GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIV N.º 55 AGOSTO 1953

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Tel. 55282 — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — LISBOA-N. — Telef. 55 282

ANO XIV — N.º 55 **GAZETA DE MATEMÁTICA** AGOSTO — 1953

EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — Telef. 55282 — LISBOA-N

O verdadeiro sentido do princípio da invariância da física moderna

por **Ruy Luís Gomes**

É corrente apresentar a condição da invariância a que satisfazem todas as equações da Teoria da Relatividade Geral como alguma coisa de característico dessa teoria; alguma coisa que a distingue verdadeiramente da Física Clássica ou, num plano mais concreto, da Mecânica de Galileu-Newton. E na base dessas considerações está sempre um raciocínio deste tipo.

A) As equações fundamentais da Mecânica de Galileu-Newton

$$(1) \qquad m\,\frac{d^2 x^i}{dt^2} = F^i, \quad i = 1, 2, 3,$$

só mantém esta forma quando as coordenadas x^i, t variam segundo o grupo de Galileu

$$G \qquad \begin{cases} x^i = \sum \alpha_{ik}\, x'^k + \alpha_i\, t' + \beta_i \\ t = t' + \alpha_0 \end{cases}$$

no qual $\| \alpha_{ik} \|$ é uma matriz ortogonal, transformando-se ao mesmo tempo F^i de acordo com

$$F^i = \sum \alpha_{ik}\, F'^k$$

e ficando na mesma o coeficiente m, massa de inércia.

O grupo G corresponde, como se sabe, à passagem de um determinado sistema de coordenadas, onde são aquelas equações que traduzem o essencial das leis do movimento de um ponto material sob a acção de uma força, F^i, para qualquer outro, animado de uma translacção rectilínea e uniforme com relação ao primitivo.

Resulta daqui, isto é, da invariância das equações (1) em G, que só são *equivalentes* [1] *aqueles sistemas de coordenadas,* x^i, t e x'^k, t' *relacionados entre si segundo* G.

B) Pelo contrário, as equações da Relatividade Geral, nomeadamente as que traduzem as leis do movimento de uma partícula de massa infinitamente pequena (test particle) sob a acção de um campo de gravitação, quere dizer, as equações das geodésicas

$$(2) \qquad \frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\,\frac{dx^\alpha}{ds}\,\frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

(de caracter-tempo [2]) da métrica fundamental

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu, \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4,$$

são invariantes para qualquer transformação do grupo

$$T \qquad x^\mu = \varphi_\mu\,(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)$$

no qual φ_μ são quatro funções independentes, contínuas, com derivadas parciais (até à 2.ª ordem) das novas coordenadas x'^j.

E como consequência da invariância das equações (2) em T, tem-se: *equivalência de todos os sistemas de*

(1) Subentende-se para a tradução matemática das leis fundamentais da Mecânica Clássica.

(2) Tais que $\sum g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu < 0$, pois a velocidade de uma partícula material é inferior à da luz. Por outro lado, os $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ que ali coincidem com os símbolos de Christoffel de 2.ª espécie, $\left\{ {\alpha\beta \atop \mu} \right\}$, da forma quadrática ds^2, transformam-se segundo

$$\Gamma'^{\nu}_{\rho\delta} = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\rho}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\delta}\,\Gamma^\mu_{\beta\alpha} + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\,\frac{\partial^2 x^\mu}{\partial x'^\rho\,\partial x'^\delta}.$$

quatro coordenadas obtidos uns dos outros por qualquer transformação de T.

Numa palavra — na Mecânica de GALILEU-NEWTON, invariância restricta, isto é, segundo o grupo restricto G; na Relatividade Geral, invariância ampla, isto é, segundo o grupo T que contém G como sub-grupo muito especial.

E para muitos Físicos, por exemplo, e ainda recentemente para SCHRÖDINGER (1), este princípio de invariância geral «incarna a ideia da Relatividade Geral».

No entanto, o mesmo autor, logo a seguir, acrescenta: «I will not commit myself to calling it unshakable. One has occasionally tried to generalize it, and it is difficult to say whether quantum physics might not at some time seriously dictate its generalization. However, the principle as it stands appears to be simpler than any generalization we might contemplate and there seems to be no reason to depart from it at the outset.»

Ora, do nosso ponto de vista, as perspectivas de generalização do princípio em causa, que ressaltam tão claramente daquelas palavras, diminuem o valor da afirmação primeira — de que a invariância «incarna a ideia da Relatividade Geral». E só nos parece possível esclarecer o verdadeiro sentido do *princípio de invariância*, retomando o problema *ab initio*, por confronto das duas teorias — clássica e relativista — o que levará necessàriamente à conclusão oposta de que um tal princípio não contém nada de característico da Relatividade Geral. Ao mesmo tempo, a possibilidade de generalizações, sustentada por SCHRÖDINGER, não oferecerá nenhuma dificuldade de princípio.

Voltemos, então, às equações fundamentais (1) e (2); e para que as situações sejam de facto comparáveis, suponhamos que F^i são as componentes da força exercida sobre uma partícula de massa da inércia m num campo de gravitação.

Tem-se, então,

$$F^i = - m_g \; grad \; \Phi$$

designando por Φ o potencial (escalar) de gravitação e por m_g a massa ou carga da gravitação da partícula. E as equações (1) tomam a forma

$$(1') \qquad \frac{d^2 x^i}{dt^2} = - K \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

sendo $K = \dfrac{m_g}{m}$ — cociente da massa de gravitação pela massa da inércia — independente da natureza e massa m da partícula, quere dizer, uma *constante universal*.

(1) Space — Time Structure, ed. Cambridge University Press, 1950, p. 2.

É este sistema que devemos comparar com (2); e a conclusão a que chegámos acima formula-se assim:

«(1') é invariante no grupo G, (2) no grupo T.»

Na parte comum, que é precisamente G, os dois sistemas de equações e portanto as duas teorias — clássica e relativista — comportam-se da mesma maneira, *são ambas invariantes*.

Este resultado pode parecer em flagrante contradição com uma das mais conhecidas propriedades da Teoria da Relatividade, logo na sua forma restricta.

Na verdade, todos sabem que a Relatividade Restrita admite como grupo da invariância não G mas sim L — grupo de LORENTZ —

$$L \qquad \begin{cases} x^i = \sum \alpha_{ik} x'^k + \alpha_{io} t' + \alpha_i \\ t = \sum \alpha_{ok} x'^k + \alpha_{oo} t' + \alpha_o , \end{cases}$$

cujos coeficientes estão ligados pelas equações

$$\sum \alpha_{ik} \alpha_{jk} = \delta_{ij} + \frac{\alpha_{io} \alpha_{jo}}{c^2}$$

$$\sum \alpha_{ik} \alpha_{ok} + \frac{\alpha_{io} \alpha_{oo}}{c^2} = 0, \qquad i, j, k, = 1, 2, 3$$

$$- c^2 \sum \alpha_{ok}^2 + \alpha_{oo}^2 = 1$$

Como desfazer, então, o aparente absurdo? Muito simplesmente — não esquecendo a diferença que há entre coordenadas matemáticas, puramente convencionais e coordenadas com autêntico significado físico.

Assim, se nos colocarmos na Mecânica Clássica e admitirmos que x^i, t são respectivamente distâncias euclideanas tais como as medíamos habitualmente com réguas e tempo medido por um relógio (1), então, só conservam esse mesmo significado físico as coordenadas x'^k, t' ligadas às primeiras por uma transformação do grupo G.

Pelo contrário, se nos colocarmos em Relatividade Restrita, só mantêm um tal significado físico, coordenadas x'^k, t' deduzidas de x^i, t por uma transformação de L (e não de G).

Mas se fizermos uma transformação G, isso, mesmo em Relatividade, continua a exprimir a passagem de um sistema de coordenadas para outro, ambos matemàticamente admissíveis, apenas haverá que salientar: dos dois sistemas só um, e nunca os dois, podem ter aquele mesmo significado físico natural (em termos de réguas e relógios).

Por outras palavras: ambas as teorias são invariantes segundo G; mas só numa, na Mecânica Clássica, é que G transforma entre si coordenadas com significado físico.

(1) Esse relógio é fundamentalmente o movimento da rotação da Terra.

Não há, portanto, absurdo algum. Além disso a resolução deste pseudo-absurdo é, só por si, uma indicação de que o princípio da invariância não contém em si mesmo nada de característico da Relatividade Geral, pois que, reduzidas as duas teorias a um denominador comum, que é G, são ambas invariantes. Mas podemos até alargar esse denominador comum, isto é, passar de G para um grupo mais amplo, inclusivé T, que nada de essencial se modificará.

De resto, nos cursos da Mecânica é corrente dar às equações fundamentais da Mecânica a forma chamada de LAGRANGE, de 2.ª espécie [1]

$$\frac{d^2 x'^i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix} \right\}' \frac{dx'^\alpha}{ds} \frac{dx'^k}{ds} = Q^i$$

na qual $\left\{ \begin{matrix} j\,k \\ i \end{matrix} \right\}'$ são os símbolos de CRISTOFFEL da 2.ª espécie da métrica

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum dx'^2 = \sum g_{ik}\, dx'^i\, dx'^k,$$

forma essa invariante no grupo

$$T_1 \qquad \left\{ \begin{aligned} x^i &= \varphi_i (x'^1, x'^2, x'^3) \\ t &= t' + a \end{aligned} \right.$$

em que φ_i são três funções quaisquer, independentes contínuas e deriváveis; e os Q^i são os transformados por contravariância de $-K \dfrac{\partial \Phi}{\partial x^i}$.

Ora, ambas as teorias são invariantes no grupo $T_1 \neq G$ de sentido matemático equivalente a G ou T mas que não conserva o significado físico das coordenadas nem numa teoria nem na outra.

E nenhuma dificuldade pode haver em escrever as equações (1) numa forma invariante com relação ao próprio grupo T mas o que acontecerá é que esse grupo mais amplo T nada acrescentará, do ponto de vista físico, nem numa teoria nem na outra, pois nesse domínio físico os grupos característicos são respectivamente G e L e não T.

Que fica, então, do princípio da invariância? A equivalência dos diferentes sistemas de quatro coordenadas, ligadas entre si pelo grupo T, para a descrição matemática das mesmas leis, sejam elas da Mecânica Clássica ou da Relatividade Geral.

[1] Como é salientado no artigo de FOCK adiante citado.

Por outras palavras: como

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = \sum \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \left[\frac{d^2 x'^\nu}{ds^2} + \right.$$
$$\left. + \Gamma'^\nu_{\rho\delta} \frac{dx'^\rho}{ds} \frac{dx'^\delta}{ds} \right],$$

se tivermos no sistema x^μ

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \tag{3}$$

será

$$\frac{d^2 x'^\nu}{ds^2} + \Gamma'^\nu_{\rho\delta} \frac{dx'^\rho}{ds} \frac{dx'^\delta}{ds} = 0, \tag{3'}$$

que tem a mesma forma geral (3), noutro qualquer sistema x'^ν, relacionado com x^μ por meio de T, visto ser $\neq 0$ o jacobiano dos x^μ em ordem aos x'^ν.

A invariância é, pois, e apenas, uma maneira sugestiva, clara, de patentear que as equações que traduzem as mesmas leis, nos diferentes sistemas de coordenadas ligadas por T, são todas *equivalentes entre si*.

