# GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIV N.º 56 DEZEMBRO 1953

SUMARIO



DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

# GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.°-D. — Tel. 71943 — Lisboa-N.







TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — Av. João Crisóstomo, 4, 7.°-D. — LISBOA-N. — Telef. 71943

ANO XIV—N.º 56 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO—1953

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — Avenida João Crisóstomo, 4, 7.º, Dto. — Telef. 71943 — LISBOA-N

# Sur les transformations ponctuelles conservant les aires

par Georges Bouligand

**1.** Mon cours du premier semestre 1952-53 annoncé sous le titre *Notions et problémes de topologie restreinte* a comporté une brève étude des transformations ponctuelles conservant les aires. Le sujet est classique s'il s'agit d'une correspondance entre points $(x, y)$ et $(u, v)$ d'un plan. En supposant que les sens d'orientation subsistent, il faut écrire que, le long d'un contour simple fermé arbitraire décrit par $(x, y)$, l'intégrale de

$$\omega = x\,dy + v\,du$$

est nulle ou que la forme $\omega$ est une *différentielle totale.* Si l'on s'impose la biunivocité, on voit qu'en appelant

$$(1) \qquad x = A(u, y) \quad v = B(u, y)$$

un couple de fonctions s'offrant comme les composantes d'un gradient dans le plan auxiliaire $\varpi$ des $u, y$, il faut choisir ce couple pour assurer la biunivocité entre $(x, y)$ et $(u, v)$. Ce problème purement géométrique incite alors au partage des variables $x, y, u, v$ en deux couples $x, v$ et $y, u$ contenant chacun la première coordonnée du point antécédent et la seconde du point conséquent ou vice versa. Cette dissociation mutile la structure du problème, que les formules (1) ne sauraient résoudre à elles seules; elles vont donner seulement des résultats locaux, atteints en supposant par exemple que $B$ est une *fonction croissante* de $y$ dans une région convexe décrite par le point $(u, y)$ dans le plan $\varpi$, ce qui permet de résoudre $B = v$ en $y$, et ainsi de déduire du couple $(u, v)$ l'ordonnée $y$ puis l'abscisse $x$.

Rien d'analogue pour la conservation des volumes! Mieux vaut donc remplacer la méthode précédente par un autre principe de recherche plus conforme à l'esprit de l'*Analyse géométrique,* ce grand facteur de progrès [1].

Le présent article indiquera comment s'orienter à cette fin, tout en aiguillant le lecteur, en cours de route, vers des recherches complémentaires.

**2.** En élargissant un peu le problème, donnons à la notion d'aire plus de généralité. Il se peut que, dans le plan où varient les points $(x, y)$ et $(u, v)$, on calcule la longueur d'un arc élémentaire par une formule du type

$$(2) \qquad ds = f(x, y; dx, dy) \qquad (\text{avec } f > 0)$$

où $f$, dans sa dépendance vis-à-vis de $dx, dy$ est une fonction positivement homogène et du premier degré, c'est-à-dire satisfait, pour toutes valeurs positives de $\rho$, à l'identité

$$f(x, y; \rho\,dx, \rho\,dy) = \rho\,f(x, y; dx, dy)$$

A chaque point $(x, y)$, associons alors le lieu de l'extrémité d'un vecteur issu de ce point et dont les composantes $\xi, \eta$ vérifient l'équation

$$(3) \qquad f(x, y; \xi, \eta) = 1$$

Ce lieu est une courbe fermée, entourant le point $(x, y)$ et dite *indicatrice* de la métrique $(f)$ définie par (2). L'aire $\alpha$ de cette courbe (sens vulgaire) est fonction du point $(x, y)$. Soit en outre $d\sigma$ la mesure

(1) G. Bouligand. *L'Analyse géométrique* (conférences Palais de la Découverte); *L'Analyse géométrique et l'oeuvre de* G. Darboux (Arch. intern. Hist. Sc., Janv. 1950 et Oct. 1951). *Analyse géométrique et problèmes aux dérivées partielles* (Rev. Scient. 84, p. 223-233, Fev. 1948). *Les principes de l'Analyse géométrique* (I et $II_A$ Vuibert 1949 et 1951).

d'un élément d'aire (sens vulgaire). Prenons avec M. Gustave Choquet l'intégrale

$$\pi \iint \frac{d\sigma}{\alpha}$$

étendue à une région $R$ du plan des $x, y$. Elle donne une extension naturelle de l'aire de cette région, adaptée à la métrique $(f)$, car cette intégrale est une fonction additive de l'ensemble $R$, douée d'un sens intrinsèque [1]: elle garde en effet sa forme par tout changement de variables

$$(4) \qquad x_1 = \varphi(x, y), y_1 = \psi(x, y)$$

de jacobien $\neq 0$, comme on le voit en recourant à la transformation linéaire tangente attachée aux formules (4).

Traduisons maintenant la conservation des aires. L'élément d'aire de mesure vulgaire $d\sigma$, découpé autour du point $(x, y)$ se transforme en un élément

Parmi ces $(f)$, il y en a une et une seule dont l'indicatrice est un cercle. Elle correspond à

$$(6) \qquad ds^2 = \frac{\pi}{\alpha}(dx^2 + dy^2).$$

Ainsi posé, le problème est alors celui de conserver les aires par des transformations remplançant sur une surface un point $M$ provenant des valeurs $x, y$ par un point $P$ provenant des valeurs $u, v$, étant entendu qu'on connaît une fonction vectorielle $\vec{\Phi}$ telle qu'on ait à la fois

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\Phi}(x, y), \qquad \overrightarrow{OP} = \vec{\Phi}(u, v),$$

et qu'en outre $\overline{dM}^2$ reproduise le $ds^2$ donné par (6). Mais, réalisée du point de vue local, l'existence d'une telle $\vec{\Phi}$ n'est pas assurée globalement. Le recours à des représentations de ce genre, s'il donne un aspect géométrique du problème, ne le simplifie donc pas. Mieux vaut une étude directe de (5).

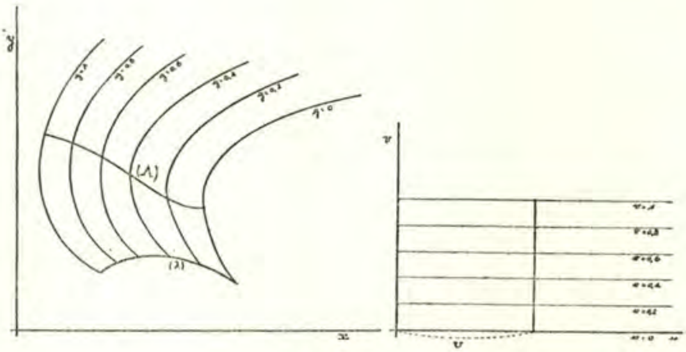


*Fig. 1*

de mesure vulgaire $d\tau$ autour du point $(u, v)$. L'unité doit égaler le rapport des quantités

$$\frac{d\sigma}{\alpha(x, y)} \quad \text{et} \quad \frac{d\tau}{\alpha(u, v)}$$

proportionnelles aux mesures, selon $(f)$, de nos deux éléments. Or le rapport $d\tau/d\sigma$ est le jacobien de $u, v$ par rapport à $x, y$. D'où l'équation du problème

$$(5) \qquad \frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \frac{\alpha(u, v)}{\alpha(x, y)}$$

laquelle requiert, avec les fonctions inconnues $u(x, y), v(x, y)$, leurs dérivées premières: équation commune à toutes les métriques $(f)$ pour lesquelles la fonction $\alpha$, continue et positive, est la même.

**3.** On se donnera $v = g(x, y)$ en laissant subsister la fonction inconnue $u(x, y)$. Celle-ci satisfait à l'équation du premier ordre

$$(7) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} g_y - \frac{\partial u}{\partial y} g_x = \frac{\alpha(u, g)}{\alpha(x, y)}$$

$$\left(\text{avec } g_x = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y}\right).$$

Les caractéristiques, dans l'espace $(x, y, u)$ s'obtiennent en intégrant le système

$$(8) \qquad \frac{dx}{g_y} = \frac{dy}{-g_x} = \frac{\alpha(x, y)\, du}{\alpha(u, g)}.$$

Sur le plan des $x, y$, on a pour projections les courbes $g(x, y) = \text{const.}$ Au point $(x, y)$ passe une seule de ces courbes, qui sera dite une *fibre*, normale

[1] Cf. *Princ. An. Géom.*, I, n.os 301-302.

au vecteur $g_x, g_y$ supposé non nul; la tangente à la fibre porte le vecteur unité

$$X = \frac{g_y}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}, \qquad Y = \frac{-g_x}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}.$$

En appelant $\bar{s}$ l'abscisse curviligne (sens vulgaire) sur la fibre, il vient

$$\frac{du}{d\bar{s}} = \frac{\alpha(u, g)}{\alpha(x, y)} \frac{1}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2}}. \tag{9}$$

Au second membre, $x, y, g(x, y)$ se réduisent sur la fibre à des fonctions déterminées de $\bar{s}$. Ce second membre apparait donc comme une fonction donnée $A(u, \bar{s})$ et par suite, sur la fibre, $u$ est déterminée par (9), moyennant sa valeur pour $\bar{s} = 0$.

L'interprétation de ces remarques ramène à un *aspect élémentaire* du problème. On ce donne une correspondance biunivoque entre des arcs simples $g$=const. du premier plan et des segments $v$=const. du second, sous ces conditions.

1.° Un arc et le segment correspondant proviennent d'une même valeur de la c$^{te}$.

2.° Dans le premier plan, deux arcs provenant de valeurs distinctes de la c$^{te}$ n'ont aucun point commun.

3.° La c$^{te}$ variant de 0 à 1, la réunion des arcs, dans le 1$^{er}$ plan, recouvre la fermeture d'un domaine; dans cette région, par un point, il passe un et un seul des arcs qui la balayent (d'après 2.°) — Circonstances analogues dans le 2.$^e$ plan, où l'on a une région rectangulaire (voir 4.°).

4.° Dans le 1$^{er}$ plan, le lieu des extrémités des arcs $g(x, y) = v$ en lesquelles s'annule $\bar{s}$ est un arc simple ($\lambda$), qu'on se donne. On impose en outre à ($\lambda$) d'avoir pour image dans le plan $(u, v)$ le segment défini par les relations

$$u = 0 \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

5.° A tout cela, on ajoute les hypothèses relatives à l'existence et la continuité des dérivées premières de $g(x, y)$, pour valider (7), (8), (9).

Moyennant ces prémisses, on pourra résoudre le *problème du rectangle*, c'est-à-dire délimiter dans la région du plan des $x, y$ balayée par les arcs $g(x, y) = \theta$ (avec $0 \leqslant \theta \leqslant 1$) issus des points de l'arc ($\lambda$) la partie ayant pour image un rectangle

$$0 \leqslant u \leqslant U, \qquad 0 \leqslant v \leqslant 1.$$

La *propriété de groupe* pour les transformations conservant les aires conduit à prendre, dans un plan $x, y$ et un autre $x_1, y_1$ deux figures

$F$ [entre ($\lambda$) et ($\Lambda$), avec fibres $g = c^{te}$],

$F_1$ [entre ($\lambda_1$) et ($\Lambda_1$) avec fibres $g_1 = c^{te}$]

ce qui permet, d'une manière naturelle, de passer du problème du rectangle à des cas variés, le rectangle servant de stade intermédiaire.

**4.** Revenons à ce cas de départ, en vue de remarques simples suggérées par la fig. 1. Supposons donné ce qui a trait au plan $u, v$, en ne laissant inconnu dans le plan $x, y$ que l'arc ($\Lambda$) ayant pour image le segment $0 \leqslant v \leqslant 1$ de la droite $u = U$. Pour un tracé approché de ($\Lambda$), on subdivisera l'intervalle offert à $v$ en $n$ parties, égales ou non, par une graduation $0 \leqslant v_1 \leqslant v_2 \leqslant \cdots \leqslant v_{n-1} \leqslant 1$. Prenant $n$ très grand, ainsi que toutes divisions très petites, on pourra, recourant aux fibres $g(x, y) = v_i$, supplanter ($\Lambda$) grâce à un processus d'*égalisation d'aires* selon ($f$),

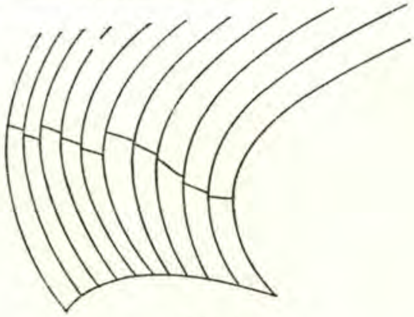

*Fig. 2*

par un système de petits arcs $\gamma_i$ disposés comme sur la fig. 2, et dont on exige qu'ils coupent chaque fibre en un seul point.

Moyennant les hypothèses (1.° à 5.°) du n.° 3, on peut se passer de cette approximation et tabler directement sur l'existence des intégrales de (9), conditionnées en vue de répondre au problème du rectangle.

**5.** Signalons chemin faisant une circonstance possible, qu'il s'agisse de l'aire usuelle ou de ses extensions. Pour en donner un exemple, prenons l'aire usuelle et une transformation du type

$$(T) \begin{cases} u = u(x) & \text{croissante en } x \ [u'(x) > 0] \\ v = v(x, y) & \text{croissante en } y \ [v'_y > 0 \text{ pour tout } x]. \end{cases}$$

Les hypothèses sur $u(x)$, $v(x, y)$ entrainent que $(T)$ est une homéomorphie. En outre, pour que $(T)$ conserve les aires, il faut et il suffit que

$$u'(x)\, v'_y(x, y) = 1$$

si les dérivées requises existent. On aura dès lors

$$v'_y = \frac{1}{u'(x)} \quad \text{d'où} \quad v(x, y) = \frac{y}{u'(x)} + \bar{h}(x).$$

La fonction $v(x, y)$ va donc devenir infinie pour tous les $x$ annulant $u'(x)$. Ainsi, l'homéomorphie

$$(H) \qquad \begin{cases} u = u(x) \\ v = \dfrac{y}{u'(x)} + \bar{h}(x) \end{cases}$$

conservera les aires, mais en transformant, si $u'(x)$ a des zéros, une région bornée en une autre s'étendant à l'infini. La remarque en fin du n.° 3 permet de varier les exemples de cette circonstance, qui intervient si l'on veut, à partir du n.° 4, édifier une théorie systématique: L'intervention dans les équations $(H)$ de $h(x)$, fonction continue quelconque, annonce des cas où la dérivabilité de $u(x,y)$, $v(x,y)$ n'a pas lieu. En poursuivant la recherche amorcée au n.° 4 le problème du rectangle pourrait être posé comme suit:

On part d'une homéomorphie $u=\lambda(x,y)$, $v=g(x,y)$ telle que tout segment d'une ligne $u=\text{const}$, ou d'une ligne $v=\text{const.}$, soit l'image d'un arc tracé dans le plan des $x,y$ et de mesure superficielle nulle. On prend l'arc $(\lambda)$ sur la courbe $\lambda(x,y)=0$ et les courbes $g(x,y)=\text{const.}$ issues des divers points de cet arc. On cherche alors l'arc $(\Lambda)$ transverse à ces courbes, sous les conditions 1.° à 4.° du n.° 3. Il y aurait lieu d'expliciter des conditions annexes permettant d'obtenir $(\Lambda)$ comme un *ensemble limite*, continue et uniformément atteint, des systèmes de petits arcs $\gamma_i$ introduits au n.° 4 et portés ici par les courbes $\lambda(x,y)=\text{const.}$ (¹).

