GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XV — N.° 57 — MAIO 1954

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

② GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 771943 — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA-N. — Telef. 771943

ANO XV — N.º 57 GAZETA DE MATEMÁTICA MAIO — 1954

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 71943 — LISBOA-N

Von der Zerlegung der Kugel in kleinere Teile

von **H. Hadwiger**

Nach K. Borsuk (¹) ist es bekanntlich unmöglich, die n-dimensionale Vollkugel vom Durchmesser $D=1$ in n Punktmengen zu zerlegen, so dass für die Durchmesser dieser Teile $D^i < 1$ $(i=1, \cdots, n)$ gilt. Die Kugel lässt sich also nicht in weniger als $n+1$ kleinere Teile zerlegen. Dagegen ist eine Zerlegung in $n+1$ kleinere Teile möglich.

Wie B. Knaster (²) kann man hier nach dem Effekt einer extremalen Zerlegung fragen, welche die Eigenschaft hat, dass der grösste der $n+1$ Teile möglichst klein ist. Genauer: Es sei D_n die kleinste Zahl, für welche die Aussage noch richtig ist, dass die n-dimensionale Vollkugel vom Durchmesser $D=1$ in $n+1$ Punktmengen zerlegt werden kann, für deren Durchmesser $D^i \leqslant D_n$ $(i=1, \cdots, n+1)$ gilt. Welchem Wert hat D_n?

Trivialerweise ist $D_1 = \frac{1}{2}$. Wir zeigen hier, dass für $n \geqslant 2$

$$(a) \qquad D_n \geqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}}$$

gilt, wobei das Gleichheitszeichen für $n=2$ und $n=3$ steht, so dass also

$$(b) \qquad D_2 = \sqrt{3}/2 = 0{,}866 \cdots$$

und

$$(c) \qquad D_3 = \sqrt{(3+\sqrt{3})/6} = 0{,}887 \cdots$$

ist.

(¹) K. Borsuk, Ueber die Zerlegung einer euklidischen n-dimensionalen Vollkugel in n Mengen. *Verh. Int. Math.* Kongress Zürich 1932, 2. Bd., 192.

(²) B. Knaster, Ein Zerlegungssatz über unikohärente Kontinua. Ebenda, 193.

Wir beweisen zunächst (a). Da sich der Durchmesser einer Punktmenge beim Uebergang zur abgeschlossenen Hülle nicht ändert, genügt es, folgendes zu zeigen: Ist die abgeschlossene Vollkugel K durch $n+1$ abgeschlossene Punktmengen A_i mit Durchmesser D^i $(i=1, \cdots, n+1)$ überdeckt, so führt die Annahme, dass $D^i < p$ für alle i gilt, auf einen Widerspruch; dabei bezeichne p die auf der rechten Seite von (a) stehende Zahl.

In der Tat: Es bedeute B_i den Durchschnitt von A_i mit der Oberfläche S von K. Sicher enthält kein B_i ein antipodisches Punktepaar der Kugel, weil die Distanz antipodischer Punkte 1 beträgt, während $D^i < p < 1$ vorausgesetzt ist. Die Kugeloberfläche S ist daher von $n+1$ abgeschlossenen Mengen $B_1, \cdots, B_{n+1}$ überdeckt, von denen keine ein antipodisches Punktepaar enthält. Nach einem Satz von H. Hopf (¹) ist unter diesen Umständen der Durchschnitt C_i von je n Mengen B_j $(j=1, \cdots, n+1; j \neq i)$ nicht-leer. Andererseits sind je zwei der Mengen C_i $(i=1, \cdots, n+1)$ disjunkt; andernfalls wäre der Durchschnitt aller B_i $(i=1, \cdots, n+1)$ nicht-leer, und eine der Mengen B_i müsste dann ein antipodisches Punktepaar enthalten.

Auf S gibt es demnach $n+1$ verschiedene Punkte $P_i \in C_i$. Es bedeute jetzt T_i die sphärische Kalotte auf S, deren Punkte dadurch gekennzeichnet sind, dass ihre (euklidischen) Abstände von P_i nicht kleiner als p sind. Im Hinblick auf die Annahme $D^i < p$ ist der Durchschnitt $T_i B_j$ für $j \neq i$ leer, also

(¹) P. Alexandroff-H. Hopf, Topologie I, Berlin 1935, 487. Vgl. auch: H. Hopf, Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs und Ueberdeckungssätze. *Portugaliae Math.* **4**, 129-139 (1943).

ist T_i von B_i allein überdeckt. Ist ρ der sphärische Radius von T_i (die Kalotten sind alle kongruent), so müssen die sphärischen Distanzen der Punktepaare $P_i P_k (i \neq k)$ alle grösser als 2ρ sein. Nun gilt aber $\cos(\rho/2) = p$ und also $\cos 2\rho = 2(2p^2-1)^2-1 = -1/n$. Nach einem bekannten Hilfssatz von K. Reinhardt (1) können aber die sphärischen Distanzen bei $n+1$ Punkten auf der Oberfläche einer n-dimensionalen Kugel nicht alle grösser als $\arccos(-1/n)$ sein. Damit ist der Widerspruch erzielt.

Um die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (a) zu sichern, muss umgekehrt die Existenz einer Ueberdeckung von K durch $n+1$ abgeschlossene Punktmengen aufgewiesen werden, so dass $D^i \leqslant p$ für alle i gilt. In den Fällen $n=2$ und $n=3$ wird das tatsächlich dadurch erreicht, dass man von der Ueberdeckung von S durch $n+1$ kongruente reguläre sphärische Simplexe B_i von der sphärischen Seite $s = \arccos(-1/n)$ ausgeht und für A_i die konvexe Hülle von B_i und Z (Kugelzentrum) setzt. So wird K durch $n+1$ Kugelsektoren A_i vom euklidischen Durchmesser p überdeckt.

Die hier besprochene Frage steht mit einem weitern, für $n > 2$ noch ungeklärten Problem in engem Zusammenhang, das sich dadurch ergibt, dass man an Stelle der Kugel eine beliebige Punktmenge betrachtet. Genauer: Es gibt eine kleinste Zahl C_n, für welche die Aussage noch richtig ist, dass jede n-dimensionale Punktmenge vom Durchmesser $D=1$ in $n+1$ Teilmengen zerlegt werden kann, für deren Durchmesser $D^i \leqslant C_n \; (i=1, \cdots, n+1)$ gilt. Wie gross ist C_n?

Nach einer Vermutung von K. Borsuk (2) gilt für alle n

$$(d) \qquad C_n < 1 .$$

Der Zusammenhang dieser *Borsuk*schen Konstanten C_n mit der hier betrachteten *Knaster*schen Konstanten D_n ist offenbar durch

$$(e) \qquad D_n \leqslant C_n$$

gegeben.

Das Gleichheitszeichen in (e) gilt trivialerweise für $n=1$ und nach einem Ergebnis von D. Gale (3) auch für $n=2$. Würde es für alle n gelten, so bedeutete dies, dass die Kugel der Zerlegung in kleinere Teile einen höheren Widerstand entgegenstellt als irgend ein anderer nichtkugeliger Körper.

(1) K. Reinhardt, Ueber die kleinste Kugel, die um jede Punktmenge vom Durchmesser Eins gelegt werden kann. *Jber. Deutsch. Math. Ver.* **25**, 157-163 (1917). Vgl. auch: W. Süss, Durchmesser und Umkugel bei mehrdimensionalen Punktmengen. *Math. Z.* **40**, 315-315, (1935).

(2) K. Borsuk, Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fund. Math.* **20**, 177-190, 1933.

(3) D. Gale, On inscribing n-dimensional sets in a regular n-simplex. *Proc. Amer. Math. Soc.* **4**, 222-225, 1953.

Sobre a divisão da esfera em partes mais pequenas

Segundo os resultados de K. Borsuk (1) sabe-se que é impossível dividir uma esfera a n dimensões de diâmetro $D=1$ em n conjuntos de pontos cujos diâmetros $D^i (i=1, \cdots n)$ satisfaçam a $D^i < 1$. A esfera pode pois ser dividida em $n+1$ partes mais pequenas, mas nunca em menos que $n+1$ partes.

É natural investigar, como fez B. Knaster (2), o efeito duma divisão extremal gozando da propriedade de ser a menor possível a maior das $n+1$ partes.

Mais exactamente: Seja D_n o menor dos números para o qual ainda é possível afirmar que a esfera n-dimensional de diâmetro $D=1$ pode ser dividida em $n+1$ conjuntos de pontos com diâmetros $D^i \leqslant D_n (i = 1, \cdots, n+1)$. Deseja-se saber qual o valor de D_n.

Sabe-se, trivialmente, que $D_1 = \frac{1}{2}$ e vamos mostrar que para $n \geqslant 2$ temos

$$(a) \qquad D_n \geqslant \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n-1}{2n}}}$$

onde o sinal de igualdade se aplica para $n=2$ e $n=3$. De maneira que:

$$(b) \qquad D_2 = \sqrt{3}/2 = 0,866 \cdots$$

e

$$(c) \qquad D_3 = \sqrt{(3+\sqrt{3})/6} = 0,887 \cdots .$$

Demonstramos primeiramente (a). Designemos por p o segundo membro de (a). Como o diâmetro dum conjunto de pontos é o mesmo que o da sua fronteira fechada, é suficiente demonstrar que se a esfera fechada K for recoberta por $n+1$ conjuntos fechados de pontos A_i com diâmetros $D^i (i=1, \cdots n+1)$, então a hipótese $D^i < p$ para qualquer i conduz a uma contradição.

Com efeito, seja B_i a intersecção de A_i com a superfície S de K. Nenhum dos conjuntos B_i contém pares de pontos antipódicos, porque a distância de pontos antipódicos é igual a 1 e nós supomos que $D^i < p < 1$.

A superfície S da esfera pode portanto ser recoberta por $n+1$ conjuntos fechados $B_1, \cdots B_{n+1}$ sem pontos antipódicos. Nestas condições, segundo um teorema de H. Hopf (3), não pode ser vazia a intersecção C_i de n quaisquer dos conjuntos B_j $(j=1, \cdots n+1;\ j \neq i)$. Por outro lado, devem ser disjuntos dois quaisquer dos conjuntos C_i $(i=1, \cdots n+1)$, visto que de contrário a intersecção de todos os B_i $(i=1, \cdots n+1)$ seria não vazia e um dos conjuntos B_i deveria então ter um par de pontos antipódicos.

Existem portanto, sobre S, $n+1$ diferentes pontos P_i e C_i. Seja agora T_i a calote esférica de S cujos pontos estão separados dos P_i por uma distância (euclidiana) não inferior a p. Em virtude da hipótese $D^i < p$, será vazia a intersecção $T_i B_j$ para $j \neq i$, de maneira que T_i é recoberto apenas por B_i. Designando por ρ o raio esférico de T_i (as calotes são todas congruentes), podemos dizer que as distâncias esféricas de pares de pontos $P_i P_k$ $(i \neq k)$ são todas superiores a 2ρ. Mas $\cos(\rho/2) = p$ e portanto $\cos 2\rho = 2(2p^2-1)^2 = -1/n$. Ora, segundo um conhecido lema de K. Reinhardt (4) as distâncias esféricas de $n+1$ pontos da superfície duma esfera n-dimensional não podem ser todas superiores a $\operatorname{arc}\cos(-1/n)$. A contradição acima referida fica pois assim em evidência.

Para poder escrever a relação (a) com o sinal de igualdade é necessário demonstrar inversamente que existe uma cobertura de K por $n+1$ conjuntos fechados de pontos tais que $D^i \leqslant p$ para qualquer i. Nos casos $n=2$ e $n=3$ obtemos efectivamente este resultado partindo da cobertura de S por $n+1$ simplexos B_i regulares, esféricos e congruentes de lado esférico $s = \operatorname{arc}\cos(-1/n)$ e formando A_i com a fronteira convexa de B_i e Z (centro da esfera). Desta forma K ficará recoberto por $n+1$ sectores esféricos A_i de diâmetro euclidiano p.

A questão aqui discutida está estreitamente ligada com outra questão, ainda não esclarecida para $n > 2$, que aparece quando se considera, em lugar da esfera, um conjunto de pontos arbitrário. Mais exactamente: Existe um número mínimo C_n para o qual ainda é possível afirmar que todos os conjuntos n-dimensionais de pontos de diâmetro $D=1$ podem ser divididos em conjuntos parciais de diâmetro $D^i \leqslant C_n (i=1, \cdots n+1)$. Qual o valor de C_n?

Segundo uma suposição de K. Borsuk (5)

$$(d) \qquad C_n < 1$$

para qualquer n. A relação entre estas constantes C_n de Borsuk e as constantes D_n de Knaster, consideradas no presente trabalho, é evidentemente

$$(e) \qquad D_n \leqslant C_n$$

A igualdade em (e) tem lugar, trivialmente, para $n=1$ e também para $n=2$ segundo um resultado de D. Gale (6).

Se o mesmo acontecesse para qualquer n, isso significaria que a esfera oferece, à divisão em partes mais pequenas, maior resistência que qualquer outro corpo não esférico.

Sobre a noção de distância em relatividade restrita

por *Ruy Luís Gomes*

Sejam x_i, t as coordenadas de um referencial admissível e

$$(1) \qquad x_i = u_i\, t,$$

com

$$(2) \qquad u^2 < c^2,$$

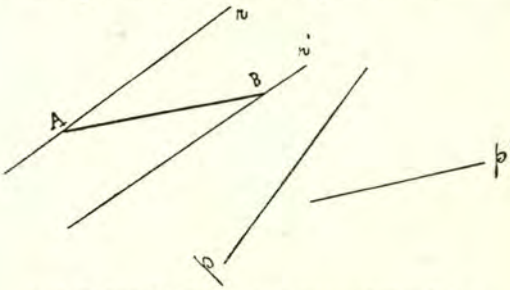
as equações correspondentes da linha de universo de um ponto material animado de movimento rectilínio uniforme.

Imaginemos agora outros dois pontos materiais, P, Q, animados de movimento rectilínio e uniforme de velocidades iguais, como acontece quando P e Q são as extremidades de uma régua em repouso num qualquer referencial admissível em Relatividade Restricta.

As suas linhas de universo são da forma

$$(3) \qquad \begin{cases} x_i = v_i\, t + a_i \\ x_i = v_i\, t + b_i \end{cases}$$

Definição. *Entende-se por distância dos pontos materiais* P *e* Q *segundo o espaço próprio do ponto* (1), *o valor* $d^{\mathrm{v}}_{\mathrm{u}}$ *dado pelo invariante fundamental*



r, r' representativas de (1), p representativa de (2); p' direcção *ortogonal* a p; AB paralela a p'

$$(4) \qquad (d^{\mathrm{v}}_{\mathrm{u}})^2 = I^{\mathrm{v}}_{\mathrm{u}} = \sum \Delta' x_i^2 - c^2\, \Delta' t^2,$$

em que $\Delta' x_i$, $\Delta' t$ *correspondem a posições de* P *e* Q *situadas numa direcção ortogonal à linha de universo de* (1).