Podemos dizer isto mesmo assim: *a invariância e uma condição suficiente de equivalência. Mas não constitue, de modo nenhum, uma condição necessária.*

Portanto, é possível, generalizar o princípio de invariância, como transparece daquela citação de SCHRÖDINGER; mas há de respeitar-se sempre, sob risco de absurdo, o princípio mais geral de equivalência das equações que descrevem a mesma lei em mais do que um sistema de coordenadas.

É neste mesmo sentido, perfeitamente delimitado, que se deve interpretar esta passagem de V. A. FOCK: «Toute théorie physique — à moins d'être visiblement absurde — doit être covariante» [1].

Fica, assim, parece-nos, esclarecido nos termos precisos o verdadeiro valor do princípio da invariância que nada traduz de peculiar à Relatividade Geral. E ao mesmo tempo chama-se a atenção dos estudiosos da Física Moderna para a diferença, essa, sim, essencial, entre coordenadas ligadas entre si apenas por condições de correspondência biunívoca e contínua — coordenadas matemáticas — e coordenadas que, *além disso*, têm significação física. E este ponto é da maior importância para compreender a própria Relatividade Geral.

[1] Em — *Le système de Ptolomée et le système de Copernic à la lumière de la Théorie Général de la Relativité* (Questions Scientifiques, Physique, tome., 1 1952, pp. 151).

Covariância, no sentido aqui utilizado, coincide, no que respeita às equações em cada sistema de coordenadas, com *invariância de forma*.

Algebras de Boole e análise de circuitos

por M. S. Leavitt

Devemos a publicação desta tradução à amabilidade, que agradecemos, do autor e do jornal «Blue Print», revista publicada pelos estudantes do «College of Engineering and Architecture» da Universidade de Nebraska, onde o artigo foi originalmente publicado no volume LII, N.º 5 de Outubro de 1952, pag. 13, 14 e 28.

A Redacção

1. Introdução. Num inquérito entre engenheiros torna-se imediatamente aparente a importância fundamental da matemática, quer como instrumento, quer como uma fonte de ideias. A indústria americana é tradicionalmente progressiva e dinâmica e o engenheiro, quer procure pequenos mas importantes melhoramentos em planos e técnicas, quer pertença ao grupo, ràpidamente crescente, dos homens de investigação e desenvolvimento, encontra na matemática um instrumento indispensável.

O tipo de matemática que o engenheiro usa depende, evidentemente, do problema particular que deseja atacar. O matemático puro está interessado, em particular, naqueles ramos da matemática que estão em processo de desenvolvimento, enquanto que o engenheiro, cujo interesse se foca na resolução de um problema, usará aquele tipo de matemática de que no momento necessite. Se a álgebra, a trigonometria ou mesmo a simples aritmética lhe chegam, não precisa de se desculpar por apenas fazer uso delas. Estas técnicas simples são, de facto, o suficiente para a maioria das aplicações industriais. Ramos «mais avançados» da matemática tais como a teoria das equações diferenciais lineares, etc. vão-se tornando cada vez mais comuns. As chamadas matemáticas superiores estão ràpidamente perdendo esta categoria. O Dr. H. M. Evjen, físico investigador da secção geofísica da «Shell Oil Company» diz:

«Evidentemente que matemáticas superiores significam simplesmente aqueles ramos da ciência que não encontraram ainda um vasto campo de aplicação e portanto, digamos, ainda não emergiram da obscuridade. É pois um termo temporário e subjectivo».

É assim que encontramos (*) a teoria das funções duma variável complexa ao tratarmos da teoria do potencial e transmissões ondulatórias, da propagação de correntes em fios, de campos gravitacionais e electromagnéticos, da pesquisa de óleo, e nos projectos de filtros e equalisadores para sistema de comunicações. Também a teoria das séries de Fourier e outras séries ortogonais é usada em problemas sobre a propagação do calor, na passagem de correntes em linhas de transmissão, deformação e vibração de gases, líquidos e sólidos elásticos, etc. A álgebra de matrizes é aplicada no estudo das máquinas eléctricas rotativas, no estudo da vibração das asas de aviões e nos problemas de equivalência na teoria do circuito. Mesmo a teoria dos números é usada no projecto de redução de engrenagens e no desenvolvimento dum método sistemático para entrelaçamento de cabos telefónicos. Esta lista, que poderia extender-se quase indefinidamente, é de certo suficiente para ilustrar a capacidade de aplicação da matemática às modernas investigações e desenvolvimentos industriais. Tem mesmo acontecido que novas noções de matemática, já esquecidas por matemáticos puros, foram desenvolvidas em conecção com problemas de engenharia.

O ramo das matemáticas mais ìntimamente ligado com as aplicações industriais é o das «matemáticas aplicadas». O próprio matemático puro está profundamente interessado na descoberta de aplicação duma teoria, embora originalmente ela tenha sido desenvolvida simplesmente pelo seu interesse teórico. Sublinhando a «importância» duma teoria e atraindo trabalhadores para este campo, pode-se estimular consideràvelmente o seu desenvolvimento e isso tem sucedido várias vezes. De facto, o matemático tem sido muitas vezes surpreendido ao notar que uma teoria que ele considerava como excepcionalmente abstracta foi apropriada e usada por algum jóvem e brilhante engenheiro.

2. Álgebras de Boole. Um caso dessa natureza envolvendo o uso do ramo da álgebra abstracta moderna chamado «álgebras de Boole», é o que vai ser discutido neste artigo. Esta aplicação particular (à simplificação de electro-imans e de mudanças de circuitos) foi sistemàticamente estudada por Claude Shannon (*) ao tempo um investigador assistente do

(*) As aplicações aqui referidas fazem parte duma lista dada no relatório do «National Resources Planning Board», publicado em «Industrial Research» (1940). Uma lista actualisada seria de certo tremendamente ampliada.

(*) «Uma análise simbolica dos electro-imans e mudanças de circuitos», A. I. E. E. Transactions, vol. 57 (1038) pp. 713-723.

M. I. T. (Massachussets Institute of Technology) e agora dos laboratórios da «Bell Telephone».

Esta técnica tem sido extensivamente empregada na análise do contrôle dos circuitos protectores de sistemas eléctricos complexos tais como os que se encontram em ligações telefónicas automáticas, no equipamento industrial de contrôle de motores e efectivamente em muitos dos circuitos utilisados para efectuar automàticamente operações complexas. Em tais casos esta análise ajuda extraordinàriamente a obter um método sistemático de projectos e, mesmo mais, a obter um meio sistemático de simplificar em certos casos um circuito com características especiais no melhor circuito equivalente (no sentido de ter o menor número possível de ligações e pontos de contacto).

Antes de discutirmos a sua aplicação à teoria do circuito será preferível dar uma definição breve de álgebra de Boole e desenvolver alguns teoremas que são usados nas aplicações. Tal como qualquer das muitas outras possìveis álgebras, a álgebra de Boole é um sistema de elementos $(x, y, z, \cdots)$ e certas operações $(+ \text{ e } \cdot)$, obedecendo a um conjunto de postulados preestabelecidos. Estes são os seguintes: [a numeração está de acôrdo com a de Shannom]

as leis comutativas

(1 a) $x+y=y+x$ (1 b) $x \cdot y = y \cdot x$,

as leis associativas

(2 a) $x+(y+x)=(x+y)+z$

(2 b) $x \cdot (y \cdot x) = (x \cdot y) \cdot z$,

a primeira lei distributiva

(3 a) $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

Note-se que até aqui estas regras são precisamente as das álgebra ordinária. O seguinte postulado (a segunda lei distributiva) é contudo diferente:

(3 b) $x + y \cdot z = (x+y) \cdot (x+z)$.

Suponhamos ainda que há no sistema dois elementos especiais, chamados 0 e 1, e obedecendo aos postulados

(4 a) $0+x=x$

(4 b) $1 \cdot x = x$

(5 a) $1+x=1$

(5 b) $0 \cdot x = 0$

É postulado ainda, que para cada x há um único elemento x' tal que:

(6 a) $x+x'=1$

(6 b) $x \cdot x' = 0$

Escrevendo (6 a) e (6 b) em ordem inversa, é claro que

(8) $(x')'=x$,

enquanto que de $0+1=1$ e $0 \cdot 1 = 0$ [(4 a) e (4 b)] se segue

(7 a) $0'=1$

(7 b) $1'=0$

Finalmente, temos os postulados

(14 a) $x+x=x$

(14 b) $x \cdot x = x$

Note-se que nos postulados anteriores para cada lei estabelecida corresponde uma outra obtida pela troca do sinal $+$ com $\cdot$ e 0 com 1. Isto conduz ao princípio de «dualidade» que diz que a cada teorema da álgebra de Boole corresponde um «teorema dual» obtido por meio de tal troca. O trabalho do desenvolvimento da teoria está, assim, reduzido precisamente a metade.

Usando as leis distributivas [(3 a) e (3 b)] verifica-se fàcilmente que

$$(x+y) \cdot (x' \cdot y') = 0 \text{ e } (x+y)+(x' \cdot y') = 1,$$

donde pela definição (6) do elemento x' temos (lei de Morgan)

(9 a) $(x+y)' = x' \cdot y'$

e a sua dual

(9 b) $(x \cdot y)' = x' + y'$.

Antes de continuarmos com outros teoremas, ou com as aplicações à teoria do circuito é, talvez, instrutivo dar a aplicação deste sistema abstracto à chamada álgebra de lógica. Esta aplicação particular, foi de facto, o que conduziu originalmente George Boole (à volta de 1850) a inventar esta álgebra. A ilustração dá, além disso, um sistema análogo ao encontrado na teoria do circuito. Na álgebra de lógica, as variáveis $x, y, z \cdots$ são interpretadas como proposições; isto é, são asserções (verdadeiras ou falsas) a respeito de qualquer coisa. A proposição combinada $x \cdot y$ definir-se-á como a proposição «ambos x e y» enquanto que $x+y$ é interpretada como «ou x ou y». O elemento x' significará a negativa da proposição x. Finalmente, como condição especial requerer-se-á que cada variável tomará unicamente os valores 0 e 1 onde 0 é interpretado como falsidade e 1 como verdade. Um momento de reflexão convencerá que este sistema satisfaz os postulados anteriores. Por exemplo, a proposição $x+y$ (que afirma x ou y) é verdadeira se x é verdadeiro independentemente de que y o seja. [isto é, $1+y=1$, como em (5a)]. Outro exemplo: o enunciado, que afirma uma preposição e a sua negativa, é sempre falso (isto é $x \cdot x' = 0$).

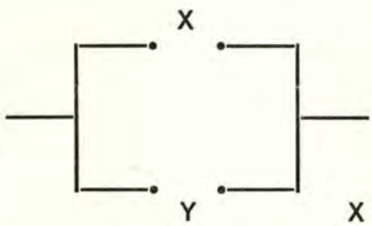
A teoria das álgebras de Boole tem sido aplicada a muitas outras teorias tais como a teoria dos conjuntos, teoria das probalidades, etc.

3. Álgebra de Boole aplicada a análise do circuito.

Os únicos circuitos aqui considerados são aqueles que contém comutadores e interruptores tais que o circuito entre dois quaisquer extremos é ou aberto ou fechado. Portanto, como na álgebra de lógica, cada variável (representando um circuito do sistema) toma um dos dois valores 0 ou 1.

