raiz dupla, a soma das raizes é* $4a=4$ *donde* $a=1$. *O produto das raizes é* $(a^2+b^2)^2=4$ *donde* $1+b^2=\pm 2$ *ou* $b^2=\pm 2-1$ *e como* b *tem de ser real vem* $b=\pm 1$. *Então* $f(x)=(x-1+i)(x-1+i)(x-1-i)(x-1-i))=[(x-1)^2+1]^2$.

III

3805 — Diga o que entende por uma função $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ e deduza daí a fórmula da diferencial total.

Prove que sendo $x=\varphi(t)$ e $y=\psi(t)$ diferenciáveis no ponto t_0 e $f(x,y)$ diferenciável no ponto correspondente $x_0=\varphi(t_0)$, $y_0=\psi(t_0)$ também a função composta $F(t)=f(\varphi,\psi)$ é diferenciável no ponto t_0. Deduza também a expressão de $F'(t_0)$.

Dadas as funções $f(x,y)$, $x=\varphi(u,v)$ e $y=\psi(u,v)$ e feita composição $F(u,v)=f(\varphi,\psi)$ enuncie uma proposição que constitua a generalização do teorema anterior, indicando também as expressões de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial F}{\partial v}$.

Tome a curva plana de equação $x^2+2y^2-3=0$ e deduza a equação da superfície gerada pela sua revolução em torno de $\overline{Ox}$.

R: *A equação da superfície é* $y^2+z^2=\dfrac{3-x^2}{2}$ *ou*

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{3/2}+\frac{z^2}{3/2}=1.$$

IV

3806 — Demonstre que um determinante é nulo quando tiver duas filas iguais ou proporcionais.

Determine as soluções da equação

a) sem desenvolver o determinante

b) Desenvolvendo o determinante pelo teorema de LAPLACE.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3x & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

R: *Multiplicando por dois a primeira linha, ela ficará igual à segunda quando* $6x=4$ *donde* $x=\dfrac{2}{3}$. *As duas últimas linhas serão iguais se* $x=1$. *São estes os zeros da equação.*

Desenvolvendo segundo os elementos da primeira coluna: $4(x-1)-2\cdot 3x\cdot(x-1)=2(x-1)(2-3x)=0$.

I. S. C. E. F. — MATEMÁTICAS GERAIS — **Exame final — 20 de Julho de 1954.**

I

3807 — Dada a função $f(u,v)=e^{2u+3v}$ com $u=x+y$, $v=x-y$ e designando por $F(x,y)$ a função composta, calcular $\dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}$ e $\dfrac{\partial^n F}{\partial y^n}$.

Considere a superfície $z=e^{-2u-3v}\left(x^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}+y^2\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right)$ e determine o plano tangente paralelo ao plano $x+y+z+1=0$.

R: $$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2e^{2u+3v}+3e^{2u+3v}=5e^{2u+3v}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=10e^{2u+3v}+15e^{2u+3v}=5^2\cdot e^{2u+3v}$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)\frac{\partial v}{\partial x}=5^3 e^{2u+3v}$$

....

$$\frac{\partial^n F}{\partial x^n}=5^n\cdot e^{5x-y}.$$

Do mesmo modo, ou por qualquer outro caminho, se tem: $\dfrac{\partial^n F}{\partial y^n}=(-1)^n e^{5x-y}$. *O plano tangente à superfície* $Z=25x^2+y^2$ *tem por equação* $Z-z_0=50x_0(X-x_0)+2y_0(Y-y_0)$ *que ordenada convenientemente dá* $-50x_0X-2y_0Y+Z+50x_0^2+2y_0^2-z_0=0$. *Este plano deverá ser paralelo a* $x+y+z+1=0$ *e portanto temos as condições* $\dfrac{-50x_0}{1}=\dfrac{-2y_0}{1}=1$ *que dão imediatamente o ponto de contacto.*

II

3808 — Dadas as equações:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z + u = 0 \\ x + y + z + u = 0 \\ x - y - z = 1 \\ x + z - u = 2 \\ 4y + 3z + \alpha u = -3 \\ \beta x + u = 1 . \end{cases}$$

Determinar α e β por forma que as duas últimas sejam uma combinação linear das quatro primeiras. Determinar neste caso a solução do sistema.