As hipóteses em que assenta esta definição implicam,

(5) $$\sum \Delta' x_i \,.\, \Delta x_i - c^2 \Delta t \,.\, \Delta' t = 0\,,$$

como condição de *ortogonalidade* entre

(6) $$\Delta' x_i = v_i \Delta' t + a_i - b_i$$

e

(6') $$\Delta x_i = u_i \Delta t\,.$$

Note-se que a *condição da ortogonalidade* (5), combinada com (6'), garante $I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} > 0$ e portanto $d_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}}$ real.

O sistema (5) e (6') dá-nos

(7) $$\sum u_i \Delta' x_i - c^2 \Delta' t = 0\,,$$

e, utilizando (6'), resulta

(8) $$\sum u_i (v_i \Delta' t + a_i - b_i) - c^2 \Delta' t = 0\,,$$

donde

(9) $$(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - c^2)\, \Delta' t + \mathbf{u} \,|\, \mathbf{r} = 0$$

em que $\mathbf{r} = \overline{a - b}$.

O valor de $I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}$ é, pois,

$$I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \sum (v_i \Delta' t + a_i - b_i)^2 - c^2 \Delta' t^2$$
$$= (v^2 - c^2)\, \Delta' t^2 + 2\, \mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} \cdot \Delta' t + \mathrm{r}^2$$

ou ainda

(10) $$I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \frac{v^2 - c^2}{(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - c^2)^2} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{r})^2 - 2\, \frac{\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} \,.\, \mathbf{u} \,|\, \mathbf{r}}{\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - c^2} + \mathrm{r}^2\,.$$

Casos particulares

α) $$\mathbf{u} = 0$$
$$I_0^{\mathbf{v}} = \mathrm{r}^2 :$$

distância no espaço do referencial, pois $\mathbf{u} = 0$ *significa repouso em relação a esse referencial.*

β) $$\mathbf{u} = \mathbf{v}$$

$$I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \frac{v^2 - c^2}{(v^2 - c^2)^2} (\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r})^2 - 2\, \frac{(\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r})^2}{v^2 - c^2} + \mathrm{r}^2$$

$$I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \frac{(\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r})^2}{v^2 - c^2} + \mathrm{r}^2$$

$$I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \frac{c^2 - v^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{c^2 - v^2}\, \mathrm{r}^2$$

$$I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \frac{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \beta^2}\, \mathrm{r}^2\,,$$

designando por β o cociente $\dfrac{v}{c}$ e por θ o ângulo dos dois vectores $\mathbf{v}$ e $\mathbf{r}$.

A última fórmula ainda se pode escrever

(11) $$I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = \frac{1 - \beta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{1 - \beta^2}\, I_0^{\mathbf{v}}\,,$$

ficando assim em evidência a relação entre as distâncias das mesmas linhas do universo (3), *segundo o espaço próprio dessas linhas e segundo o espaço do referencial* $\mathrm{x}_i, \mathbf{t}$.

(11) é uma fórmula conhecida, principalmente nos dois casos extremos

$$\beta = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = I_0^{\mathbf{v}}$$

e

$$\beta = 0 \quad \rightarrow \quad I_0^{\mathbf{v}} = \left(1 - \beta^2\right) I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}\,;$$

este último exprime *a contracção de* Lorentz no sentido do movimento referido a $x_i\, t$, pois corresponde a $\mathbf{r}$ paralelo a $\mathbf{v}$.

No caso $\beta = \dfrac{\pi}{2}$ vem, como já salientamos

$$I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}} = I_0^{\mathbf{v}} = \mathrm{r}^2\,.$$

Procuremos agora as condições para que

(12) $$I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \mathrm{r}^2\,,$$

com $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$.

A fórmula (10) dá-nos, então,

(13) $$\frac{v^2 - c^2}{(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - c^2)^2} (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{r})^2 - 2\, \frac{\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} \,.\, \mathbf{u} \,|\, \mathbf{r}}{\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - c^2} = 0\,,$$

que se desdobra em

(14) $$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{r} = 0$$

e

(14') $$(v^2 - c^2)\, \mathbf{u} \,|\, \mathbf{r} - \mathbf{v} \,|\, \mathbf{r}\, (\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - c^2) = 0\,,$$

pois $\mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} - c^2$ é sempre diferente de zero $(u^2, v^2 < c^2)$.

Portanto, se

$$\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} = 0$$

só os vectores $\mathbf{u}$ do plano

$$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{r} = 0\,,$$

a que pertence o próprio $\mathbf{v}$, satisfazem à condição

$$I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \mathrm{r}^2\,.$$

Porém, se

$$\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} \neq 0\,,$$

além das soluções do plano

$$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{r} = 0\,,$$

que satisfazem sempre, há soluções fora desse plano, pois (14') ainda se pode escrever com a forma

(15) $$\mathbf{u} \,|\, [(v^2 - c^2)\, \mathbf{r} - \mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} \,.\, \mathbf{v}] = \mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} \,.\, c^2\,,$$

e assim é evidente que (14'), *na hipótese* $\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} \neq 0$, representa um plano não paralelo a

$$\mathbf{u} \,|\, \mathbf{r} = 0\,.$$

Em Relatividade Restricta não é costume pôr em evidência a solução (14') de

$$I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \mathrm{r}^2\,,$$

pois só se considera, de ordinário, a distância $I_{\mathbf{v}}^{\mathbf{v}}$; mas parece-nos interessante apontar, como esclarecimento da mesma noção de distância em Relatividade, as outras soluções de

$$I_{\mathbf{u}}^{\mathbf{v}} = \mathrm{r}^2\,,$$

para o caso de $\mathbf{v} \,|\, \mathbf{r} \neq 0$.

Sobre o ensino da Matemática em Itália

por J. Sebastião e Silva

A Itália ocupa um lugar de relevo entre as nações que têm contribuído para o avanço das ciências matemáticas. Evoquemos, num rápido esboço, os fundamentos históricos deste facto.

No século XII, através dos mouros estabelecidos na Península Ibérica e dos mercadores italianos que comerciavam com o Levante, começou a difundir-se na Europa o conhecimento das matemáticas árabes, que reatavam a tradição dos clássicos gregos vitalizada pelo empirismo aritmético dos indianos. Com esta origem se vai formando e adquirindo vulto, numa lenta sedimentação, a escola de algebristas italianos que, 400 anos depois, no limiar do século XVI, consegue ultrapassar os limites da ciência helénica, inaugurando o período das matemáticas modernas, com as célebres descobertas relativas às equações do 3.º e do 4.º grau, às quais se ligam os nomes de Scipione del Ferro, Tartaglia, Cardan, Ferrari, Bombelli. Está-se em pleno Renascimento—das artes, das letras e das ciências. Por toda a parte, nessa Europa quinhentista, tomam incremento os estudos matemáticos (1). Após um longo período de ensimesmamento, o homem reabre os olhos para de novo contemplar as harmonias do mundo. Aplicando o método matemático ao estudo dos fenómenos naturais, Kepler e Galileu criam as ciências exactas, abrindo a era do racionalismo científico. Como instrumento adequado e mesmo indispensável para as novas pesquisas, irá constituir-se o cálculo infinitesimal, que, vislumbrado 2.000 anos atrás pelo grego genial de Siracusa, encontra ainda, em Itália, insignes precursores imediatos: Cavalieri (discípulo de Galileu) e Torricelli, continuador da obra do primeiro.

Não esqueçamos finalmente que, já antes disso, os grandes pintores do Renascimento, meticulosos naturalistas para os quais o belo é inseparável do verdadeiro (ou melhor do *objectivo*, daquilo que todos vêem), tinham lançado os germes da moderna geometria, de inspiração post-euclideana, abordando com espírito científico os problemas da perspectiva (Brunnelleschi, Paolo Uccello, Leonardo da Vinci e outros mais).

(1) Portugal também participou, com Pedro Nunes, no grande movimento. O nosso matemático e cosmógrafo, interessado em problemas *reais* de navegação, concorreu para a superação dos métodos da análise finita, com o seu belo estudo sobre a *loxodromia esférica* (ou *linha de rumo*), a curva serpentiforme que, esboçada por uma nave em viagem de rumo constante, acaba por enlaçar a Terra em infinitas espiras acumuladas em torno dos polos.

Estavam pois criadas, no país de Dante, as bases duma tradição robusta, densa, riquíssima de seiva, capaz de resistir aos vendavais da História e às crises de cepticismo.

Será necessário lembrar o que tem sido até hoje a contribuição da Itália no campo das matemáticas? Muito haveria que dizer sobre o assunto e não é esse agora o fim em vista.

O que me proponho fazer aqui é apenas um breve inquérito à forma por que, na actualidade, se encontra instituído e é orientado o ensino da Matemática em Itália, procurando situá-lo no complexo das manifestações culturais deste país e seguindo uma orientação já anteriormente adoptada (1).

O «caso italiano» interessa particularmente aos pedagogistas portugueses. Primeiro que tudo, trata-se dum povo que apresenta, em relação a nós, profundas afinidades étnicas, psíquicas e linguísticas. Depois há que reconhecer este facto: a Itália de hoje é um país de alto nível cultural, de intenso e fecundo labor de espírito que se patenteia em numerosos sectores da arte, das letras, da filosofia, da ciência e da técnica — começando no domínio da pura actividade desinteressada e chegando, por insensíveis gradações, num lógico encadeamento, ao plano das realizações práticas.

Um índice expressivo da vida mental do povo italiano é-nos oferecido precisamente pela sua organização universitária. Existem actualmente em Itália 24 universidades do Estado, 4 universidades livres equiparadas às do Estado, 6 institutos universitários, 2 politécnicos e 4 institutos superiores de magistério equiparados aos do Estado (2).

Há ainda que ter em conta as Faculdades Universitárias e os Institutos Superiores dependentes do Vaticano, além da Universidade Gregoriana.

Não se faz em Itália distinção entre Universidade Clássica e Universidade Técnica. Por exemplo, a Universidade de Bolonha compreende as Faculdades de: 1) Direito, 2) Economia e Comércio, 3) Letras e Filosofia, 4) Medicina e Cirurgia, 5) Ciências Ma-

(1) Ver os artigos da Dr.ª Maria do Pilar Ribeiro sobre o ensino da Matemática na Suíça, nos n.os 12, 13, 14 e 24 da *Gazeta de Matemática*, bem como o do Prof. Hugo Ribeiro no n.º 26 da mesma revista. Ver ainda «Sobre o ensino da Matemática na Alemanha» no n.º 55 desta revista.

(2) Devem também citar-se os Colégios Universitários, como a Escola Normal Superior de Pisa, de que falaremos mais adiante, a propósito do ensino post-universitário.

temáticas, Físicas e Naturais, 6) Química Industrial, 7) Farmácia, 8) Engenharia, 9) Agronomia, 10) Medicina Veterinária. Em relação à anterior, a Universidade de Roma tem a menos as Faculdades de Agronomia, de Medicina Veterinária e de Química Industrial e a mais a de Ciências Políticas, a de Ciências Estatísticas, Demográficas e Actuariais, a de Magistério, a de Arquitectura e a de Engenharia Aeronáutica.

Com as actividades universitárias pròpriamente ditas está relacionado o «Consiglio Nazionale delle Ricerche» (Conselho Nacional de Investigações), de de que falaremos oportunamente.

Fora do âmbito escolar são ainda dignas de registo cerca de 270 instituições culturais, incluindo academias e associações várias, com actividade científica, técnica, artística, literária ou jurídica, muitas das quais servidas por uma ou mais revistas próprias. A mais alta destas instituições é a «Accademia Nazionale dei Lincei» (Academia Nacional dos Línceos), de gloriosas tradições. Dela foi sócio Galileu (1).

Neste quadro imponente de manifestações culturais, os estudos matemáticos mantêm, ainda hoje, uma situação privilegiada.

Ser-nos-á seguramente proveitoso lançar uma vista de olhos sobre aspectos vários do ensino da Matemática na mais velha e mais nova das nações latinas. Mas antes disso há que tomar uma precaução de ordem psicológica: não se pretenda encontrar em tudo a perfeição e, menos ainda, um modelo a copiar fielmente. Acresce a circunstância de se anunciar para breve uma reforma geral do ensino em Itália, o que quere dizer que o estado de coisas actual se não considera ali o mais adequado às exigências e aos pontos de vista modernos.

Ensino secundário

Sobre esta fase de ensino limitar-me-ei a breves referências, não porque seja matéria de pouco interesse, mas porque tenho agora em vista, sobretudo, desenvolver a parte referente ao ensino universitário e às actividades de investigação.

Os estudos secundários em Itália duram normalmente oito anos.

Os três primeiros anos têm lugar na chamada *Scuola Media Inferiore*, pela qual não obrigados a passar todos aqueles que pretendam seguir qualquer curso de estudos, incluindo os do ensino técnico-profissional.

(1) Para mais detalhes sobre as instituições culturais italianas, ver «Os estudos superiores e a vida intelectual da Itália de hoje», por Hyacinthus (pseudónimo do Prof. Jacinto Manuppella).

Após o curso da Escola Média Inferior, o ensino médio pode prosseguir numa escola pertencente a um qualquer dos seguintes tipos:

1) *Liceo-Ginnasio Classico*, que consta de um primeiro ciclo de 2 anos *(Ginnasio Superiore)* e dum segundo ciclo de 3 anos *(Liceo Classico)*. O «Diploma di Maturità Classica» dá acesso a qualquer Faculdade Universitária ou Instituto Superior.

2) *Liceo Scientifico*, também quinquenal. O «Diploma di Maturità Scientifica» abre acesso a qualquer Faculdade Universitária ou Instituto Superior, excepto às Faculdades de Letras e Direito.

3) *Istituto Magistrale* (Instituto de Magistério Primário). Nestas escolas, destinadas à formação de professores do Ensino Primário, o curso é igualmente de 5 anos. No fim é passado um diploma de habilitação profissional.

4) *Istituto Tecnico*, diferenciado em 5 modalidades diferentes (industrial, comercial, náutico, agrário e de agrimensura). Trata-se ainda de cursos quinquenais (eventualmente seguidos de cursos de aperfeiçoamento), que habilitam directamente para determinadas profissões.

Interessam-nos em particular a Escola Média Inferior e os Liceus (Científico e Clássico). Ao longo dos oito anos de estudos efectuados nestas escolas, os programas de Matemática, no seu conjunto, não diferem grandemente dos que são seguidos nos nossos cursos liceais. A diferença mais sensível verifica-se talvez no estudo da Análise infinitesimal, que é ali conduzido bastante mais a fundo nos dois últimos anos do Liceu Científico, fornecendo uma preparação apreciável, tanto em cálculo diferencial como em cálculo integral.

Naturalmente, o estudo das ciências é feito com maior desenvolvimento no Liceu Científico que no Liceu Clássico em que predomina a orientação humanística (1).