Dois dos circuitos podem ser combinados ligando-os ou em série ou em paralelo. Um circuito obtido pela ligação dos circuitos x e y em série designar-se-á por $x+y$, e a ligação em paralelo de x e y designar-se-á por $x \cdot y$

X + Y

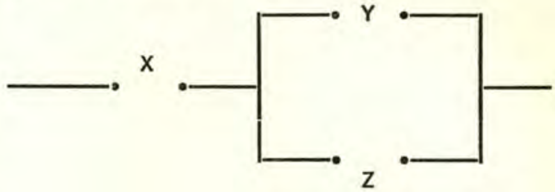


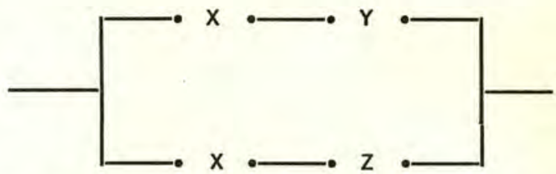
X · Y

Uma pequena reflexão convencer-nos-á que este sistema também satisfaz os postulados de Boole anteriormente enunciados. Como exemplo daremos a interpretação, em termos de circuito, dos postulados que contém 0 e 1. [(4a), (4b), (5a), (5b)].

	Interpretação
$1+x=1$	Um circuito aberto em série com outro circuito é sempre um circuito aberto.
$0 \cdot x = 0$	Um circuito fechado em paralelo com outro circuito é sempre um circuito fechado.
$0+x=x$	Se um circuito fechado está em série com um circuito x, o resultado depende de x [fechado se x é fechado, aberto se x é aberto].
$1 \cdot x = x$	Se um circuito aberto está em paralelo com um circuito x o resultado depende de x.

Das interpretações anteriores, é claro que x' deve ser um circuito que está ligado de modo que quando x é fechado x' é aberto e reciprocamente. Em qualquer sistema complexo pode suceder que vários circuitos estejam ligados de modo a serem abertos ou fechados conforme o circuito x é aberto ou fechado; em tal caso esse circuito será chamado x. Reciprocamente qualquer circuito que seja o inverso de x chamar-se-á x'. Convida-se o leitor a verificar por si próprio os restantes postulados e teoremas dados atrás. Por exemplo vê-se que os dois circuitos





são equivalentes. Portanto $x+y \cdot z = (x+y) \cdot (x+z)$.

Alguns teoremas adicionais são extremamente úteis para obter simplificações. As provas são muitas vezes muito simples; por exemplo

(15 a) $\quad x + x \cdot y = x \cdot 1 + x \cdot y = x \cdot (1+y) = x \cdot 1 = x$.

Donde o seu dual pode ser imediatamente escrito sob a forma

(15 b) $\quad x \cdot (x+y) = x$.

Um último teorema que é de natureza mais geral: Seja $f(x, y, z, \cdots)$ uma função de Boole das variáveis $x, y, z, \cdots$ então

(17 a) $\quad x \cdot f(x, y, z, \cdots) = x \cdot f(1, y, z, \cdots)$.

Isto é, se multiplicarmos x por uma função, o resultado é o mesmo que se obtem se cada vez que x aparece na função ele é substituido por 1 (e evidentemente x' por 0).

Para justificar este teorema note-se, em primeiro lugar, o possível carácter duma função de Boole. Desde que $x \cdot x = x$ e $x \cdot x' = 0$, segue-se que x pode aparecer no máximo uma vez em cada produto. Agora para cada termo com um sinal interior $+$ pode ser usada a lei distributiva (3 a) para obter a soma de dois termos [por exemplo, $x \cdot z \cdot (x+y') = x \cdot z + z \cdot y' \cdot z$]. Por repetições deste processo chega-se eventualmente a uma «étape» tal que

$f(x, y, z, \cdots)$ fica expresso simplesmente como uma soma de termos, cada um dos quais é um produto de algumas ou todas as variáveis $x, y, z, \cdots$ (como ou sem $'$). Por exemplo, seja $f(x, y, z) = y \cdot (x' + (x + y) \cdot z') = y \cdot (x' + x \cdot z' + y \cdot z') = x' \cdot y + x \cdot y \cdot z' + y \cdot z'$. Donde claramente $x \cdot f(x, y, z, \cdots)$ eliminará todos os termos envolvendo x' e assegurará um x colocado em todos os restantes termos. Portanto, para a função no exemplo, anterior $x \cdot f(x, y, z) = x \cdot (x' \cdot y + x \cdot y \cdot z' + y \cdot z') = x \cdot y \cdot z' + x \cdot y \cdot z' = x \cdot y \cdot z'$.

Mas $x \cdot f(1, y, z)$ semelhantemente elimina todos os termos envolvendo x'. Por as duas expressões $x \cdot f(x, y, z, \cdots)$ e $x \cdot f(1, y, z, \cdots)$ são uma mesma como queriamos provar. [No exemplo anterior $f(1, y, z) = 0 \cdot y + 1 \cdot y \cdot z' + y \cdot z' = y \cdot z' + y \cdot z' = y \cdot z'$ e portanto $x \cdot f(1, y, z) = x \cdot y \cdot z'$]. O teorema dual é

(17 b) $\quad x + f(x, y, z, \cdots) = x + f(0, y, z, \cdots)$.

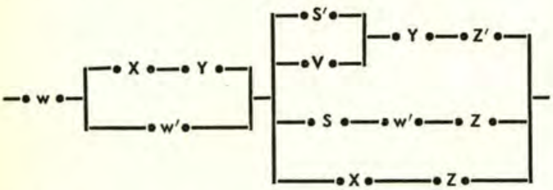
Desde que $x = (x')'$, a função $f(x, y, z, \cdots)$ pode também ser olhada como uma função de $x', y, z, \cdots$ Portanto (17 a) pode ser usada para provar que

(18 a) $\quad x' \cdot f(x, y, z, \cdots) = x' \cdot f(0, y, z, \cdots)$

com a sua dual

(18 b) $\quad x' + f(x, y, z, \cdots) = x' + f(1, y, z, \cdots)$.

Os quatro teoremas anteriores são especialmente úteis na simplificação de circuitos. Como exemplo considere-se o seguinte circuito:



A função representando o circuito pode ser escrita imediatamente como $w + w' \cdot (x + y) + (x + z) \cdot (s + w' + z) \cdot (s' \cdot v + y + z')$.

Usando (17 b) com w como variável especial, [isto é, $w + f(x, y, z, w, \cdots) = w + f(x, y, z, 0, \cdots)$] esta função é igual a

$$w + 0' \cdot (x + y) + (x + z) \cdot (s + 0' + z) \cdot (s' \cdot v + y + z').$$

Mas desde que $0' = 1$ e $1 + s + z = 1$, será igual a

$$w + x + y + (x + z) \cdot (s' \cdot v + y + z').$$

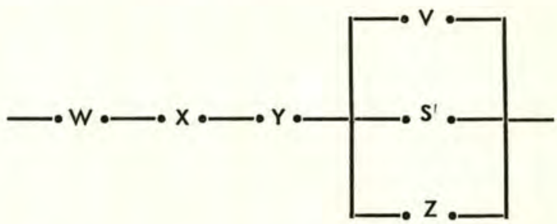
Semelhantemente, usando (17 b), primeiro com x e depois com y temos:

$$w + x + y + z \cdot (s' \cdot v + y + z') = w + x + y + z \cdot (s' \cdot v + z').$$

E pela lei distributiva (3 a)

$$= w + x + y + z \cdot s' \cdot v.$$

Portanto um circuito equivalente muito mais simples:



Muitos outros problemas da teoria do circuito, tais como a simplificação de circuitos com operações de sequência, a construção de circuitos selectivos com características especiais, etc., podem ser tratados por métodos semelhantes. Para uma maior discussão destes problemas, ver o artigo de Shannon atrás citado. Vários investigadores russos têm trabalhado consideràvelmente neste problema.

Tradução de Maria Pilar Ribeiro.

Exemplo de conjunto não mensurável á Lebesgue

Do Prof. Ruy Luiz Gomes recebeu a Redacção uma carta em que chama a atenção para o erro em que pode induzir o título dado ao artigo que nos enviou para o n.º 51 do *G. M.* Tal como se diz nas palavras de introdução, esse artigo é apenas uma transcrição, acrescentada de todas as demonstrações, do *capítulo VII, intitulado Nonmeasurable Sets, das lições dadas por J. von Neumann no Institute for Advanced Study Princeton, nos anos lectivos de 1933-34 e 1934-35* (1).

(1) John von Neumann — *Functional Operators*, Vol. I: *Measures and Integrals*, Princeton University Preess, 1950.

Sobre o ensino da Matemática na Alemanha

por J. Sebastião e Silva

O alto nível atingido pelos estudos matemáticos na Alemanha, desde longa data, e maiormente no período em que sobressaem os nomes de GAUSS, RIEMANN WEIERSTRASS, CANTOR e HILBERT, suscita fàcilmente a curiosidade de saber como é estruturado e conduzido o ensino da Matemática naquele país.

Não é que a forma, ou mesmo o espírito do ensino, cheguem para explicar um fenómeno que tem as suas raizes profundas na tradição e na maneira de ser do povo em que se manifesta. Não se trata aqui pròpriamente duma relação de causa e efeito, mas antes duma *correlação;* a fórmula será esta: ensino e actividade científica influenciam-se mùtuamente, dentro de certos limites e geralmente a longo prazo.

Também não deve, por detrás daquela curiosidade, abrigar-se uma tendência no sentido de considerar tudo o que se faz *lá fora*, como perfeito e digno de ser reproduzido *cá dentro*, fielmente, sem prévia crítica ou reelaboração. Não há sistemas ideais de ensino, que convenham indiferentemente a todas as épocas e a todos os povos. No presente caso então, é preciso contar com profundas diferenças de psicologia, que obrigam a usar de prudência, quando se pense em transplantar dum campo para o outro uma dada norma pedagógica.

Mas também se não deve ir para o extremo oposto — que é o de fechar os olhos e o entendimento a tudo o que se passa no exterior, numa atitude de auto-suficiência própria das pessoas que têm medo excessivo das correntes de ar. É certo que vivemos aqui num extremo da Europa, «onde a terra se acaba e o mar começa», e onde, por isso mesmo, chegam enfraquecidos os ecos de algumas vozes; mas tal posição, se por um lado nos é vantajosa, e muito, também por outro lado oferece os seus inconvenientes, que importa corrigir.

Há ainda uma terceira tendência, que consiste em aceitar a tese da nossa incapacidade para a criação científica, com este corolário imediato: não precisamos de assimilar os métodos de trabalho, mas apenas a ciência criada pelos outros. Simplesmente, a tese ainda não foi demonstrada e, só deixando de pôr em prática o seu corolário, estaremos em condições de saber se é verdadeira ou falsa [1]. O contrário é permanecer num círculo vicioso.

[1] Há sem dúvida casos isolados que contradizem a tese; o que não temos tido é uma verdadeira escola de investigação.

A mim parece-me que o estudo da organização do ensino em diversos paises do mundo civilizado será sempre um trabalho útil e meritório, especialmente quando se trata — e é este o caso — dum povo que tenha dado um forte contributo para o avanço da ciência. Quanto à interpretação dos factos e às sugestões que eles possam oferecer, tudo isso pertence a uma outra ordem de considerações, a que, pelo menos de momento, não quero abalançar-me. Procurarei, no que se segue, manter-me numa linha de objectividade, apenas cortada, aqui e além, por algum breve comentário.