R: *Condense-se a matriz*

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & \alpha & -3 \\ \beta & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & \alpha & -3 \\ 0 & -2\beta & -2\beta & 1-\beta & 1 \end{array}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & \alpha & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta & 1 \end{array}\right| \rightarrow \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\beta & 1 \end{array}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left|\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\beta \end{array}\right|$$

portanto: $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, $u = -1$.

III

3809 — Utilize a sucessão de Fourier para a separação dos zeros do polinómio $f(x) = x^5 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$. O polinómio tem raizes imaginárias? Porquê?

Calcule a maior raíz pelo método de aproximação de Newton (utilizar apenas a primeira aproximação).

R: *A sucessão de* Fourier *apresenta-se do seguinte modo.*

	-2	-1	0	$1/3$	1	2
$f\ (x)$	$-$	$+$	$+1$	$+$	-2	$+15$
$f^{I}\ (x)$	$+$	$-$	-3	$-$	-2	$+57$
$f^{II}\ (x)$	$-$	$-$	$+2$	$-$	$+10$	$+$
$f^{III}\ (x)$	$+$	$+$	-12	$-$	$+48$	$+$
$f^{IV}\ (x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f^{V}\ (x)$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
V	5	4	4	2	1	0

A tangente a $f(x)$ *no ponto* $x = 0$ *corta* $\overline{OX}$ *no ponto* $x = 1/3$; *entre* 0 *e* $1/3$ *não há zeros de* $f(x)$ *(condição* Fourier*)* $f(x)$ *só tem três zeros reais.* $f''(x)$ *mantem sinal no intervalo* $(1, 2)$: *o extremo favorável é* 2; $r = 2 - \frac{15}{57}$.

Enunciados e soluções dos n.os 3799 a 3809 de J. R. Albuquerque.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — 2.º Exame de Frequência, 1952-53.

3810 — *Triedros.* Por um ponto de LT conduzir uma recta que faça ângulos de $40°$ com o plano vertical de projecção e com um plano vertical inclinado $70°$.

3811 — *Secções planas.* Dado um plano vertical inclinado $40°$ sobre o plano vertical de projecção, conduzir por um dos seus pontos as rectas que lhe pertencem e fazem ângulos de $40°$ com um plano de perfil.

3812 — *Planos tangentes.* Conduzir por um ponto de LT os planos que distam 3 cm. de uma frontal com 4 cm. de afastamento.

Enunciados dos n.os 3810 a 3812 de Luís Albuquerque.

ANÁLISE INFINITESIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º Exame de frequência prático — 18 de Janeiro de 1954.

I

3813 — *a*) Integrar a fracção racional

$$\frac{\alpha x + \beta}{(x^2-1)^3 (x^6+1)^m (x^8-1)^n (x^2+1)^2}$$

pelo método de Fubini. (Dispensa-se a determinação das constantes); *b*) Na hipótese de $m = n = 0$, $\alpha = \beta = 1$ decompor a fracção racional, determinando as constantes de decomposição pelos métodos mais convenientes; *c*) Ainda na hipótese da alínea *b*) descreva, sucintamente, os métodos que poderia utilizar na determinação das constantes de decomposição da fracção em fracções elementares.