**6.** Le problème peut être posé autrement, de manière à éviter d'emblée la circonstance singulière du n.° 5. On part d'une région limitée par deux arcs $(\lambda)$

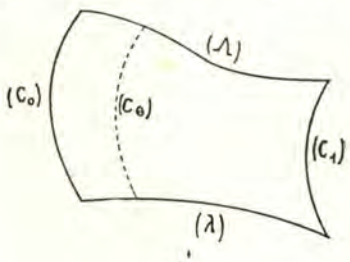


fig 3

et $(\Lambda)$ et les positions extrêmes $(C_0)$, $(C_1)$ d'une fibre variable $(C_\theta)$, arc de mesure superficielle nulle pour chaque $\theta$ (où $\theta$ croit de 0 à 1), arc qui part d'un point de $(\lambda)$ pour aboutir à un point de $(\Lambda)$, et varie de manière à se soumettre aux conditions 2.°, 3.° du n.° 3. Soit en outre donné un rectangle de même surface que la région bordée par $(\lambda)$, $(\Lambda)$, $(C_0)$, $(C_1)$. Associons à $(\lambda)$ et $(\Lambda)$ deux côtés opposés de ce rectangle; puis à $(C_0)$, $(C_1)$, les deux autres côtés $(D_0)$, $(D_1)$, puis à $(C_\theta)$ un segment $(D_\theta)$ parallèle à ces derniers, lequel partage le rectangle de telle sorte que sa partie comprise entre $(D_0)$ et $(D_\theta)$ soit d'aire égale à celle de la partie de la première région comprise entre $(C_0)$ et $(C_\theta)$. On a ainsi deux fonctions additives d'ensemble qui sont *équivalentes* pour chaque sous-ensemble de la figure curviligne et chaque partie correspondante de son image rectangulaire, quand l'une et l'autre englobent tous les points provenant d'un intervalle partiel du segment $(0,1)$ décrit par $\theta$.

Il s'agit alors d'étendre cette *équivalence* de manière à en déduire, au bénéfice peut-être de conditions annexes, une transformation ponctuelle continue et biunivoque conservant les aires, ou plus précisément, *tout ensemble de mesure superficielle positive* en un ensemble *de mesure superficielle égale*. Cet énoncé nouveau genre poserait la question de savoir si l'homéomorphie $(H)$ du n.° 5, dans le cas où $u'(x)$, en restant supérieure à un nombre positif fixe, mais en cessant d'être indéterminée sur un ensemble de mesure nulle, ne peut céder le pas à une transformation $(H_1)$ assurant encore la conservation de la mesure, telle qu'on vient de l'indiquer.

Pour varier cette recherche, partons, par exemple, d'une surface fermée analogue à la sphère et balayée par un système de fibres $A\overset{\frown}{M}B$ dont chacune est un arc simple reliant deux points fixes $A$ et $B$ de cette surface, supplantant ici les arcs $(\lambda)$ et $(\Lambda)$ et soumises, pour la totalité de la surface, aux conditions 2.°, 3.°: si bien que ces fibres, sont disposées comme les arcs de cercles d'une sphère qui en relient deux points fixes. Prenons maintenant un autre système de fibres, disposées de même et passant par les deux points fixes $A'$ et $B'$. Et, tout en conservant les aires par une transformation $(T)$ biunivoque de la surface, on demanderait à $(T)$ d'associer les fibres du 1^er système à celle du second; on pourrait convenir de 2 fibres $A\widehat{M_0}B$ et $A'\widehat{M_0'}B'$ qui se correspondent ainsi, en déduire les autres paires de fibres homologues, puis, à cette étape, essayer d'atteindre $(T)$ moyennant les conditions annexes permettant d'affirmer qu'il existe une homéomorphie de la surface sur elle-même répondant à la question.

**7.** Tels sont les thèmes que je me proposais d'esquisser dans cet article, pour aboutir à la conclusion qu'une étude attentive du sujet doit faire prévaloir *la théorie des fonctions additives d'ensemble* et la manierè dont les transformations ponctuelles peuvent se greffer sur cette théorie. C'est donc vers elle qu'un bibliographe, consultant le *Zentralblatt* ou la *Math. Reviews* aurait à s'aiguiller. L'obtention par cette voie d'homéomorphies du genre recherché (à des restrictions de derivabilité près) au début de cet article pourrait fournir, par contrecoup, des différentielles totales d'un type trés général, et ainsi, donner un type de connexion entre ces dernières et la théorie des fonctions d'ensemble.

(¹) Pour la définition de *l'ensemble limite*, voir *Princ. anal. géom.* $\text{II}_A$, n.os 136-139.

# Espaço de Lebesgue

## Um exemplo de espaço de RIESZ regular

por Ruy Luís Gomes

Designemos por $\mathcal{F}$ a classe das funções numéricas, limitadas, cujo domínio é um intervalo fechado $[a, b]$.

*$\mathcal{F}$ é um espaço de* RIESZ.

Na verdade:

1) $\mathcal{F}$ é um espaço vectorial com relação ao corpo dos números reais: a soma das duas funções $f_1, f_2$ e o produto dum número $\lambda$ por uma função $f$ verificam as propriedades características de espaço vectorial;

2) $\mathcal{F}$ é um espaço ordenado em que $f_1 \leqslant f_2$ equivale a $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ para todo $x \in [a, b]$;

3) Existe o supremo e o ínfimo de duas quaisquer funções de $\mathcal{F}$;

4) $\mathcal{F}$, como espaço vectorial ordenado, verifica as duas implicações

$$f_1 \leqslant f_2 \rightarrow f_1 + f \leqslant f_2 + f,$$

qualquer que seja $f$, e

$$f_1 \leqslant f_2 \rightarrow \lambda f_1 \leqslant \lambda f_2,$$

para $0 \leqslant \lambda$.

Ora para a construção do integral de LEBESGUE por prolongamento por continuidade a partir do integral de CAUCHY, introduzimos [1] em $\mathcal{F}$ a *topologia de* LEBESGUE, assim definida: dada uma função qualquer $f_0 \in \mathcal{F}$, toma-se para sistema fundamental da vizinhanças de $f_0$, a classe dos «intervalos» $[h, g]$, tais que $h \leqslant f_0 \leqslant g$, $h$ superiormente contínua e $g$ inferiormente contínua em $[a, b]$. E entende-se por «intervalo» $[h, g]$ a totalidade das funções $f$ tais que $h \leqslant f \leqslant g$.

Mediante este sistema fundamental de vizinhanças transformamos $\mathcal{F}$ num espaço topológico; $\mathcal{F}$ fica, pois, um espaço vectorial, ordenado, topológico. No entanto, não é um *espaço vectorial topológico,* pois imediatamente se conclue que $\lambda f$ não é uma função contínua no espaço produto da recta euclideana $R^1$ pelo espaço topológico $\mathcal{F}$.

Com efeito, dada a função $\lambda_0 \varphi_0$ em que $\varphi_0$ é contínua em $[a, b]$, podemos tomar como vizinhança de $\lambda_0 \varphi_0$ o intervalo $[\lambda_0 \varphi_0, \lambda_0 \varphi_0]$, quere dizer, o conjunto reduzido à própria função $\lambda_0 \varphi_0$. E a este intervalo não corresponde em $R^1$ nenhum intervalo aberto contendo $\lambda_0$, tal que $\lambda \varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$, nesse intervalo, a não ser no caso trivial de $\varphi_0 \equiv 0$.

Mas é possível demonstrar que $\mathcal{F}$ é um espaço regular, isto é, um espaço que verifica os *dois axiomas:*

1) *as vizinhanças fechadas formam um sistema fundamental de vizinhanças;*

2) *$\mathcal{F}$ é um espaço separado.*

Para isso vamos começar por demonstrar o

TEOREMA I — *A classe $\mathcal{C}$ das funções* f *tais que* $f_1 \leqslant f$, *sendo* $f_1$ *uma função dada de* $\mathcal{F}$, *é um conjunto fechado.*

Suponhamos, por absurdo, que existe $f_2 \notin \mathcal{C}$ que pertence ao fecho de $\mathcal{C}$. Existirá, então, um ponto $x_1$ tal que $f_2(x_1) < f_1(x_1)$. Sendo assim é possível determinar $k$ de modo que $f_2(x_1) < k < f_1(x_1)$. Construamos a função $g$, inferiormente contínua [1], tal que $g(x_1) = k$, $g(x) = \sup[k, \sup f_2(x_1)]$ para $x \neq x_1$. Qualquer vizinhança $[h, g]$ de $f_2$, com $h$ arbitrário $\leqslant f_2$, não pode intersectar $\mathcal{C}$, pois se assim fosse de $f_3 \leqslant g$ e $f_1 \leqslant f_3$ resultaria $f_1 \leqslant g$, o que contraria $g(x_1) = k < f_1(x_1)$. Mas se há vizinhanças de $f_2$ que não intersectam $\mathcal{C}$, $f_2$ não pertence ao fecho $\mathcal{C}$ e portanto $\mathcal{C}$ é fechado.

COROLÁRIO I — *As vizinhanças* $[h, g]$ *de uma qualquer função* $f_0$ *são fechadas.*

Na verdade, do Teorema I decorre em primeiro lugar que o conjunto $\mathcal{C}_1$ das funções $f$ tais que $f \leqslant f_1$ também é fechado, pois $f \leqslant f_1$ é equivalente

(1) Integral de LEBESGUE-STIELTJES, do autor.

(1) A função $g$ é inferiormente contínua visto ser *mínima* em cada ponto de $[a, b]$, por construção.

a $f_1 \leqslant -f$. E consequentemente $[h, g]$ é a intersecção de dois conjuntos fechados:

$$h \leqslant f \quad \text{e} \quad f \leqslant g.$$

Ficou assim demonstrada a primeira propriedade característica de um espaço regular. Passemos agora à outra e para isso provemos o

Teorema II — *O espaço $\mathcal{F}$ é separado.*

Na verdade, sejam $f_1$ e $f_2$ duas funções não idênticas. Existirá, então, um ponto $x_1$ onde $f_2(x_1) < f_1(x_1)$ ou $f_2(x_1) > f_1(x_1)$. Partindo de primeira desigualdade, pois é indiferente uma ou outra, construamos números $k$ e $k'$ tais que $f_2(x_1) < k < k' < f_1(x_1)$ e uma função $g_2$ e uma função $h_1$ nas seguintes condições

$$\begin{aligned} &g_2(x_1) = k \\ &g_2(x) = \sup(k, \sup f_2), x \neq x_1 \\ &h_1(x_1) = k' \\ &h_1(x) = \inf(k', \inf f_1), x \neq x_1. \end{aligned}$$

Resulta, portanto,

$$f_2 \leqslant g_2, \qquad h_1 \leqslant f_1.$$

A função $g_2$ é inferiormente contínua e $h_1$ superiormente contínua, visto a primeira ser *mínima* e a segunda *máxima* em cada ponto de $[a, b]$.

Tomando, então, $h_2 \leqslant f_2$ e $g_1 \geqslant f_1$, ficamos com duas vizinhanças $[h_2, g_2]$, $[h_1, g_1]$, a primeira de $f_2$ e a segunda de $f_1$.

Ora é fácil de ver que elas não se intersectam.

Com efeito, se existisse $f$ tal que

$$h_2 \leqslant f \leqslant g_2, \quad h_1 \leqslant f \leqslant g_1$$

seria

$$h_1(x_1) \leqslant f(x_1) \leqslant g_2(x_1),$$

o que é absurdo, pois

$$h_1(x_1) = k' > k = g_2(x_1).$$

*O espaço de* Lebesgue — *espaço $\mathcal{F}$ com a topologia de* Lebesgue — *é, portanto, um exemplo muito simples de espaço regular.*

Deve observar-se que esta conclusão não depende de modo nenhum do facto de termos admitido que as funções $f$ estão definidas num intervalo $[a, b]$. O que entrou em jôgo foram as propriedades do espaço dos valores (1) das funções de $\mathcal{F}$, ou seja, a recta $R^1$, pois trabalhamos com funções numéricas.

Se introduzimos a hipótese de as funções estarem definidas num intervalo $[a, b]$, foi por uma outra razão. É que se $\mathcal{F}$ é um espaço de funções definidas num intervalo $[a, b]$ ou mesmo num conjunto compacto, a classe das funções contínuas é densa no espaço de Lebesgue $\mathcal{F}$; mas isso já não é verdade para funções definidas num conjunto qualquer (1).

Ora como o espaço de Lebesgue tem o seu maior interesse ligado à integração-$L$, impõe-se a limitação do domínio das funções de $\mathcal{F}$ de modo que a classe das funções contínuas seja densa em $\mathcal{F}$.

Nenhuma das topologias com base em sistemas de vizinhanças do tipo $[\varphi_1, \varphi_2]$, $[h_1, h_2]$, $[g_1, g_2]$, $[g, h]$, nas quais $\varphi, h, g$ representam sempre funções contínuas, funções inferiormente contínuas, funções superiormente contínuas, conduz a *espaços separados*, como se verifica imediatamente.

Em particular, a topologia de Riemann, à base de $[\varphi_1, \varphi_2]$, não é *separada*, nem sequer é possível separar (2) uma função $f$ do seu *lim* sup. $\overline{f}$ e do seu *lim* inf. $\underline{f}$, e é precisamente este último facto que faz com que $f, \underline{f}, \overline{f}$ tenham integrais — Riemann iguais (quando existem).

O caracter *mais fino* da topologia de Lebesgue está pelo contrário, bem patente no facto de conduzir a um espaço *separado*, daí resultando que os integrais de Lebesgue de $f, \underline{f}$ e $\overline{f}$ não são necessàriamente iguais (quando existem).

Assim a maneira mais simples e mais significativa de caracterizar o integral de Lebesgue é defini-lo como o resultado do prolongamento por continuidade do integral de Cauchy, prolongamento efectuado no espaço separado de Lebesgue, ou seja, no espaço $\mathcal{F}$ munido da topologia cujo sistema fundamental de vizinhanças coincide com o conjunto dos intervalos $[h, g]$.

Ao mesmo tempo demos um exemplo de espaço regular, que é também um espaço de Riesz mas não um espaço vectorial topológico. Este conjunto de circunstâncias, todas de real interesse, leva-nos a designar um tal espaço $\mathcal{F}$ por *espaço de* Lebesgue, e supomos que se trata de um tipo de espaço topológico ainda não individuado, apesar de ser desse tipo, como vimos, o espaço implícito no processo de construção do integral-$L$ a partir do integral de Cauchy.

(1) Entramos ainda, com o facto de o conjunto $(x_1)$ ser fechado e portanto ter para complementar um conjunto aberto, pois foi também nisso que nos apoiamos para concluir que as funções construídas $g$ ou $h$ são inferiormente ou superiormente contínuas.

(1) É conhecida a condição necessária e suficiente para que $[h, g]$ contenha sempre uma função contínua $\varphi$.

(2) Visto toda vizinhança de $f$ conter $\underline{f}$ e $\overline{f}$.

# I Films di Geometria di Jean Louis Nicolet

*di* ***Emma Castelnuovo***

«Il metodo scientifico — dice Poincaré — consiste nell'osservare e nello sperimentare; se lo studioso disponesse di un tempo infinito, non ci sarebbe che dirgli[1]: *guarda e guarda bene*; ma siccome non c'è il tempo di guardare tutto e soprattutto di guardare bene tutto, e siccome è meglio non guardare che guardar male, è necessario che egli faccia una scelta.