Os dados que vão ser expostos não dizem respeito a toda a Alemanha, mas apenas aos dois estados que tive a oportunidade de visitar, num período de pouco mais de um mês [1] — o da Renânia (Rheinland-Pfalz) e o de Baden. Os elementos que me foi possível recolher não permitem pois, de nenhum modo, uma visão completa e nítida do assunto; subsistem muitas lacunas, vários pontos obscuros a esclarecer; além disso, tais elementos referem-se mais à forma do que ao espírito do ensino. Mas nem por isso me pareceu desprovido de interesse transmitir aos leitores da Gazeta de Matemática os resultados destas primeiras observações.

Ensino liceal [2]

Limitar-me-ei a uma rápida digressão neste campo, apenas para se ter uma idea de como está alicerçado o ensino superior.

O ensino liceal no estado de Renânia (como, segundo creio, nos restantes estados da Alemanha ocidental) é distribuido por nove anos e ministrado em três tipos de escolas: o *liceu de línguas antigas* (Altsprachliches Gymnasium), o *liceu de línguas modernas* (Neusprachliches Gymnasium) e o *liceu científico* (Naturwissenschaftliches Gymnasium).

Consultando os «Lehrpläne für die höheren Schulen in Rheinland-Pfalz» (Programas para os liceus da Renânia) de 1951, observa-se desde logo que o quadro das disciplinas não varia grandemente dum para outro tipo de liceu: a diferença reside principalmente no número de tempos lectivos atribuídos a cada dis-

[1] Com bolsa do Instituto de Alta Cultura.

[2] Traduzo aqui «Gymnasium» por «liceu», donde o adjectivo «liceal» aplicado ao ensino ministrado naquela categoria de escolas.

ciplina. Assim mesmo, a Matemática, que no liceu científico dispõe de 4 horas por semana em cada um dos nove anos, sofre apenas a redução duma hora a partir do 4.º ano, em qualquer dos liceus literários.

No liceu científico, uma só disciplina supera a Matemática no total dos tempos lectivos: é o Alemão, que nos dois primeiros anos absorve 6 horas lectivas por semana, passando ao regime das 4 horas nos anos seguintes.

Quanto às restantes disciplinas de carácter científico, a distribuição de tempos lectivos por semana é a seguinte (no liceu científico):

Física: 2 no quarto ano e 3 em cada um dos seguintes.

Química: 2 desde o quinto ao nono ano.

Biologia: 2 em cada um dos nove anos.

Todas as disciplinas pertencentes ao grupo das letras (Alemão, Latim, Francês, História, etc.) acompanham as disciplinas de ciências até ao último ano, sem qualquer espécie de ramificação. (Neste particular, parece-me preferível, *para nós*, o sistema actualmente em vigor nos nossos liceus; em todo o caso, creio que nos seria vantajosa a continuação do estudo das línguas vivas, pelo menos o de inglês ou alemão, (1) nas secções de ciências).

O objectivo fundamental do ensino da Matemática nos liceus alemães é *desenvolver no aluno aptidão para o pensamento matemático autónomo* (aqui «autónomo» está a traduzir «selbständig», no sentido de «não-mecanizado»). Para tanto, considera-se fundamental, não só dirigir o ensino no sentido da clara formação dos conceitos, da expressão exacta e da dedução lógica, mas ainda habituar o aluno a fazer uso inteligente do método matemático na interpretação do mundo físico.

O programa de Matemática atribuído a cada ano (refiro-me sempre ao estado da Renânia) é relativamente moderado, o que permite fazer em ensino cuidadoso e torna possível uma boa assimilação dos conceitos. Em todo o caso, como é natural, consegue-se ir mais longe do que entre nós. Os dois últimos anos são dedicados ao Cálculo infinitèsimal e à Geometria analítica (plana).

(1) A expansão do idioma inglês no mundo de hoje torna cada vez mais desejável que (sem descurar o ensino do francês) o estudante saia do liceu com a possibilidade de, pelo menos, redigir em inglês um trabalho científico. Por outro lado, a completa ignorância do alemão continua a ser um «handicap» para quem, nos ramos científicos, procure manter-se «au point». Quem escreve estas linhas beneficiou de dois anos de alemão no curso complementar de ciências (anos lectivos de 1931-32 e 1932-33) e só hoje sabe avaliar quanto lhe foi útil esse breve estudo — bem mais útil do que a absorção forçada duma considerável massa livresca de conhecimentos científicos. As enciclopédias são sempre de fácil consulta, principalmente quando se conhecem várias línguas...

No 8.º ano faz-se uma introdução ao Cálculo diferencial, que se prolonga até à teoria dos máximos e mínimos e ao estudo geral do gráfico duma função (casos simples), com aplicações à Geometria e à Física; segue-se um estudo pormenorizado da função inteira do 3.º grau.

No 9.º ano, após um breve complemento de cálculo diferencial, relativo às funções e^x e $\log x$, faz-se uma introdução ao Cálculo integral, que se concretiza nos seguintes tópicos: o integral definido como limite de somas de Riemann; áreas positivas e áreas negativas; a área dum trapezóide como função do limite superior de integração; teorema fundamental do cálculo integral; a integração como operação inversa da derivação; integrações simples com aplicação ao cálculo de áreas de superfícies planas e de volumes de sólidos; a integração segundo o método geral de substituição (pequeno grau de dificuldade); aplicações do integral a questões simples da Física.

Quanto à geometria analítica, o programa inclui, além do que entre nós costuma ser ensinado, uma teoria elementar das cónicas (polo e polar, diâmetros conjugados, representação paramétrica, propriedades ópticas, a elipse como imagem afim da circunferência etc.); no final, é prescrito o estudo de lugares geométricos e o emprego do método analítico-algébrico em demonstrações geométricas de dificuldade média.

A trigonometria (plana) é ensinada integralmente no 7.º ano. Mas nota-se em todo o programa a ausência da Aritmética racional (1) e daquele estudo da equação de Diofanto que é tanto do agrado dos autores dos nossos programas.

A cúpula dos estudos é pois formada pelo Cálculo infinitèsimal e pela Geometria analítica, atendendo a que são esses os instrumentos que, desde o Renascimento, justificam o tão celebrado êxito da Matemática, nas aplicações às ciências físicas e à técnica.

Resta-nos finalmente assinalar, no programa do 9.º ano, alguns assuntos de *carácter optativo:* trigonometria esférica, séries, método de aproximação de Newton, análise combinatória e fórmula do binómio, rectificação, etc.

Porém, as anteriores considerações referem-se apenas a programas. É sem dúvida de todo o interesse conhecer o quadro formal em que vão inserir-se os dados concretos; mas falta depois o mais importante — que são precisamente esses dados.

(1) Passa-se isto num país em que as investigações aritméticas ocupam de há muito, um lugar previlegiado. Era Gauss quem dizia: «A Matemática é a rainha das ciências, e a Aritmética a rainha das matemáticas». Ainda hoje, com a escola de Hasse, o estudo da Teoria dos números se encontra em pleno florescimento na Alemanha.

Como é na realidade conduzido o ensino? Quais os métodos seguidos?

Bem desejaria eu estar em condições de responder a tais perguntas. Mas um mês de permanência num país que se visita pela primeira vez — país, ainda por cima, tão diferente do nosso — é muito pouco, quási nada, para poder afoitamente falar sobre este assunto. Todavia, à falta de melhor, as impressões colhidas sobre as páginas de alguns textos de Análise, completadas com referências ouvidas directamente, podem talvez dar uma primeira indicação, que valha a pena registar aqui.

Dos livros que folheei, ficou-me esta idea inicial: a orientação adoptada no ensino da Análise é de índole acentuadamente intuitiva, procurando-se dar a *génese* psicològica dos conceitos e a sua *finalidade* prática («donde vêm e para onde vão»), através de numerosos exemplos, citações históricas e aplicações concretas, constantemente referidas à existência do homem no mundo físico e no agregado social (todos os textos fecham com um sugestivo capítulo sobre Cálculo das probabilidades e Estatística).

Deste ponto de vista, os livros que examinei são na verdade notáveis, generosamente adubados de intuições e de imagens, com um bom recheio de exercícios — e alguns deles apresentados com óptimo, aliciante aspecto gráfico. Influência especial das ideas pedagógicas de Felix Klein? Reflexo de modernas correntes filosóficas, de raíz mais ou menos hegeliana?

Em qualquer hipótese, seja-me permitido um reparo pessoal. Julgo — sempre baseado no exame dos referidos textos — que se vai demasiado longe nesta reacção intuitivista (direi mesmo *pragmatista*), deixando prejudicado um outro aspecto que, desde os bons tempos helénicos, caracteriza por definição a Ciência: o aspecto racional. Refiro-me especialmente à maneira como se decide tratar a teoria dos limites (1).

É certo que, na Universidade, virá depois a desforra — numa viragem brusca, que leva quási ao extremo oposto — com todos os recursos de que se dispõe num país onde a análise lógica dos fundamentos da Matemática foi conduzida ao último grau de subtileza. É também certo que Newton, Leibnitz, Euler, Lagrange e outros mais não precisaram de saber conscientemente o que é «limite», para construirem o edifício grandioso da Análise.

Mas muito haveria que dizer sobre este ponto — e já avancei demasiado num campo em que, repito, não disponho de dados suficientes.

(1) Admite-se na Alemanha que o conceito de limite é demasiado melindroso para que possa ser desenvolvido com rigor lógico nos liceus. Mas parece-me isto exagerado, sobretudo quando penso que, nos liceus alemães, o Cálculo infinitèsimal é ensinado normalmente nos anos que correspondem aos dois primeiros das nossas universidades. Por outro lado, ouvi emitir a opinião de que a teoria dos limites, assim ensinada, cria hábitos mentais que é depois difícil desenraizar na Universidade.

Ensino universitário

A passagem do liceu para a universidade caracteriza-se por uma radical mudança de ponto de vista. Um dos objectivos essenciais do ensino universitário é o de conduzir aos modernos problemas e, mais ainda, à *moderna forma do pensamento matemático*; de maneira que o aluno se verá colocado, não só perante matérias novas, mas ainda — e é isso o mais notável — perante novos processos mentais, de natureza bem mais elaborada. Ao mesmo tempo, a sua atitude para com a ciência deixará de ser a de passivo espectador, para tender progressivamente, à de comparticipante.

A organização dos estudos difere profundamente da que se observa nas universidades portuguesas e não obedece a um modelo único para as diversas universidades. Um primeiro ponto a assinalar é este: *todas as cadeiras são semestrais*. No princípio de cada semestre, a universidade publica uma lista dos cursos e seminários a realizar nesse semestre, com os respectivos horários e a indicação dos professores que os regem. A razão deste facto está em que variam de semestre para semestre, de ano para ano, de universidade para universidade, os cursos professados ou, pelo menos, a orientação seguida em certos cursos. Esta ampla variabilidade dos estudos é apenas um sintoma do alto nível do ensino ministrado nas universidades alemãs.

Porém, na massa movediça dos cursos, destaca-se um núcleo rìgidamente estável, constituído não só por aquelas disciplinas — tais como o Cálculo infinitèsimal, a Geometria analítica, a Teoria das funções analíticas e a Teoria das equações diferenciais — sobre as quais se firma necessàriamente todo o ramo da Matemática aplicável às ciências da natureza, mas ainda por aquelas outras disciplinas que se consideram indispensáveis à cultura geral dum matemático, isto é: a Álgebra superior (incluindo a Teoria dos grupos e a Teoria de Galois) e a Geometria diferencial (1). Observe-se entretanto como é larga esta base de cultura geral.