R: a) $$\int \frac{\alpha x + \beta}{(x^2-1)^3 (x^6+1)^m (x^8-1)^n (x^2+1)^2} dx =$$

$$= P_{6m+8n-3}(x) \times (x^2-1)^{-(2+n)} \times (x^2+1)^{-(m+n+1)} \times$$

$$\times (x^2 - \sqrt{2}x + 1)^{1-n} \times (x^2 + \sqrt{2}x + 1)^{1-n} \times$$

$$\times\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]^{1-m}\times\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right]^{1-m}+$$
$$+A\log(x+1)+B\log(x-1)+D\log(x^2+1)+$$
$$+E\operatorname{arctg}x+F\log(x^2-\sqrt{2}\,x+1)+$$
$$+G\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+H\log(x^2+\sqrt{2}\,x+1)+$$
$$+I\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+J\log\left[\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]+$$
$$+K\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+L\log\left[\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right]+$$
$$+M\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}+N.$$

b) $$\int\frac{dx}{(x-1)^3(x+1)^2(x^2+1)^2}=-\frac{1}{32(x-1)^2}+$$
$$+\frac{3}{16(x-1)}+\frac{19}{64}\log(x-1)+\frac{1}{16(x^2+1)}-\frac{1}{16(x^2+1)}-$$
$$-\frac{6}{16}\operatorname{arctg}x-\frac{3}{32}\log(x^2+1)+C.$$

II

3814 — Calcular $I_{m,n}=\int\frac{(1+x)^m}{(1+x)^n}dx$ m e n inteiros, utilizando de preferência uma fórmula recorrente. Calcule em particular os integrais:

a) $\int\frac{1+x}{1-x}dx$ b) $\int(1-x^2)^2\,dx$ c) $\int\frac{dx}{(1-x^2)^3}$.

Há valores fraccionários de m ou n ou de ambos para os quais $I_{m,n}$ seja primitivável sem recurso à integração por séries? Quais são? Integre por séries $I_{m,n}$ para os valores de m e n em que for caso disso, indicando qual o intervalo de legitimidade da utilização de tal processo de integração. Para que valores racionais de m e n existe o integral $I'_{m,n}=\int_{-1}^{+1}\frac{(1+x)^m}{(1-x)^n}dx$. Exprima $I'_{m,n}$ na função β, escolhendo convenientemente os argumentos e determine em particular, utilizando de preferência esta função os seguintes integrais:

a) $I'\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ b) $I'-\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ c) $I'\frac{7}{2},\frac{1}{2}$.

R: 1) $m>0,n>0$ $\int\frac{(1+x)^m}{(1-x)^n}dx=\frac{(1+x)^m}{(n-1)(1-x)^{n-1}}-$
$$-\frac{m}{n-1}\int\frac{(1+x)^{m-1}}{(1-x)^{n-1}}dx,\ \textit{isto é:}$$
$$I_{m,n}=\frac{(1+x)^m}{(n-1)(1-x)^{n-1}}-\frac{m}{n-1}I_{m-1,n-1}.$$

2) $m>0,n<0$ $I_{m,n}=-\frac{1}{(m-n+1)(1-x)^{n-1}}+$
$$+\frac{2m}{m-n+1}I_{m-1,n}.$$

3) $m<0,n>0$ $I_{m,n}=\frac{(1+x)^{m+1}}{(m+1)(1-x)^n}+$
$$+\frac{n}{m+1}I_{m+1,n+1}.$$

4) $m<0,n<0$ $I_{m,n}\frac{(1+x)^m}{(n-1)(1-x)^{n-1}}+$
$$+\frac{m}{n-1}I_{n-1,m+1}.$$

a) $\int\frac{1+x}{1-x}dx=-x-2\log(1-x)+C$

b) $\int(1-x^2)^2\,dx=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}+C$

c) $\int\frac{dx}{(1-x^2)^3}=\frac{x}{4(1-x^2)^2}+\frac{3x}{8(1-x)^2}+$
$$+\frac{3}{16}\log\frac{x+1}{x-1}+C.$$

Fazendo $1-x=t$ *vem* $I_{m,n}=-\int t^{-n}(2-t)^m\,dt$ *e vê-se assim que a função é primitivável sem recurso à primitivação por séries quando* $-n+1$ *é inteiro ou quando* $m-n$ *é inteiro.*