A pedagogia e a didáctica da Matemática (como dum modo geral todos os problemas pedagógicos, incluindo os da Escola Primária) têm sido em Itália desde sempre objecto de vivo e carinhoso interesse. Grandes cientistas, grandes pensadores, não têm desdenhado olhar com desvelo, no intervalo das suas investigações, para os problemas do ensino, até para aqueles aparentemente mais humildes. Um homem que neste sentido, desempenhou ali uma acção particularmente eficaz e profunda, pelos seus escritos,

(1) Este predomínio manifesta-se no maior número de horas semanais concedidas aos estudos clássicos e, em particular, na presença do Grego (o Latim é ensinado em todos os anos de qualquer dos tipos de escolas). Entretanto, importa salientar que o estudo das línguas modernas é muito mais desenvolvido no Liceu Científico que no Liceu Clássico.

pela sua capacidade organizadora, pela sua forte personalidade, foi o célebre geómetra FEDERIGO ENRIQUES. Entre outras suas iniciativas, as «*Questioni riguardanti le matematiche elementari*», colectânea de artigos de autores vários por ele dirigida, tiveram amplas e distantes repercussões, não só no ensino (dentro e fora da Itália) como até no desenvolvimento da própria ciência. Foi ainda por iniciativa sua e dos seus colaboradores, que o «*Periodico di Matematica*», jornal dedicado ao ensino secundário e publicado desde 1886 até 1918, reapareceu em 1921 como «*Periodico di Matematiche (storia, didattica, filosofia)*», desenvolvendo um programa de aproximação entre as matemáticas elementares e as matemáticas superiores, com vista ao esclarecimento e difusão de ideias e doutrinas.

As conferências e os colóquios em que participam simultaneamente professores do ensino secundário e professores do ensino superior tornam-se frequentes a partir de então.

Assim ENRIQUES está de certo modo para a Itália como FELIX KLEIN para a Alemanha. Seria mesmo interessante fazer um estudo comparativo destes dois casos, correspondentes a duas latitudes diferentes.

De resto as ideias de KLEIN já antes tinham penetrado em Itália. Eis como o próprio ENRIQUES se refere a esse facto no seu belo livrinho «Le matematiche nella storia e nella cultura»:

«Entretanto delineava-se noutros países um movimento (que na Alemanha encontrou um propulsor em F. KLEIN) para a introdução de métodos mais intuitivos e empíricos, facilitando o ensino da parte elementar clássica da geometria e dando impulso, por outro lado, ao estudo mais geral das propriedades que estão na base da Análise infinitesimal. Em Itália adoptou-se o ensino intuitivo nos primeiros anos da escola média como fase preparatória do estudo racional, e — no que se refere aos graus de ensino mais elevados — a ordem de ideias kleinianas teve um começo de execução no programa do «liceu moderno» e nos livros que para ele foram escritos. Mas em geral os professores italianos — talvez pela educação lógica que receberam nas faculdades universitárias — encontram dificuldade em acolher este espírito a que é inerente um certo inacabamento e um modo de raciocinar significativo, mas deliberadamente imperfeito. Assim, o programa do novo liceu científico, instaurado com a reforma GENTILE [1], retoma do «liceu moderno» alguns assuntos (derivada, integral) no sentido de um maior rigor lógico».

E com efeito hoje ainda, confrontando os textos de Análise adoptados em Itália para o ensino secundário, com os correspondentes seguidos na Alemanha, observa-se que nos primeiros o aspecto lógico é bastante mais pronunciado que nos segundos. Seriamos tentados a explicar este facto como uma distinção entre mentalidade latina e mentalidade germânica; mas a verdade é que nos textos universitários as coisas não se passam exactamente do mesmo modo [1].

Entretanto, ENRIQUES não se esquece de salientar: «Mais do que as diferenças dos métodos ou as indicações dos programas influi sobre a eficácia do ensino o valor dos que ensinam: a sua mentalidade, o calor comunicativo, a paixão que dedicam às coisas ensinadas, a largueza de interesses que os torna capazes de se colocarem no lugar dos alunos e de sentirem como estes. Na medida em que tais dotes possam ser adquiridos, é necessário para tanto cuidar sobretudo da preparação universitária e, depois disso, criar aos professores condições de vida que deixem suficiente liberdade para manter e desenvolver a sua própria cultura».

As ideias pedagógicas de F. ENRIQUES, tanto como as de F. KLEIN, merecem ser amplamente conhecidas e meditadas por todos aqueles que se dedicam à carreira do ensino.

Ensino universitário

Quando não haja indicações em contrário as informações seguintes referem-se concretamente à Universidade de Roma.

O ensino universitário da Matemática tem lugar sobretudo (mas não exclusivamente) na Faculdade de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais, que confere o grau de «doutor» (isto é de «licenciado») em qualquer dos seguintes ramos:

1) Química; 2) Física; 3) Matemática; 4) Matemática e Física; 5) Ciências Naturais; 6) Ciências Biológicas; 7) Ciências Geológicas.

Também nesta Faculdade são cursados preparatórios de Engenharia (dois anos).

A duração normal dos estudos em cada uma das licenciaturas é de 4 anos, com excepção da licenciatura em Química que requere 5 anos.

Em qualquer das licenciaturas os cursos estão repartidos em duas categorias: *cursos fundamentais* e *cursos complementares*.

Os cursos fundamentais acumulam-se essencialmente no primeiro biénio e têm por finalidade fornecer uma

(1) Esta reforma recebe o nome do filósofo italiano que a introduziu.

(1) É interessante observar que, entre os mais convictos e originais apologistas do ensino intuitivo-experimental na Escola Média Inferior (segundo um método natural de redescoberta), se conta hoje em Itália uma sobrinha de F. ENRIQUES, a Prof.ª EMMA CASTELNUOVO, distinta colaboradora da *Gazeta de Matemática*.

base de cultura geral bastante sólida e vasta no ramo de que trate — procurando beneficiar ao máximo dos progressos da ciência e da metodologia, mas renunciando desde logo a um desenvolvimento exaustivo dos assuntos que, além de supérfluo, seria inviável. Trata-se, acima de tudo, de ensinar o melhor possível *ciência feita e assente* (o que não quer dizer de modo nenhum *ciência antiga e desactualizada),* segundo um critério de selecção e dosagem, tendente a precisar o que, nas disciplinas em questão, é efectivamente básico e de real interesse para a formação geral do matemático, do físico, do engenheiro — sem deixar de ter em conta o estado actual da ciência. Daqui resulta que os programas dos cursos fundamentais não podem variar muito de ano para ano. E todos esses cursos são obrigatórios.

Quanto aos cursos complementares, o ponto de vista adoptado é radicalmente diverso. A cultura geral não basta, evidentemente, para a formação de um cientista. A cultura geral é um meio, não um fim. O primeiro biénio de estudos estabelece a transição entre o Liceu e a Universidade — e é óbvio que não haverá ensino verdadeiramente universitário se não houver contacto com a frente de investigação actual, o que por sua vez seria impossível sem especialização. Ora, precisamente, para estabelecer esse contacto, para conduzir o aluno até à fronteira do conhecimento, para o familiarizar com as vicissitudes da investigação e com os problemas que continuam abertos — para isso mesmo é que existem os cursos complementares. E como não é possível especializar o aluno simultâneamente em todas as especialidades (até M. DE LA PALISSE seria capaz de o dizer), segue-se, como corolário imediato, que os cursos complementares não devem ser obrigatórios em bloco. Um outro corolário do ponto de vista explanado é que os programas de tais cursos devem ter uma ampla margem de variabilidade (1).

Deve ainda observar-se que, no plano da licenciatura em Ciências Matemáticas, figuram certos cursos complementares — tais como Astronomia, Cálculo actuarial, etc. — cujo carácter é mais pròpriamente o de *especialização técnica*, servindo para aqueles alunos que pretendam seguir determinadas profissões.

Os cursos são todos anuais, excepto alguns cursos fundamentais que são bienais. No início de cada ano lectivo a Faculdade publica um «Ordine degli Studi» com a indicação dos cursos professados durante esse ano, bem como a dos respectivos programas, horários, professores que os regem, etc.

Consultando por exemplo o «Ordine degli Studi» da Faculdade de Ciências de Roma para o ano de 1950-51, encontram-se ali, entre outras, as seguintes informações relativas à Licenciatura em Ciências Matemáticas:

Cursos fundamentais: 1. Análise matemática (algébrica e infinitesimal) (bienal) — 2. Geometria analítica com elementos de projectiva e geometria descritiva com desenho (bienal) — 3. Análise superior — 4. Geometria superior — 5. Mecânica racional com elementos de estática e desenho — 6. Física experimental com trabalhos práticos (bienal) — 7. Física matemática — 8. Química geral e inorgânica com elementos de orgânica (1).

Além destes cursos que, segundo o que se disse atrás, são todos obrigatórios, o aluno terá de escolher pelo menos três entre os seguintes 17 cursos complementares: 1. Teoria das funções — 2. Teoria dos números — 3. Geometria diferencial — 4. Geometria algébrica — 5. Topologia — 6. Matemáticas superiores — 7. Matemáticas complementares — 8. Matemáticas elementares do ponto de vista superior — 9. História das matemáticas — 10. Cálculo das probabilidades — 11. Matemática actuarial e técnica dos seguros livres sobre a vida humana — 12. Astronomia — 13. Geodosia — 14. Cálculos numéricos e gráficos — 15. Física Teórica — 16. Física superior — 17. Mecânica superior.

O ensino da Análise matemática é feito sempre por dois professores que ensinam alternadamente, num ano Análise algébrica e no ano seguinte Análise infinitesimal. O aluno é submetido a um exame no fim de cada um destes anos.

Análogas disposições são estabelecidas para o ensino da Geometria (analítica, projectiva e descritiva).

O ensino bienal de Física implica um exame único no fim do biénio, enquanto os respectivos trabalhos de laboratório comportam um exame no fim de cada ano.

Os restantes cursos comportam um único exame no fim do ano. Há duas épocas de exame: uma durante o mês de Junho e outra durante o mês de Outubro. As aulas começam em princípios de Novembro e terminam em fins de Maio.

Não há exames de frequência. Quando muito o professor pode submeter os alunos a um exame *ad hoc* a título de sondagem.

A licenciatura é concluída com um exame, ao qual só pode ser admitido o aluno que tenha obtido apro-

(1) Alguns desses cursos têm designação muito vaga precisamente para permitir maior versatilidade do programa.

(1) A presença de um curso anual de Química e dum curso bienal de Física na Licenciatura de Matemática pode causar estranheza, sobretudo atendendo a que existe já uma Licenciatura em Matemática e Física. Essa presença corresponde a um ponto de vista muito generalizado em Itália, segundo o qual o matemático precisa de tomar contacto com as ciências da natureza. De resto, é preciso notar que os programas destes cursos são em regra moderados.

vação em todos os cursos fundamentais e em pelo menos três dos cursos complementares por ele escolhidos. A parte mais importante do exame de licenciatura é a discussão oral de uma tese escrita que, na medida do possível, deve revelar uma certa originalidade. (Não há em Itália nenhum tipo de exame que corresponda pròpriamente ao nosso doutoramento; o licenciado é automàticamente *doutor*). Além da discussão do trabalho escrito, o exame de licenciatura compreende ainda a discussão oral de dois ou três temas propostos pelo júri.

A partir do terceiro ano o aluno dirige o melhor dos seus esforços para a preparação da tese. Os cursos complementares que tiver escolhido fornecer-lhe-ão matéria e sugestões para esse fim. O papel do professor em tais cursos deve pois ser em grande parte o de orientar o aluno para o trabalho de investigação, ou pelo menos para o de reelaboração pessoal. De resto, no segundo biénio o número de horas lectivas é bastante reduzida (não há trabalhos práticos na maior parte dos cursos), o que deixa ao aluno muito tempo livre para *se concentrar e trabalhar por si*. Há ainda actividade de seminários, mas não com o carácter e a intensidade que se observa por exemplo na Alemanha [1].

Analisando os dados precedentes sobre a organização geral da licenciatura em Matemática, descobrem-se ali, sem dúvida, vários pontos discutíveis; mas isso agora pouco interessa, mesmo porque, como dissémos, se está em véspera duma reforma em Itália.

Foquemos antes alguns aspectos interessantes dessa organização. O primeiro, o que salta logo à vista, é o da separação entre cursos fundamentais e cursos complementares à opção; mas esse não é exclusivo da Itália e tende a associar-se de tal modo a concepção moderna de ensino universitário, que já não carece de atitudes encomásticas.

O que julgo ser típico no ensino italiano é aquela existência de cursos bienais de Análise e de Geometria, cada um deles regidos por dois professores que se alternam de maneira que todo o aluno em condições normais possa ter o mesmo professor nos dois anos sucessivos. As vantangens que daí resultam para o ensino parecem-me apreciáveis. As matérias geralmente tratadas nos dois primeiros anos de Análise como parte de uma cultura geral que se estende aos preparatórios de Engenharia, constituem um todo indivisível, uma unidade científica à qual convém que corresponda unidade de orientação pedagógica. Neste ponto o regime italiano distancia-se bastante do de outros países, nomeadamente a Alemanha, em que se dá logo de início uma fragmentação dos cursos em semestres, sem necessária continuidade pessoal de regência; ora, se este último sistema é aceitável — e até o mais indicado — na fase de especialização, o mesmo já não se pode dizer quando se trata de construir uma cultura básica, a que convém essencialmente o carácter unitário.

A mesma unidade se impõe ainda no estudo da Geometria (analítica, projectiva e descritiva). Em particular, o facto de a Geometria analítica não estar incluída no curso de Análise (ao contrário do que acontece entre nós) permite fazer um ensino mais cuidado e eficiente de qualquer dessas matérias. De resto, Análise e Geometria são ramos distintos da Matemática, que correspondem mesmo a mentalidades bem diversas.

Têm sido publicados em Itália, em diferentes épocas, excelentes textos de Matemática para o ensino superior. Vários desses livros, geralmente notáveis pela clareza, pelo rigor lógico e pela seriedade científica, têm-se tornado de tal modo conhecidos na grande massa dos nossos estudantes universitários que nem vale a pena citá-los aqui. O êxito que têm alcançado no nosso meio deve também atribuir-se, em grande parte, àquela afinidade étnica a que já no começo fiz referência, apontando-a como uma das razões pelas quais oferece particular interesse, para nós, o conhecimento das condições em que é feito o ensino em Itália.

Neste sentido são ainda dignos de nota os seguintes comentários de F. Enriques, embora estes não se refiram ao panorama actual:

«As Universidades italianas, em que as matemáticas se encontram num alto nível, oferecem aos jóvens candidatos ao ensino favoráveis condições de estudo, sob a orientação de mestres que são, em geral, valiosos cultores da ciência. Além disso, a disposição dos estudos do primeiro biénio tem vindo a organizar-se de tal modo que os cursos fundamentais adquiriram no nosso país uma forma particularmente cuidada, dando assim lugar a tratados que são muitas vezes modelos de acabado rigor. Se um defeito se lhes pode apontar, por vezes, do ponto de vista didáctico, é só este: que a exposição perfeita deixa menos ao esforço do aluno, ou que o rigor lógico esconde em parte a génese das ideias. Mesmo a exacta formulação das restrições exigidas no enunciado dos teoremas pode pertubar a visão da génese das ideias, e até a inteligência do seu valor.»