...Scoprire vuol dire scegliere. Ma l'espressione, forse, non è troppo esatta; fa pensare a un compratore cui si presenti un grandissimo numero di campioni da esaminare uno dopo l'altro in modo da fare una scelta. Qui i campioni sarebbero così numerosi che una vita intera non basterebbe ad esaminarli. Non è così che accade: le combinazioni sterili non si presenterano alla mente dell'inventore.»

Le combinazioni sterili, di cui parla il Poincaré nell'opera «Science et méthode», si presentano invece all'uomo qualunque, all'allievo comune anche se intelligente. Come scegliere fra i tanti i campioni utili? come far sì che delle figure geometriche parlino anche a chi non è particolarmente dotato? come far scorgere un legame fra proprietà apparentemente distinte ma che sono invece vicinissime, anzi che spesso si fondono in un'unica legge matematica? como educare a «guardare e guardar bene»?

Molte delle difficoltà che il ragazzo incontra nello studio della geometria elementare provengono proprio dal passaggio da argomenti ad altri che sembrano distinti e che gli richiedono quindi uno sforzo di comprensione e di memoria, uno sforzo di adattamento. É che noi ci lasciamo portare, alla maniera di Euclide, dal gusto del frastagliamento.

L'idea geniale di Poncelet non appare nel nostro corso: sembra quasi che non si abbia il coraggio di toccare la perfetta bellezza statica del trattato euclideo introducendo nella scuola quel movimento che è dato dal *principio di continuità:* «le proprietà di una figura rimangono valide anche se la figura varia e si deforma in modo continuo, pur di tener conto di particolari modificazioni, per esempio di elementi che da reali possono diventare immaginari, di grandezze che possono diventare nulle o negative».

Ora, in una classe attiva, l'allievo deve essere posto «in stato di ricerca»; non é quindi la perfezione statica che deve informare l'insegnamento. E io penso che il principio di continuità possa dare a un corso di geometria elementare quella spinta creativa che ha dato e che dà nel campo della geometria algebrica.

Ma, come passare da una figura all'altra, come far muovere i vari elementi in modo visivo ed elementare? come, insomma, realizzare la variazione di una figura per gradi insensibili in modo che anche un ragazzetto possa cogliere e tener presenti ad un tempo le condizioni iniziali, gli stati successivi e le particolari modificazioni?

E' questo problema e quest'idea che sembrano aver ispirato e guidato Jean Louis Nicolet [1] nel suo lavoro dei films di geometria.

Mi fermeró ad analizzare uno dei suoi disegni animati perché penso che basti un esame crítico di uno solamente per comprendere lo spirito di tutto il lavoro.

Il titolo del film è «*segmento visto sotto angolo dato*». Quest'argomento costituisce la proposizione inversa di quella trattata da Euclide e che negli «Elementi» forma le proposizioni 21 e 32 del Libro III con gli enunciati seguenti:

prop. 21 — «Nel cerchio angoli inscritti nel medesimo arco sono uguali;»

prop. 32 — «Se una retta tocca un cerchio e al punto di contatto si conduce una retta che seghi il cerchio, gli angoli che questa forma con la tangente sono uguali agli angoli inscritti negli archi opposti.»

Negli «Elementi» e così nel nostro insegnamento vengono completamente distinti i casi dell'angolo formato da due secanti alla circonferenza e dell'angolo formato da una tangente e da una secante per il punto di contatto.

Il teorema inverso — cioè l'argomento del film — non è esplicitamente enunciato in Euclide, ma si trova invece nei comuni testi scolastici. La dimostrazione è un po' lunga ma non difficile.

Esaminiamo il film di Nicolet: sullo schermo appaiono successivamente un segmento, un punto

[1] No final indicam-se os significados de algumas das expressões aqui usadas (N. do R.).

[1] J. L. Nicolet, professore di matematica in un liceo di Losanna, si dedica da ani a questo lavoro dei cartoni animati di geometria. I suoi films sono prodotti dalla Casa Cinematografica Inglese: DATA, 21 Soho Square — London, W 1-

fuori della retta del segmento, l'angolo formato dalle semirette congiungenti il punto dato con gli estremi del segmento.

Vi è un determinato angolo, ma — ci dice la figura mobile che sembra tradurre sullo schermo le parole di Poincaré — «guarda e guarda bene»: «non vi è solo il punto che per primo appare sullo schermo da cui il segmento è visto sotto quel determinato angolo. Osserva, ve ne è anche un altro e un altro ancora, ve ne sono moltissimi di punti; e, guarda bene, si possono anche considerare dei punti posti dall'altra parte del piano rispetto alla retta del segmento, punti simmetrici dei primi, e anche gli estremi del segmento: l'angolo formato dalla corda e dalla tangente in esso al cerchio viene messo in particolare evidenza.

Vi sono infiniti punti; dove si trovano? Su un arco di cerchio che ha per corda quel segmento, anzi su due archi di cerchio...

Gli angoli spariscono dallo schermo, sparisce anche la corda; rimangono i due archi che formano un'unica curva.

Questo ci dice la figura, che sembra parlante, ma il film è muto come tutti i films di Nicolet.

Anche chi è estraneo al campo della matematica viene colpito da questo passaggio naturale da una figura all'altra, da questo successivo completarsi del disegno, dalla disposizione dei vari elementi geometrici.

Sullo schermo nasce una vera, riposante armonia. «Quell'armonia che — come dice Poincaré — è insieme una soddisfazione per i nostri bisogni estetici e un aiuto per la mente che essa sostiene e guida. E, nello stesso tempo, mettendo sotto i nostri occhi un tutto ben ordinato, essa ci fa presentire una legge matematica».

Ma, — si potrà e si dovrà dire — questa non è una dimostrazione!

E' vero: il film di Nicolet non sostituisce la dimostrazione, non vuole sostituire la dimostrazione; non è del resto la dimostrazione che presenta in generale delle difficoltà, la difficoltà sta nell'intuire, nel cogliere una data proprietà.

E allora, quale è il contributo dato dal film, quale il suo scopo?

Mi sembra che le osservazioni che sorgono della veduta dinamica della proprietà in questione si possano raccogliere nei seguenti numeri:

*1)* un punto muovendosi sempre soggeto a quella data condizione genera una curva;

*2)* questa curva è simmetrica rispetto ad una retta, la retta del segmento da cui siamo partiti;

*3)* «sembra» che i due archi uguali di cui è formata la curva siano archi di cerchio;

*4)* questi archi passano anche per gli estremi del segmento.

I numeri *1)* e *2)* mostrano al ragazzo una figura geometrica — un insieme di punti, una linea — che non è facile intuire in un disegno statico: è difficile infatti «vedere», nel senso di immaginare, una figura in formazione.

In una rappresentazione statica il ragazzo «vede» il punto da cui siamo partiti, vede poi globalmente l'insieme di punti, cioè gli archi di cerchio, ma non riesce a immaginare questa curva come generata dalla traiettoria del punto; proprio come, direi, nel guardare il mio garofano fiorito ricordo il primo germoglio, ma non ho mai visto e il mio occhio non sarà mai in grado di vedere le diverse e sucessive fasi dello sviluppo.

Il numero *3)* fa sentire, direi presentire, la verità; la fa intuire in modo visivo: ma saranno veramente due archi di cerchio come sembra dalla figura? E' ora che il ragazzo sente il bisogno di una dimostrazione

Anche il numero *4)* fa nascere dei dubbi: se l'arco di cerchio passa anche per gli estremi del segmento, como mostra il film, ciò significa che tali estremi sono punti che godono della stessa proprietà cioè l'angolo secondo cui da uno di questi estremi si vede il segmento ha sempre quel dato valore. Ma, dove è quest'angolo? In una visione statica, euclidea, è impossibile mettere in rapporto l'angolo formato dalla tangente e dalla corda con l'angolo formato dalle due secanti. In una visione dinamica, invece, i due concetti si fondono in uno solo: l'angolo alla circonferenza si modifica per gradi insensibili fino a diventare l'angolo della tangente e della corda.

E' il *principio di continuità*, reso visivo dal cartone animato, che ha operato l'unificazione di questi due casi.

Se poi si considera il problema da un punto di vista analitico, possiamo dire che entrano qui i concetti fondamentali dell'analisi: il concetto di limite, di derivata, di funzione continua. Il concetto di funzione entra dunque come basilare nello studio della geometria elementare.

Nel caso ora trattato si può passare al limite senza timore, data la continuità della funzione; ma sorge proprio qui l'opportunità di dare esempi, e ve ne sono di espressivi anche nel campo della geometria elementare, in cui non si può passare al limite con tanta leggerezza. Il ragazzo si renderà così conto da sè stesso del fatto che dopo una visione intuitiva occorre sempre una dimostrazione razionale e una revisione critica.

L'idea fondamentale del Nicolet è questa: il matematico non arriva alla dimostrazione se prima non ha avuto l'intuizione della verità: è questo «momento» spirituale, quel brivido della scoperta, che a pochi è dato di godere, che il NICOLET vuol far «sentire» a chiunque si avvicini allo studio della matematica. E' quell'attimo di visione superiore che anche il ragazzetto può così provare.

E' in ciò che i films di NICOLET si distinguono sostanzialmente da altri, anche interessantissimi, che sono apparsi recentemente: lo scopo di questi è di servire da riassunto, da concatenazione di argomenti, da lavoro finale. Per NICOLET invece il film è l'inizio, è l'idea. E, come l'idea è di brevissima durata, così questi films durano pochissimi minuti; il ragazzo non può stancarsi nell'osservare.

Il «guarda e guarda bene» di POINCARÉ assume nel lavoro del matematico svizzero un nuovo, profondo significato.

NOTA: I films di J. L. NICOLET che sono stati acquistati dalla Cineteca Autonoma per la Cinematografia scolastica del Ministero della Pubblica Istruzione (Via S. Susanna 17 — Roma) sono contrassegnati con dei numeri e vertono sui seguenti argomenti:

N.º 1 — Cerchio determinato da tre punti
4 — Triangolo formato da lati di poligoni
5 — La strofoide e la sezione aurea
6 — La sezione aurea e il pentagono regolare
7 — Bisettrici interne di un triangolo
8 — Le proprietà del rapporto delle bisettrici esterne
9 — Segmento visto sotto angolo dato
11 — Costruzione del pentagono regolare.

Chiunque desideri averli a nolo dovrà indicare alla Cineteca il numero del film.

Ad ogni film è associata una nota esplicativa per l'insegnante. Il contenuto di questi cartoni animati è così vivo e limpido che essi possono essere utili agli allievi di ogni classe di scuola media o di liceo o istituti equivalenti.

NOTA DA REDACÇÃO — Afim de facilitar ao leitor a tradução deste interessante artigo, indicamos em seguida os significados de algumas das expressões usadas no texto:

«*Non ci sarebbe che dirgli* = só haveria que dizer-lhe; *guarda, guardare* = olha, olhar; *siccome* = como; *scelta, scegliere* = escolha, escolher; *vuol* = quere; *cui* = a que, a quem; *i, le* = os, as; *campioni* = exemplares, amostras; *sarebbero* = seriam; *così* = assim, tão; *accade* = acontece; *di cui, con cui* = de que, com que; *uomo qualunque* = homem comum; *parlino* = falem; *far scorgere un legame fra* = fazer divisar uma ligação entre; *argomenti* = assuntos; *ragazzo* = rapaz; *richiedono* = requerem; *quindi* = portanto; *noi ci lasciamo portare* = nós deixamo-nos levar; *dal* = pelo; *frastagliamento* = retalhamento; *rimangono* = permanecem; *pur di tener conto* = contanto que se tenha conta *spinta* = impulso; *cogliere* = colher; *mi fermerò* = deter-me-ei; *seghi* = corte; *schermo* = tela; *appaiono* = aparecem; *per primo* = primeiramente; *da cui* = da qual; *ve ne è anche un altro* = há ainda um outro; *sparisce, spariscono* = desapare, desaparecem; *bisogni* = necessidades; *sorgono* = surgem; *veduta* = vista; *garofano* = cravo; *germoglio* = rebento; *sviluppo* = desenvolvimento; *ora* = agora; *ciò, cioè* = isto, isto é; *godono* = gozam; *reso* = tornado; *dunque* = pois; *senza* = sem; *da sé stesso* = por si mesmo; *brivido* = arrepio, «frisson»; *pochi* = poucos; *attimo* = instante; *stancarsi* = cansar-se; *sono stati acquistati* = foram adquiridos; *nolo* = aluguer».

# A Estatística na Vida Moderna

*por* **M. A. Fernandes Costa**

No último número de SANKHYĀ (The Indian Journal of Statistics) publica-se uma recente palestra radiofónica do prof. R. A. FISHER sobre os progressos da ciência estatística que, pelo seu interesse, não resistimos a transcrever em parte.

Depois de classificar a Estatística moderna com uma das mais características actividades do sec. XX, o prof. FISHER dá vários exemplos do seu exercício em âmbitos que afectam o bem estar económico de milhões de pessoas. Tira assim duas conclusões:

«Primeira, que o sec. XX ficaria irreconhecível nos escritos dum historiador que ignorasse este extraordinário surto de actividade estatística. Segunda, que a Estatística não é um assunto extraordinàriamente especializado, mas antes uma técnica que interessa à vida industrial, agrícola, administrativa e intelectual do mundo moderno.

«Achamo-nos assim perante um problema educacional da maior gravidade. Se a educação é destinada a preparar os cidadãos de amanhã para o mundo em que hão-de trabalhar, como poderemos nós evitar que os nossos filhos venham a sentir-se incapazes de acompanhar estes progressos, em vez de tomarem confiantemente os seus lugares nas novas profissões que estão surgindo? Parece que se tornam imperiosas reformas urgentes e expeditas tanto na educação secundária como na superior; mas não devemos esquecer que as grandes instituições não podem transformar-se ràpidamente e que as Universidades, particularmente conservadoras, quando se transformam só o fazem com vagar e relutância. Embora os progressos de que falei tenham todos resultado de avanços teóricos nos campos da Matemática e da Lógica, não me parece que as próprias secções de matemática das universidades se disponham fàcilmente a acolher no seu seio a Estatística Matemática; outras disciplinas mover-se-ão ainda mais lentamente. E não podemos esperar maior iniciativa por parte das escolas secundárias — embora muitas das ideias fundamentais possam fàcilmente transmitir-se a jóvens de idade escolar — pois pouquíssimos professores se aperceberam já da natureza ou mesmo da existência das profissões em que essas ideias são necessárias.

«Entretanto, o progresso mais frutuoso será provàvelmente devido à criação, nos Estados Unidos e na Índia, de instituições onde se combine a Estatística Matemática com a aplicada e onde os estudantes possam adquirir, após a formatura e de acordo com o seu temperamento e capacidade, algum conhecimento da teoria e algum contacto com as suas inúmeras aplicações. Tais instituições fariam bem em adoptar uma politica dual análoga à das grandes instituições tecnológicas em que o estudo da física se faz simultâneamente com o da engenharia. Com efeito, a Estatística é, mais do que qualquer outra, uma ciência em que a clara compreensão das necessidades práticas é indispensável para encaminhar os estudos teóricos no sentido dos problemas essenciais e evitar que demasiada atenção seja dedicada a pormenores secundários.»