Para integrar por séries ($m-n$ *não inteiro e* n *não inteiro) vem:* $-\int t^{-n}(2-t)^m\,dt=-$
$$-2^m\int t^{-n}\left(1-\frac{t}{2}\right)^m dt=-2^m\int\left(t^{-n}-\frac{m}{2}t^{1-n}\cdots\right)dt=$$
$$=-2^m\left(\frac{t^{-n+1}}{-n+1}-\frac{m}{2}\cdot\frac{t^{2-n}}{2-n}+\cdots\right)\ \textit{para}\ \left|\frac{t}{2}\right|<1\ \textit{ou}$$
seja $-1<x<3$. *O integral* $I'_{m,n}=\int_{-1}^{+1}\frac{(1+x)^m}{(1-x)^n}dx$ *existe para os seguintes valores de* m *e* n:

sendo $m>0,n>0$ *será para* $m>0$ *e* $0<n<1$
sendo $m<0$ $n>0$ *será para* $-1<m<0$ *e* $n>0$
sendo $m>0$ $n<0$ *o integral não é impróprio*
sendo $m<0$ $n<0$ *será para* $-1<m<0$ *e* $n<0$.

Para exprimir $I'_{m,n}$ *na função* β *faça-se* $x=\cos 2t$

vem $I'_{m,n}=2^{m-n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}^{-2n+1} t \cos^{2m+1} t\, dt=$

$=2^{m-n+1}\frac{1}{2}\beta(-n+1, m+1)=2^{m-n}\frac{\Gamma(-n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+2)}$

a) $I'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(2)}=\frac{\pi}{2}$

b) $I'_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{2}$

c) $I'_{\frac{7}{2},\frac{1}{2}}=2^3\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)}{\Gamma(5)}=2^3\frac{\sqrt{\pi}\,1\cdot 2\cdot 3\sqrt{\pi}}{4!}=35\pi$

III

3815 — Calcular $\int_0^{\pi} x \,\text{sen}^m x\, dx$ para m inteiro não negativo. Há valores racionais de m para os quais o integral não exista? Quais são?

R: $\int_0^{\pi} x\,\text{sen}^m x\, dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\text{sen}^m x=\pi\times\frac{m-1}{m}\times$

$\times\frac{m-3}{m-2}\times\cdots\times\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{2}$

fazendo $\text{sen}\, x=t$ *vem* $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^m x\, dx=\int_0^1 t^m(1-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt$

e então o integral não existe para valores de m *tais que* $-1<m<0$ *e* $m<-1$.

IV

3816 — Ordem do infinitésimo $u_x=\alpha\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)+$ $+\sqrt{x^2+1}-x$ para x infinito e $\alpha>-\frac{1}{2}$. Analise a convergência do produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty}(1+u_n)$.

R: *fazendo* $\frac{1}{x}=h$ *vem* $u_x=\alpha(e^h-1)+$

$+\frac{1}{h}\left(\sqrt{1+h^2}-1\right)=\alpha\left(h+\frac{h^2}{2}+\frac{h^3}{6}+\cdots\right)+$

$+\frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{8}h^4+\cdots\right)=\left(\frac{1}{2}+\alpha\right)h+\frac{\alpha}{2}h^2+\cdots$

Se $\alpha=-\frac{1}{2}$ *o infinitéssimo é de 2.ª ordem e se* $\alpha>-\frac{1}{2}$ *o infinitéssimo é de 1.ª ordem. O produto estudava-se pela série de termo geral* u_n.

V

3817 — Dado $F(z)=\int_0^z\frac{\text{sen}\, x}{(1+x^2)^2}dx$ calcular $F\left(\frac{1}{10}\right)$ com duas decimais, mostrar que existe $|F(z)|$ para $z\to\infty$ e determine um seu limite excedente.