(1) Estes dados, como outros aqui expostos, foram extraídos directamente do artigo do Prof. W. Süss «Das Studium der Mathematik», publicado num «guia do estudante» fornecido pela Faculdade de Ciências da Universidade de Friburgo (na Floresta Negra).

Mas o objectivo dos estudos universitários não se limita, de nenhum modo, à formação duma *cultura geral*. É finalidade última das universidades (sem a qual perderiam o direito a esse nome) conduzir a um *campo de especialização*, através do qual o estudante possa ràpidamente atingir as *fronteiras do conhecimento actual*, colocando-se em condições de poder contribuir, ele mesmo, para o progresso da ciência. Ora o campo de especialização é oferecido justamente pelos cursos de carácter mais ou menos variável; o aluno deverá, após os 3 ou 4 primeiros semestres, escolher livremente alguns desses cursos, de acordo com as suas inclinações, mas sem restringir demasiado a amplitude da escolha.

Examinemos agora mais de perto o mecanismo do ensino universitário.

As lições dos já referidos cursos fundamentais são geralmente acompanhados de *exercícios*, cujo objectivo não é tão sòmente a formação duma técnica de cálculo (o que já em grande parte se fez no ensino secundário), mas ainda, e sobretudo, o esclarecimento dos conceitos teóricos e do seu mútuo encadeamento lógico, mediante a análise de questões adequadas, dispostas em ordem de dificuldade crescente, até quási atingirem o nível de verdadeiros temas de investigação. Tais *exercícios* são propostos pelo professor durante as lições; ao aluno compete resolvê-los *em casa* e apresentar as respectivas resoluções ao assistente. Este tem por dever corrigir cuidadosamente, com observações à margem, todas as resoluções apresentadas; além deste trabalho, que lhe absorve cerca de dois dias por semana, as funções didácticas do assistente reduzem-se a duas horas lectivas por semana, durante as quais conversa com os alunos sobre a maneira como foram resolvidos os problemas e sobre a melhor maneira de os resolver. Em todo o tempo restante, *o assistente deve, no seu próprio interesse, consagrar-se inteiramente ao trabalho de investigação,* já que é esse o único caminho a seguir para ascender a posições mais elevadas na carreira universitária.

Porém, quando se entra na fase de especialização (após os 3 ou 4 primeiros semestres) o regime dos *exercícios* cede inteiramente o lugar a um outro, de categoria mais elevada: o dos *seminários*. O que se faz nestes «seminários» é, por via de regra, o seguinte: a cada aluno é distribuído um trabalho recentemente publicado, para que o leia, e o analise, e o interprete, recorrendo à bibliografia, geralmente extensa, que esse trabalho pressupõe; depois o aluno deverá, numa sessão do seminário, fazer uma exposição sobre o assunto, perante os seus colegas e o professor; no final, é feita uma crítica da exposição por parte dos presentes e pode gerar-se uma discussão tendente a esclarecer as ideias expostas e porventura a levantar novos problemas.

Um primeiro resultado prático — o mais modesto, mas também o mais frequente — que consegue obter-se por tal processo, é o de ensinar o aluno o expôr correctamente assuntos de matemática; o que já é importante, se atendermos a que, geralmente, ele se destina à carreira do ensino.

Mas um outro objectivo mais alto costuma ser visado com o trabalho de seminário: o de estabelecer um vivo contacto com a frente da investigação actual para que, num ou noutro aluno mais bem dotado (as raras e preciosas excepções), venha revelar-se a vocação para a actividade criadora. Uma idea, um súbito lampejo, basta muitas vezes para lançar o eleito no trilho aventuroso das investigações. Neste caso, o papel do professor terá de assemelhar-se um pouco àquele que Sócrates se atribui jocosamente no diálogo com Teeteto: o de ajudar a virem à luz as ideias.

Em tudo o que precede, ainda não foi usada uma palavra que parece obrigatória ao falar de ensino: a palavra «exame». Mas há que salientar desde já o seguinte: logo no primeiro contacto com as escolas alemãs, observa-se que os esforços estão muito mais dirigidos no sentido de *aprender* ou *ensinar* (conforme se trate de alunos ou de professores), do que para o reverso da medalha, que consiste em *prestar contas* ou *julgar*.

Todos nós sabemos que os exames são a parte ingrata (de certo modo negativa) do ensino; praticada em excesso, acaba por massacrar docentes e discentes, fatigando-os inùtilmente, tirando-lhes a vontade para o trabalho construtivo, levando-os por vezes a execrar a ciência e os cérebros que a geraram [1]. É evidente que se trata dum *mal necessário*, mas, por isso mesmo que é um *mal*, conviria reduzi-lo ao mínimo *necessário*.

Neste ponto, são para invejar os germanos, cuja psicologia lhes permite fazer um uso moderadíssimo dos exames. Por exemplo, na Secção de Matemática da Universidade de Mogúncia, são obrigatórios apenas os exames de fecho dos estudos (exames de licenciatura, ou *actos grandes*, como entre nós se diria); há também exames a meio dos estudos, mas esses são facultativos, *concedidos* aos alunos que desejem orientar-se acerca das suas possibilidades.

As provas orais têm geralmente lugar no gabinete

[1] Sem esquecer que, muitas vezes, o exame faz uma selecção errada, colocando em primeiro lugar o aluno mais espectaculoso, mais expansivo, que não é geralmente o mais concentrado, o mais profundo.

do professor, em estilo de conversa, à volta duma mesa—apenas professor, assistente e aluno. É este último que, quando se sente habilitado, se dirige ao professor a pedir que lhe marque um dia e uma hora para ser ouvido. Medite-se um pouco na soma de energias nervosas que se economiza por tais processos!

Três são os rumos para os quais os estudos matemáticos podem ser orientados: *profissões liberais, magistério secundário* e *magistério superior*. De acordo com estas orientações, varia a duração dos estudos (entre 6 e 10 semestres) e a natureza dos exames de fecho.

A porta de entrada para a carreira do ensino superior é o exame de doutoramento. Neste caso, é exigido a apresentação duma *tese* que, por definição, *deve conter resultados novos, já que o conceito de ensino universitário engloba necessàriamente o de investigação.*

Só as provas orais de doutoramento (pelo menos na Universidade de Mogúncia) costumam ser públicas, mas sem qualquer espécie de solenidade.

A parcimónia de exames, nas universidades alemãs é em grande parte compensada pelo sistema dos *exercícios* e dos *seminários*, por meio do qual o assistente e, mais tarde, o professor vão tomando conhecimento do aluno sob vários aspectos, sem o colocar na posição inferiorizante e desconcertante de «pessoa que se sente examinada».

Contra o sistema dos exercícios pode objectar-se que, sendo resolvidos em *casa*, não oferecem confiança.

Eis os termos em que ouvi responder a uma objecção deste tipo: «*Primo*, o aluno não tem qualquer interesse em se ludibriar a si próprio, permanecendo num curso para o qual não sinta aptidões ou não trabalhe o suficiente; *secundo*, o assistente, ao conversar nas aulas com os alunos, tem sempre maneira de se aperceber do grau de consciência com que foram resolvidos os exercícios». E não se pode dizer que não sejam aceitáveis estas razões.

Mas é sobretudo o trabalho de seminário que permite ao professor fazer um juízo sereno e acertado dos seus alunos, dando-lhe ainda aquela possibilidade preciosa de descobrir as verdadeiras vocações.

Finalmente, algumas palavras sobre a distribuição do trabalho lectivo em períodos de tempo.

As aulas do semestre de inverno começam em princípios de Novembro e terminam em fins de Fevereiro, com a interrupção de 15 dias para as férias do Natal. As aulas para o semestre de verão começam em princípios de Maio e terminam em fins de Julho, com a interrupção de 7 dias para as férias de Pentecostes Parece pois, que ao todo, há *cerca de seis meses de férias, nada menos do que metade do ano.* Isto à primeira vista torna-se chocante e, se não se tratasse dum país onde, notòriamente, o trabalho é a regra, não faltaria quem visse aí um autêntico escândalo. Porém a verdade é que, desses seis meses, só uma pequena parte, talvez um mês, costuma ser utilizada para efeitos de férias pròpriamente ditas. Em todo o tempo restante, os alunos dedicam-se ao estudo, com possibilidades de concentração e serenidade mental que não encontram nos períodos lectivos, demasiado sobrecarregados com aulas, exercícios, seminários, etc. [1]; por sua vez, os professores meditam os seus cursos, preparam as suas lições e, mais importante do que tudo, *prosseguem as suas investigações pessoais*, condição «sine qua non» para estarem à altura das funções que desempenham.

É interessante verificar como, na Alemanha, se deposita confiança em professores e assistentes, sob vários aspectos, e em particular no tempo livre que lhes é concedido; para isso contribui, certamente, uma longa tradição, cimentada em exuberantes manifestações de fecundidade. Sabe-se ali que o trabalho de fôlego, na Ciência como na Arte, mesmo (e mais ainda) quando se trata dum RIEMANN ou dum BEETHOVEN, exige longas horas, por vezes dias sucessivos de concentração.

Convém todavia salientar que, nos períodos lectivos a densidade de serviço docente é muito maior do que entre nós [2].

Para concretizar em parte o que atrás foi dito, extraio do «Vorlesungsverzeichnis» da Universidade de Mogúncia, para o semestre de verão de 1952-53, as seguintes indicações relativas aos cursos de Matemática, com os respectivos horários e professores que os regem:

1) *Geometria analítica* I, *com Exercícios*, 6 horas, 2.as, 4.as e 6.as das 8 às 10 — KÖTHE.

2) *Análise* II, *com Exercícios*, 6 horas 4.as, 5.as e Sáb.os das 8 às 10 — ROHRBACH.

3) *Álgebra elementar, com Exercícios*, 4 horas, 2.as e 6.as das 10 às 12 — SCHÄFKE.

4) *Equações diferenciais ordinárias, com Exercícios*, 4 horas, 4.as e 5.as das 8 às 10 — FURCH.

5) *Álgebra superior, com Exercícios*, 4 horas, 2.as das 8 às 10 e 6.as das 10 às 12 — WEVER.

6) *Teoria aditiva dos números*, 4 horas, 3.as e 5.as das 10 às 12 — ROHRBACH.

[1] É preciso não omitir que, no momento actual, grande parte dos alunos são forçados a procurar em diversas ocupações, até as mais humildes, o sustento diário.

[2] Note-se porém que, em casos especiais, quando o professor está ligado a certos institutos de investigação, é-lhe reduzido o serviço docente, por vezes a uma hora por semana.

7) *Teoria das funções* II, *com Exercícios*, 5 horas, 3.as das 8 às 10 e das 12 às 13 e 6.as das 8 às 10 — Grunsky.

8) *Topologia*, 3 horas, 3.as das 10 às 12 e 6.as das 12 às 13 — Furch.

9) *Métodos da física matemática* II, 4 horas, 2.as e 5.as das 13 às 15 — Schäfke.

10) *Introdução ao cálculo das variações*, 2 horas, 2.as e 4.as das 12 às 13 — Grunsky.

11) *Espaços lineares*, 3 horas, 2.as das 11 às 12 e 4.as das 10 às 12 — Köthe.