Enriques aponta em seguida que, como correctivo ou complemento a este ensino purista, surgiu a necessidade de apresentar por outro lado aos alunos uma vista geral dos desenvolvimentos que precederam

[1] O trabalho de seminário é mais desenvolvido nos Colégios Universitários de que falaremos adiante.

o último grau de perfeição da teoria. E acrescenta: «A formação de professores de matemática que estejam à altura das suas funções didácticas requer em geral que a ciência seja por eles apreciada não sòmente no aspecto estático, mas também no seu evoluir. E portanto que o estudioso aprenda pela história a reflectir sobre a génese das ideias e que, por outro lado, participe no interesse pela investigação».

«Despertar o interesse dos futuros professores (do ensino secundário) pela investigação científica e mantê-lo depois vivo neles, é tarefa delicada, porquanto os problemas de altas matemáticas parecem, à primeira vista, inteiramente desligados do campo elementar em que virá a desenvolver-se a actividade do professor da escola média. Importa por isso mostrar a contribuição significativa que as matemáticas superiores prestam em vários sentidos à inteligência dos conceitos e à resolução dos problemas elementares».

E, neste sentido, ENRIQUES salienta o papel desempenhado em Itália pelas «Questioni riguardanti le matematiche elementari» e pelo «Periodico di Matematiche», a que já me referi.

Ensino post-universitário

São já tradicionais em Itália os cursos de aperfeiçoamento ou de extensão universitária, anuais ou bienais. Muitos destes cursos têm carácter de especialização técnica, e por isso quem os segue pretende sobretudo obter um título para fins profissionais. Mas outras vezes trata-se antes de cursos com finalidade especulativa, dedicados ao escol dos jóvens licenciados. Os professores que os regem são em regra cientistas, cuja obra de investigação, consagrada dentro e fora do próprio país, atrai estudiosos de vários pontos do mundo civilizado. Quem assiste a esses cursos já não é movido pelo simples propósito de superar os exames e alcançar um diploma, mas sim pelo *amor da ciência*, no sentido platónico desta expressão; já não há verdadeiramente prelecções dum professor dirigidas a alunos, mas antes uma conversa amena entre um homem experiente e um núcleo de gente idealista, que o procura para ser encaminhada na exploração dos novos trilhos do conhecimento — tal como acontecia nos círculos filosóficos da antiga Grécia.

Deste modo se criam, se desenvolvem e se propagam as grandes escolas de investigação. Uma das que nos últimos 70 anos mais têm florescido no solo italiano é a escola de Geometria algébrica, de que foi arauto LUIGI CREMONA e de que foram principais construtores FEDERIGO ENRIQUES, GUIDO CASTELNUOVO e FRANCESCO SEVERI (falecidos os três primeiros). Sucessivas gerações de geómetras de vários países têm bebido daquela fonte: uma parte da juventude passaram-na em Itália, junto dos grandes mestres.

Mas também a escola italiana de Análise, embora menos genuinamente italiana, tem tido representantes da mais alta categoria: VITO VOLTERRA, o criador da Análise funcional; GREGORIO RICCI e TULLIO LEVI-CIVITA, os fundadores do Cálculo absoluto; e ainda BETTI, PINCHERLE, DINI, ARZELÀ, GIULIO ASCOLI, CESARO, BIANCHI, TONELLI, e tantos outros, e tantos mais (1).

Desde longa data se concedeu aos estudiosos largo apoio concretizado em bolsas de estudo e facilidades de vária ordem; mas não havia inicialmente uma organização efectiva de trabalho de investigação segundo as concepções modernas. Falando com ENRIQUES sobre o assunto, dizia-me este: «Os rapazes vinham para aqui, assistiam aos nossos cursos e visitavam-nos para trocarem connosco impressões em longas conversas».

Há contudo particularidades da orgânica de ensino que, a par da tradição científica e do exemplo vivo dos mestres, explicam em grande parte o alto nível atingido pelas investigações matemáticas naquele país.

Citarei em primeiro lugar uma circunstância que reputo importantíssima: os assistentes têm ali pouco tempo de trabalho lectivo, no máximo 4 horas por semana; sòmente o serviço de exames (os do fim do ano que outros não há normalmente) é para eles um tanto absorvente. Todo o tempo restante podem-no em regra dedicar ao trabalho de aperfeiçoamento e de investigação.

O período que vai dos 18 aos 25 anos é geralmente decisivo para a vida dum cientista. Lendo as biografias dos grandes matemáticos, observa-se que as premissas das suas obras são lançadas quase sempre durante aqueles anos. É pois necessário não extinguir ou enfraquecer com um regime de trabalho impróprio essa chama sagrada que rompe e se ateia no período áureo da existência ! (2)

Já vimos que não existe em Itália um acto correspondente ao nossso de doutoramento: o doutor é o licenciado. Ali, o acto fundamental na carreira do ensino universitário (após a licenciatura) é o da aquisição do título de «libero docente» (professor livre), que de certo modo poderíamos assimilar, quanto a efeitos legais, ao título de «professor agregado», mas que não requere provas públicas como as que se prestam entre nós: a atribuição da «libera docenza» é feita essencialmente com base no «curriculum vitae» do candidato, cujos trabalhos são submetidos à apreciação dum juri especializado; à parte isso, o candidato terá de fazer uma conferência sobre assunto do seu campo de investigação e pode, eventualmente,

(1) A ordem por que são aqui citados estes nomes não pretende de nenhum modo ser uma ordem de valores.

(2) Neste sentido, nunca é demais encarecer a acção benéfica do nosso Instituto de Alta Cultura, principalmente no que se refere à concessão de bolsas de estudo fora do País.

ser obrigado a uma prova didáctica, *da qual porém será dispensado desde que tenha revelado competência no desempenho de funções docentes*. E, ainda depois disso, nos concursos a lugares de professor catedrático, é sobre a obra científica acumulada pelos candidatos até ao instante do concurso (chegam a apresentar-se provas tipográficas de trabalhos) que se baseia substancialmente a decisão do júri.

Há por outro lado uma instituição que, por si só, tem feito pela Matemática e, em geral, pela cultura italiana, mais do que várias universidades juntas: refiro-me à Escola Normal Superior de Pisa, da qual têm saído muitos dos maiores valores de que a Itália se orgulha no campo das ciências e das letras. A maior parte dos matemáticos atrás citados passaram por aquela Escola ou foram ali professores (Betti e Dini foram mesmo directores da Escola, exercendo uma influência profundíssima em várias gerações de analistas). A Escola Normal Superior de Pisa é um *Colégio Universitário* que recebe, mediante concurso nacional, estudantes inscritos nas Faculdades de Letras e de Ciências de Pisa, bem como licenciados por escolas congéneres de toda a Itália ou mesmo do estrangeiro. Além de alojamento e alimentação, fornece-lhes gratuitamente ensino, a complemento daquele universitário, sob a forma de cursos, seminários e conferências; para os licenciados há cursos de aperfeiçoamento. Ao entrar para a Escola, os alunos assumem a obrigação formal de se dedicarem mais tarde ao ensino ou à carreira científica. A Escola publica uma importante revista, os «*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*».

Há ainda em Itália vários outros Colégios Universitários e *Case dello Studente*, com funções mais ou menos semelhantes às do anterior — mas nenhum com a tradição, o nível, o esplêndido fulgor da Escola de Pisa.

Mas a investigação científica em Itália está hoje subordinada a um plano geral de organização, montado em grande escala.

Pela sua parte, o «*Consiglio Nazionale delle Ricerche*» — orgão do Estado que promove, coordena e disciplina as investigações tendentes ao progresso científico e técnico da Nação — mantém um número muito elevado de Centros de Estudo (com quadros permanentes de pessoal e ricamente apetrechados com material do mais moderno) e concede anualmente numerosas bolsas de estudo para principiantes [1]. A par das revistas especializadas em que se publicam trabalhos relativos aos diferentes ramos de investigação, o «Consiglio Nazionale delle Ricerche» publica uma revista própria, «La Ricerca Scientifica», que, em fascículos mensais de 150 páginas, resume a actividade geral dos Centros de Estudo dependentes daquele organismo; além disso, subsidia a publicação não só de revistas, como ainda de muitas obras científicas.

De resto, nem toda a actividade de investigação — incluindo aquela estipendiada pelo Estado — depende do «Consiglio Nazionale delle Ricerche». E, para dar uma ideia aproximada do que é essa actividade, seria necessário um longo artigo ou antes uma série de artigos escritos expressamente com esse fim. Limitar-me-ei por isso a falar dos dois Institutos que conheço directamente — o «*Istituto di Alta Matematica*» e o «*Istituto per le Applicazioni del Calcolo*», ambos de Roma.

O *Istituto di Alta Matematica*, fundado em 1940, graças ao grande prestígio e dinamismo de Francesco Severi, seu primeiro e actual Presidente, funciona em edifício comum ao da Secção de Matemática da Universidade de Roma. Embora se trate de um centro de estudos post-universitários, que não implica exames nem concessão de qualquer título ou diploma, conserva ainda na sua estrutura carácter universitário no que diz respeito a pessoal docente e a realização de cursos: — tem um quadro constituído por professores catedráticos, assistentes, etc.; no começo de cada ano lectivo publica um programa circunstanciado dos cursos e conferências a realizar durante esse ano (excepto algumas que não estejam previstas) acompanhado dos respectivos horários (em regra, 3 horas semanais para cada curso).

Os alunos do Instituto de Alta Matemática, chamados «discepoli ricercatori», são em geral jóvens licenciados, italianos ou estrangeiros, que estão interessados em seguir a carreira do ensino universitário ou da pura investigação e aos quais são concedidas bolsas de estudo.

Os professores do Instituto, que, em princípio, devem ser investigadores conhecidos pela sua obra nos meios científicos de todo o mundo (e são-no realmente), organizam os programas dos seus cursos precisamente sobre assuntos relativos a trabalhos pessoais. As lições são feitas em estilo ameno de conversa e, mais do que a exposição dum corpo de doutrina perfeitamente organizado e estabilizado, tendem a revelar as dificuldades encontradas no decurso das investigações, indicando pontos a precisar, levantando novos problemas e sugerindo ideias. A lição é geralmente seguida duma troca de impressões entre os circunstantes e, por vezes, de animada discussão.

[1] Não disponho neste momento de dados estatísticos actuais e completos sobre a vastíssima organização do C. N. R.

Mas anuncia-se para breve em Portugal uma exposição promovida pelo C. N. R., com a colaboração do Instituto Italiano de Cultura, sobre a actividade tecnico-científica da Itália nos últimos trinta anos, e então se poderá ter ideia do que seja aquela organização.

Aos discípulos investigadores são propostos temas que podem mesmo surgir espontâneamente no decurso dessas reuniões. Os resultados que porventura forem obtendo são comunicados a professores e colegas, directamente ou em conferências, e, uma vez controlados e sistematizados, serão expostos em notas ou memórias que podem ser publicadas nos «Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazioni» ou em qualquer outra das muitas revistas existentes no país.

No seu curto período de existência, apesar das profundas perturbações causadas pela Guerra (chegando à completa paralização em 1944), o Instituto de Alta Matemática tem conseguido acumular uma obra de vulto, concretizada em numerosas publicações e num intenso intercâmbio com diversos países.

O *Instituto para as Aplicações do Cálculo* tem estrutura e finalidade muito diversas das do primeiro.

Fundado em 1927 pelo Prof. MAURO PICONE, seu actual director, tem por objectivo essencial subsidiar as ciências experimentais e a técnica, no que se refere à análise matemática quantitativa dos seus problemas; para tanto compete-lhe, por um lado, prestar colaboração e assistência científica a entes oficiais ou particulares que se lhe dirijam, para resolução de problemas que se põem nos diversos domínios aplicativos, e, por outro lado, desenvolver pesquisas tendentes ao aperfeiçoamento e à criação de métodos da Análise matemática, que lhe permitam estar á altura do desempenho de tão complexa e difícil missão.

À frente deste Instituto encontra-se um conselho directivo composto por um Presidente, pelo Director do Instituto e pelos representantes de numerosos organismos oficiais e particulares, incluindo os Ministérios da Aeronáutica, das Obras Públicas, das Comunicações, das Corporações, da Instrução, da Guerra e da Marinha.

O pessoal de investigação e de execução do Instituto compreende um Director, um Vice-Director, Coadjutores, Consulentes ordinários, Calculadores, Assistentes Calculadores e Desenhadores.

Para dar uma ideia das investigações desenvolvidas neste Instituto, começarei por indicar alguns dos ramos da Ciência e da Técnica, sobre os quais têm incidido: 1) *ciência das construções e teoria da elasticidade*; 2) *estática e dinâmica das construções aeronáuticas*; 3) *fenómenos vibratórios em vários tipos de construções*; 4) *hidráulica*; 5) *construções de pontes*; 6) *construções de máquinas*; 7) *caminhos de ferro*; 8) *electrotécnica, electromagnetismo e radiotécnica*; 9) *termometria e termologia*; 10) *aerodinâmica*; 11) *geofísica*; 12) *óptica*; 13) *economia industrial*; 14) *estatística*; 15) *cálculo actuarial*; 16) *finanças*; 17) *dinâmica económica*; 18) *balística e técnica do tiro*; 19) *tabulação de funções clássicas*.

Muitas destas pesquisas têm requerido prévias investigações puramente matemáticas, algumas das quais se concluiram só ao fim de vários anos de tentativas e estudos. Deste modo o Instituto para as Aplicações do Cálculo estabelece um contacto vivo, fecundíssimo, entre a Matemática e as Ciências aplicadas. E o resultado pode ver-se na massa imponente de publicações do Instituto, que vão desde as mais abstractas e desinteressadas especulações matemáticas até às mais concretas e utilitárias aplicações.

O escol da moderna geração de matemáticos italianos tem sido em grande parte influenciado pela actividade deste Instituto, o que já em si é uma excelente promessa de fecundidade. Essa influência começa por vezes bastante cedo, porquanto muitas das teses de licenciatura são ali preparadas.

No Instituto para as Aplicações do Cálculo a resolução dos problemas é geralmente conduzida até a fase final — ao resultado numérico expresso em algarismos. Para isso, o Instituto é ricamente dotado de instrumentos gráficos e mecânicos de cálculo numérico. Neste momento está-se ali em via de adquirir uma máquina calculadora electrónica Ferranti, construída em Manchester, Inglaterra. Tem esta máquina uma memória de 16384 células para números de 40 algarismos binários, sobre tambor magnético, e uma memória «rápida», de tubos de raios catódicos Williams, de 384 células, igualmente para números de 40 algarismos binários. Prevê-se que com o emprego desta máquina seja possível inverter matrizes quadradas de ordem 100, num período de 20 horas, o que é verdadeiramente assombroso, se atendermos a que uma tal inversão implica o cálculo de 10.000 coeficientes, cada um dos quais requere, por si só, um número desmedido de operações. E não se pense que a máquina electrónica substitui o matemático. De nenhum modo! O papel da máquina é *executar determinados planos* e, para elaborar esses planos, exige-se o concurso de matemáticos de vários tipos, inclusivamente *especialistas de Lógica matemática*.