R: $F\left(\frac{1}{10}\right)=\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{\text{sen}\, x}{(1+x^2)^2}dx=$

$=\int_0^{\frac{1}{10}}\left(x-\frac{13}{6}x^3+\cdots\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{13}{24}x^4+\cdots\right]_0^{\frac{1}{10}}\approx$

$\approx\frac{1}{200}-\frac{13}{24}\frac{1}{10.000}.$

É claro que $|F(x)|\leq\int_0^{\frac{1}{10}}\frac{dx}{(1+2^2)^2}=A.$

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 2.º Exame de frequência prático — 9 de Junho de 1954.

I

3818 — Seja $M(x, y, z)$ um ponto variável e O a origem dos eixos coordenados rectangulares. Se $M-O=r\vec{u}$, $\vec{u}$ unitário, $r=\text{mod}\,(M-O)$ e $\vec{v}=$ $=f(r)\vec{u}$, sendo $f(r)$ uma função escalar de r que admite a derivada $f'(r)$, provar que:

a) $\text{div}\,\vec{v}=f'(r)+\frac{2f(r)}{r}$

b) $\text{rot}\,\vec{v}=0.$

R: *a) Do enunciado conclui-se fàcilmente que* $\vec{v}=f(r)\frac{x}{r}I+f(r)\frac{y}{r}J+f(r)\frac{z}{r}K$ *e então* $\text{div}\,\vec{v}=$

$$=\frac{\partial\left[f(r)\frac{x}{r}\right]}{\partial x}+\frac{\partial\left[f(r)\frac{y}{r}\right]}{\partial y}+\frac{\partial\left[f(r)\frac{z}{r}\right]}{\partial z}=$$

$$=f'(r)\frac{x^2}{r^2}+f(r)\frac{r-x^2/r}{r^2}+f'(r)\frac{y^2}{r^2}+f(r)\frac{r-y^2/r}{r^2}+$$

$$+f'(r)\frac{z^2}{r^2}+f(r)\frac{r-z^2/r}{r^2}=f'(r)+\frac{2f(r)}{r}.$$

b) $\text{rot}\,\vec{v}=\text{rot}\, f(r)\vec{u}=f(r)\,\text{rot}\,\vec{u}+\text{grad}\, f(r)\wedge\vec{u}=$ $=f(r)\,\text{rot}\,\vec{u}+f'(r)\vec{u}\wedge\vec{u}=f(r)\,\text{rot}\,\vec{u}$; *mas* $\text{rot}\,\vec{u}=0$ *e então* $\text{rot}\,\vec{v}=0$.

II

3819 — Provar que, sendo $z(x, y)$ definida pela equação $y=x\varphi(z)+\psi(z)$ então:

a) $p+q\varphi(z)=0$

b) $rq^2-2pqs+tp^2=0.$

R: a) *Da equação dada tira-se* $p = \dfrac{\varphi(z)}{x\,\varphi'(z) + \psi'(z)}$

e $q = \dfrac{-1}{x\varphi'(z) + \psi'(z)}$ *e então*

$$p + q\varphi(z) = \frac{\varphi(z)}{x\,\varphi'(z) + \psi'(z)} - \frac{x\,\varphi'(z) + \psi'(z)}{\varphi(z)} = 0 .$$

b) *derivando em ordem a* x *e em ordem a* y *a igualdade da alínea* a) *e atendendo a que* $\varphi(z) = -\dfrac{p}{q}$ *vem:*

$$\begin{cases} r + \dfrac{\partial p}{\partial z} p - \left(s + \dfrac{\partial q}{\partial z} p\right)\dfrac{p}{q} + p\,q\,\varphi'(z) = 0 \\ s + \dfrac{\partial p}{\partial z} q - \left(t + \dfrac{\partial q}{\partial z}\ q\right)\dfrac{p}{q} + q^2 \varphi'(z) = 0 \end{cases}$$

e como

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\dfrac{\partial p}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \frac{r}{p} \quad e \quad \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\dfrac{\partial q}{\partial x}}{\dfrac{\partial z}{\partial x}} = \frac{s}{p}$$

virá:

$$\begin{cases} r + \dfrac{r}{p} p - \left(s + \dfrac{s}{p} p\right)\dfrac{p}{q} + p\,q\,\varphi'(z) = 0 \\ s + \dfrac{r}{p} q - \left(t + \dfrac{s}{p} q\right)\dfrac{p}{q} + q^2 \varphi'(z) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2r - \dfrac{2sp}{q} + p\,q\,\varphi'(z) = 0 \\ \varphi'(z) = -\dfrac{s}{q^2} - \dfrac{r}{pq} + \left(t + \dfrac{s}{p} q\right)\dfrac{p}{q^3} \end{cases}$$

e eliminando $\varphi'(z)$ *virá:*

$$2r - \frac{2sp}{q} - \frac{ps}{q} - r + \frac{p^2 t}{q^2} + + \frac{sp}{q} = 0$$

que equivale a $r\,q^2 - 2\,p\,q\,s + t\,p^2 = 0$.

III

3820 — Calcular $\displaystyle\iint_A \frac{x\,dx\,dy}{(x^2-y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)^3}}$ onde A é o domínio do primeiro quadrante compreendido entre as rectas $y=0$ e $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$.

R: *Fazendo a mudança para coordenadas polares fica*

$$\iint_A \frac{x\,dx\,dy}{(x^2-y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)^3}} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2+1)^3}}$$

e como

$$\int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2+1)^3}} = \int_0^{+\infty} \frac{1+\rho^2-\rho^2}{\sqrt{(\rho^2+1)^3}}\,d\rho =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} - \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\rho\,2\rho}{\sqrt{(\rho^2+1)^3}}\,d\rho =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} - \frac{1}{2}\left[\frac{-2\rho}{\sqrt{\rho^2+1}}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+1}} = 1$$

ter-se-á de calcular

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}\,d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\theta}{(\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)(\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\frac{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta} + \frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{\cos\theta + \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right|$$

e

$$\iint_A \frac{x\,dx\,dy}{(x^2-y^2)\sqrt{(x^2+y^2+1)^3}} = \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right| .$$

IV

3821 — Averiguar quais são as funções $y(x)$ que satisfazem à seguinte propriedade:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{Ey}{Ex}\right) = \frac{E}{Ex}\left(\frac{dy}{dx}\right) .$$

R: *A igualdade equivale a ter* $\left(y'\dfrac{x}{y}\right)' = y''\dfrac{x}{y'}$ *ou seja* $y''\dfrac{x}{y} + y'\dfrac{y - xy'}{y^2} = \dfrac{x}{y'}y''$ *que é uma equação diferencial homogénea:* $y''\,y\,y'\,x + y\,y'^2 - x\,y'^3 = y''\,x\,y^2$; *fazendo-se* $y = e^{\int z\,dx}$ *baixa-se a ordem da equação obtendo-se:* $\dfrac{z-1}{z^2}dz = \dfrac{x-1}{x}dx$ *ou* $\log z + \dfrac{1}{z} = x - \log x + c$ *e, como* $z = \dfrac{y'}{y}$, *vem* $\log\dfrac{xy'}{y} = x + c - \dfrac{y}{y'}$ *donde se tira* $\dfrac{y'}{y} = \varphi\left(\dfrac{e^x}{x}\right)$ *e* $y = c\,e^{\int\varphi\left(\frac{e^x}{x}\right)dx}$.

Enunciados e soluções dos n.os 3813 a 3821 de Fernando de Jesus.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3822 — Considere um triângulo equilátero $[ABC]$ de lado a. Sejam Q um ponto do interior do $\overline{AB}$ tal que $\overline{QA}=a:n$, e P um ponto do prolongamento de $\overline{BC}$ de modo que C fica entre B e P e tal que $\overline{CP}=a$. Seja ainda R o ponto de encontro das rectas $\overline{AC}$ e $\overline{PQ}$. Calcule a área do quadrilátero $[QRCB]$.