12) *Aplicações escolhidas do cálculo operacional, mediante a transformação de Laplace, à Física e à Técnica*, 2 horas, 3.as das 15 às 17 — Wagner.

13) *Análise prática* I, 4 horas, 5.as das 10 às 12 e das 15 às 17 — Schmieden.

14) *Geometria descritiva, com Exercícios*, 6 horas, 3.as, 4.as e 5.as das 13 às 15 — Neumer.

15) *Os fundamentos filosóficos da Matemática*, 3 horas, 2.as, 4.as e 6.as das 16 às 17 — Martin.

16) *A imagem astronómica do mundo no decorrer dos tempos* (Studium generale), 4 horas, 5.as das 19 às 21 e Sáb.os das 10 às 12 — Fleckenstein.

17) *Prática matemática* I, 3 horas, 3.as das 15 às 18 — Rohrbach, Wever.

18) *Prática matemática* III, 3 horas, 2.as das 15 às 18 — Schäfke, Wever.

19) *Seminário superior*, 2 horas, 6.as das 15 às 17 — Köthe, Schäfke.

20) *Seminário superior*, 2 horas, 4.as das 15 às 17 — Furch.

21) *Seminário superior*, 2 horas, 4.as das 10 às 12 — Rohrbach.

22) *Seminário superior (funções especiais, teorias espectrais)*, 2 horas, 2.as das 8 às 10 — Schäfke.

23) *Seminário inicial*, 2 horas, 5.as das 15 às 17 — Grunsky.

24) *Seminário inicial*, 2 horas, 2.as das 13 às 15 — Wever.

25) *Colóquio matemático*, 2 horas, 6.as das 17 às 19 Furch, Grunsky, Köthe, Neumer, Rohrbach, Schäfke, Wever.

26) *Colóquio de filosofia natural*, 2 horas, 4.as das 17 às 19 — Bechert, Bollnow, Furch, Holzamer, Köthe, Martin, Schulz, Strassmann, Troll, Voit.

Observações àcerca deste quadro: *a*) A numeração romana é usada para os cursos que se distribuem por mais de um semestre. Assim, «Análise II» (isto é «Análise, 2.a parte») é precedida de «Análise I», leccionada no semestre anterior a este, e seguida de «Análise III», que figurará na lista do próximo semestre de inverno.

b) Cada hora indicada para as lições costuma incluir um intervalo de 15 minutos. Assim, uma lição que, teòricamente, seja de 2 horas, é na realidade de hora e meia.

c) São indicadas também as horas a que o professor atende os alunos.

d) O «Studium generale» consiste num conjunto de cursos de cultura geral, a serem seguidos indistintamente por estudantes de várias faculdades.

e) Por «seminário superior» traduzimos a palavra «Oberseminar» e por «seminário inicial» a palavra «Proseminar».

f) É claro que, para o aluno que começa, poucos são os cursos que pode escolher, entre aqueles indicados no «Vorlesungsverzeichnis»; poderá seguir as lições de Geometria analítica I, Álgebra elementar e Geometria descritiva, mas não, por exemplo, as de Análise II, Equações diferenciais, etc. Também já se disse que os Seminários são para ser seguidos ùnicamente por alunos que tenham prèviamente frequentado cursos fundamentais.

Aos Professores Gottfried Köthe, da Universidade de Mogúncia e Wilhelm Süss, da Universidade de Friburgo (na Brisgóvia), bem como ao «Studien-Rat» Sr. Bernhard Reimann, do liceu Mathias-Claudius de Hamburgo, deixo aqui expressa a minha gratidão, pela maneira obsequiosa e eficaz por que corresponderam aos meus desejos no sentido de colher informações sobre o assunto aqui tratado.

Ao Instituto de Alta Cultura cumpre-me agradecer esta oportunidade que me ofereceu de entrar em contacto com as escolas alemãs.

A teoria das distribuições

De acordo com o anunciado no n.º 54, foram realizadas algumas démarches no sentido da GM apresentar aos seus leitores uma série de artigos de introdução à teoria das distribuições.

Como resultado dessas démarches, verificou-se ser preferível facultar aos próprios leitores da GM a elaboração de tais artigos. Nessas condições, a Redacção enviou o questionário seguinte ao Prof. Doutor Ruy Luís Gomes; os interessados poderão, ajudados pela orientação contida na resposta ao questionário, abordar o estudo da teoria das distribuições e escrever, em artigo, os resultados e impressões colhidos em tal estudo. Tais artigos deverão ter essencialmente o carácter de informação do conteúdo da Teoria das Distribuições e das dificuldades que cada autor tenha encontrado na sua elaboração. Serão em seguida revistos e apreciados pelo Prof. Ruy Luís Gomes e, se de interesse, publicados na G. M.

QUESTIONARIO

1 — Acha que um aluno de matemática, com os conhecimentos adquiridos no 2.º ano das nossas universidades pode, com relativa facilidade, iniciar o estudo da Teoria das Distribuições?

2 — Que conceitos e noções, não tratados nos programas universitários, deve possuir tal aluno antes de iniciar esse estudo?

3 — Que elementos bibliográficos indica (sempre ao nível dos tais conhecimentos médios) e qual a orientação a seguir no estudo desses elementos?

4 — De um modo geral, qual a importância e que problemas foram resolvidos pela teoria das distribuições?

J. G. T.

RESPOSTA AO QUESTIONÁRIO

Para responder à primeira pergunta suponho que se deve começar por esclarecer, nos termos mais simples, o que se entende efectivamente por Teoria das Distribuições.

Ora, a Teoria das Distribuições, desenvolvida pelo matemático francês, Laurent Schwartz, a partir de 1945 (1), tem como objectivo fundamental alargar a noção de função pontual — point function — de maneira a assegurar à nova entidade todas as propriedades das funções — tipo do Cálculo Infinitesimal clássico, nomeadamente as de derivação e primitivação. E que esse objectivo foi atingido mostra-o, por exemplo, a circunstância de uma função tão estranha (à face da definição corrente) mas tão útil (na Física e de um modo geral no Cálculo Operacional) como a função $\delta(x)$ de Dirac,

$$\delta(x)=0\,,\,x\neq 0$$

$$\delta(0)=\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1\,,$$

se comportar no âmbito das Distribuições como a *derivada* da conhecida função de Heaviside

$$\begin{array}{ll}\Upsilon(x)=0 & x\leqslant 0\\ \Upsilon(x)=1 & 0<x\end{array}\,.$$

Além disso, a nova definição inclue, como de resto era essencial, as funções contínuas, as funções localmente somáveis (segundo a definição clássica de Lebesgue) e a respectiva derivada (distribuição derivada) coincide com a noção ordinária, quando esta última existe e é localmente somável. Mas abrange ainda uma categoria muito mais vasta de funções, por exemplo, as funções de conjunto completamente aditivas, que na teoria clássica se chamam *medidas*; e a função (distribuição) $\delta(x)$ é precisamente um exemplo de uma *medida*. Contém ainda outras entidades que nem são funções pontuais localmente somáveis nem medidas. E a repercussão que a teoria das distribuições já produziu é de tal ordem que o seu autor foi consagrado no último Congresso Internacional de Matemática (1950), como um dos maiores Matemáticos da actualidade e por isso recebeu uma das duas medalhas de ouro do Congresso.

É, pois, compreensível e só merece aplausos, o interesse que os jovens estudantes portugueses manifestam pelo estudo da Teoria das Distribuições.

Quanto à maneira mais simples de abordar essa Teoria, precisamente no caso de um aluno do 2.º ano das nossa Universidades, o preferível é aproveitar ao máximo as possibilidades que a própria análise clássica nos oferece; e deixar para uma segunda etapa aqueles aspectos da Teoria e aquela especialização que já exigem conhecimentos mais ou menos completos de Análise Geral.

Nesta ordem de ideias aconselho, de entrada, um folheto de Halperin intitulado — *Introduction to the theory of Distributions* — redigido, segundo lições feitas por Schwartz, em Agosto-Setembro de 1949, no Seminário do Congresso Matemático do Canadá (Vancouver).

Assim, o leitor começará a familiarizar-se com o conceito de integral, encarado como funcional linear, e poderá sentir gradualmente a necessidade de refazer o estudo desse conceito e das noções de topologia de mais frequente aplicação.

O leitor pode ainda utilizar, para um problema de análise clássica que surge logo de entrada, o meu primeiro artigo na *Gazeta de Matemática* — n.º 46 — *a partir de páginas 2* e as indicações bibliográficas aí mencionadas.

Parecia-me também conveniente a leitura de um ou outro trabalho de Cálculo Operacional, para verificar o interesse de funções estranhas como $\Upsilon(x)$, $\delta(x)$, tão largamente utilizadas em matemáticas aplicadas.

(1) O seu primeiro artigo foi publicado no t. 21, 1945, dos Annales de l'Université de Grenoble, sob o título «*Généralisation de la notion de fonction, de derivée, de transformation de* Fourier, *et applications mathématiques et physiques*».

Para esse efeito pode talvez servir o cap. 8 — Cálculo simbólico — dos *Compléments de Mathématiques* por A. Angot.

E num primeiro estudo, repito, não julgo de qualquer vantagem ultrapassar as possibilidades da análise clássica e o interesse das Distribuições no domínio das matemáticas aplicadas.

De resto, este meu ponto de vista vai ao encontro do próprio objectivo deste inquérito e até das amplas perspectivas que se abrem à inserção das Distribuições no quadro das disciplinas de um qualquer curso de matemática — «the simplifications obtained and not least the easy justification of different «symbolic» operations often used in an illegitimate way by technicians, is of such striking nature that it seams more than a utopian thougth that elements of the theory of the Schwartz distributions may find their place even in the more elementary courses of the calculus in universities and technical schools (1)».

Ruy Luís Gomes

Nota — A Junta de Investigação Matemática possue os elementos bibliográficos indicados nesta resposta e coloca-os à disposição de todos os alunos que desejem abordar o estudo das Distribuições.

Do Sr. João Cosme Santos Guerreiro, finalista da licenciatura em Ciências Matemáticas, recebeu a Redacção uma carta de que se transcreve o seguinte:

«Ao iniciar há pouco menos que um mês o estudo da teoria das distribuições, não possuia senão os conhecimentos que correntemente se adquirem nos dois primeiros anos da Faculdade de Ciências (e pouco mais se aprende no resto do curso). Esbarrei logo com dificuldades provocadas pela falta de conhecimentos sobre integração, especialmente integração á Lebesgue e á Stieltjes, e procedi então a uma fase preparatória, estudando o integral de Lebesgue e o integral de Lebesgue-Stieltjes. Acho que isto é conveniente para os leitores interessados no estudo desta teoria; de resto os estudantes dos nossos cursos superiores pouco conhecem da teoria da integração, nunca saindo do campo mais simples que é o das funções contínuas. Nesta fase preparatória fiz a leitura de alguns capítulos dos seguintes livros que utilizei:

Vallée Poussin, C. de la — *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire* — Paris.

Lebesgue, H. — *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* — Paris.

Cramér, Harold — *Mathematical Methods of Statistics* — Princeton.

Da experiência adquirida, julgo que o estudo pode ser conduzido de forma a se fazer ideia clara sobre o problema da investigação das funções primitivas, não sendo inútil ir até o integral de Denjoy. De qualquer modo deve ser rápido, para não nos perdermos no emaranhado das teorias da análise clássica, o que poderá desviar o fim em vista.