A propósito, é interessante notar que o fasc. I do vol. IV de *Trabajos de Estadística* trás um extenso estudo de prof. Sixto Rios sob o título «Importancia de la Introduccion de la Estadística en la Enseñanza Media». A atenção que os nossos vizinhos espanhois estão dedicando ao assunto é bem evidenciada não só pela criação do «Departamento de Estadística» no «Consejo Superior de Investigaciones Cientificas» (que edita a magnífica revista acima referida), como ainda na abertura na Universidade de Madrid de uma Escola de Estatística «con la misión de especializar en esa materia, y con la extensión necesaria según los casos, a quantos hayan de dedicarse a servicios estadísticos, con la limitación obligada de que los alumnos tengan una profesión básica, ya que se trata de especializar en Estadística a los mismos profesionales que tengan que realizar las estadísticas de su incumbencia» (num. cit. de *Trab. de Estad.*, pag. 145).

Essa Escola organiza os estudos em dois graus, um superior e outro médio, com cursos de aplicação em cada um deles.

As matérias estudadas no grau superior com vista à obtenção do Diploma de Estatística Geral são as necessárias para projectar e dirigir serviços estatísticos e analisar estatísticas de grande alcance na especialidade de que se trate; as do Diploma de Estatística Matemática são mais adequadas para trabalhos elevados de investigação estatística, estudo de novos métodos estatísticos e aperfeiçoamento dos já existentes.

As matérias versadas no grau médio são as convenientes para a execução técnica de serviços estatísticos segundo métodos e planos já estudados e estabelecidos.

# MOVIMENTO CIENTÍFICO

## UNIÃO MATEMÁTICA INTERNACIONAL

Em 1 de Janeiro de 1953 as nações membros da IMU (International Mathematical Union) eram: Alemanha, Argentina, Autrália, Áustria, Bélgica, Canadá, Cuba, Dinamarca, Espanha, Finlândia, França, Grécia, Holanda, Inglaterra, Itália, Japão, Jugoslávia, Noruega, Paquistão, Perú, Suécia, Grécia, Suissa e U. S. A.

O Comité Executivo era composto por: Stone, presidente, E. Borel, 1.º vice-presidente, Kamke, 2.º vice-presidente, Bompiani, secretário, Hodge, Iyanaga e Jessen.

A primeira assembleia geral realizou-se em Roma de 6 a 8 de Março ([1]) e a primeira reunião do Comité Executivo teve lugar em Paris em 13 e 14 de Fevereiro de 1953. Do relatório anual deste Comité relativo ao período de 9 de Março de 1952 a 14 de Fevereiro de 1953 consta:

A adesão da IMU ao ICSU (International Council of Scientific Unions) aceite na 6.ª assembleia geral do ICSU. Os delegados da IMU, depois da sua admissão, foram Borel, Bompiani e Jessen.

Foram criadas e organizadas seis comissões:

([1]) Vide *Gazeta de Matemática*, 52, 1952 pp. 12-14.

1 — *Comissão Internacional para o Ensino das Matemáticas*: FEHR, presidente honorário, CHÂTELET, presidente, KUREPA e MACLANE, vice-presidentes, BEHNKE, secretário e JEFFERY.

2 — *Comissão para um Directório Mundial de Matemáticos:* STONE, presidente, BERKER, BRELOT e INZINGER.

3 — *Comissão para a Expansão do Conhecimento Matemático:* PÉRÈS, presidente, HODGE, MACLANE, SCHMID.

4 — *Comissão para o Intercâmbio de Matemáticos:* JESSEN, presidente, CHÂTELET, DAVENPORT, KLING, KUNUGI.

5 — *Comissão para um Directório de Símbolos Matemáticos:* SCHMID, presidente, SANSONE, secretário, H. CARTAN, TEMPLE.

6 — *Comissão de resumos e críticas* (on Abstracting and Reviewing): HODGE, presidente, HILLE, PÉRÈS, SCHMID; consultantes: BERKER e KURATOWSKI.

Em 20 de Outubro de 1952 reuniu-se em Genebra a Comissão para o Ensino das Matemáticas. Decidiu-se pedir ao comité matemático nacional de cada nação membro da IMU a nomeação dum representante junto da comissão responsável no seu país pela formação dum subcomité constituido por representantes dos vários níveis de ensino.

MACLANE foi eleito vice-presidente da comissão e pediu-se aos comités nacionais de Inglaterra, Itália e Dinamarca a indicação de um delegado a esta comissão.

O periódico *L'Enseignement Mathématique* foi considerado orgão oficial da Comissão.

O Comité Executivo da IMU resolveu elaborar um relatório a ser submetido à Assembleia Geral de 1954 sobre os princípios gerais e processos regulando o funcionamento de sympósios. Concordou na realização de 2 symposios para 1953: o de *Geometria Diferencial* em Itália e o de *Grupos Topológicos e sua Representação (em Espaços de Banach)* nos U. S. A.

M. Z.

## SYMPOSIUM INTERNACIONAL DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Veneza — Pádua — Bolonha — Pisa.

Organizado pela União Matemática Italiana e com as contribuições da UNESCO, do CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche), das Universidades de Pádua, Bolonha e Pisa e de outras entidades teve lugar nas cidades italianas Veneza, Pádua, Bolonha e Pisa um importante symposium internacional de Geometria Diferencial que reuniu matemáticos da Africa do Sul, das Alemanhas Oriental e Ocidental, austríacos, belgas, canadianos, dinamarqueses, franceses, holandeses, ingleses, italianos, israelitas, japoneses, suíssos, tchecoslovacos, da U. R. S. S. e dos U. S. A.

Foram apresentadas e discutidas as seguintes comunicações:

1. J. A. SCHOUTEN — *Sur les opérateurs différentiels de premier ordre du calcul tensoriel;*

2. P. FINSLER — *Ueber die Berechtigung infinitesimalgeometrischer Betrachtungen;*

3. W. HODGE — *Differential Geometry and the theory of algebraic varieties;*

4. H. HOPF — *Zur Differentialgeometrie geschlossener Flächen im euklidischen Raum;*

5. F. SEVERI — *Funzioni quasi abeliane e gruppi continui ad esse inerenti;*

6. A. KAWAGUCHI — *On the theory of non linear connections;*

7. A. LICHNEROWICZ — *Groupes d'holonomie et applications en géométrie riemannienne globale;*

8. W SUESS — *Ueber affine und Minkowskische Geometrie;*

9. A. G. WALKER — *Riemannian extension of non Riemannian spaces;*

10. W. BARTHEL — *Ueber Minkowskische und Finslersche Geometrie;*

11. J. HAANTJES — *On the notion of geometric object;*

12. E. KAEHLER — *Osservazioni a proposito della dinamica;*

13. W. FENCHEL — *On curvature and Levi-Civita's parallelism in riemannian manifolds;*

14. G. REEB — *Sur certains problèmes de Topologie relatifs aux systèmes dynamiques;*

15. M. PASTORI — *Sullo spazio delle recente teoria unitaria di Einstein;*

16. H. RUND — *On the geometry of generalized metric spaces;*

17. R. SAUER — *Flächenklassen, bei denen sämtliche infinitesimalen Verbiegungen durch Quadraturen darstellbar sind;*

18. W. WUNDERLICH — *Neue Modelle der Flächen konstanter negativer Krümmung;*

19. T. H. WILLMORE — *Some properties of harmonic riemannian manifolds;*

20. B. SEGRE — *Questioni di realtà sulle forme armoniche ternarie e sulle loro hessiane;*

21. L. GODEAUX — *Quadriques et coniques de Moutard;*

22. E. ČECH — *Deformazione proiettiva di strati di ipersuperficie;*

23. A. D. ALEXANDROV — *I metodi sintetici in teoria delle superficie;*

24. C. EHRESMANN — *Sur les connexions infinitésimales d'ordre supérieur;*

25. B. ECKMANN — *Sur les variétés complexes;*

26. W. KLINGENBERG — *Sui sistemi di sfere;*

27. N. H. Kuiper — *On locally projective spaces*;

28. R. Debever — *Une structure infinitésimale régulière associée aux intégrales d'hypersurfaces du calcul des variations*;

29. H. Guggenheimer — *Topologia differenziale delle transformazioni cremoniane e delle riemanniane di funzioni complesse di più variabili*;

30. K. Yano — *Groups of motions and groups of affine collineations*;

31. P. Liebermann — *Sur la courbure et la torsion de certaines structures infinitésimales*;

32. P. Dedecker — *Systèmes différentiels extérieurs, invariants intégraux et suites spectrales*;

33. F. Sbrana — *Su alcune proprietà delle curve sghembe*;

34. A. Signorini — *Sulla cinematica dei moti rigidi con un punto fisso*;

35. M. Picone — *Sulle condizioni necessarie per un estremo*;

36. G. Bouligand — *Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du premier ordre*;

37. R. Inzinger — *Differentialgeometrie der Faltungsgruppe im Hilbertschen Raum*;

38. P. Vincensini — *Sur une extension d'un problème de L. Bianchi*;

39. S. P. Finikov — *Il sistema delle congruenze W*;

40. K. Strubecker — *Alcune applicazioni delle Geometria differenziale dello spazio isotropo*;

41. G. Sansone — *Sul problema dell' applicabilità sulle superficie isoterme.*

Em várias sessões do congresso celebraram-se o centenário do nascimento de Gregorio Ricci Curbastro, o cinquentenário da morte de Luigi Cremona e o 25.º aniversário da morte de Luigi Bianchi.

M. Z.

[Notícia extraída do «Bolletino della Unione Matematica Italiana», Serie III, Anno VIII, n.º 3 — Set. 1953].

## SIMPÓSIO DE PUNTA DEL ESTE

Pelo Centro de Cooperação Científica da UNESCO para a América Latina, foi publicado recentemente um volume intitulado «Symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino América». Contém esse volme as comunicações apresentadas por matemáticos latino-americanos, ou matemáticos vinculados a instituições da América Latina, numa reunião promovida pelo Instituto de Matemática e Estatística de Montevideu e pelo referido Centro da UNESCO, realizada em Punta del Este, Uruguai, em Dezembro de 1951.

São as seguintes as comunicações em apreço:

Halmos (Uruguai): *Algunos problemas actuales sobre operadores en espacios de* Hilbert.

Nachbin (Brasil): *Algunos problemas de análisis funcional.*

Santaló (Argentina): *Problemas de geometria integral.*

Damkohler (Argentina): *Definibilidad y reversibilidad en el cálculo de variaciones.*

Murnaghan (Brasil): *Sobre sistemas convenientes de parámetros para los grupos de rotación y unitario.*

Cotlar (Argentina): *Sobre los fundamentos de la teoria ergódica.*

González (Cuba): *Problemas sobre ecuaciones diferenciales.*

González Domínguez (Argentina): *Distribuciones y funciones analíticas.*

Thullen (Paraguai): *Problemas de la teoria de las funciones analíticas de várias variables complejas.*

Graef Fernández (Mexico): *La teoria de la gravitación de* Birkhoff.

Garcia (Peru): *La nueva teoria de la relatividade general.*

Fränz (Argentina): *Problemas matemáticos sobre la teoria de circuitos eléctricos de constantes distribuidas.*

Dötsch (Argentina): *Problemas no resueltos en la teoria de la transformación de* Laplace.

Laguardia (Uruguai): *Problemas sobre la iteración de la transformación de* Laplace.

L. N.

## 8.º CONGRESSO DOS MATEMÁTICOS POLACOS

O 8.º congresso dos Matemáticos Polacos teve lugar em Varsóvia de 6 a 13 de Setembro findo. Os trabalhos científicos do congresso incidiram sobretudo sobre seis temas largamente discutidos. Os debates foram conduzidos por: A. Mostowski sobre o estado actual da investigação no campo dos fundamentos da Matemática; T. Wazewski sobre a influência dos métodos da Matemática Moderna nas teorias da Matemática Clássica; H. Steinhaus sobre o Cálculo das Probabilidades como meio de investigação no domínio das Ciências Naturais e da produção; L. Infeld sobre a importância da Física Moderna no desenvolvimento da Matemática; E. Turski, sobre os métodos matemáticos na técnica contemporânea; e finalmente Kuratowski sobre a organização dos estudos matemáticos na Polónia. Foi apresentada também cerca de uma centena de comunicações. Participaram no Congresso cientistas dos seguintes países: Alemanha Oriental, Austria, Bélgica, Bulgária, Dinamarca, Hungria, Inglaterra, Itália, Suécia, Suíssa, Tchecoslováquia e U. R. S. S.

A Academia Polaca das Ciências realizou sessões a 15 e 16 de Setembro consagradas à celebração da obra científica de Nicolau Copérnico.

M. Z.

[Notícia extraída do «Bol. Union Mat. Ital.», anno VIII, n.º 3, Set. 1953].

# MATEMÁTICAS SUPERIORES

## PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

## MATEMÁTICAS GERAIS

**I. S. T.** — Matemáticas Gerais — **2.° Exame de Frequência Extraordinário — 11 de Julho de 1953.**

I

**3675** — Achar a condição de convergência da série cujo termo geral é $u_n = (2+11\,n)\,\dfrac{a\,(a+5)\cdots(a+5\,n)}{b\,(b+5)\cdots(b+5\,n)}$.

R: *Utilizando o critério de* Duhamel, *e atendendo a que* $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{2+11\,n}{13+11\,n}\cdot\dfrac{b+5\,(n+1)}{a+5\,(n+1)}$ *vem* $\lim\limits_{n=\infty} n\cdot\left(\dfrac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) = \dfrac{11\,b-11\,a-55}{55} > 1$ *Por consequência,*

$$11\,b-11\,a > 110 \quad ou \quad b-a > 10\,.$$

**3676** — Determine a equação do plano diametral da quádrica $x^2-y^2-2\,z^2+4\,xz-2\,yz-2\,x-2\,y+4\,z+5=0$ que é perpendicular à recta $\begin{cases} x=1 \\ y=2\,z-3 \end{cases}$.

R: *As coordenadas do centro da quádrica são a solução de*

$$\begin{cases} x+2\,z-1=0 \\ y+z+1=0 \\ 2\,x-y-2\,z+2=0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x=-1 \\ y=-2\,. \\ z=\;\;1 \end{cases}$$

*As equações normais da recta dada são:*

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-0}{1}\,.$$

*Como o plano é diametral ele passa pelo centro da quádrica e tem uma equação de tipo* $A\,(x+1)+B\,(y+2)+C\,(z-1)=0$. *Por ser perpendicular à recta dada, podemos tomar para parâmetros directores do plano os valores* $0, 2$ *e* $1$: $2\,(y+2)+z-1=0$ *ou* $2\,y+z-3=0$.

II

**3677** — Defina séries absolutamente convergentes e aponte as suas propriedades mais importantes, incluindo as que dizem respeito às operações sobre séries.

Se trocarmos, numa dada série, cada termo $u_{2n}$ com o termo $u_{2n+1}$, a série resultante será da mesma natureza? Justifique.

**3678** — Faça o estudo de um sistema de $n$ equações lineares e homogéneas a $n$ incógnitas.

Considere agora um sistema de $n$ equações lineares e homogéneas a $n+1$ incógnitas, com característica $n$. Demonstre que neste caso os valores das incógnitas são proporcionais aos determinantes que se obtêm a partir do quadro da matriz do sistema, suprimindo sucessivamente as várias colunas e trocando-lhes alternadamente os sinais.

**3679** — Mostre a importância das transformadas, dos limites das raízes e das regras eliminatórias no cálculo das raízes inteiras duma equação algébrica de coeficientes inteiros.

Prove que a equação $x^n - x^{n-1} + k = 0$ não pode ter raízes inteiras se $k$ for impar. Poderá ter raizes fraccionárias? E raizes irracionais?

**3680** — Deduza a equação às direcções conjugadas de uma cónica.

Considere uma direcção conjugada de si própria. Em que se transforma a equação deduzida?