Há poucos anos foi deliberado, após longo estudo, fixar em Roma o Centro Internacional de Cálculo Mecânico da U. N. E. S. C. O., sob a direcção proficientíssima do Prof. PICONE. Está em curso a organização das instalações, a cargo do Prof. ALDO GHIZZETTI Vice-Director do Instituto para as Aplicações do Cálculo.

Deste modo se deu justa consagração a uma actividade de vários anos, à qual se encontram ligados altos interesses culturais e económicos duma grande Nação.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

PROFESSOR GOTTFRIED KÖTHE

Aos estudiosos portugueses que se interessam por Análise funcional, ofereceu o Instituto de Alta Cultura uma preciosa oportunidade, convidando a vir fazer no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa um curso de dois meses, sobre a teoria dos espaços vectoriais topológicos localmente convexos, um dos primeiros especialistas no assunto — o Prof. GOTTFRIED KÖTHE da Universidade de Mogúncia.

A Gazeta de Matemática não pode deixar de registar com júbilo este acontecimento de tão profundo significado na nossa vida científica.

A teoria dos espaços localmente convexos é o ramo de mais viva actualidade da Análise funcional, ultrapassando consideràvelmente a teoria de BANACH em possibilidades de aplicação frutuosa a questões concretas de Análise clássica, quer no campo real quer no campo complexo. Para justificar esta afirmação bastaria aduzir como exemplo a teoria das distribuições de SCHWARTZ, que tão larga e sensacional repercussão obteve em poucos anos em vários sectores das matemáticas puras e aplicadas: nos seus fundamentos intervêm, de maneira inevitável, as modernas concepções da Análise funcional.

Ora um dos principais pioneiros na construção da teoria dos espaços localmente convexos é precisamente o Prof. KÖTHE, cujos trabalhos publicados a partir de 1934, inicialmente em colaboração com OTTO TOEPLITZ, sobre os espaços «perfeitos» («vollkommene Räume») e, em particular ainda, sobre os espaços «escalonados» («Stufenräume»), contêm já o germe da teoria dos dos espaços localmente convexos — como é posto em relevo por DIEUDONNÉ num recente artigo, no Boletim da Sociedade Matemática Americana. E, ainda depois disso, G. KÖTHE tem continuado a contribuir de maneira primacial para o desenvolvimento da teoria, na forma que lhe foi dada pelos trabalhos decisivos de MACKEY, DIEUDONNÉ e SCHWARTZ.

As mais recentes publicações de KÖTHE tratam de aplicações da referida teoria aos espaços de funções analíticas, nomeadamente às relações entre os funcionais analíticos de FANTAPPIÉ e as distribuições de SCHWARTZ.

Convém recordar entretanto que a primeira fase da vida científica do Prof. KÖTHE se desenvolve no campo da Álgebra abstracta. Discípulo de EMMY NOETHER juntamente com VAN DER WAERDEN, MAX DEURING, LEVITZKI e outros («The NOETHER's boys» como lhes chama HERMANN WEYL num interessante artigo [1] sobre a figura da célebre matemática precocemente extinta), ele foi durante vários anos um dos mais eficazes continuadores da obra da grande algebrista de GÖTTINGEN. Ainda hoje se sente a influência de várias das ideias introduzidas pelo Prof. KÖTHE no estudo dos sistemas hipercomplexos.

É com tal formação que ele irá avizinhar-se de OTTO TOEPLITZ, o eminente analista da escola de HILBERT, empenhado em investigações de longo alcance sobre espaços funcionais. Assiste-se então a um belo exemplo de colaboração científica, em que mais uma vez o espírito algébrico se associa ao espírito analítico numa síntese fecunda. E é partindo de questões concretas, ricas de conteúdo, numa ascensão indutiva do particular para o geral, que vão nascer os modernos esquemas da Análise funcional.

Eis um rápido pérfil do cientista convidado pelo Instituto de Alta Cultura a vir realizar um curso no Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa. Este curso teve início no dia 9 de Março de 1954 e abrange os seguintes tópicos:

1 — *Preliminares algébricos:* espaços vectoriais (sem topologia), bases, dimensão, espaço quociente e espaço complementar, dual algébrico, espaços ortogonais, conjuntos convexos e semi-normas, teorema de HAHN-BANACH (nas duas formas, analítica e geométrica).

2 — *Preliminares topológicos:* espaços métricos, teorema de BAIRE, estruturas topológicas, filtros e ultrafiltros, compacidade, produto topológico, estruturas uniformes, filtros de CAUCHY, espaços completos, noção de conjunto precompacto.

3 — *Espaços localmente convexos:* definição e primeiras propriedades, espaços normados, espaços de BANACH, espaços (F), espaço quociente, suplementar topológico, completação, conjuntos limitados, sistemas duais, topologia fraca, teorema dos bipolares, teorema sobre os conjuntos uniformemente limitados teorema de BANACH-MACKEY sobre os conjuntos limitados, topologia forte, topologia de MACKEY e topologia da convergência uniforme sobre os compactos.

No dia 6 de Março o Prof. KÖTHE realizou, no Instituto dos Altos Estudos da Academia das Ciências de Lisboa, uma conferência subordinada ao título «La théorie des espaces localement convexes et ses applications à l'Analyse». A apresentação foi feita pelo Prof. Vitor Hugo de Lemos, que, na qualidade de sócio efectivo da Academia das Ciências, traçou as linhas fundamentais do «curriculum vitae» científico do conferente, enaltecendo a sua obra de investigação.

No momento em que redigimos esta notícia anuncia-se uma outra conferência do Prof. KÖTHE, que terá lugar na Faculdade de Ciências de Lisboa, sobre o tema: «Le problème de la non-contradiction dans les mathématiques».

J. Sebastião e Silva

[1] «Scripta Mathematica», 1935.

ESCOLA DE ESTATÍSTICA DA UNIVERSIDADE DE MADRID

É notável a atenção que se tem dado nos últimos anos no país vizinho aos estudos de Estatística e o seu desenvolvimento acentua-se dia a dia.

A criação, há já anos, do Instituto de Investigações Estatísticas do Concelho Superior de Investigações Científicas, cuja direcção foi entregue ao Prof. SIXTO RIOS, foi um passo decisivo. Professores espanhóis têm ido especializar-se nos centros estrangeiros, estatísticos de grande categoria internacional têm feito em Madrid cursos e séries de conferências, numerosas traduções de literatura da especialidade foram já publicadas e outras estão em curso. A revista «Trabajos de Estatística» que iniciou a sua publicação em 1950 é hoje um jornal indispensável para os que se ocupam de Estatística Matemática. A Espanha possui enfim um grupo de bons estatísticos matemáticos.

Recentemente foi criada na Universidade de Madrid uma Escola de Estatistica [1]. Dirige-a o Prof. SIXTO RIOS.

Pelo interesse que apresenta transcrevemos o plano de estudos da Escola:

Grau Médio

	Horas por semana Teór.	Prát.
Matemáticas Gerais; 2 períodos de 4 meses	3	2
Estatística Geral [2]; 2 » » 4 »	3	1
Métodos Estatísticos [3]: Elaboração de Estatísticas (1.º per. de 4 meses); Métodos Estatísticos Gerais (2.º per. de 4 meses)	2	2
3 Cursos de Aplicações [4]	2	

Grau Superior

a) *Diploma de Estatística Geral*

1.º ANO	Horas por semana Teór.	Prát.
Matemáticas I [5]; 2 períodos de 4 meses . .	3	2
Estatística Geral [6]; 2 períodos de 4 meses	3	1
Métodos Estatísticos [7]; 2 períodos de 4 meses	2	2
3 Cursos de Aplicações [8]	2	

Grau Superior

2.º ANO	Horas por semana Teór.	Prát.
Matemáticas II [9]; 2 períodos de 4 meses .	3	2
Estatística Matemática [10]; 2 períodos de 4 meses	3	1
Métodos Estatísticos [11]; 2 períodos de 4 meses	2	2
2 Cursos de Aplicações [12]	2	

O aluno, durante o curso, terá de realizar um trabalho teórico-prático sob a direcção de um Professor da Escola.

b) *Diploma de Estatística Matemática*

1.º ANO	Horas por semana Teór.	Prát.
Matemáticas para Estatísticos [13]; 2 per. de 4 meses	3	2
Estatística Matemática [14]; 2 per. de 4 meses	3	1
Métodos Estatísticos [15]; 2 per. de 4 meses .	2	2
2 Cursos de Aplicações [16]	2	

2.º ANO	Teór.	Prát.
Estatística Matemática: Cálculo das Probabilidades [17] (1.º per. 4 meses)	3	1
Estatística Matemática: Teoria da Inferência [18] (2.º per. 4 meses) . . .	3	1
2 Cursos de Aplicações [19]	2	

O aluno deverá realizar durante o curso um trabalho teórico-prático sob a direcção de um Professor de Escola.

M. Z.

---

[1] A esta Escola já se referiu no n.º 56 de *Gazeta de Matemática* o nosso colaborador DR. M. A. FERNANDES COSTA.

[2] O nível deste curso será, aproximadamente, o do livro *Applied General Statistics* de CROXTON e COWDEN.

[3] O nível do curso aproximar-se-á do do livro *Métodos Estatísticos aplicados à Economia e aos Negócios* de MILLS.

[4] À escolha dentre os seguintes: Estatística Demográfica, Estatística Económica, Aplicações da Estatística à Indústria, Aplicações da Estatística à Biologia e à Agricultura e Aplicações da Estatística à Pedagogia e à Psicologia.

[5] Este curso abrange Geometria Analítica, Cálculo Diferencila e noções de Cálculo Integral.

[6] O nível deste curso aproximar-se-á do livro de SMITH e DUNCAN, *Fundamentals of the Theory of Statistics*.

[7] O nível deste curso será apròximadamente o da obra *Elementary Statistical Analysis* de WILKS (já traduzido em espanhol).

[8] À escolha dentre 9 cursos: os 5 já citados para o Grau Médio e Técnica da Amostragem, Estatística Actuarial, Econometria, Estatística Aplicada à Medicina.

[9] Este curso abrange Cálculo Integral, Cálculo Matricial, Formas Quadráticas e Cálculo das Diferenças Finitas.

[10] Nível do curso aproximadamente o do livro de MOOD, *Introduction to the Theory of Statistics*.

[11] O nível do curso deverá aproximar-se do das obras: *Statistical Methods in Research* de JOHNSON e *Techniques of Statistical analysis* da Universidade de Columbia.

[12] A indicar posteriormente.

[13] O curso compreenderá: Teoria da Medida, Cálculo Matricial, Espaços Funcionais, etc.

[14] Nível aproximadamente o da obra *Introduction to the Theory of Statistics* de MOOD.

[15] O mesmo nível que para o curso de Estatística Geral.

[16] Os mesmos do curso de Estatística Geral.

[17] e [18] O nível destes cursos aproximar-se-á do dos livros *An Introduction to Probability Theory and its Applications* de FELLER ou *Calcul des Probabilités* de FORTET e *Mathematical Methods of Statistics* de H. CRAMER.

[19] A indicar posteriormente.

INSTITUTO ELIE CARTAN — Universidade de Nancy

Num país como o nosso, onde, ainda há bem poucos anos, a ideia da formação de centros ou institutos de investigação anexos às Universidades era *nova* e dava lugar a controvérsias, e onde a pesquiza científica se tem processado mais pelo esforço de individualidades isoladas do que pelo de actividades coordenadas em grupo, teria sem dúvida um grande interêsse fazer o estudo da história (moderna) de tais núcleos de trabalho, nos países que dão maior contribuição ao progresso das ciências. Desse estudo se poderiam recolher boas lições para nosso uso e não faltam, entre os historiadores portugueses amigos da ciência e os cientistas portugueses amigos da história, quem possa entregar-se a essa tarefa.

Uma simples constatação é o facto — contrário ao que muita gente pensa — de que nem sempre um estudo científico nasce já estruturado e batizado com um regulamento, uma dotação e uma fachada, criado por decissão oficial da entidade competente. Muitas vezes ele se forma pela actividade científica persistente dum grupo de estudiosos, que se não detêm em peias burocráticas e decidem trabalhar em conjunto, uma vez reunidas as condições mínimas indispensáveis. Exemplos disso encontram-se por toda a parte.

Quero citar aqui o caso do Instituto Elie Cartan anexo à Faculdade de Ciências da Universidade de Nancy, cuja recente fundação — como sublinha o opúsculo que divulga o seu funcionamento — veio «concretizar no plano administrativo uma realidade já existente há vários anos». Faço-o, de resto, com um sentimento mixto de satisfação e gratidão, recordando todo o benefício recolhido para a minha formação matemática, duma estadia em Nancy em 1949-50, quando tomei parte no seminário de pesquizas para estudantes avançados, criado um ou dois anos antes e que foi o germe de formação do Instituto Elie Cartan.

As informações que seguem, relativas à organização e actividade do Instituto, são transcritas do referido opúsculo. Elas mostram, por si só, o alto nível científico e a projecção internacional que assume actualmente essa actividade.

A. Pereira Gomes

ORGANIZAÇÃO E ACTIVIDADES DO INSTITUTO ELIE CARTAN

Qualquer estudante francês ou estrangeiro pode ser ouvinte do Instituto Elie Cartan. Não lhe é exigido qualquer pagamento pela inscrição. Qualquer professor de Universidade francesa ou estrangeira, matemático, pode ser convidado a fazer um curso ou série de conferências no Instituto, pelo que receberá emolumentos.

Os ouvintes do Instituto Elie Cartan assistem aos cursos, conferências e seminários organizados pelo Instituto. Não têm de prestar prova alguma de exame, mas encontram junto dos professores do Departamento Matemático da Faculdade de Ciências de Nancy e dos organismos administrativos da Universidade todo o auxílio material e técnico que necessitem: uso das bibliotecas universitárias e do Instituto Elie Cartan; participação das vantagens materiais de que beneficiam os estudantes da Universidade de Nancy; direcção de investigações e de trabalho.

Os estudantes estrangeiros, bolseiros em França, que desejem ir para Nancy como ouvintes têm interesse prático em indicar os seus projectos à Direcção do Instituto Elie Cartan por altura do mês de Julho de cada ano, em vista da organização do ano escolar seguinte (Novembro a Junho). Em certos casos particularmente interessantes podem receber um auxílio pecuniário da Direcção Geral do Ensino Superior.

O Conselho de Administração do Instituto Elie Cartan é, provisòriamente, composto pelo Director da Faculdade de Ciências de Nancy, como Presidente, pelo Prof. J. Delsarte, como Director, pelos Profs. J. Dieudonné, L. Gauthier e R. Godement da Faculdade de Ciências de Nancy e pelos Profs. H. Cartan e L. Schwartz da Faculdade de Ciências de Paris.