Apoiando a iniciativa da *Gazeta*, que convida os seus leitores ao estudo e ao debate na própria *Gazeta* da introdução à teoria das distribuições, prometo pela minha parte, para o próximo número, impressões mais detalhadas sobre este primeiro contacto com tal teoria».

(1) Harald Bohr — Intervenção feita no Congresso Internacional de Matemática na sessão de entrega das medalhas de ouro.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

CONTRIBUIÇÃO LATINO-AMERICANA AO PROGRESSO CIENTÍFICO (*)

INTRODUÇÃO

Nos países novos a matemática pura não aparece senão numa fase tardia da sua evolução. E isso é bastante natural. Nos países em desenvolvimento, a principal exigência é satisfazer as necessidades vitais da sua manutenção e desenvolvimento: são necessários médicos, agrimensores e engenheiros. Só se requere da matemática a parte que é útil a estes ramos da ciência, isto é, o cálculo, instrumento dos estudos técnicos. Este capítulo particular da matemática mantém-se, contudo, sempre, durante décadas ou mesmo séculos, atrazado relativamente aos que se estão desenvolvendo e, consequentemente estas aplicações contribuem muito pouco para o progresso da matemática. Tal é a razão por que a América Latina, que sempre produziu brilhantes técnicos matemáticos, como se pode provar pelas suas ousadas obras de engenharia, em qualquer país sem excepção, não teve senão muito recentemente estudiosos de categoria de matemática pura.

* Tradução do fascículo «Mathematics» a que já se referiu a G. M. no n.º 54, pp 23, devidamente autorizada pela Direcção do «Centro de Cooperación Científica para América Latina» da UNESCO, a quem a «Gazeta de Matemática» apresenta os melhores agradecimentos.

A formação de um matemático, como a de qualquer outro cientista, requere um meio adequado. Este meio é talvez mais fácil de preparar do que para outra disciplina; ele requere simplesmente uma biblioteca: uma biblioteca bem provida dos livros essenciais, clássicos e modernos, e sobretudo, de periódicos, tanto recentes como antigos. Os últimos não são tão fáceis de obter, mas são indispensáveis pois a matemática, ciência conservativa, nunca deixa no esquecimento velhas teorias.

Nenhuma escola matemática pode existir sem uma biblioteca. Em todo o local em que um indivíduo de visão larga conseguiu, por meio de uma universidade ou doutro centro de estudos, criar uma boa biblioteca matemática, logo surgiu um grupo de bons matemáticos. Um bom exemplo é o do Uruguay onde García de Zúñiga fundou a biblioteca matemática da Faculdade de Engenharia, talvez a melhor da América do Sul e onde ràpidamente surgiu uma brilhante escola matemática.

Noutras ocasiões a presença de professores Europeus, quer temporária quer permanente, despertou entre os jóvens estudantes interesse para a investigação matemática, originando grupos de pesquizas, que depois continuaram sòsinhos, desenvolvendo-se e expandindo-se pelas várias universidades do país.

Tal é o caso de J. Rey Pastor, o cientista que de facto iniciou a investigação matemática na Argentina, e mais recentemente, o de Beppo Levi e A. Terracini, para mencionar só grandes figuras. No Brasil, visitas periódicas de matemáticos Italianos (L. Fantappiè, A. Bassi e outros), a estadia temporária do matemático Francês André Weil e do Norte-Americano O. Zariski e também o trabalho do Português A. Monteiro encorajaram a criação e desenvolvimento de centros matemáticos em S. Paulo e Rio de Janeiro. No Perú, o matemático Polaco A. Rosenblatt foi um excelente colaborador de Godofredo García, o conhecido autodidata criador da escola Peruviana, que pelo seu esforço isolado elevou o seu país ao nível matemático dos principais países da América Latina. No Chile, R. Frucht e no Equador P. Thullen, ambos Alemães, influiram no interesse que despertava pela matemática. No México, as visitas frequentes de matemáticos Norte-Americanos levaram à formação da escola Mexicana que conta proeminentes figuras.

Uma vez criados os centros matemáticos, devidamente dirigidos e equipados, os resultados não se fazem esperar muito. Aqui e ali aparecem os primeiros jornais e publicações de matemática pura, arquivos do trabalho executado, onde se encontram as contribuições, para o progresso da matemática, dos vários centros. Também se fundaram Institutos de Matemática onde, ao contrário das Faculdades, tem prevalência a investigação sobre o ensino (o «Instituto de Matemática» em Rosário, Argentina, criado em 1939; o «Instituto de Matemática y Estadistica» em Montevideo, fundado em 1942). Sentindo os matemáticos de vários países a necessidade de se reunir para formarem Uniões ou Sociedades, apareceram: a «Unión Matemática Argentina» (1936), a «Sociedad Matemática Mexicana» (1943), a «Sociedad Cubana de Matemáticas» (1942) e a «Sociedade Matemática de São Paulo» (1945), cada uma com o seu jornal privativo ou outra publicação.

. . . .

Trad. de M. Zaluar

SEGUNDO COLÓQUIO DE GEOMETRIA ALGÉBRICA

Todos os anos o Centro Belga de Investigações Matemáticas organiza um colóquio internacional (1).

Em Julho de 1952 teve lugar em Liége o 4.º colóquio que foi dedicado, como o primeiro em 1949, à Geometria Algébrica. Participaram na reunião distintos cultores deste ramo de Matemática, representando duas tendências: a da Escola Italiana e a dos que utilizam a Álgebra Moderna.

Como anteriormente o C. B. R. M. publicou (2) o conjunto das conferências realizadas de que apresentamos a relação:

Chisini, O. — *Courbes de diramation des plans multiples et tresses algébriques.*

Gauthier, L. — *Quelques travaux récents concernant la classification des courbes algébriques.*

Villa, M — *Transformations ponctuelles et transformations crémoniennes.*

Kähler, E. — *Sur la théorie des corps algébriques.*

Dolbeault, P. — *Formes différentielles méromorphes sur les variétés kählériennes compactes.*

Conforto, F. - *Problèmes résolus et non résolus de la théorie des fonctions abéliennes dans ses rapports avec la géométrie algébrique.*

Andreotti, A. — *Les problèmes de classification dans la théorie des surfaces algébriques irrégulières.*

Néron, A. — *La théorie de la base pour les diviseurs sur les variétés algébriques.*

Gröbner, W. — *La théorie des idéaux et la géométrie algébrique.*

M. Z.

(1) Vidé *Gazeta de Matemática*, n.os 43, 48 e 51.

(2) *Deuxième Colloque de Géométrie Algébrique*, G. Thone, Liège e Masson et Cie., Paris, 1952.

GAETA, F. — *Quelques progrès récents dans la classification des variétés algébriques d'un espace projectif.*

BURNIAT, P. — *Modèles de surfaces canoniques normales de* S_3 *et de genre linéaire* $11 \leqslant p^{(1)} \leqslant 17$.

NOLLET, L. — *Introduction des courbes quasi irréductibles d'une surface algébrique. Application à la regularité de certains systèmes linéaires.*

GODEAUX, L. — *Les singularités des points de diramation isolés des surfaces multiples.*

M. Z.

A MATEMÁTICA NA ASSOCIAÇÃO DOS ESTUDANTES DA FACULDADE DE CIÊNCIAS

SEMANA DA MATEMÁTICA

Está em preparação a Semana da Matemática, uma realização da Secção Pedagógica da A. E. F. C. L., que tem por objectivo contribuir para o desenvolvimento do interesse pela matemática no nosso país.

Fundamentalmente pretende-se, através duma exposição e de conferências acessíveis, exprimir o que são a matemática e as suas aplicações mais importantes. Procura-se também formar cursos, que se prolongarão pelo tempo que for necessário e cuja introdução será feita durante a Semana.

Conta-se com a colaboração de matemáticos portugueses e estrangeiros; receberam revistas, como oferta, e a adesão de centros de estudo, etc.

SEMINÁRIOS DE ESTUDO

Estão em elaboração Seminários de Matemática, por iniciativa da Secção Pedagógica da A. E. F. C. L., que têm por objectivo o estudo em conjunto de um ou outro ramo de matemática. Visa-se especialmente criar interesse por certos problemas e pela investigação. A orientação será feita por estudantes.

A título de experiência, funcionou em Junho último um seminário de Cálculo Tensorial. Sob a orientação dum finalista de matemática, estudou-se o conceito de tensor sobre as transformações de coordenadas numa variedade a n dimensões, álgebra e análise tensoriais e aplicações à geometria de RIEMANN. Os resultados foram bons e houve grande concorrência, especialmente dos alunos do curso de Electricidade. Para o próximo ano estão projectados seminários de Álgebra Moderna, Cálculo Vectorial e Tensorial e Análise.

S. Guerreiro

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICOS DE 1954

Na sua sessão final o Congresso Internacional de Matemáticos de 1950 (Cambridge, Mass.) escolheu, por proposta da delegação holandesa, a Holanda para país hospedeiro do Congresso seguinte.

Em virtude desta decisão o Congresso Internacional de Matemáticos de 1954 reunir-se-á em Amesterdão de 2 a 9 de Setembro do próximo ano, sob os auspícios da Sociedade Matemática holandesa (Wiskundig Genootschap), a qual espera sinceramente que o Congresso de 1954, onde os matemáticos de todas as partes do mundo serão benvindos, seja uma reunião internacional fértil.

A Comissão de organisação convidou certo número de matemáticos eminentes para fazerem conferências de uma hora destinadas a dar um resumo do recente desenvolvimento das matemáticas.

O Congresso divide-se em sete secções:

1. Álgebra e Teoria dos Números.
2. Análise.
3. Geometria e Topologia.
4. Cálculo das Probabilidades e Estatística.
5. Física Matemática e Matemáticas aplicadas.
6. Lógica e Fundamentos da Matemática.
7. Filosofia, História e Ensino.

Em cada um destes domínios, especialistas convidados pela Comissão de organisação, farão conferências de meia-hora.

Os membros do Congresso, que se tenham inscrito para esse fim, poderão fazer conferências breves, no máximo de um quarto de hora. A sub-divisão eventual das secções dependerá do número dessas conferências.

A Comissão de Organisação planeou também reuniões de carácter recreativo e excursões.

Os membros do Congresso dividem-se em duas categorias: *os membros ordinários (membros)* que tem o direito de participar nas actividades científicas e que receberão além disso as Actas do Congresso e os *membros associados*, que, acompanhando os membros não tomarão parte no programa científico nem receberão as Actas do Congresso, mas que terão o direito de participar em muitas outras actividades do Congresso.

O custo da inscrição não está ainda definitivamente fixado, mas provavelmente não ultrapassará a quantia de 50 florins (cerca de 14 dolares) para os membros e a quantia de 20 florins (5,5 dolares) para os membros associados.