Sabendo que as assíntotas passam pelo centro de uma cónica, de coordenadas $(x_0, y_0)$, escreva uma equação reunida das duas assíntotas utilizando a equação obtida. Essa equação reunida representará, por sua vez, uma cónica?

Enunciados e resoluções dos n.os 3675 e 3676 de J. H. Arandes.

**I. S. C. E. F.** — Matemáticas Gerais — **1.° Exame de Frequência — 11 de Fevereiro de 1953.**

I

**3681** — Escreva a equação da recta — $r$ — que é perpendicular, no ponto médio, ao segmento $\overline{AB}$ de extremidades $A\,(2,2)$ e $B\,(2,2\,b)$.

Suposto fixado o parâmetro $b$, considere as circunferências que passam por $A$ e $B$; notando que o lugar geométrico dos centros delas é a recta $r$, determine o intervalo no qual se deve conservar $b$ para

N. R. — A numeração dos exercícios publicados nesta revista no número 55 (Agosto de 1953) a partir da 2.ª coluna da página 21 (Pontos de Matemáticas Gerais — I. S. T. 1.° ex. ord. 13 de Março de 1953) está errada. Os números 3559 a 3655 devem ser substituidos pelos números 3657 a 3674. Pede-se ao leitor que faça a respectiva correcção para evitar confusões em citações futuras.

que sempre *duas* dessas circunferências tenham o seu centro sobre a circunferência de equação $x^2+y^2=4$.
Qual ou quais os valores de $b$ que conduzem a uma só circunferência? Escreva a equação desta única solução. R: *Ponto médio* $M(2, 1+b)$; *coef. angular de* $\overline{AB}$, $\frac{2-2b}{2-2}$ *donde* $\overline{AB}$ *paralela a* $\overrightarrow{OY}$; *a equação de* r *é pois,* $y-1-b=0$.

*Para haver duas soluções a linha dos centros deve cortar a circunferência, e o sistema* $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ y=1+b \end{cases}$ *deverá ter duas soluções reais distintas.*

*Vem sucessivamente:* $x^2+(1+b)^2=4$, $x^2=4-(1+b)^2$, $x=\pm\sqrt{4-(1+b)^2}$, $4-(1+b)^2>0$, $(1+b)^2<4$, $|b+1|<2$; *então,* b *na vizinhança* 2 *do ponto* $-1$: $-1-2<b<-1+2$.

*Para haver uma só solução,* $b_1=-3$ $b_2=1$ *a que correspondem os centros* $C_1(0,-2)$ *e* $C_2(0,2)$ *e a que correspondem os raios,* $r_1=\sqrt{20}$ *e* $r_2=2$; *as equações das circunferências:* $x^2+(y+2)^2=20$ *e* $x^2+(y-2)^2=4$.

**3682** — Calcule, nos pontos $t=0$ e $t=2$, a derivada $\frac{dy}{dt}$ da função composta com $y=e^{\operatorname{arc\,sen} x}$ e $x=\sqrt[3]{1-t^3}+2$. R: *A função composta está definida naqueles valores de* t *que façam* $-1\leqslant x\leqslant 1$, *e portanto não existe função no ponto* $t=0$, *mas existe no ponto* $t=2$.

*No ponto* $t=2$ *a função intermediária admite derivada* $\frac{dx}{dt}=-\frac{t^2}{\sqrt[3]{(1-t^3)^2}}$, *finita igual a* $-\frac{4}{\sqrt[3]{49}}$; *no ponto correspondente* $x=2-\sqrt[3]{7}$ *a função principal admite derivada* $\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1-x^2}}$, *também finita igual a* $\frac{e^{\operatorname{arc\,sen}(2-\sqrt[3]{7})}}{\sqrt{1-\left(2-\sqrt[3]{7}\right)^2}}$. *Vem então:*

$$\frac{dy}{dt}=-\frac{4\cdot e^{\operatorname{arc\,sen}(2-\sqrt[3]{7})}}{\sqrt[3]{49}\cdot\sqrt{1-\left(2-\sqrt[3]{7}\right)^2}}.$$

II

**3683** — Pode uma sucessão $u_n$ ter limite finito e o conjunto $(u_n)$ admitir dois pontos de acumulação? Justifique. R: *Se* $a\neq b$ *são esses pontos de acumulação, existem vizinhanças* $I(a, \varepsilon_1')$ *e* $I(b, \varepsilon_1'')$ *disjuntas; dentro da primeira há um ponto de* $(u_n)$ *distinto de* a *e que é um termo* $u_{\alpha_1}$ *da sucessão, dentro da segunda há um ponto de* $(u_n)$ *distinto de* b *e que é um termo* $u_{\beta_1}$ *da sucessão; os dois termos são distintos, não só como termos mas até numèricamente por serem disjuntas as vizinhanças.*

*Se* $a\neq u_{\alpha_1}$ *e* $b\neq u_{\beta_1}$ *existem vizinhanças* $I(a, \varepsilon_2)$ *e* $I(b, \varepsilon_2'')$ *por maioria de razão disjuntas e dentro das quais não se encontram nem* $u_{\alpha_1}$ *nem* $u_{\alpha_2}$. *Portanto dentro da primeira há um ponto do conjunto distinto de* a *que é um termo da sucessão* $u_{\alpha_2}$ *e dentro da segunda um ponto distinto de* b *que é um termo* $u_{\beta_2}$.

*Assim se constroem duas subsucessões com limites distintos.*

**3684** — Indique, e justifique, os tipos de séries cuja soma se possa calcular com exactidão. R: *As séries* $\sum_0^\infty K^n(x)=1+K(x)+K^2(x)+\cdots$ *para as quais é* $S_n(x)=\frac{1-K^n(x)}{1-K(x)}$ *e cuja soma é* $S(x)=\frac{1}{1-K(x)}$ *sempre que* $|K(x)|<1$.

*As séries* $\sum_0^\infty\left(\frac{1}{N_n}-\frac{1}{N_{n+1}}\right)$ *para as quais* $S_n=\frac{1}{N_0}-\frac{1}{N_n}$ *que terão soma* $S=\frac{1}{N_0}-\frac{1}{L}$ *sempre que* $N_n$ *converge para limite finito* $L\neq 0$.

*As séries* $\sum_0^\infty\left(\frac{1}{N_n}-\frac{1}{N_{n+2}}\right)$ *para as quais* $S_n=\frac{1}{N_0}+\frac{1}{N_1}-\frac{1}{N_{n+1}}-\frac{1}{N_n}$ *que terão soma* $S=\frac{1}{N_0}+\frac{1}{N_1}-\frac{2}{L}$ *sempre que* $N_n$ *converge para* $L\neq 0$.

*Podemos supor estas séries como séries de funções, mas então a função* $N_n(x)$ *deverá convergir uniformemente em* $X'$ *para a função* $L(x)$; *em* $X'$ *nem a função* $L(x)$ *nem as funções* $N_n(x)$ *se devem anular.*

*O aluno podia ainda citar outras séries, mas a resposta considerava-se já suficiente.*

**3685** — Prove que $f'(c)$ (se existir) é não negativa se $f(x)$ cresce em $x=c$. R: *Se* $f(x)$ *é crescente em* c *existe uma vizinhança de* c *para a qual* $c-\varepsilon<x'<c<x''<c+\varepsilon$ *faz* $f(x')\leqslant f(c)\leqslant f(x'')$ *e então* $f(x)-f(c)$ *quando não é nulo e tem o mesmo sinal de* $x-c$; *vem* $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geqslant 0$, *e se o limite existir*, $f'(c)\geqslant 0$.

**3686** — Seja $f'(x)$ a derivada duma função $f(x)$ regular em $(a,b)$. Mostre que $f'(x)$ é contínua no intervalo aberto $(a,b)$, desde que não tenha limite infinito em ponto algum interior a $(a,b)$. Se $\lim\limits_{x=b-0} f'(x)=H$, qual o valor de $H$? Justifique a resposta. R: *Seja* d *um ponto interior ao intervalo* $(a,b)$ *e* *portanto com uma vizinhança* I (d, ε) *inteiramente contida no intervalo. Com* x *nesta vizinhança de* d *vem* $\frac{f(x)-f(d)}{x-d}=f'(x_1)$ *com* $0<|x_1-d|<|x-d|$; *fazendo tender* x *para* d *o que arrasta* $x_1$ *para* d, *o primeiro membro terá sempre limite finito* $=f'(d)$ *e o segundo membro tem também, por hipótese, limite finito sendo* $\lim\limits_{x_1=d} f'(x_1)=f'(d)$.

*Com* $x<b$ *vem* $\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=f'(x_1)$ *e, portanto,* $\lim\limits_{x_1=b-0} f'(x_1)=f'_e(b)$.

**3687** — Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{2n}{3n^2+1}\right)^n$.

R: $\log\left(1+\frac{2n}{3n^2+1}\right)^n = n \log\left(1+\frac{2n}{3n^2+1}\right)=$

$$= n\,.\,\xi_n\,.\,\frac{2n}{3n^2+1}\longrightarrow\frac{2}{3} \quad \text{visto } \xi_n\to 1$$

III

**3688** — Sob que condições converge a série $\sum\limits_{0}^{\infty}(-1)^n a_n$? Prove a afirmação.

Dadas as séries alternadas $\sum(-1)^n a_n$ e $\sum(-1)^n b_n$, se $\frac{a_n}{b_n}\to l$ finito (possìvelmente nulo) que se pode concluir quando $\sum(-1)^n b_n$ fôr absolutamente convergente? Justifique. E quando $\sum(-1)^n b_n$ fôr simplesmente convergente? Porquê?

Estude a natureza da série $1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta(\beta+1)}+$ $+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)}+\cdots$ $(\alpha,\beta>0)$. R: *Se* $\sum(-1)^n b_n$ *fôr simplesmente convergente*, $\sum(-1)^n a_n$ *nunca poderá ser absolutamente convergente.*

*Note-se que: se* $\frac{a_n}{b_n}$ *tende monòtonamente para zero e a série* $\sum(-1)^n b_n$ *é convergente (mesmo simplesmente) também* $\sum(-1)^n a_n$ *é convergente.*

*Com efeito, para* $n\geqslant m$ *se tem* $\frac{a_m}{b_m}>\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}>$ $>\frac{a_{m+2}}{b_{m+2}}>\cdots>0$ *e multiplicando os termos da série convergente*

$$(-1)^m b_m+(-1)^{m+1}b_{m+1}+(-1)^{m+2}b_{m+2}+\cdots$$

*por aqueles números positivos* decrescentes, *se obtém a seguinte série*

$$(-1)^m a_m+(-1)^{m+1}a_{m+1}+(-1)^{m+2}a_{m+2}+\cdots$$

*que é também convergente.*

*O termo geral* $\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n-1)}$ *conduz a* $\frac{u_n}{u_{n+1}}=\frac{\beta+n}{\alpha+n}=1+\frac{\beta-\alpha}{n}+\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{n(n+\alpha)}$ *e, pelas regras de* Gauss, *se* $\beta-\alpha>1$ *convergência; se* $\beta-\alpha\leqslant 1$ *divergência.*

**3689** — Defina função $f(x)$ regular em $(a,b)$ e demonstre o teorema de Rolle. Designando por $x'_i$ e $x'_{i+1}$ dois zeros consecutivos de $f'(x)$ indique, justificando, quantos zeros de $f(x)$ existem entre $x'_i$ e $x_{i+1}$.

Verifique o teorema de Rolle com a função $f(x)=$ $=(x-a)^p\,.\,(x-b)^q$ R: $f(x)=(x-a)^p(x-b)^q$ *é função regular no intervalo* (a, b) *sendo* $f(a)=f(b)=0$. *Tem-se* $f'(x)=p(x-a)^{p-1}(x-b)^q+q(x-a)^p(x-b)^{q-1}=$ $=(x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}[(p+q)x-(pb+qa)]$. *A derivada anula-se para* $x_1=\frac{pb+qa}{p+q}$ *e, se por exemplo,* $a<b$ *será* $a<x_1<b$, *como é fácil de verificar.*

**I. S. C. E. F.** — Matemáticas Gerais — **1.º Exame extraordinário — 6 de Março de 1953.**

I

**3690** — Dada a circunferência de equação $x^2+$ $+y^2=5$ indique os limites de variação de $-a-$ por forma que existam duas tangentes conduzidas por $P(a,2)$ à circunferência anterior. Fixe um desses valores de $a$ e considere as duas tangentes $t_1$ e $t_2$; determine a equação do lugar dos centros das circunferências tangentes a $t_1$ e $t_2$. R: *A circunferência tem centro em* O (0, 0) *e* $r=\sqrt{5}$. *As tangentes estão entre as rectas do feixe de centro em* P, $y-2=m(x-a)$, *e deverão passar à distância* $\sqrt{5}$ *da origem, isto é:* $\left|\frac{-2-ma}{\sqrt{1+m^2}}\right|=\sqrt{5}$ *ou* $|2+ma|=$ $=\sqrt{5(1+m^2)}$ *ou* $(2+ma)^2=5(1+m^2)$ *devendo a equação* $m^2(a^2-5)+4am-1=0$ *admitir duas raizes* $m_1$ *e* $m_2$ *reais e distintas;* $16a^2+4(a^2-5)=$ $=20a^2-20>0$ *ou* $a^2>1$ *ou* $|a|>1$. *Então deverá ser* $a<-1$ *ou* $a>1$.

*Escolhamos um valor de* a *que faça* $20a^2-20$ *quadrado perfeito, por exemplo,* $20a^2-20=4$, $20a^2=24$, $a=\sqrt{\frac{6}{5}}$. *Escolhendo assim* a, *vem:* $m=\frac{-2a\pm 1}{a^2-5}$. *As equações das tangentes são:* $t_1\equiv y-2-m_1(x-a)=0$ *e* $t_2\equiv y-2-m_2(x-a)=0$.

*Se* M (X , Y) *é um ponto equidistante de* $t_1$ *e* $t_2$, *deverá ser*

$$\left|\frac{Y-2-m_1(X-a)}{\sqrt{1+m_1^2}}\right|=\left|\frac{Y-2-m_2(X-a)}{\sqrt{1+m_2^2}}\right|$$

*e obtemos duas rectas perpendiculares de equações* $\frac{Y-2-m_1(X-a)}{\sqrt{1+m_1^2}}=\pm\frac{Y-2-m_2(X-a)}{\sqrt{1+m_2^2}}$. *Uma destas rectas passa evidentemente pela origem.*

**3691** — Indique a relação que liga a derivada duma função com a derivada da sua inversa. Dada a ção $y=2\cdot arc\,sec\sqrt{1+x^2}$ prove que $\frac{dx}{dy}=\frac{x^2+1}{2}$.