Anteriormente ao reconhecimento oficial do Instituto E. Cartan (decreto ministerial de 1 de Julho de 1953), durante o ano lectivo 1952-53, oito professores estrangeiros, cinco estudantes americanos, bolseiros Fulbright e um estudante canadiano, bolseiro do seu Governo, participaram das actividades do Instituto. Os Professores estrangeiros Bureau, de Liège, Deuring, de Göttingen, Edwards, de Londres, E. Hille, de Yale, Hilton e Smithies, de Cambridge, Stone de Chicago e Whitehead de Oxford expuseram em conferências vários assuntos e resultados das suas investigações. Realizaram no Instituto cursos os Professores franceses Delsarte e Godement de Nancy e J. Serre do C.N.R.S.

M. Z.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DOS EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Fisico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1953 — Ponto n.º 1.

3734 — Provar que dois números ímpares consecutivos são sempre primos entre si.

R: *Sejam* $2n+1$ *e* $2n+3$ *os números. Todo o divisor comum dos dois números será um divisor da sua diferença isto é de* 2, *como os divisores de* 2 *são* 1 *e* 2 *e este último não é neste caso divisor dos dois números só* 1 *o será e portanto os números são primos entre si.*

3735 — Calcular dois inteiros positivos, sabendo que o seu m. m. c. é 308 e que o seu m. d. c. é 11. Achar as diversas soluções do problema.

R: *Seja* $a=11m$ *e* $b=11n$ *os números cujo* m d c *é* 11 *e cujo* m m c *é* 308. *Será então* $308=11\,m.n.$, *onde* m *e* n *são inteiros primos entre si. Daquela fórmula resulta* $mn=28$ *e portanto ou* $m=1$ *e* $n=28$ *ou* $m=2$ *e* $n=14$, *ou* $m=4$ *e* $n=7$, *donde as três soluções:* $a_1=11, b_1=308$; $a_2=22, b_2=154$; $a_3=44, b_3=77$.

3736 — Qual o resto da divisão do produto abc por 9, sabendo que os restos das divisões de a, b e c por 9 são 3, 4 e 8 respectivamente. Justificar a resposta.

R: *Em vista do enunciado é* $abc \equiv 3.4.8$ *mod 9 ou seja* $abc \equiv 96$ *mod 9 ou ainda* $abc \equiv 6$ *mod 9, e daqui resulta ser o resto* 6. *A justificação resulta da definição de congruência e das propriedades das congruências.*

3737 — Decompor de todos os modos possíveis o número 3000 em duas parcelas inteiras positivas, múltiplas respectivamente de 18 e de 31.

R: *Será* $18x+31y=3000$. *Esta equação tem uma solução inteira* $y=-6, x=177$, *donde as soluções gerais em números inteiros* $x=177+31m$; $y=-6-18m$ *onde* m *é um inteiro? As soluções inteiras positivas obtem-se daquelas fórmulas desde um inteiro tal que* $-177/31<m<-1/3$ *quer dizer que seja* $m-5 \leqslant m<-1/3$, *donde vem para* m *os valores* $-5, -4, -3, -2$ *e* -1. *O problema tem assim 5 soluções.*

3738 — Determinar m de modo que as raízes da equação $x^2+2mx+4=0$ sejam reais, desiguais e ambas positivas.

R: *Terá que ser* $\Delta=m^2-4>0$, *isto é,* $m<-2$ *ou* $m>2$; *e alem disso ser* $-m>0$, *donde finalmente a solução do problema* $m<-2$.

3739 — Determinar x de modo que o 2.º, o 3.º e o 5.º termos do desenvolvimento de $(2+x)^5$ estejam em progressão geométrica.

R: *Os termos pedidos são, o* $2^o: 80x$, *o* $3^o: 80x^2$ *e o* $5^o: 10x^4$. *Para que os termos estejam em progressão geometrica terá que ser* $(80x^2):(80x)=(10x^4):(80x^2)$ *donde* $x=\frac{1}{8}x^2$ *e daqui as duas soluções* $x=0$ *ou* $x=8$. *A solução* $x=0$ *servirá desde que se considere a existência de progressões geometricas de razão* 0, *fora disso não.*

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Fisico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1953 — Ponto nº 2.

3740 — Provar que o produto de dois números pares consecutivos é um múltiplo de 8.

R: *Sejam* $a=2n$ *e* $b=2n+2$ *os números pares consecutivos. Será* $ab=2n(2n+2)=4n^2+4n=$ $=4n(n+1)$; *por outro lado é ou* $n=2p$ *ou* $n=2p+1$ *No primeiro caso* $ab=4.2p(n+1)=8p(n+1)$ *e o produto é multiplo de* 8. *No segundo caso é* $n+1=$ $=2p+2$ *e então* $ab=4n(2p+2)=8n(p+1)$ *e do mesmo modo é* ab *multiplo de* 8.

3741 — Determinar os inteiros positivos que divididos por 7 dão resto superior ao cociente em 3 unidades.

R: *A equação que resolve o problema é* $x=7y+y+3$ *ou seja* $x-8y=3$ *da qual uma solução em números inteiros se vê imediatamente ser* $x=3, y=0$; *daqui as soluções gerais, em números inteiros* $x=3+8m$ *e* $y=m$ *onde* m *é um inteiro qualquer. Quer dizer os números pedidos são da forma* $x=3+8m$ *onde* $m \geqslant 0$ *é um inteiro, inferior a 4 pois o resto deve ser inferior a 7.*

3742 — Qual o resto da divisão de $a+b$ por 13, sabendo que a é um múltiplo de 104 e que b dividido por 13 dá de resto 8. Justificar a resposta.

R: *Como* $104=\dot{13}$ *e* $b=\dot{13}+8$ *será* $a+b=\dot{13}+8$ *donde o resto da divisão de* $a+b$ *por* 13 *é* 8.

3743 — Decompor de todos os modos possíveis a fracção $\frac{3149}{510}$ em duas parcelas fraccionárias positivas de denominadores 17 e 30, respectivamente.

R: *Será* $\frac{3149}{510}=\frac{x}{17}+\frac{y}{30}$ *ou seja* $30x+17y=3149$ *equação que admite a solução* $x=-1$ $y=187$ *donde as soluções gerais em números inteiros* $x=-1-17m$ $y=187+30m$ *onde* m *é um inteiro qualquer. Sendo* $x>0$ *e* $y>0$ *virá* $-\frac{187}{30}<m<-\frac{1}{17}$ *quer dizer* m *terá os valores* $-6, -5, -4, -3, -2,$ *e* -1 *donde vem para* x *os valores* $101, 84, 67, 50, 33, 16$ *e para* y *os valores correspondentes* $7, 37, 67, 97, 127, 157$.

3744 — Determinar m de modo que as raízes da equação

$$x^2-(4m-1)x+4m^2-3=0$$

sejam reais e ambas positivas.

R: *Deverá ser* (1) $\Delta=(4m-1)^2-4(4m^2-3)\geq 0$, (2) $P=4m^2-3>0$ *e* (3) $S=4m-1>0$, *donde se segue* $m\leq\frac{13}{8}$ *por* (1); $m>\frac{\sqrt{3}}{3}$ *ou* $m<-\frac{\sqrt{3}}{2}$ *por* (2) *e* $m>\frac{1}{4}$ *por* (3). *Daqui resulta dever ser* $\frac{\sqrt{3}}{2}<m\leq\frac{13}{8}$.

3745 — Determinar n de modo que os coeficientes do 5.º, do 6.º e do 7.º termos de $(x+a)^n$ estejam em progressão aritmética.

R: *O 5.º, 6.º e 7.º termos do desenvolvimento de* $(x+a)^n$ *são respectivamente* ${}^nC_4\,x^{n-4}a^4$, ${}^nC_5\,x^{n-5}a^5$, ${}^nC_6\,x^{n-6}$ *e para que os coeficientes estejam em progressão aritmética deverá ser:*
${}^nC_5-{}^nC_4={}^nC_6-{}^nC_5$ *ou* ${}^nC_4+{}^nC_6=2\,{}^nC_5$ *donde se obtém*

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}+\frac{n(n-1)\cdots(n-5)}{6!}=$$
$$=2\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-4)}{5!}\quad \textit{ou ainda}$$

$5\cdot 6+(n-4)(n-5)=2\cdot 6\cdot(n-4)$ e *portanto a equação* $n^2-21n+98=0$ *que admite as duas soluções* $n=14$ *e* $n=7$, *as quais servem ao problema.*

Soluções de J. S. P.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C. — Matemáticas Gerais — **1.º Exame de Frequência, 1952-53.**

3746 — Calcular a primitiva da função $y=1/(x+4)^2(x^2+4)$.

R: $Py=-\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{x+4}+\frac{1}{50}\log(x+4)-\frac{1}{100}\log(x^2+4)+\frac{3}{200}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{2}+C$

3747 — Calcular as derivadas laterais da função

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{para } x<1\\ +\sqrt{4-x^2} & \text{para } x\geq 1\end{cases}$$

no ponto $x=1$.

R: $f'_d(1)=-1/3$ *e* $f'_e(1)=-\infty$.

3748 — Deduza o critério de Cauchy para o estudo de séries de termos positivos.

3749 — Que pode concluir sobre a continuidade num ponto de uma função com derivada nesse ponto? Justifique.

3750 — Estabeleça a regra de derivação da função $y=\operatorname{sen} x$.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. C. — Geometria Descritiva — **1.º Exame de Frequência, 1952-53.**

3751 — *Geometria de Monge.* Conhece-se a projecção horizontal de um triângulo, a projecção vertical de um dos seus vértices, e o seu plano, que é definido pelos traços. Determinar a projecção vertical do triângulo.

3752 — *Geometria de Monge.* Conduzir por um ponto a recta paralela às rectas de perfil de um plano dado pelos traços. Determinar em seguida a distância dos dois pontos que utilizou para definir a recta.

3753 — *Geometria cotada.* Determinar o simétrico de um ponto em relação a um plano, quando a projecção do ponto está sobre a escala de declive do plano.

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

F. C. C. – CÁLCULO INFINITESIMAL – 1.º Exame de Frequência, 1952-53.

3754 – Calcular a primitiva da função
$$y = 2\,\mathrm{sh}\,x/(1+e^{2x}).$$
R: *Pondo* $2\,\mathrm{sh}\,x = e^x - e^{-x}$ *e desdobrando* y *numa diferença, a primitiva da primeira parcela é imediata e a da segunda calcula-se pondo* $e^x = t$.
$$P\,y = 2\,\mathrm{arc\,tg}\,e^x + e^{-x} + C.$$

3755 – Verifique que o ponto da curva
$$e^{2xy} - 3\,e^{xy} + 2 = 0$$
em que é máxima a soma das coordenadas é $(\sqrt{\log 2}, \sqrt{\log 2})$.

R: *Trata-se de extremar a função* $f(x,y) = x + y$, *sendo a equação da curva uma condição de ligação.*

3756 – Defina a função de variação limitada.

3757 – Demonstre o teorema de BERSTEIN.

3758 – Demonstre uma condição necessária e suficiente para que a função $f(x)$ seja desenvolvível em série.

F. C. C. – ANÁLISE SUPERIOR – 1.º Exame de Frequência – 1952-53.

3759 – Determinar as curvas integrais da equação diferencial
$$y\,y'^2 + 2\,x\,y' - y = 0;$$
mostrar que constituem duas famílias de curvas ortogonais, que o eixo $0x$ é uma curva integral e que a curva descriminante se reduz a um ponto. R: *Que* $y = 0$ *é uma curva integral verifica-se logo sobre a equação. Também é evidente que as duas famílias de curvas integrais são ortogonais, pois os dois valores de* y' *tirados da equação têm por produto* -1. *Por outro lado, um cálculo simples mostra que a curva descriminante se reduz à origem das coordenadas. Finalmente: as curvas integrais da equação são as cónicas*
$$y^2 + (1-k^2)\,x^2 \pm 2\,k\,x = 0$$

3760 – Verificar que as linhas assintóticas da superfície $z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x}$ se projectam sobre os planos $z = \text{const.}$, segundo linhas ortogonais.

R: *As linhas assintóticas da superfície são*
$$\begin{cases} z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} \\ y = m\,x \end{cases} \qquad \begin{cases} z = \mathrm{arc\,tg}\,\dfrac{y}{x} \\ x^2 + y^2 = n. \end{cases}$$

3761 – Integrar o sistema de CHARPIT-LAGRANGE e determinar o integral completo da equação de derivadas parciais $p^2 + q^2 = 2\,(q\,x + p)$.

R:
$$z = \frac{1}{\alpha^2+1}\left[(\alpha\,x + y)^2 + \beta\right].$$

I. S. C. E. F. — CÁLCULO — 1.º Exame de Frequência — 21 de Março de 1953.

I

3762 — Dada a recta $x = a\,t + b$, $y = c\,t + d$, $z = e\,t + f$, escrever a equação vectorial e determinar a distância do ponto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ à recta, por processos vectoriais. R: *Equação vectorial da recta* $P = 0 + (a\,t + b)\,I + (c\,t + d)\,J + (e\,t + f)\,K$.

Distância do ponto à recta $\delta = \dfrac{|(P_1 - P_0) \wedge (P_2 - P_0)|}{(P_2 - P_1)}$, *sendo* P_1 *e* P_2 *dois quaisquer pontos da recta dada. Se forem* $P_1(x_1, y_1, z_1)$ *e* $P_2(x_2, y_2, z_2)$
$$\delta = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \quad \textit{com}$$
$$A = (y_1 - y_0)(z_2 - z_0) - (y_2 - y_0)(z_1 - z_0)$$
$$B = (x_2 - x_0)(z_1 - z_0) - (x_1 - x_0)(z_2 - z_0)$$
$$C = (x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0).$$

II

3763 — Determinar a equação vectorial do plano perpendicular à recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$ e que forma com os eixos coordenados do 1.º octante um volume igual a 3. R: *Equação cartesiana do plano*
$$\frac{x}{\frac{D}{2\lambda}} + \frac{y}{\frac{D}{2\lambda}} + \frac{z}{\frac{D}{3\lambda}} = 1.$$
Como
$$\frac{1}{6} \times \frac{D}{2\lambda} \times \frac{D}{2\lambda} \times \frac{D}{3\lambda} = 3,$$
a equação do plano é $2x + 2y + 3z = 6$. *Definindo o plano por um dos seus pontos* $P_0(0,0,2)$ *e pelo seu vector normal* $(2,2,3)$ *a equação vectorial é*
$$P - P_0 = \lambda\,(2I + 2J + 3K).$$

III

3764 — Dão-se 4 pontos $A(0,1,1)$ $B(1,0,1)$ $C(1,1,0)$ e $D(2,2,2)$. Achar a altura do h tetraedro de base ABC e vértice D. R:
$$\frac{1}{6}\left|(B-A)\wedge(C-A)\right| \times h = \frac{1}{6}\left|(B-A)\wedge(C-A)\right|\left|(D-A)\right|$$
donde se tira $h = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

IV

3765 — Calcular os integrais.

a) $$I_1 = \int_{1/2}^{1} \frac{dx}{x^4\sqrt{1-x^2}};$$

b) $$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta}{a\cosh\theta + b\,\mathrm{senh}\,\theta} \quad (b > a > 0)$$

R: a) *Fazendo* $x = \mathrm{sen}\,t$ *vem* $I_1 = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \mathrm{cosec}^4\,t\,dt =$

$$= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^2 t\, dt + \int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{cosec}^2 t \operatorname{cotg}^2 t\, dt =$$

$$= -\Big[\operatorname{cotg} t\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} - \frac{1}{3}\Big[\operatorname{cotg}^3 t\Big]_{\pi/6}^{\pi/2} = 2\sqrt{3}.$$

b) $$I_2 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+b)e^x - (a-b)e^{-x}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\left[\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\,e^x\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{b^2-a^2}}.$$

I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de Frequência — 9 de Junho de 1953.