3823 — Verificar a identidade

$$\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\cdots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$$

Secção Média

3824 — Prove que é $\operatorname{sen} x>\frac{2x}{\pi}$ para $0<x<\frac{\pi}{2}$.

3825 — O número de números de Fibonacci compreendidos entre n e $2n$, é ou 1 ou 2.

Resoluções dos problemas do concurso propostos no n.º 55

3669 — (N.º errado 3650). Apresentaram soluções correctas os Srs. Fernando de Jesus e Vinha Novais, publicando-se a deste último:

R: *Seja* P *o ponto médio do lado* B C; O *o ponto médio de* A P *e* Q *o ponto de intersecção de* $r \equiv CO$ *com* A B. *Pelo vértice* B *tracemos* $r'//r$; *seja* R *o ponto de intersecção de* r' *com* A P. *Os triângulos* B R P *e* COP *são iguais* ($CP=BP, \sphericalangle B=\sphericalangle B, \sphericalangle BPR \sphericalangle CPO$) *e, portanto,* $RP=OP$; *mas* $OP=OA$ *(hipótese) e portanto* $OA/OR=1/2$. *Por outro lado tem-se* $AO/OR=AQ/QB$. *Atendendo a estas duas relações vem* $AQ/QB=1/2$.

3670 — (3651). Apresentou solução correcta o Sr. Vinha Novais a qual se publica:

R: *Do simples exame da equação dada resulta que o ponto* $P_1\,(x=3,\mu=0)$ *é comum a todas as circunferências da família dada. Notando agora que o lugar geométrico dos centros dessas circunferências é uma recta de equação* $r\equiv\mu=\varphi+\frac{1}{2}$, *as circunferências passarão igualmente pelo ponto* P_2 *simétrico de* P_1 *em relação a* r. *Determinando as coordenadas desse ponto obtém-se* $P_2\left(\varphi=-\frac{1}{2}, y=\frac{7}{2}\right)$. *Não poderá haver mais pontos comuns pois três pontos determinam uma circunferência e uma só.*

3671 — (3652) Não foram apresentadas soluções.

3672 — (3653) Não foram apresentadas soluções.

3673 — (3654) Apresentou solução correcta que se publica, o Sr. Vinha Novais:

R: 1. *Da igualdade* $ab\cdot x=ba$ *resulta multiplicando à esquerda pelo inverso de* ab, $x=(ab)^{-1}\cdot ba=b^{-1}a^{-1}ba$; *multiplicando ambos os membros da igualdade* $y\cdot ab=ba$, *à direita por* $(ab)^{-1}$ *vem* $y=ba\,(ab)^{-1}=ba\,b^{-1}a^{-1}$. *Ficam assim determinados os comutadores do par* ab *e, portanto, demonstrada a sua existência.*

2. *Representemos por* x *e* y *os comutadores do par* $a^{-1}b^{-1}$; *então* $a^{-1}b^{-1}\cdot x=b^{-1}a^{-1}$ *e* $y\,a^{-1}b^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. *Multiplicando a primeira igualdade à direita por* x^{-1} *e a segunda, à esquerda, por* y^{-1} *vem* $a^{-1}b^{-1}=b^{-1}a^{-1}\cdot x^{-1}$ *e* $a^{-1}b^{-1}=y^{-1}b^{-1}a^{-1}$, *o que mostra que o comutador à direita (esquerda) do par* $b^{-1}a^{-1}$ *é o elemento inverso do comutador à direita (esquerda) do par* $a^{-1}b^{-1}$.

3674 — (3655) Não foram apresentadas soluções.

Errata ao n.º 57 da G. M.: A resolução n.º 3781 deve ser 3651.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

104 — REIDT, Wolff — **Die Elemente der Mathematik (Arithmetik, Algebra und Analysis),** Oberstufe-Bard 3, Hermann Schroedee Verlag, Hannover, 348 páginas (1953).