R: *Seja* $y=f(x)$ *uma função unívoca, definida em* X *ao qual* a *é ponto interior; se* f (x) *é contínua em* a, *e admite uma inversa unívoca nas vizinhanças de* $b=f(a)$, *inversa* $x=\varphi(y)$ *diferenciável em* b, *então* f (x) *é diferenciável em* a, *e a sua derivada no ponto* a, *é o inverso aritmético da derivada da função inversa no ponto* b: $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a}=$

$$=\frac{1}{\left[\frac{dx}{dy}\right]_{y=b=f(a)}}\qquad \frac{dy}{dx}=2\cdot\frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(\sqrt{1+x^2})^2-1}}=$$

$$=\frac{2}{1+x^2}\ \textit{donde}\ \frac{dx}{dy}=\frac{1+x^2}{2}.$$

II

**3692** — Quantos termos positivos e negativos tem uma série simplesmente convergente de termos reais? Justifique.

**3693** — $x_n$ é um polinómio inteiro de grau dois em $y_n$ e $z_n$ de coeficientes reais: prove que $x_n$ tem limite real finito quando o tiverem $y_n$ e $z_n$. R: *Um polinómio de 2.º grau em* $y_n$ *e* $x_n$, *suposto completo, é da seguinte forma*: $a y_n^2+b y_n z_n+c z_n^2+d y_n+e z_n+f$. *Deveriam enunciar-se os teoremas, sobre os limites da soma e produto, e com eles calcular o limite do polinómio.*

**3694** — Prove que uma função crescente em $(a,b)$ é crescente em cada ponto de $(a,b)$. R: *Por hipótese:* $x'<x''$ *implica* $f(x')\leqslant f(x'')$. *Qualquer que seja* c *vem*: $x'<c<x''$ *a implicar* $f(x')\leqslant f(c)\leqslant f(x'')$, *logo crescente em* c.

**3695** — A função $f(x)$ está definida em $c$, mas não tem derivada nesse ponto interior do domínio, tendo contudo derivadas laterais finitas de sinais contrários: prove que se $f(x)$ é contínua ela tem um extremo em $c$. Poderá afirmar a existência de extremo se a função não é contínua em $c$? Porquê? R: *Por hipótese, com* $x'<c<x''$, *as fracções* $\frac{f(x')-f(c)}{x'-c}$ *e* $\frac{f(x'')-f(c)}{x''-c}$ *são de sinais contrários, para uma vizinhança de* c *que as faça ter os sinais dos respectivos limites; como os denominadores são de sinais contrários os numeradores são necessàriamente do mesmo sinal, por exemplo, ambos positivos; sendo a função contínua em* c, *virá* $f(x')\geqslant f(c-0)=$ $=f(c)=f(c+0)\leqslant f(x'')$ *e portanto, haverá um mínimo em* c. *Então, dum e doutro lado de* c *temos* $f(x)\geqslant f(c)$.

*Com* $x'<c$ *tem-se* $f(x')-f(c)=(x'-c)[f'_e(c)+\alpha]$ *e do mesmo modo com* $c<x''$ *vem* $f(x'')-f(c)=$ $=(x''-c)[f'_d(c)+\beta]$ *visto serem finitas as derivadas laterais; então dado* $\delta>0$ *é possível determinar* $\varepsilon>0$ *tal que* $c-\varepsilon<x'<c<x''<c+\varepsilon$ *faça* $|f(x)-f(c)|<\delta$. *A função será sempre contínua em* c, *não sendo de considerar a última parte da questão.*

**3696** — Estude a série $1+\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2+$ $+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\cdots$. R: *O termo geral da série é* $u_n=$ $=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}x^n$.

$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\frac{2n+1}{2n+2}|x|\to|x|$. *Intervalo de convergência* $(-1,1)$. *Para* $x=1$ *vem a série* $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}$ *para a qual se tem* $\frac{2n+2}{2n+1}=$ $=1+\frac{1/2}{n}+\frac{-1-1/2n}{2n+1}$ *e, pelas regras de* Gauss, *a série é divergente.*

*Para* $x=-1$ *vem a série* $\sum(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot2n}$ *que é alternada; como* $a_{n+1}=a_n\frac{2n+1}{2n+2}$ *a série é decrescente. Mas podemos escrever*

$$\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n-2}\cdot\frac{1}{2n}=$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{2n-2}\right)\frac{1}{2n}$$

*e o termo geral não pode tender para zero porque, depois de dividido por* $\frac{1}{n}$, *tende para* $\infty$. *A série é divergente.*

III

**3697** — É dada uma sucessão $u_n$) para a qual o conjunto $(u_n)$ tem só dois pontos de acumulação (próprios): prove que existe, pelo menos, uma subsucessão $u_{\alpha_n}$) com limite. Pode, nas condições anteriores, existir uma subsucessão sem limite? Porquê?

Neste caso, diga quando a sucessão $u_n^2$) tem limite finito.

Calcule $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n^2+1}\right)^n$. R: *Sejam* $u' \neq v'$ *os dois pontos de acumulação próprios. Há uma vizinhança de* $u'$ *e uma vizinhança de* $v'$ *sem pontos em comum; dentro de cada uma delas encontramos* $u_{\alpha_1}$ *e* $u_{\beta_1}$ *distintos de* $u'$ *e de* $v'$ *respectivamente. Considerando novas vizinhanças de* $u'$ *e* $v'$ *que excluam* $u_{\alpha_1}$ *e* $u_{\beta_1}$ *encontramos dentro delas* $u_{\alpha_2}$ *e* $u_{\beta_2}$, *e assim sucessivamente.*

*As subsucessões* $u_{\alpha_n}$) *e* $u_{\beta_n}$) *têm respectivamente limites* $u'$ *e* $v'$. *A subsucessão* $u_{\alpha_1}, u_{\beta_2}, u_{\alpha_3}, u_{\beta_4}, \cdots$ *não tem limite. A sucessão* $u_n^2$) *terá limite quando* $u' = -v'$ *e o limite será* $|u|^2 = v^2$.

$$\left(1-\frac{3}{n^2+1}\right)^n = e^{n\log\left(1-\frac{3}{n^2+1}\right)} = e^{n\cdot\xi_n\cdot\frac{-3}{n^2+1}} \to 1$$

*visto que* $\xi_n \to 1$.

**3698** — Defina função regular e demonstre o teorema de Cauchy para estas funções. Deduza dele o teorema de Lagrange.

Prove que se $f'(x) \equiv \varphi'(x)$ em $(a,b)$ então $f(x) - \varphi(x) = C$ ($C$ constante).

Verifique o teorema de Lagrange com a função $f(x)=x^3$ em $(a,b)$. R: *Se* $f'(x) \equiv \varphi'(x)$ *em* $(a,b)$ *então* $f(x)-\varphi(x)=F(x)$ *tem em* $(a,b)$ *uma derivada* $F'(x) \equiv 0$ *sendo portanto regular em* $(a,b)$. *Portanto com qualquer* $a<x<b$ *vem* $\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(x_1) = 0$ *donde* $F(x)=F(a)$ *para todo o* $x$ *em* $(a,b)$.

$f(x)=x^3$ *em* $(a,b)$ *dá* $f(a)=a^3$ *e* $f(b)=b^3$ *e portanto* $\frac{a^3-b^3}{a-b} = 3x_1^2$. *Resta provar que* $a<x_1<b$ $(0<a<b)$.

$$\text{Mas } x_1=+\sqrt{\frac{1}{3}\frac{a^3-b^3}{a-b}}=+\sqrt{\frac{1}{3}(a^2+b^2+ab)}= =+\sqrt{\frac{1}{3}[(a+b)^2-ab]}.$$

$$\text{Portanto } \sqrt{\frac{3a^2}{3}}<\sqrt{\frac{a(a+2b)}{3}}= =\sqrt{\frac{(a+b)^2-b^2}{3}}<x_1<\sqrt{\frac{(a+b)^2-a^2}{3}}= =\sqrt{\frac{b(2a+b)}{3}}<\sqrt{\frac{3b^2}{3}}.$$

Enunciados e resoluções dos n.os 3681 a 3698 de J. R. Albuquerque.

# ANÁLISE INFINITÉSIMAL

**I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 19 de Junho de 1948.**

I

**3699** — Achar a área da curva $x^{2n}+y^{2n}=a^2(xy)^{n-1}$, designando $n$ um número inteiro e positivo.

Nota: Ponha-se $y=tx$, sendo $t$ uma variável auxiliar.

II

**3700** — Integrar a equação

$$\frac{d^n y}{dx^n}-\frac{n}{1}a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{2!}a^2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+ +(-a)^n y=e^{ax}.$$

III

**3701** — Quantas vezes se deve lançar três dados para ter a probabilidade $p$ de obter pelo menos uma vez o ponto 15?

**I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 28 de Junho de 1948.**

I

**3702** — Calcular o integral duplo $\iint_A x\,dx\,dy$, em relação à área $A$ limitada pela curva $3x^2+2x-y+1=0$ pelo eixo dos $YY$, e pela tangente à curva no ponto de curvatura máxima.

II

**3703** — Estudar os pontos múltiplos da curva $f(x,y)=x^2/_3+y^2/_3-a^2/_3=0$.

III

**3704** — Fez-se uma tiragem de dados, tendo-se obtido 5 pontos. Qual é a probabilidade de que a jogada se tenha feito com 4 dados?

**I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 24 de Junho de 1949.**

I

**3705** — Calcular o integral duplo

$$I=\iint_D \frac{dx\,dy}{(a^2+x^2)(b^2+y^2)}.$$

$D$ é o rectângulo definido por $x=0$ $x=c$ $y=0$ $y=d$. Calcular ainda o integral na hipótese de $c$ e $d$ crescerem além de todo o limite.

II

**3706** — Dá-se a equação diferencial $(ax+by)\,dx+ +(a'x+b'y)\,dy=0$ em que $a$, $a'$, $b$, $b'$, são números comensuráveis; em que caso o integral é algébrico?

III

**3707** — Calcular a razão dos volumes gerados pela curva $y=e^x$ $\quad 0\leqslant x\leqslant 1$:
$a)$ em torno de $OX$. $b)$ em torno de $OY$.

**I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 17 de Junho de 1950.**

I

**3708** — Calcular o integral $\displaystyle\iint_A \frac{1}{xy}\,dx\,dy$, sendo $A$ a área limitada pelas circunferências

$$\begin{cases} x^2+y^2=2x \\ x^2+y^2=4x \\ x^2+y^2=2y \\ x^2+y^2=4y. \end{cases}$$

II

**3709** — Determine para a curva $x=\operatorname{sen} t$ $y=\cos t$ $z=\operatorname{tg} t$ o triedro intrinseco ou de Frenet referente ao ponto de parâmetro $t=\frac{\pi}{4}$.

III

**3710** — Determine um factor integrante de um dos tipos $\mu(x)$, $\mu(y)$, $\mu(x+y)$, $\mu(xy)$ e integre e equação $(x^2-1)\,y'-xy=x^2$. Não poderia resolver esta equação por outros métodos? No caso afirmativo resolva por um outro método.

**I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 28 de Junho de 1950.**

I

**3711** — Calcular o integral triplo

$$\iiint_V \frac{dx\,dy\,dz}{(a^2+x^2+y^2+z^2)^2} \quad \text{sendo } V \text{ o 1.º octantante.}$$

II

**3712** — Achar os volumes gerados pela rotação da elipse $x=a\cos\theta$ $\quad y=b\operatorname{sen}\theta$ em torno de:
$a)$ $OX$. $b)$ $OY$.

III

**3713** — Determinar as equações das curvas cujo comprimento da tangente é: $a)$ Constante $b)$ igual à abscissa $c)$ igual ao dobro da ordenada.

**I. S. C. E. F. — Cálculo — Exame final — 11 de Outubro de 1950.**

I

**3714** — As duas superficiais cilindricas $2x^3= =3a^2y$ e $az=x^2$ passam ambas pela origem. Achar o comprimento do arco da sua intersecção, compreendido entre os pontos $O(0,0,0)$ e $P(x,y,z)$.

II

**3715** — Dada a variável casual

$$X\begin{cases} 1\,,2\,,3\,,4\,,5 \quad (\text{valores de } X) \\ \frac{2}{5},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{1}{10},\frac{3}{10} \quad (\text{valores de } P), \end{cases}$$

calcular a probabilidade de que o desvio absoluto seja de módulo igual ou inferior a 2.

III

**3716** — Averiguar a existência de máximos ou mínimos para a função $f(u)=\displaystyle\int_0^{u^2} \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{u^2}\,dx$.

**I. S. C. E. F. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 11 de Junho de 1951.**

I

**3717** — $a)$ Determinar as faces e as arestas do triedro de Frenet referente à curva $x=\log t$ $\quad y=t^2$ $z=t^3$ no ponto de parâmetro $t=1$. $b)$ Calcule também as curvaturas de flexão e torsão, e as coordenadas de centro do curvatura.

II

**3718** — Achar o valor médio da função $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ nos domínios: *a*) Superfície do sólido $\Sigma$. *b*) Volume de sólido $\Sigma$. O sólido $\Sigma$ é formado pela região limitada pelas superfícies $z^2 = x^2 + y^2$ e $(z-1)^2 + x^2 + y^2 = 1$ (ramo positivo).

III

**3719** — Sendo $P$ e $Q$ duas funções de $x$ e de $y$, achar a condição para que a diferencial $P\,dx + Q\,dy$ admita um factor integrante função de $u = y^2 - x$.

Mostrar que este factor integrante se pode obter por quadratura, determine-o e integre a equação $P\,dx + Q\,dy = 0$ no caso de ser:

$$P = (2y^2 - 2x - 1)\,e^x + (2y^2 - 3x)\,e^y$$
$$Q = 2y\,e^x + 2x\,(y^2 + y - x)\,e^y .$$

**I. S. C. E. F. — Cálculo — Exame final — 11 de Outubro de 1952.**

I

**3720** — É dada a família de superfícies $a^2x^2 + \lambda^2y^2 + a\,z^2 + 1 = 0$ onde $a$ é um parâmetro arbitrario e $\lambda$ uma constante *determinada*. Será possível dar a $\lambda$ um valor tal que a aresta de reversão da superfície envolvente da família passe pela origem das coordenadas? Verifique que, para qualquer valor de $\lambda$, essa aresta de reversão é sempre uma curva plana.

II

**3721** — 1.º Efectuar a mudança de variáveis $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ em cada uma das seguintes equações:

*a*) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

*b*) $$x\frac{\partial u}{\partial y} - y\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

*c*) $$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

sendo $u = f(x, y)$.

2.º Diga qual é o significado vectorial de cada uma das equações *a*), *b*), *c*).

III

**3722** — Determinar a família de curvas planas para as quais o segmento da tangente intersectada pelos eixos coordenados é constante. Verifique que só interessa a solução singular.