I

3766 — Utilizando a teoria dos resíduos calcule os integrais:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(x^2+1)^3}\,dx$ b) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}}$

C— contorno formado pela circunferência de centro na origem e de raio 4. R: *Seja*

$f(z) = \dfrac{1+e^{2zi}}{(1+z^2)^2}$; *se* $z=\rho e^{i\theta}$, *o módulo de* $z f(z) =$ $= \rho e^{\theta i}\dfrac{1+e^{2\rho(i\cos\theta - \operatorname{sen}\theta)}}{(1+\rho^2 e^{2i\theta})^3}$ *tende para zero, para* $\rho=\infty$, *se* $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, *pois então será inferior a* $\dfrac{2\rho}{(\rho^2-1)^3}$.

Logo $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+e^{2xi}}{(1+x^2)^3} = 2\pi i R$, *onde* R *é o resíduo do polo* $z=i$ *situado na região do semi plano dos* YY *positivos.*

Seja $z=i+t$ *e, designando por* $f(z) = \dfrac{1+e^{2zi}}{(1+z^2)^3}$

vem $$f(i+t) = \frac{1+e^{2(it-1)}}{t^3(2i+t)^3} = \frac{1+e^{-2}\left(1+2it-\frac{4t^2}{2!}\right)}{-8it^3\left(1+\frac{t}{2i}\right)^3} =$$

$$= \frac{1+e^{-2}(1+2it-2t^2+\cdots)}{-8it^3}\left(1-\frac{3}{2i}t-\frac{3}{2}t^2+\cdots\right) =$$

$$= -\frac{1}{8i}\left[1+e^{-2}+2e^{-2}it-2e^{-2}t^2\right]\left[1+\frac{3}{2}it - \frac{3}{2}t^2+\cdots\right].$$

$$R = -\frac{1}{8i}\left[-(1+e^{-2})\times\frac{3}{2} - 2e^{-2} - 3e^{-2}\right] = \frac{3+13e^{-2}}{16i}.$$

Logo $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1+\cos 2x}{(1+x^2)^3}dx = \pi\times\frac{3+13e^{-2}}{8}$ *e*

$\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{(1+x^2)^3}dx = \pi\times\frac{3e^2+13}{32e^2}$. b) *Suponhamos* $|z|<5$ *e* $\sqrt{z+5}$ *positivo para* $z=0\cdot\sqrt{z+5}$ *conserva um valor bem determinado, o seu argumento fica compreendido entre* $-\frac{\pi}{4}$ *e* $+\frac{\pi}{4}$, *enquanto que a parte real de* z *permanece superior a* -5. *O integral tomado sobre o contorno do círculo* $z=4e^{i\theta}$, *no sentido directo, é igual ao produto directo por* $2\pi i$ *da soma dos resíduos dos dois polos* $z=1$ *e* $z=2$, *interiores ao círculo. Seja* $z=1+t$

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}} = \frac{1}{t^2(t-1)^3\sqrt{6+t}} =$$

$$-\frac{1}{t^2\sqrt{6}}(1-t)^{-3}\left(1+\frac{t}{6}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-1}{t^2\sqrt{6}}\Big(1+3t+$$

$$+6t^2+\cdots\Big)\left(1-\frac{1}{2}\frac{t}{6}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{t^2}{36}+\cdots\right) = -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{t^2}+\frac{35}{12t}+\cdots\right).$$

Se $z=2+t$, *ter-se-á*

$$\frac{1}{(z-1)^2(z-2)^3\sqrt{z+5}} = \frac{1}{t^3\sqrt{7}}(1+t)^{-2}\left(1+\frac{t}{7}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{t^3\sqrt{2}}\left(1-2t+3t^2-4t^3+\cdots\right)\Big(1-\frac{1}{2}\frac{t}{7}+$$

$$+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{t^2}{49}-\cdots\Big) = \frac{1}{\sqrt{7}}\left[\frac{1}{t^3}-\frac{29}{14t^2}+\left(3+\frac{59}{8\cdot49}\right)\frac{1}{t}-\cdots\right].$$

Os resíduos são $-\dfrac{35}{12\sqrt{6}}$ *e* $\left(3+\dfrac{59}{8\cdot49}\right)\dfrac{1}{\sqrt{7}}$.

O integral é igual a $\left(\dfrac{6}{\sqrt{7}}+\dfrac{59}{196\sqrt{7}}-\dfrac{35}{6\sqrt{6}}\right)\pi i$.

II

3767 — Calcular o integral.

a) $I=\displaystyle\iiint_v[2x+3y+6z]^2\,dx\,dy\,dz$, tomado no interior do elipsoide $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}+z^2=1$, utilizando uma conveniente mudança de variáveis. *b*) O volume compreendido entre o mesmo elipsoide, a esfera $x^2+y^2+z^2=\dfrac{1}{4}$ e os planos $x=-\dfrac{1}{2}$ e $x=+\dfrac{1}{2}$. Reduza o problema ao cálculo de integrais simples. R: a) *Como o elipsoide é simétrico em relação aos planos coordenados vê-se que:*

$$\iiint_V xy\,dx\,dy\,dz = \iiint_V xz\,dx\,dy\,dz =$$

$=\displaystyle\iiint_V yz\,dx\,dy\,dz=0$ *e portanto* $I=\displaystyle\iiint_V(4x^2+9y^2+36z^2)\,dx\,dy\,dz$. *Efectuando a mudança de variáveis* $x=3\rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $y=2\rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$ $z=\rho\cos\theta$ *tem-se para a equação do elipsoide* $\rho=1$

$$0<\theta<\pi,\quad 0<\varphi<2\pi\quad 0<\rho<1$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = 6\rho^2\operatorname{sen}\theta.$$

$$I=\int^{1}\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{2\pi} 36\rho^2\, 6\rho^2 \operatorname{sen}\theta\, d\rho\, d\theta\, d\varphi=\frac{864}{5}\pi .$$

b) *O volume será dado pelo integral*

$$\iiint_V dx\,dy\,dz = 8\iint_A\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right)dx\,dy=$$
$$=8\int^{1/2}dx\int_{\sqrt{1-x^2}}^{2/3\sqrt{9-x^2}}\left[\sqrt{1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}}-\right.$$
$$\left.-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right]dy .$$

O problema reduz-se ao cálculo de dois integrais simples, como se pedia no enunciado.

III

3768 — *a*) Determinar as trajectórias ortogonais das curvas $(x^2+y^2)^2+2b^2(y^2-x^2)=a$ em que b é constante e a parâmetro variável. Indique o género dessas famílias (trajectórias ortogonais). *b*) Calcule para $a=b=1$ os extremantes da correspondente curva da família dada. R: a) *A equação diferencial das curvas dadas é:*

$(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)+b^2(y\,dy-x\,dx)=0$. *Mudando* $\frac{dy}{dx}$ *por* $-\frac{dx}{dy}$ *tem-se a equação diferencial das traectórias* $(x^2+y^2)(x\,dy-y\,dx)-b^2(y\,dx+x\,dy)=0$

$$\left(x\,dy-y\,dx\right)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)=b^2\,\frac{d(xy)}{x^2y^2}$$

$$\frac{y}{x}-\frac{x}{y}+\frac{b^2}{xy}=c \qquad y^2-x^2+b^2=c\,xy$$

$$x^2-y^2+c\,xy-b^2=0 .$$

Como $c^2+1>0$ *trata-se de uma família de hipérboles.*

b) $$(x^2+y^2)^2+2(y^2-x^2)=1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=4x[x^2+y^2-1] \quad \frac{\partial f}{\partial y}=4y[x^2+y^2+1]$$

$\frac{\partial f}{\partial x}=0$ *para* $x=0$ *e* $x^2+y^2=1$. *Para estes valores* $\frac{\partial f}{\partial y}\neq 0$.

Pontos de estacionariedade

$$A\left(x=0,\ y=\pm\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$$
$$B\left(x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Como $$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\frac{\partial f}{\partial y}}=-\frac{8x^2+4y^2-4}{4y[x^2+y^2+1]}=-$$
$$-\frac{2x^2+y^2-1}{y[x^2+y^2+1]}$$

Mínimo $\left(x=0,\ y=+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

Máximo $\left(x=0,\ y=-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)$

» $\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

» $\left(x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Mínimo $\left(x=\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Máximo $\left(x=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

IV

3769 — A expressão $ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2)$, designa a equação geral das superfícies de revolução de eixo na recta $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$.

Prove que a equação às derivadas parciais destas superfícies é $\frac{a+cp}{b+cq}=\frac{x+pz}{y+qz}$.

Verifique que, de facto, a equação inicial é integral geral desta última equação. Em que caso as superfícies integrais são esferas? R: *Derivando em ordem a* x, *depois em ordem a* y *e fazendo o cociente vem:*

$$a+cp=\varphi'(x^2+y^2+z^2)(2x+2pz)$$
$$b+cq=\varphi'(x^2+y^2+z^2)(2y+2qz)$$

ou

$$\frac{a+cp}{b+cq}=\frac{x+pz}{y+qz}.$$

A equação é linear

$$(cy-bz)\,p+(az-cx)\,q=bx-ay .$$

A equação diferencial das características é

$$\frac{dx}{cy-bz}=\frac{dy}{az-cx}=\frac{dz}{bx-ay}.$$

Multiplicando por a, b *e* c *vem:*

$$\frac{a\,dx}{acy-abz}=\frac{b\,dy}{abz-bcx}=\frac{c\,dz}{bcx-acy}=$$
$$=\frac{a\,dx+b\,dy+c\,dz}{0}=\frac{d(ax+by+cz)}{0}$$
$$ax+by+cz=c_1 .$$

Do mesmo modo, multiplicando por x, y *e* z

$$x^2+y^2+z^2=c_2$$
$$c_1=\varphi(c^2)\longrightarrow ax+by+cz=\varphi(x^2+y^2+z^2).$$

Quando $\varphi(x^2+y^2+z^2)=K^2(x^2+y^2+z^2)$ *trata-se duma família de esferas.*

I. S. C. E. F. — Cálculo — Exame final — 17 de Julho de 1953.

I

3770 — $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ são funções contínuas, admitindo derivadas parciais finitas e contínuas no ponto $M(x,y)$.

A função $P+iQ$ é monogénea em relação à variável $z=x+iy$, nesse ponto. *a*) Diga a que condições hão-de satisfazer as funções P e Q para que $P+iQ$ seja monogénea no ponto $z_1=y+ix$. *b*) Diga, sendo $P+iQ$ monogénea no ponto $z=x+iy$, quando é que P^2+iQ^2 é monogénea nesse ponto. R: a) *Devem ser*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{cases} \quad e \quad \begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=-\dfrac{\partial Q}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{cases}$$

o que se verifica apenas para P *e* Q *constantes*

b) *Deverá ser* $\begin{cases}P\dfrac{\partial P}{\partial x}=Q\dfrac{\partial Q}{\partial y}\\[2mm] P\dfrac{\partial P}{\partial y}=-Q\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{cases}$ *e como*

$$\begin{cases}\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}\end{cases} \quad \textit{vem} \quad P=Q.$$

II

3771 — Sendo $\dfrac{\partial P}{\partial x}=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ num certo domínio, mostre que o integral $I=\int_{AB}(Q-P)\,dx+(P+Q)\,dy$ é independente do caminho AB: $A(x_0,y_0)$, $B(x,y)$. *a*) Quando e em que pontos tem o integral $I(x,y)$ estacionaridade? *b*) Quando tem máximos ou mínimos? R: a) *Na hipótese do problema* $\dfrac{\partial(Q-P)}{\partial y}=\dfrac{\partial(Q+P)}{\partial x}$.

Logo o integral é uma diferencial exacta

$$I=\int_{x_0}^{x}(Q-P)\,dx+(Q+P)\,dy+\int_{y_0}^{y}(Q-P)\,dx+$$
$$+(Q+P)\,dy=\int_{x_0}^{x}(Q-P)\,dx+\int_{y_0}^{y}(Q+P)\,dy.$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}=Q-P+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial(Q+P)}{\partial x}dy=2(Q-P)$$

$$\frac{\partial I}{\partial y}=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial(Q-P)}{\partial y}dx+Q+P=2(Q+P)$$

$$\frac{\partial I}{\partial x}=\frac{\partial I}{\partial y}=0 \quad\to\quad Q=P=0.$$

Logo as curvas $P=0$ *e* $Q=0$ *devem encontrar-se para haver estacionariedade.*

b) $$r=\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=2\frac{\partial(Q-P)}{\partial x}$$

$$s=\frac{\partial^2 I}{\partial x\,\partial y}=2\frac{\partial(Q-P)}{\partial y}=2\frac{\partial(Q+P)}{\partial x}$$

$$t=\frac{\partial^2 I}{\partial y^2}=2\frac{\partial(Q+P)}{\partial y}$$

$$s^2-rt=4\left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\right]=8\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)^2\right]>0.$$

Não haverá máximos e mínimos, admitindo que não e

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

III

3772 — Mostre que as trajectórias ortogonais da família de elipses confocais são hipérboles confocais

$$\frac{x^2}{a+\lambda}+\frac{y^2}{b+\lambda}=1.$$

R: *Da equação da família dada, deduz-se por derivação*

$$\lambda=-\frac{bx+ayy'}{x+yy'}.$$

Portanto a equação diferencial que define a família e

$$(xy'-y)(x+yy')=(a-b)y'$$

Mudando y' *em* $-1/y'$ *vem a equação diferencial das trajectórias ortogonais* $(x+yy')(xy'-y)=(a-b)y'$.