Contém este livro a matéria comummente ensinada nos últimos 3 anos dos liceus científicos alemães. Uma 1.ª parte («Problemas de Aritmética») trata de progressões aritméticas e geométricas e da teoria dos números (naturais, reais e complexos), construída com particular meticulosidade. Uma 2.ª parte («Algebra») é dedicada ao estudo de equações algébricas, especialmente à equação de 3.º grau (métodos numéricos e gráficos) e inclui mais dois capítulos, um sobre nomografia e outro sobre a fórmula do binómio. Em tudo o resto, trata-se de cálculo infinitesimal: depois de construída a teoria dos limites para sucessões e para funções, introduz-se o cálculo diferencial e em seguida o cálculo integral (para funções duma só variável); finalmente é feito um estudo das séries numéricas e das séries de potências.

Na orientação didáctica predomina o carácter intuitivo e genético, com abundância de evocações históricas (descurando por vezes a estruturação lógica).

O livro é ricamente provido de bons exercícios sobre todos os assuntos e apresenta-se com óptimo aspecto gráfico. J. Sebastião e Silva.

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

Editor: **Gauthier-Villars, Paris**

A. Denjoy — *L'Énumération transfinie.* III — *Études complémentaires sur l'ordination.*
IV — *Notes sur les sujects controversés.*

A. Denjoy — *Mémoire sur la Dérivation et son calcul inverse.*

A. Einstein — *L'Ether et la Théorie de la Relativité — La Géometrie et l'Experience.*

A. Einstein — *La Théorie de la Relativité Restreinte et Générale. La Relativité et le problème de l'espace.*

G. Julia — *Cours de Géométrie Infinitésimale* — Fasc. I.

Mémorial des Sciences Mathématiques

Fasc. CXXIV — Karl Menger — *Géométrie générale.*
CXXV — W. J. Trjitzinsky — *Les Problèmes de Totalisation se rattachant aux Laplaciens non sommables.*
CXXVI — P. Lévy — *Le Mouvement Brownien.*

Traité de Théorie des Fonctions

Tome I — H. Milloux — *Principes. Méthodes Générales* — Fasc. I.

Collection de Logique Mathématique — Série A.

V. — *Applications Scientifiques de la Logique Mathématique.*

Cahiers Scientifiques

Fasc. XXI — D. Jacotin, Lesieur, Croisot — *Leçons sur la théorie des treillis des structures algébriques ordonnées et des treillis géometriques.*

Collection de Monographies sur la Theorie des Fonctions

Emile Borel — *Les nombres inaccessibles.*

Editor: **Presses Universitaires de France**

André Delachet — *La Resistence des Matériaux.*

Monographies des Probabilités

Fasc I — P. Lévy — *Théorie de l'addition des Variables Aléatoires* (2ème Édition).

Les Grands Problèmes des Sciences

I. — L. de Broglie — *La Physique Quantique restera-t-elle indéterministe?*

Editor: **Librairie Vuibert, Paris**

G. Bouligand — *Mécanique Rationnelle — Cours et problémes résolus.*

R. Gouyon — *Le Problème de Mécanique Rationnelle a l'Agrégation.*

A. Monjallon — *Introduction a la Méthode Statistique.*

Editores: **Georges Thone, Liège — Masson et Cie, Paris.**

Prémier Colloque sur les Équations aux Dérivées Partielles.

Colloque sur les Fonctions de Plusieurs Variables.

Editor: **Walter de Gruyter & Co., Berlin**

F. Böhm — *Versicherungsmathematik II.*

G. Kowalewski — *Einführung in die Determinanten theorie.*

Hofmann — *Geschichte des Mathematik* — 1 Teil.

G. Holeisel — *Gewöhnliche Differentialgleichungen.*

Editor: **Verlag für Angewandte Wissenschaften, Wiesbaden.**

Helmut Hasse — *Mathemathik als Wissenschaft, Kunst und Macht.*

GAZETA DE MATEMÁTICA

Três números publicados em 1953

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1954 (3 números) 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituída pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1954 quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.os 51 a 56, cada número.	17$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:
EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Lisboa-N — Telef. 771943