**I. S. C. E. F. — Cálculo — 1.º Exame de Frequência — 7 de Março de 1953.**

I

**Primitivação**

**3723** — Calcule as seguintes primitivas

1) $$\int \frac{\mathrm{sen}\,x\,dx}{\mathrm{sen}\,(x-a)\,\mathrm{sen}\,(x-b)\,\mathrm{sen}\,(x-c)} \qquad a \neq b, c$$ assumindo valores diferentes entre si

2) $$\int \frac{x\,dx}{1+\mathrm{sen}\,x}.$$ R: 1) *Decompondo a fracção vem* $$\frac{\mathrm{sen}\,x}{\mathrm{sen}\,(x-a)\,\mathrm{sen}\,(x-b)\,\mathrm{sen}\,(x-c)} = \frac{A}{\mathrm{sen}\,(x-a)} + \frac{B}{\mathrm{sen}\,(x-b)} + \frac{C}{\mathrm{sen}\,(x-c)}$$ *com* $$A = \frac{\mathrm{sen}\,a}{\mathrm{sen}\,(a-b)\,\mathrm{sen}\,(a-c)} \qquad B = \frac{\mathrm{sen}\,b}{\mathrm{sen}\,(b-a)\,\mathrm{sen}\,(b-c)}$$ e $$C = \frac{\mathrm{sen}\,c}{\mathrm{sen}\,(c-a)\,\mathrm{sen}\,(c-b)};$$ *logo a primitiva será* $$A\log\mathrm{tg}\frac{x-a}{2} + B\log\mathrm{tg}\frac{x-b}{2} + C\log\mathrm{tg}\frac{x-c}{2} + K.$$

2) *Multiplicando ambos os membros da função integranda por* $1-\mathrm{sen}\,x$ *e integrando por partes vem:* $$I = \int x\sec^2 x\,dx - \int x\sec x\,\mathrm{tg}\,x\,dx = x\,\mathrm{tg}\,x + \log\cos x - x\sec x + \log\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + C.$$

II

**Cálculo vectorial**

**3724** — Dão-se os pontos $A(1,2)$, $B(2,1)$, e $C(\alpha,\beta)$. Determinar vectorialmente: a) O lugar geométrico dos baricentros do triângulo $ABC$ quando o ponto $C(\alpha,\beta)$ descreve: 1) a recta $y=2x$ 2) a circunferência de centro na bissectriz $y=x$, tangente à recta $y=2x$, de raio 3, situada no 1.º quadrante. R: *O baricentro do triângulo é o ponto* O *de coordenadas* $X = 1 + \frac{\alpha}{3}$ *e* $Y = 1 + \frac{\beta}{3}$. *Para* 1), $\beta = 2\alpha$ *e* $6X - 3Y = 1$. *Para* 2), *como o ponto* C *deve descrever a circunferência* $(x - 3\sqrt{5})^2 + (y - 6\sqrt{5})^2 = 9$ *vem* $(\alpha - 3\sqrt{5})^2 + (\beta - 6\sqrt{5})^2 = 9$ *donde*

$$\left(X - \frac{1+3\sqrt{5}}{3}\right)^2 + \left(Y - \frac{1+3\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 9,$$

*circunferência do mesmo raio que a inicial e de centro no ponto* $\left(\frac{1+3\sqrt{5}}{3}, \frac{1+3\sqrt{5}}{3}\right)$.

b) O ponto $C$ de modo que $\overrightarrow{BC}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{AB}$ e o triângulo $ABC$ tenha área igual a 2.

R: *Deverá ser* $\overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{BC} = 0$ *ou* $[(\alpha-2)\,I + (\beta-1)\,J] \mid (I-J) = 0 \rightarrow \alpha = 1+\beta$. Para o triângulo ter a área 2

$$|\overrightarrow{AB}|\;|\overrightarrow{BC}| = 4$$

$$\sqrt{2}\,\sqrt{(\alpha-2)^2+(\beta-1)^2} = 4 \rightarrow (\alpha-2)^2+(\beta-1)^2 = 8 .$$

*Resolvendo o sistema* $\begin{cases} \alpha = 1+\beta \\ (\alpha-2)^2+(\beta-1)^2 = 8 \end{cases}$

$$\alpha = 4 \; e \; \beta = 3 \qquad C(4,3)$$
$$\alpha = 0 \quad \beta = -1 \qquad C(0,-1)$$

c) Os vectores $\vec{x}$ tais que $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{x} = \overrightarrow{BC}$, admitindo que a equação é possível e que o angulo de $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{AC}$ é de 60°.

Solução geral do problema e solução particular correspondente a $|\vec{x}| = 3$. R: *Deverá ser* $\alpha = \beta + 1$

$$|\overrightarrow{AC}|\;|\overrightarrow{AB}| \times \cos 60° = \overrightarrow{AB} \mid \overrightarrow{AC}$$

*logo* $\begin{cases} \alpha = \beta + 1 \\ \sqrt{(\alpha-1)^2+(\beta-2)^2}\,\sqrt{2} \times \dfrac{1}{2} = \alpha - 1 - \beta + 2 \end{cases}$

$$\alpha = 2+\sqrt{3} \qquad \beta = 1+\sqrt{3}$$
$$\alpha = 2-\sqrt{3} \qquad \beta = 1-\sqrt{3}$$

$$\vec{x} = \frac{\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|^2} + \lambda\,\overrightarrow{AB}$$

$$\vec{x}_1 = -\sqrt{3}\,K + \lambda(I-J)\,, \quad \vec{x}_2 = +\sqrt{3}\,K + \lambda(I-J)\,.$$

*Para* $|\vec{x}| = 3$ *vem* $\vec{x} = \pm\sqrt{3}\,K$.

**3725** — Determinar vectorialmente a intersecção da superfície de equação: $P = 0 + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, I + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, J + \cos\theta\, K \quad \left(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2},\; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\right)$, com a recta que passa pelo ponto $(2,2,2)$ e é perpendicular ao plano que intersecta os eixos $OX$, $OY$ e $OZ$ respectivamente às distâncias $1,1,1$.

Equação do plano tangente à superfície no ponto de abscissa e ordenada respectivamente iguais a $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$. R: *Da equação* $P = 0 + \operatorname{sen}\theta\cos\varphi\, I + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi\, J + \cos\theta\, K$ *resulta* $x = \operatorname{sen}\theta\cos\varphi$, $y = \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$, $z = \cos\theta$ *ou* $x^2+y^2+z^2 = 1$, *equação duma esfera.*

*O plano que passa pelos pontos* $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ *e* $(0,0,1)$ *tem por equação* $x+y+z = 1$.

*A recta terá por equações*

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-2}{1}$$

*e intersecta a esfera nos pontos*

$$E\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad e \quad F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

*A equação do plano tangente à esfera no ponto*

$$\frac{1}{2},\frac{1}{2},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

*é*

$$\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(z\mp\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 .$$

*Como há 2 pontos de tangência* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *e* $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *obtem-se as equações dos 2 planos normais*

$$x+y+\sqrt{2}\,z-2 = 0$$
$$x+y-\sqrt{2}\,z-2 = 0 .$$

**3726** — Um sistema de vectores tem os seguintes momentos resultantes:

Em relação a

$$A(1,0,0) \qquad \vec{M}_A = \lambda I + J + K$$
$$B(0,1,0) \qquad \vec{M}_B = 2I + \mu J + 2K$$
$$C(0,0,\alpha) \qquad \vec{M}_C = 3I + 3J + \nu K .$$

Sabendo que o vector resultante é $\vec{R} = -I + 2J - K$ determinar $\alpha,\lambda,\mu$ e $\nu$. R: *Como* $M_{0'} \mid (0'-0) = M_0 \mid (0'-0)$ *e* $M_{0'} = M_0 + R \wedge (0'-0)$ *vem:*

$$\begin{cases} (2I+\mu J+2K)\mid(-I+J) = (\lambda I+J+K)\mid(-I+J) \\ (3I+3J+\nu K)\mid(-I+\alpha K) = (\lambda I+J+K)\mid(-I+\alpha K) \\ (3I+3J+\nu K)\mid(-J+\alpha K) = (2I+\mu J+2K)\mid(-J+\alpha K) \\ 2I+\mu J+2K = (\lambda I+J+K)+(-I+2J-K)\wedge(-I+J) \end{cases}$$

*donde* $\begin{cases} \lambda+\mu-3 = 0 \\ \lambda+\alpha\nu-\alpha-3 = 0 \\ \mu+\alpha\nu-2\alpha-3 = 0 \\ \lambda = 1 \\ \mu = 2 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \alpha = 1 \\ \lambda = 1 \\ \mu = 2 \\ \nu = 3 \end{array}$

III

### Integração definida e paramétrica

**3727** — $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^8+x^5+1}{(x^4+2x^2+1)^3}\,dx .$

R: *Como* $x^4+2x^2+1 = (x^2+1)^2$, *utilizando a regra de* Jacobi *decompõe-se a fracção*

$$\frac{x^8+x^5+1}{(x^2+1)^6} = \frac{x-2}{(x^2+1)^6} - \frac{2}{(x^2+1)^5} + \frac{x}{(x^2+1)^4} + \frac{4}{(x^2+1)^3} .$$

*Por integração vem:*

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{6}-2\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^6} - 2\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^5} + 4\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}.$$

*Os integrais calculam-se pela fórmula*

$$I_n = \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}.$$

**3728** — A partir do integral

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + a} \quad \text{calcule} \quad \int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2}.$$

R: $F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+a} = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{a\,e^{-x}+1}\,dx =$

$$= -\frac{1}{a}\Big[\log(a\,e^{-x}+1)\Big]_0^1 = -\frac{1}{a}\log\frac{a\,e^{-1}+1}{a+1}.$$

*Por derivação paramétrica nota-se que:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{(e^x+1)^2} = -F'(1).$$

**3729** — Calcular

$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^4 3\theta \cos^3 6\theta \, d\theta$. R: *Fazendo* $3\theta = \varphi$ *vem*

$$I = \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\varphi \cos^3 2\varphi \, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\varphi\,(-2\operatorname{sen}^2\varphi+1)^3\, d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen}^4\varphi - 4\operatorname{sen}^6\varphi + 12\operatorname{sen}^8\varphi - $$
$$-8\operatorname{sen}^{10}\varphi)\, d\varphi.$$

*Os integrais de tipo* $I_{2n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n}\varphi \, d\varphi$ *calculam-se pela fórmula*

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}.$$

Enunciados e soluções dos n.os 3699 a 3729 de M. S. Madureira.

# PROBLEMAS

Com o n.º 53 terminou o primeiro concurso anual. O Sr. José Machado Gil, da Barquinha, foi o único concorrente que resolveu todos os problemas propostos na Secção Média desde o n.º 51. Tem por isso direito ao prémio que anunciamos: 1 exemplar do vol. **1**, fasc. 1 e 2 da *Álgebra Moderna* por L. Van der Waerden e 1 exemplar do vol. I do *Boletim da S. P. M.*, que lhe enviámos. A Redacção deseja assinalar que se receberam também, da quasi totalidade dos problemas, soluções muito elegantes do Sr. Vinhas Novais.

Com o n.º 54 iniciou-se novo concurso que termina com este número 56. Dos seus resultados daremos oportunamente notícia.

## Problemas propostos ao concurso

### Secção Elementar

**3730** — Mostre que qualquer que seja $x$ é impossível a seguinte dupla desigualdade

$$-2 \leqslant tg\,2x\,tg\,x < 0$$

**3731** — Sejam os pontos $O(0,0)$, $P(1,p)$, $Q(q,0)$ e $R(4,r)$ os vértices consecutivos duma poligonal plana, de tal modo que $\measuredangle OPQ = \measuredangle PQR = 90^\circ$. Se for $p = 2\cos A$, mostre que $r = 2\cos 3A$.

### Secção Média

**3732** — Demonstrar que a representação gráfica da função $y = [x]^2 + (2[x]+1)(x-[x])$, onde $[x]$ representa o maior inteiro contido em $x$, para $x > 0$ é uma linha poligonal inscrita na parábola $y = x^2$. (Darboux).

**3733** — Duas esferas de raios $R$ e $r$ assentes no plano $xy$ são tangentes exteriormente. A de raio $R$ tem o centro na parte positiva do eixo dos $zz$, e a outra tem o centro de coordenadas positivas no plano $yz$. Determine as coordenadas do ponto de contacto.

---

**N. R.** — Os números 3650 a 3655, atribuidos aos problemas desta secção no n.º 55 da revista, devem ser substituidos pelos n.os 3669 a 3674. Pede-se ao leitor para fazer a respectiva correcção, evitando assim enganos em futuras citações.

Por ter saido com incorrecções o enunciado do problema 3671 no mesmo número (que figurou com o n.º 3652) publica-se a seguir o enunciado correcto:

**3671** — Designando por $[x]$ o maior inteiro contido em $x$ demonstrar que sendo $n$ um inteiro positivo e $x$ um número real se tem sempre

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \cdots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$$

## Resolução dos problemas do concurso propostos no n.º 53

**3605** — Apresentaram soluções correctas os Srs. Vinha Novais e Machado Gil, publicando-se a solução do primeiro:

R: *Representando por* x *a base desconhecida* $(x<10)$ *e por* $a, b, c\ (<x)$ *os algarismos do número pedido em ambas as bases, tem-se* $10^2 a + 10 b + c = x^2 c + + x b + a$ *ou* $99 a + (10 - x) b + (1 - x^2) c = 0$.

*Atendendo a que o número se escreve com três algarismos em ambas as bases, será necessariamente* $x>4$, *e teremos então as seguintes hipóteses a considerar:*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1.ª H) | $x=4 \cdots 99a+6b-15c=0$ | com | $a, b, c<4$ |
| 2.ª H) | $x=5 \cdots 99a+5b-24c=0$ | » | $a, b, c<5$ |
| 3.ª H) | $x=6 \cdots 99a+4b-35c=0$ | » | $a, b, c<6$ |
| 4.ª H) | $x=7 \cdots 99a+3b-48c=0$ | » | $a, b, c<7$ |
| 5.ª H) | $x=8 \cdots 99a+2b-63c=0$ | » | $a, b, c<8$ |
| 6.ª H) | $x=9 \cdots 99a+1b-80c=0$ | » | $a, b, c<9$ |

*Procurando quais destas equações admitem soluções inteiras e positivas satisfazendo as respectivas desigualdades, verifica-se que só a 6.ª hipótese admite solução em tais condições, solução única que é* $a=4, b=4$ e $c=5$.

*Então temos* $445_{(10)} = 544_{(9)}$ *como solução única do problema.*

**3606** — Apresentou solução exacta, que se publica, o Sr. Vinhas Novais:

R: *Consideremos a esfera concêntrica com a esfera dada e de raio* $2R$, *lugar geométrico dos centros das esferas de raio* R *tangentes à esfera dada. Seja* $0_1$ *um ponto desta esfera; tracemos, sobre a esfera e com polo em* $0_1$, *uma circunferência cujos pontos distem* $2R$ *do polo; tal circunferência é o lugar geométrico das esferas de raio* R *tangentes à esfera dada e à de centro em* $0_1$ *e raio* R. *Tomemos um ponto* $0_2$ *sobre esta circunferência e tomando-o para polo tracemos uma outra circunferência cujos pontos distem* $2R$ *de* $0_2$; *esta circunferência é o lugar geométrico dos centros das esferas de raio* R *tangentes à esfera dada e à de centro em* $0_2$ *e raio* R; *sejam* $0_3$ *e* $0_4$ *os pontos em que esta circunferência intersecta a circunferência de polo em* $0_1$: *as esferas de raio* R *de centros em* $0_3$ *e* $0_4$ *são tangentes, simultaneamente à esfera dada, à esfera de centro em* $0_1$ *e à de centro em* $0_2$. *Procedamos em relação a* $0_3$ *como procedemos em relação a* $0_1$ *e a* $0_2$ *e assim sucessivamente para cada novo ponto determinado. Para vermos quantos destes pontos podemos determinar vamos considerar um plano tangente à esfera de raio* $2R$ *no outro extremo do diâmetro que passa por* $0_1$ *e, tomando* $0_1$ *para centro de projecção projectemos sobre esse plano as cicunferrências atrás consideradas. Reduzido, assim, o problema ao plano vemos que podemos traçar 12 esferas tangentes à dada nas condições do problema e que, destas, 6 são tangentes simultaneamente a 5 destas últimas.*

**3607** — Apresentaram soluções certas os Srs. Vinhas Novais e Machado Gil, publicando-se a deste último:

R: *A equação* $\cos 2x + \xi \operatorname{sen} x = \eta$ *pode escrever-se* $1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \xi \operatorname{sen} x = \eta$ *e, fazendo* $\operatorname{sen} x = \zeta$

(1) $$2\zeta^2 - \xi\zeta + \eta - 1 = 0$$

*Como* $|\zeta| \leq 1$, *esta equação representa a porção do paraboloide hiperbólico* $2\zeta^2 - \xi\zeta + \eta - 1 = 0$ *entre os planos* $\zeta = 1$ *e* $\zeta = -1$. *Estes planos intersectam o paraboloide segundo as geratrizes de projecções*

(2) $$\xi - \eta - 1 = 0 \quad e \quad \xi + \eta + 1 = 0 .$$

*O plano* $\zeta = p$ *corta o paraboloide segundo uma geratriz de projecção*

(3) $$\eta = p\xi + 1 - 2p^2 .$$

*De (1) vem* $\zeta = \dfrac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 8\eta + 8}}{4}$ *que mostra que os pontos do paraboloide projectam-se na região de* $\xi 0 \eta$ *em que* $\xi^2 - 8\eta + 8 \geq 0$.