As trajectórias ortogonais, são do género hipérbole. Com efeito, para as curvas dadas é

$$\frac{\dfrac{x}{a+\lambda}}{\dfrac{y}{b+\lambda}}=-y'; \quad \textit{mas para as trajectórias ortogonais}$$

$$\left(-y'\to\frac{1}{y'}\right);\ \frac{x}{a+\lambda}\Big/ y/b+\lambda=\frac{1}{y'},$$ *o que quer dizer que, para os mesmos pares* (x,y) $a+\lambda$ *e* $b+\lambda$ *têm sinais contrários.*

Melhor dizendo, o cociente $\dfrac{a+\lambda}{b+\lambda}$ *tem sinais contrários nas duas famílias. E os focos são os mesmos. A distância focal numa e noutra família é* f *satisfazendo à relação* $f^2=|a+\lambda-b+\lambda|=|a-b|$ *independente do parâmetro* λ.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. C. — Física Matemática — 1.º Exame de Frequência — 1952-53.

3773 — Determinar a série de Fourier da função que coincide com $x^2/4$ em $(-\pi, \pi)$.

R: $$\frac{\pi^2}{12} + \sum_1^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2} \cos n x .$$

3774 — A partir do resultado anterior provar a igualdade
$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{48} .$$

R: *Basta fazer* $x = \pi/2$, *recordando que a soma da série é* $[f(x+0) + f(x-0)]/2$.

3775 — Determinar a solução da equação integral
$$u(x) = x + \int_0^x x\, t\, u(t)\, dt$$
e mostre que é uma função inteira. R: *A solução é* $u(x) = \sum f_n(x)$, *com* $f_n(x) = \int_0^x x \cdot t \cdot f_{n-1}(t)\, dt$.

Obtém-se $f_n(x) = \dfrac{x^{3n-1}}{(n-1)!\,3^{n-1}}$, *e a série* $u(x)$ *converge para todo o valor de* x.

3776 — Efectuando a mudança de variáveis
$$u = x + a t, \quad v = x - a t,$$
transforma-se a equação da corda vibrante
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$
na equação $\dfrac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v}$.

Posto isto, integre a equação da corda vibrante e determine a solução $z(x, t)$ correspondente às condições iniciais.
$$\begin{cases} z(x, 0) = 1 - x^2 \\ z'_t(x, 0) = a . \end{cases}$$

R: $z = 1 - (x - a t)^2$.

As soluções dos n.os 3746 a 3761 e 3773 a 3776 são de Luís Albuquerque. As soluções dos n.os 3762 a 3772 são do M. Madureira.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3777 — Determine a área do circulo menor de uma esfera de raio R, sabendo que o diametro do circulo é precisamente a aresta do tetraedro inscrito na esfera. Mostre que os lados do quadrado e do triângulo equilatero inscritos na circunferência que limita o circulo menor são respectivamente as arestas do cubo e do octaedro regular inscritos na esfera.

3778 — Mostre que o quadrado da soma dos quadrados de três números se pode escrever sob a forma da soma de três quadrados inteiros.

Secção Média

3779 — Prove que, sendo α um número complexo de modulo 1, o conjunto dos números α^n, para $n = 1, 2, 3, \cdots$ é denso sobre o conjunto de todos os números x tais que $|x| = 1$, quando o argumento de α medido em graus é um número irracional.

3780 — Mostre que a sucessão assim definida $u_1 = a$, $u_2 = b$ e $u_n = (u_{n-2} + u_{n-1})/2$, para $n > 2$, é convergente e que o seu limite é $(a + 2b)/3$.

Resoluções dos problemas do concurso propostos no n.º 54

3781 — Apresentaram soluções os Srs. Vinhas Novais, António H. Alves de Oliveira e Fernando de Jesus, publicando-se a solução deste último:

R: *Aproveitando a propriedade que diz: «Num triângulo, a bissetriz dum ângulo interno divide o lado oposto em dois segmentos aditivos directamente propocionais aos lados adjacentes», pode escrever-se (ver figura)*:

$$\mathrm{I)} \begin{cases} m + n = a \\[2ex] \dfrac{m}{c} = \dfrac{n}{b} \end{cases} \quad \textit{o que dá} \quad \begin{cases} m = \dfrac{a c}{b + c} \\[2ex] n = \dfrac{a b}{b + c} \end{cases}$$

Em seguida, aplicando o teorema que afirma: «Num triângulo o quadrado do lado oposto a um ângulo agudo é igual à soma dos quadrados dos outros dois menos o dobro do produto dum deles pela projecção do outro sobre ele» vem então para o $\Delta\,[A\,C\,D]$:

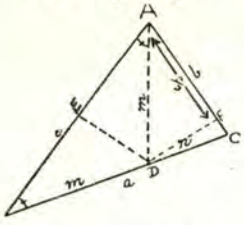
$$n^2 = m^2 + b^2 - 2 b \cdot \frac{c}{2}$$

ou seja, aproveitando os resultados de I),

$$\frac{a^2 b^2}{(b+c)^2} = \frac{a^2 c^2}{(b+c)^2} + b^2 - b c$$

e, efectuadas as simplificações, obtem-se

$$a^2 = b\,(b + c)$$



Nota: A projecção de m sobre b é $c/_2$ em virtude dos triângulos rectângulos construidos na figura serem iguais.

3652 — Publica-se a solução apresentada pelo Sr. Fernando de Jesus único soluçionista:

R: *Uma solução evidente é* $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$. *Supondo a solução em que* $x \neq 0$ *e* $y \neq 0$ *tem-se:*

$$\begin{cases} (2x^2y + 4x)^2 = (2y - xy^2)^2 + 3x^2y^2 \\ 2x^2y + 4x = xy^2 - 2y + xy \end{cases} \quad \begin{cases} 2(xy - 2y)\,xy + \\ \quad + x^2y^2 = 3x^2y^2 \\ 2x^2y + 4x = xy^2 - \\ \quad - 2y + xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} (xy^2 - 2y) = xy \\ 2x^2y + 4x = xy^2 - \\ \quad - 2y + xy \end{cases} \quad \begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ 2x^2y + 4x = \\ \quad = y(xy - 2) + \\ \quad + xy \end{cases} \quad \begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ x^2y + 2x = xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ xy(x-1) + 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ (x+2)(x-1) + 2x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy - x - 2 = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = 0 \end{cases}$$

o que dá as soluções:

$$\begin{cases} y = \dfrac{1 + \sqrt{17}}{-3 + \sqrt{17}} \\ x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = \dfrac{1 - \sqrt{17}}{-3 - \sqrt{17}} \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

3653 — Apresentaram solução os Srs. Vinha Novais, António H. Alves de Oliveira e Fernando de Jesus, publicando-se a solução deste último:

R: *O sistema* $\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \\ y = x \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$ *dá*

$$B\left(\frac{6 + 8\operatorname{tg}\alpha}{\sec^2\alpha}, \frac{6 + 8\operatorname{tg}\alpha}{\sec^2\alpha}\operatorname{tg}\alpha\right).$$

Como A (6, 0) *vem:*

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(\frac{6 + 8\operatorname{tg}\alpha}{\sec^2\alpha} - 6\right)^2 + \left(\frac{6 + 8\operatorname{tg}\alpha}{\sec^2\alpha}\operatorname{tg}\alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{(8\operatorname{tg}\alpha - 6\operatorname{tg}^2\alpha)^2 + (6\operatorname{tg}\alpha + 8\operatorname{tg}^2\alpha)^2}}{\sec^2\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{100\operatorname{tg}^2\alpha\sec^2\alpha}}{\sec^2\alpha} = 10 \operatorname{sen}\alpha$$

3654 — Não foram apresentadas soluções.

3655 — Publica-se a única solução apresentada pelo Sr. Vinha Novais:

Toda a função racional de $\sqrt{2}$, coeficientes em R, pode ser reduzida à forma $(a + b\sqrt{2})/c$, com $m \cdot d \cdot c \cdot (a, b, c) = 1$. Admitamos, então, que $\alpha = (a + b\sqrt{2})/c$ é um inteiro de F, isto é, raiz da equação $x^2 + a_1 x + a_2 = 0$, com $a_1, a_2 \in I$. Então, esta equação admitirá a raiz $\alpha' = (a - b\sqrt{2})/c$ e ter-se-á

$$x^2 + a_1 x + a_2 = x^2 - (2a/c) \cdot x + (a^2 - 2b^2)/c^2$$

A igualdade entre os coeficientes implica que $2a/c$ e $a^2 - 2b^2/c^2$ sejam inteiros de R e, portanto, que $c = 1$, $c = 2$ ou $c \prec a$ (divisor de) para que $2a/c$ seja inteiro; se $c = 1$, $a^2 - 2b^2/c^2$ é também inteiro; se $c = 2$ vem $c^2 = 4$ e $a = \dot{2}$ e $b = \dot{2}$ para que a segunda expressão seja um inteiro. Mas então m. d. c. $(abc) \geqslant 2$ contrariamente à hipótese. Finalmente, se $c \prec a$, para que $a^2 - 2b^2/c^2$ seja inteiro deve $c \prec b$ $(c \neq 1, 2)$ e m. d. c. $(a, b, c) = c \neq 1$ contrariamente à hipótese.

Fica assim demonstrado que os inteiros de F são da forma $(a + b\sqrt{2})/c$, com $c = 1$ e é imediato o recíproco: todas as funções racionais de $\sqrt{2}$ da forma $a + b\sqrt{2}$ são inteiros de F.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

102 — Prof. Dr. GUIDO, Hoheisel — **Gewönnliche Differencialgleichungen e Aufgabensammlung zu den Gewöhnlichen und Partiellen Differentialgleichungen**. Sammlung Göschen, Bände 920—1059, Berlin, 1951-52.

São dois livrinhos da *Sammlung Göschen* que, como de costume, apresentam uma exposição abreviada (mas nem sempre elementar) das matérias a que os títulos se referem.

Estes dois tomos completam-se (e não conhecemos um terceiro tomo, dedicado às equações de derivadas parciais, a que os exercícios da parte final do n.º 1059 da colecção que temos presente, serve de complemento), pois muitos assuntos que não são abordados no primeiro ou são aí tratados sumàriamente, têm depois o necessário desenvolvimento no segundo. Assim acontece, por exemplo, com o método de integração por derivação: não é na primeira parte convenientemente justificado; mas no tomo de *Problemas* retoma-se o estudo das equações mais vulgares a que se aplica, que são então resolvidas com recurso às transformações de contacto.

No seu conjunto, os dois volumes apresentam, afinal, os problemas clássicos das equações diferenciais ordinárias, de modo que não podia deixar de ser abreviado, dadas as características da colecção, mas com uma preocupação sempre lograda de não deixar lacunas onde o leitor encontre dificuldades, — o que é bem pouco vulgar em livros desta natureza. Sublinharemos, entre outras virtudes que encontramos nesta exposição: o cuidado em chamar a atenção do leitor para as soluções que o método do factor integrante pode subtraír; o problema da existência de soluções (quase sempre lamentàvelmente esquecido em livros de iniciação, como este é), tratado pelo método de Picard-Lindelöf; a maneira como se apresenta o estudo do comportamento dos integrais nas vizinhanças dos pontos singulares (esta doutrina é exposta de maneira modelar); etc.

Sem dúvida: tratando-se de um pequeno tratado de equações diferenciais, que apenas pretende tocar os pontos mais importantes deste vasto ramo da Análise Matemática, muitos problemas tiveram de ser abordados nas suas linhas gerais, deixando de parte certas questões de detalhe que só cabem em trabalhos mais desenvolvidos. (E não se esqueça que a literatura alemã da especialidade conta com várias e excelentes obras deste género, nomeadamente as de Kamke e Bieberbach).

Por isso é fácil que o leitor, ao sabor das suas preferências pessoais, lamente que num ou outro ponto e estudo não tenha sido levado mais longe. Quanto a nós sucedeu assim, por exemplo, ao lermos o parágrafo do tomo 2.º em que se expõe o método de cálculo simbólico para a resolução de equações de ordem n (símbolo D e não integral de Laplace, que não é referido); pareceu-nos que uma utilização mais ampla deste método permitiria chegar, muito ràpidamente, a resultados completos.

De qualquer modo, porém, uma coisa é certa: estes dois livrinhos constituem uma óptima exposição para uma primeira abordagem aos problemas das equações diferenciais, — e muito lucrariam os nossos estudantes universitários se, no estudo destas matérias, se guiasssm por eles.

Luís Albuquerque

103 — NOORDHOFF'S WISKUNDIGE TAFELS — **Tabuas matemáticas a cinco décimais** — P. Noordhoff — Groningen — Holanda. Preço 8,75 florins. — 1953.

Este livro de muita utilidade para alunos de Escolas Técnicas, Universidades, Escolas Militares, Laboratórios etc. contém as seguintes tábuas de 5 décimais quase todas:

I — Tábua das mantissas dos logarítmos décimais dos inteiros de 1 – 12009.

I b — Tábua dos logarítmos décimais (8 décimais) dos números $1+i$ sendo i múltiplo de 0,0025 e desde 0,0025 a 0,08.

II — Tábua dos logarítmos das funções trigonometricas.

III a — Tabela de conversões de grados em graus.
III b — » » » inversa da anterior.
III c — » » » de radianos em grados.
III d — » » » inversa da anterior.
III e — » » » de graus em radianos.
III f — » » » inversa da anterior.

IV a — Valores naturais das funções trigonométricas (ângulos dados em graus e radianos).

IV b — Valores naturais de $\operatorname{cotg}\alpha\,(\alpha<3^\circ)$ e $tg\,\beta\,(97^\circ<<\beta<90^\circ)$ de segundo a segundo.

IV c — Valores naturais de $\operatorname{cotg}\alpha\,(3^\circ<\alpha<10^\circ)$ e $tg\,\beta\,(80^\circ<\beta<87^\circ)$ de $10''$ em $10''$ com interpolação proporcional.

V — Tábuas adicionais de:

a 1 — logaritmos naturais dos inteiros de 1 – 9973, de 10^p e 10^{-p}; a 2 — logaritmos naturais de números primos: de 2 – 997; b — conversão de logaritmos naturais em décimais; c 1 — função exponencial e^x para x de 0,001 a 4,00; c 2 — funções hiperbólicas $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ para x de 0,01 a 7,0; d — divisores primos dos números de 1 a 11197; e — Potências: $n^2, n^2, \sqrt{n}, \sqrt[3]{n}$ e $\dfrac{1}{n}$, de 1 a 1000; f — função factorial $x!$ de $x=-1{,}0$ a $0{,}99$, e $\log_{10} x!$; g — funções $\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\frac{e^t}{t}\,dt$; $\displaystyle\int_0^x\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt$ e $\displaystyle\int_x^\infty\frac{\cos t}{t}\,dt$, com os seus desenvolvimentos em série; h — função $\displaystyle\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ para $x=0{,}00$ a $x=2{,}59$; i — funções de Bessel; k — constantes: $n!$ de 1 a 16 e $n:n!$ para os mesmos valores; múltiplos e submúltiplos de π e seus logaritmos etc.

Como se vê é um livro que atende a muitas necessidades daqueles que necessitam fazer laboriosos cálculos em diversos ramos das matemáticas aplicadas. Um bom livro, de boa apresentação gráfica, de fácil consulta e úteis dados.

J. S. Paulo