*A curva* $\varphi(\xi, \eta) \equiv \xi^2 - 8\eta + 8 = 0$ *é uma parábola de concavidade voltada para os* $\eta\eta$ *positivos e de vértice* $(0, 1)$, *e é a envoluente das rectas (3). Divide o plano* $\xi 0 \eta$ *em duas regiões: a do ponto* $(0, 2)$ *em que* $\varphi(\xi, \eta) < 0$, *e a do ponto* $(0, 0)$ *em que* $\varphi(\xi, \eta) > 0$.

*Na região negativa não se projectam pontos do paraboloide. As rectas (2) encontram a parábola respectivamente nos pontos* $(4, 3)$ *e* $(-4, 3)$.

*Por um ponto* $(\xi, \eta)$ *passa uma recta (3) de coeficiente angular* p *dado por*

$$2p^2 - \xi p + \eta - 1 = 0 .$$

*Quando* $\xi^2 - 8\eta + 8 > 0$ *há dois valores de* p *diferentes. Impondo a condição dos dois valores de* p *satisfazerem a* $|\zeta| < 1$, *terá de ser* 1 *maior do que os dois valores* p *e* $-1$ *inferior a ambos e necessàriamente* $-4 < \xi < 4$. *Também* $-\xi + \eta + 1 > 0$ *e* $\xi + \eta + 1 > 0$.

*A primeira desigualdade é verificada em todos os pontos da região positiva definida pela recta* $-\xi + + \eta + 1 = 0$; *passa-se no sentido de* $\vec{v}(-1, 1)$ *da região negativa do plano para a região positiva. Anàlogamente a segunda desigualdade é verificada na região positiva, determinada por* $\xi + \eta + 1 = 0$ *e dada por* $\vec{u}(1, 1)$.

*Por cada ponto da região limitada pelas rectas* $\xi + + \eta + 1 = 0$ *e* $-\xi + \eta + 1 = 0$ *e a parábola* $\xi^2 - - 8\eta + 8 = 0$, *compreendendo as rectas e excluindo a parábola, passam duas rectas (3) com coeficiente angular* $|p| < 1$. *Nas regiões do plano comum à região negativa de* $-\xi + \eta + 1 = 0$ *e à positiva de* $\xi + \eta + 1 = 0$ *e comum à região negativa de* $\xi + \eta + 1 = 0$ *e a po-*

*sitiva de* $-\xi+\eta+1=0$ *existe um só valor de* p *para cada ponto, com* $|p|<1$. *Como quem diz uma só tangente à parábola.*

*Em resumo:*

*Quando* $(\xi,\eta)$ *é um ponto da região do plano* $\xi O \eta$, *limitada pelos segmentos de recta* $(4,3)\,(0,-1)$ *e* $(-4,3)\,(0,-1)$ *e o arco da parábola* $\xi^2-8\eta+8=0$ *entre os pontos* $(4,3)$ *e* $(-4,3)$, *com inclusão dos segmentos de recta e exclusão do arco da parábola, a equação proposta tem dois sistemas de soluções dadas por* $\operatorname{sen} x=\zeta$ *e* $\operatorname{sen} x=\zeta'$ *ou* $x=k\pi+(-1)^k \operatorname{Arc\,sen}\zeta$ *e* $x=k\pi+(-1)^k \operatorname{Arc\,sen}\zeta'$.

*Quando* $(\xi,\eta)$ *é ponto do ângulo* $(4,3)\,\widehat{(0,-1)}\,(4,-5)$, *ou do ângulo* $(-4,3)\,\widehat{(0,-1)}\,(-4,-5)$, *com exclusão dos segmentos* $(4,3)\,(0,-1)$ *e* $(-4,3)\,(0,-1)$, *ou do arco da parábola* $\xi^2-8\eta+8=0$ *entre os pontos* $(4,3)$ *e* $(-4,3)$, *a equação proposta admite só o sistema de soluções dado por* $\operatorname{sen} x=\zeta''$ *ou* $x=k\pi+(-1)^k \operatorname{Arc\,sen}\zeta''$.

*Quando* $(\xi,\eta)$ *é qualquer outro ponto, a equação proposta não tem soluções.*

**3608** — Foram recebidas soluções correctas dos Srs. Vinhas Novais e Machado Gil, publicando-se a do primeiro:

R: *Seja* $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)$; *pelas condições do problema deve verificar-se a identidade*

$$ax^6+bx^4+cx^2+d=-ka^2x^6+k(b^2-2ac)x^4-\\ -k(c^2-2bd)x^2+kd^2$$

*identidade que implica a igualdade dos coeficientes dos termos do mesmo grau:*

$$a=-ka^2\,;\ b=kb^2-2kac\,;\ c=-kc^2+2kbd\,;\ d=kd^2.$$

*A primeira equação, atendendo a que a* $\neq 0$, *conduz à solução única* $a=-1/k$, *e a última às duas soluções* $d=0$ *e* $d=1/k$; *para* $a=-1/k$ *e* $d=0$ *vem, da terceira equação,* $c=0$ *e* $c=-1/k$; *para* $c=0$ *vem, da segunda equação,* $b=0$ *e* $b=1/k$; *para* $c=-1/k$, *vem* $b=2/k$ *e* $b=-1/k$. *Temos, pois, as seguintes soluções para o sistema:*

| *1.ª Sol.* | *2.ª Sol.* | *3.ª Sol.* | *4.ª Sol.* |
|---|---|---|---|
| $a=-1/k$ | $a=-1/k$ | $a=-1/k$ | $a=-1/k$ |
| $b=0$ | $b=1/k$ | $b=2/k$ | $b=-1/k$ |
| $c=0$ | $c=0$ | $c=-1/k$ | $c=-1/k$ |
| $d=0$ | $d=0$ | $d=0$ | $d=0$ |

*Para* $a=-1/k$ *e* $d=1/k$, *a 2.ª e 3.ª equações dão*

$$b=kb^2+2c \quad e \quad c=-kc^2+2b$$

*e eliminando* b *vem*

$$k^3c^4+2k^2c^3-kc^2+6c=0$$

*equação que admite a raiz* $c=0$ *a que corresponde* $b=0$. *Dividindo por* c *esta equação, vem a equação*

$$k^3c^3+2k^2c^2+6-kc=0$$

*que admite a solução* $c=-3/k$ *a que corresponde* $b=3/k$. *Dividindo agora esta última equação por* $c+3/k$ *obtem-se a equação* $k^2c^2-kc+2=0$, *que não admite soluções reais. Temos assim mais as duas últimas soluções reais do sistema primitivo:*

| *5.ª Sol.* | *6.ª Sol.* |
|---|---|
| $a=-1/k$ | $a=-1/k$ |
| $b=0$ | $b=3/k$ |
| $c=0$ | $c=-3/k$ |
| $d=1/k$ | $d=1/k$ |

*Então os polinómios que satisfazem as condições impostas são*

$$\begin{aligned}
f_1(x)&=-1/k\,x^3\\
f_2(x)&=-1/k\,x^3+1/k\,x^2\\
f_3(x)&=-1/k\,x^3+2/k\,x^2-1/k\,x\\
f_4(x)&=-1/k\,x^3-1/k\,x^2-1/k\,x\\
f_5(x)&=-1/k\,x^3+1/k\\
f_6(x)&=-1/k\,x^3+3/k\,x^2-3/k\,x+1/k.
\end{aligned}$$

**Nota** — Dos n.ºs 3609 e 3610, não se receberam na Redacção soluções. As soluções destes últimos bem como as dos problemas do n.º 54 da G. M., serão publicadas oportunamente.

# BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

**101** — PÉRÈS, JOSEPH — **Mécanique Générale** — Masson et C.ie, Paris, 1953.

A obra que apresentamos ao público português destina-se dum modo geral aos estudantes das faculdades de ciências, aos engenheiros, aos físicos, etc., em suma, a todo o estudioso que pretenda ficar ao corrente dos métodos da Mecânica Analítica.

O conteúdo do livro corresponde ao programa dos cursos de Mecânica Racional das faculdades de ciências francezas e é apresentado por uma forma interessante pela sua originalidade. Com efeito, a iniciação á Mecânica é feita, em França, num curso preparatório prè-universitário, destinando-se o presente livro a «um ensino de base que faça a transição entre os estudos preparatórios e os mais especializados».

É o alto nível científico das escolas superiores francezas — dirijo-me aos estudantes portugueses — que permite ao Autor, na apresentação do seu livro, tomar, com as palavras anteriores, um papel tão modesto. Realmente, para os alunos das nossas universidades, a Mecânica Geral acabada de editar pela casa Masson de Paris, constitui um precioso elemento de estudo, ultrapassando largamente nas matérias expostas todo e qualquer dos cursos de Mecânica Racional das nossas universidades.

Com efeito, o Autor aborda directamente a Mecânica pròpriamente dita, encarando sucessivamente (Cap.I-III) os dois métodos: o método elementar, baseado na aplicação do princípio que, segundo a denominação introduzida por Henri Béghin, constitui a lei fundamental da Mecânica, e o método dos trabalhos virtuais. Tanto num caso como noutro, trata imediatamente da aplicação à Mecânica dos sólidos perfeitos, que constitui o assunto principal do volume.

A discussão feita no Capítulo II mostra que de facto, no caso das ligações múltiplas por contacto, a Mecânica dos sólidos perfeitos só admite uma pequena extensão fora dos dois casos limites do atricto desprezável e do contacto com rugosidade perfeita.

Por outro lado, na aplicação do método dos trabalhos virtuais aos sólidos, o Autor retomou um ponto de vista que desenvolvera numa Memória já antiga («Journal de Mathématiques», série 9, t. VIII, 1928, p. 337). Para estabelecer que a condição dos trabalhos virtuais é suficiente para o equilíbrio, procura em geral demonstrar-se a impossibilidade de um movimento. Mas uma tal demonstração não pode ser inteiramente satisfatória, visto que pode acontecer, em casos que na realidade são muito particulares, que as condições iniciais dadas permitam a escolha entre o equilíbrio e um ou vários movimentos igualmente possíveis. A demonstração em questão perde de resto todo o significado no caso da dinâmica. Pelo contrário, encontramo-nos num terreno sólido se encararmos a eliminação das forças de ligação. A única dificuldade está em saber se os deslocamentos virtuais compatíveis, que eliminam as forças de ligação, esgotam realmente todas as condições de eliminação, assegurando assim que o cálculo dessas forças (que, em geral, ficam muito indeterminadas) não conduzirá a impossibilidades. Verifica-se fàcilmente que a resposta é afirmativa, se pusermos de lado certos tipos singulares de ligações, ao constatar-se que são «a priori» inadmissíveis na Mecânica do sólido.

O Capítulo IV é consagrado ao estudo da equação fundamental $(dq/dt)^2 = F(q)$. Nele são dadas algumas indicações sobre os desenvolvimentos trigonométricos que intervêm no caso de um integral periódico. No mesmo capítulo, introduzem-se as funções elípticas $sn$, $cn$, $dn$, não se indo além de algumas propriedades muito imediatas que se referem apenas ao campo real, mas que são suficientes para muitas aplicações na Mecânica.

Depois de dois Capítulos de aplicações tratadas pela via elementar dos teoremas gerais, são expostos os elementos da Mecânica Analítica: equações de Lagrange e de Appell, princípios variacionais da Mecânica e equações canónicas, pequenos movimentos. Finalmente, são encarados o estudo analítico das ligações unilaterais e o dos fenómenos de choque, incluindo o caso de um contacto com atrito.

A Mecânica dos corpos deformáveis é abordada no último Capítulo, que constitui uma introdução a esse estudo. Neste domínio, do mesmo modo que na Mecânica dos sólidos, as teorias põem em jogo elementos heterogéneos: por um lado, os princípios, que são bem fundamentados enquanto permanecemos no campo da Física macroscópica; e, por outro lado, leis de origem empírica, por vezes bastante grosseiras, que não tomam em consideração a complexidade dos corpos ou a interdependência de fenómenos classificados em domínios diferentes da nossa Ciência. O Autor desenvolveu particularmente a Estática dos corpos lineares e algumas questões importantes da dinâmica dos fios. Por outro lado insiste na maneira de calcular o trabalho dos esforços interiores de um corpo contínuo: é a equivalência necessária dos dois métodos, o elementar e o dos trabalhos virtuais, que intervém essencialmente na determinação do cálculo em questão.

A Mecânica Geral de Pérès é, em nossa opinião, pelo conteúdo, pela exposição, em suma, por todas as boas qualidades inerentes a uma obra de tal Autor, altamente recomendável aos estudiosos portugueses de Mecânica Racional.

É com vivo interesse que esperamos a publicação do Vol. II em preparação — Cinemática e Mecanismos.

J. G. Teixeira

# CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTIÇOS 1954

## 2.A COMUNICAÇÃO

*O Comité Organizador distribuiu uma 2.ª comunicação informando de certos pormenores relativos ao Congresso.*

*A reunião terá lugar em Amsterdam de 2 a 9 (inclusivé) de Setembro de 1954 e as sessões de trabalho realizar-se-ão no edifício do Real Instituto Tropical.*

*Haverá duas categorias de membros: os regulares, que pagarão 50 florins e os associados, que pagarão 20 florins. Estas quantias deverão ser enviadas para:* International Congress of Mathematicians 1954 — Amsterdamsche Bank N. V., Filial Leiden, Holanda, *de preferência até 15 de Fevereiro.*

*Haverá conferências de uma hora e de trinta minutos tendo já aceitado o encargo variados matemáticos, e conferências de 15 minutos feitas por membros regulares que o solicitarem ao Comité Organizador. É essencial que este esteja de posse do título e dos resumos destas comunicações, não devendo exceder 400 palavras, até 15 de Fevereiro.*

*Os «Proceedings» do Congresso serão distribuidos gratuitamente aos inscritos como membros regulares. Todos os outros interessados, que o declararem antes de 15 de Março de 1954, poderão adquiri-los a preço reduzido, que de momento não é possível fixar.*

*O Comité organizador planeou várias excursões e diversões e reservará um certo número de acomodações para os congressistas estrangeiros que é aconselhavel pedir com antecedência.*

*Todas as informações deverão ser solicitadas a:*

THE SECRETARIAT OF THE INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS 1954
2 e BOERHAAVESTRAAT 49 — AMSTERDAM

# GAZETA DE MATEMÁTICA

**Três números publicados em 1953**

**Número avulso: 17 escudos e 50 centavos**

**Assinatura relativa a 1954 (3 números) 40 escudos**

### PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

### 2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºˢ 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºˢ 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

### CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1954 quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

### ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

### NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática.* Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

| | |
|---|---|
| N.ºˢ 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto) | 40$00 |
| N.ºˢ 12 e 15 a 49, cada número | 12$50 |
| N.º 50 | 60$00 |
| N.ºˢ 51 a 56, cada número | 17$50 |

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

---

**ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»**

**concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais**

**PREÇO ESC. 17$50**

---

**DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:**
**EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO**

Administração da *Gazeta de Matemática* — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Lisboa-N — Telef. 71943