Os que desejem participar no Congresso, devem comunicar à Comissão de Organisação o seu nome (com títulos etc.) e a sua morada completa. A Comissão de Organisação enviar-lhes-á então indicações pormenorisadas que devem ser publicadas durante este ano de 1953. Dirigir-se para isso a

Comité d'organisation

2e Boerhaavestraat 49 — Amsterdam — Holanda

NOTICIÁRIO

CONGRESSO INTERNACIONAL DE FILOSOFIA DAS CIÊNCIAS

A União Internacional de Filosofia das Ciências encarregou o «Forum Internacional de Zurich» da organização de um Congresso Internacional de Filosofia das Ciências que se realizará de 23 a 28 de Agosto de 1954, em Zurich. O Comité do Congresso compõe-se de: F. Gonseth, presidente, B. Eckmann, P. Nolfi, P. Bernays, A. Pfluger, R. Nevanlinna, P. Finsler, K. Dürr, Mme. M. Ernst-Schwarzenbach, D. Brinkmann, E. Walter, F. Kröner, E. Specker, R. Meyer, M. Altwegg, S. Widmer, W. Boesch, E. Bieri, A. Ostertag, A. Ostrowski, H. Guggenheimer, A. Mercier, P. Rossier, S. Gagnebin, F. Fiala, M. Joray.

Serão debatidos dois temas gerais:

a) Confronto das diferentes correntes e pontos de vista.

b) Valor da filosofia das ciências na investigação.

A inscrição provisória para o Congresso deve ser feita directamente ao Secretariado — Forum Internacional de Zurich, Escola Técnica Federal, ou por intermédio da G. M.

CONGRESSO LUSO-ESPANHOL PARA O AVANÇO DAS CIÊNCIAS

Como já referimos no número anterior realisa-se de 27 de Setembro a 4 de Outubro, deste ano, o Congresso Luso-Espanhol para o Avanço das Ciências, na cidade de Oviedo. Esperamos poder dar, no próximo número, notícias da actividade do Congresso.

INSTITUTO DOS ACTUARIOS PORTUGUESES

O Núcleo de Estudos de Cálculo das Probabilidades e Estatística Matemática reune na terça-feira, 6 de Outubro, às 21h e 30m para planear as actividades do próximo ano. Prevê-se a realização de séries de exposições sobre: «Leis dos Grandes Números», «Introdução à Teoria dos Processos Estocásticos», «Teoria Matemática das Populações», «Teoria da Decisão Estatística». As pessoas interessadas são convidadas a pôr-se em contacto com o Secretário da Direcção: G. DE CASTRO (Laboratório Nacional de Engenharia Civil).

PRÉMIO «ARTUR MALHEIROS»

O prémio «ARTUR MALHEIROS» foi este ano atribuído, pela Academia das Ciências, ao trabalho «Sobre as relações entre Integral de RIEMANN e Integral de LEBESGUE», do professor RUY LUÍS GOMES. Este trabalho é por assim dizer uma conclusão de trabalhos anteriores do autor sobre a «Teoria da Medida», trabalhos que vem publicando, na sua maioria, nos «Cadernos de Análise Geral» da Junta de Investigação Matemática.

Muito deve a cultura matemática portuguesa à à acção contínua do professor RUY LUÍS GOMES, que tem procurado aumentar a restrita literatura matemática nacional, renovando e actualizando os conceitos por uma crítica aos fundamentos e ás teorías clássicas, fazendo uso dos métodos da Algebra Moderna e da Topologia. Os trabalhos do professor RUY LUÍS GOMES sobre o *integral de* RIEMANN e sobre o *integral de* LEBESGUE-STIELTJES, este último de que está em preparação um segundo volume, deram lugar, pelas investigações a que conduziram, ao trabalho apresentado agora a concurso para o «Prémio ARTUR MALHEIROS». Põe nele o autor em evidência o carácter relativo da distinção que usualmente se faz entre Integral-L e Integral-R, mostrando bem a importância que tem ainda o conceito de integral de RIEMANN.

Esta nota tem por fim exclusivo noticiar a atribuição do prémio que veio mais uma vez pôr em relevo os méritos do professor RUY LUÍS GOMES, de resto bem conhecidos do nosso meio matemático.

A Redacção da *Gazeta* felicita vivamente o seu Amigo e Colaborador Prof. RUY LUIZ GOMES e espera em futuro próximo fazer apreciação pormenorizada da obra premiada.

OBRAS COMPLETAS DE ÉLIE CARTAN

O Comité National Francês de Matemáticas continua a publicação das Obras completas de Élie Cartan. A edição compreenderá, sob a forma de reprodução fotográfica, a totalidade das notas e memórias, com exclusão dos volumes. O conjunto da obra compõe-se de tres partes: I — Grupos de Lie (já publicados); II — Sistemas diferenciais em problemas de equivalência; III — Geometria diferencial.

O Comité preparou a publicação da parte II, sob a forma de dois volumes, e, para tal, fez uma *subscrição internacional*. Os dois volumes compreenderão um total de cerca de 1365 páginas e podem ser adquiridas, ao *preço de subscrição* por 4.800 frs. — brochados ou 5.500 frs. — encadernados (os dois volumes, em conjunto). A subscrição será encerrada em 15 de Dezembro. Os preços de venda ao público em geral serão mais elevados. A subscrição pode fazer-se quer directamente ao Secretário do Comité: Prof. ANDRÉ LICHNEROWICZ, — Collège de France — ou à casa Gauthier-Villars, quer por intermédio da G. M.

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

Resoluções dos n.os 3625 a 3650 do fasc. 54:

3625

R: *É uma indeterminação do tipo* 1^∞. *Tomando o logaritmo neperiano:*

$$\lim_{x=0} \frac{1}{x^2} \cdot \log(\cos x) = \lim_{x=0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$$

Temos agora uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando duas vezes a regra de L'Hospital, *vem para valor deste último limite*: $-1/_2$. *Portanto, o verdadeiro valor da expressão dada é:*

$$\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

3626

R: *Verifica-se imediatamente que a função só existe no intervalo fechado* $(-1,1)$ *e que é simétrica em relação ao eixo dos* yy.

Com facilidade se deduz para ela esta outra expressão analítica:

$$y = (1-4x^2)\sqrt{1-x^2}$$

que nos mostra que a curva representativa corta o eixo dos xx *nos pontos de abcissas* -1, $-1/2$, $1/2$ *e* 1.

A 1.ª derivada da função tem o valor:

$$y' = \frac{3x(4x^2-3)}{\sqrt{1-x^2}}$$

Esta anula-se para $x=0$ *e ainda para* $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A segunda derivada tem por valor:

$$y'' = \frac{-3\cdot(8x^4-12x^2+3)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

que nos mostra que a função tem um máximo para $x=0$ *e mínimos para os outros valores de* x *que anulam a 1.ª derivada. Por seu lado, a 2.ª derivada anula-se para* $x = \pm 0,6 \left(\frac{\pm\sqrt{3-\sqrt{3}}}{2}\right)$ *onde a curva representativa apresenta pontos de inflexão.*

3627

R: *Obrigando a função* w *a tomar os valores indicados para os correspondentes valores de* z, *obtemos o sistema:*

$$\begin{cases} 2a + ci = 0 \\ 5a + 5b = 3c + 3d - 4ci - 4di \\ b + 2di = 0 \end{cases}$$

Fazendo, por exemplo, $c=2$, *vem para as outras constantes:*

$$a = -i;\ d = i;\ b = 2$$

A função dada pode, pois, escrever-se

$$w = \frac{-i+2z}{2+iz} = \frac{2x+(2y-1)i}{(2-y)+xi}.$$

Basta mostrar que, para valores de z *de módulo igual à unidade, os valores correspondentes de* w *têm também módulo igual à unidade.*

Como o módulo dum cociente é o cociente dos módulos:

$$\text{mod}\ w = \frac{\sqrt{4x^2+(2y-1)^2}}{\sqrt{(2-y)^2+x^2}} = \frac{\sqrt{5-4y}}{\sqrt{5-4y}} = 1$$

atendendo a que $x^2+y^2=1$.

3631

R: *Comparando o infinitésimo dado com* x, x^2 *e* x^3 *obtemos sempre um limite igual a zero, como se verifica fàcilmente.*

Mas:

$$\lim_{x=0}\frac{2\,\text{sen}^2 x/2 - x^2/2}{x^4} = \left[\frac{\text{sen}\,2x - x}{4x^3}\right]_{x=0} =$$
$$= \left[\frac{2\cos 2x - 1}{12x^2}\right]_{x=0} = \left[\frac{-\text{sen}\,2x}{3\cdot 2x}\right]_{x=0} =$$
$$= -\frac{1}{3} \neq 0.$$

A ordem de y *em relação a* x *é, pois, igual a* 4.

3632

R: *A expressão analítica da função mostra-nos que a sua imagem geométrica tem duas assíntotas paralelas ao eixo dos* yy $(x=0$ e $x=a)$ *e uma paralela ao eixo dos* xx $(y=0)$.

A 1.ª derivada é igual a $y' = -\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{(a-x)^2}$. *Igualando-a a zero, obtemos uma equação cujas raízes são* $x_1 = \frac{a^2}{a+b}$ *e* $x_2 = \frac{a^2}{a-b}$. *A 2.ª derivada é igual a* $y'' = \frac{2a^2}{x^3} + \frac{2b^2}{(a-x)^3}$. *Por substituição, verifica-se que a 2.ª derivada é positiva em* x_1 *e negativa em* x_2. *A imagem geométrica da função apresenta aí, pois, um mínimo e um máximo, respectivamente.*

Como o eixo dos xx *é uma assíntota, concluímos com facilidade que há um ponto de inflexão, de abcissa maior que* x_2.

3633

R: *Substituindo* z *por* $x+iy$, *vem:* $w = \frac{2x}{(1-y)^2+x^2} + i\,\frac{(1-y^2)-x^2}{(1-y)^2+x^2}$. *Portanto a função* w *toma valores reais para os pontos* (x,y) *tais que:* $x^2+y^2=1$ *que é uma circunferência de raio* 1, *com centro na origem dos eixos. A função* w *toma valores imaginários puros para os pontos* (x,y) *tais que:* $x=0$ *que é o eixo dos* yy.

Dos dois pontos de encontro do eixo dos xx *com a circunferência indicada só serve* $A\,(0,-1)$ *visto que para* $(0,1)$, w *vem indeterminada.*

Resoluções dos n.os 3625 a 3633 de J. H. Arandes

3637

R: *Para verificar que é um homomorfismo basta que, sendo* n *e* m *dois inteiros e* n′ *e* m′ *as suas imagens em* $\mathfrak{C}$, *seja* $n+m \to n'\cdot m'$, *o que é imediato atendendo à igualdade*

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+m}(1+i)^{n+m} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}(1+i)^{n}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{m}(1+i)^{m}.$$

Pelo teorema da homomorfia haverá então um invariante $\mathfrak{N}$ *em* R *tal que* $\mathfrak{C}$ *é isomorfo a* $R/\mathfrak{N}$, *este invariante é o conjunto dos inteiros* n *que correspondem ao elemento* 1 *de* $\mathfrak{C}$; *satisfazem por consequência à relação* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\cdot(1+i)^{n}=1$.

Passando o primeiro membro da igualdade anterior à forma trigonométrica resulta a igualdade equivalente

$$\cos\left(n\frac{\pi}{4}+2j\pi\right) + i\,\text{sen}\left(n\frac{\pi}{4}+2j\pi\right) = 1$$

que equivale por sua vez a $n\frac{\pi}{4} = 2k\pi$ (k *inteiro arbitrário) ou seja,* $n=8k$ *com* k *arbitrário. O conjunto* $\mathfrak{N}$ *é formado pelos múltiplos de* 8.

3638

R: *Basta provar que a relação*

$$\lambda\cdot(4,-2,-4)+\mu\cdot(6,-3,1)=(0,0,0)$$

implica $\lambda=0$ *e* $\mu=0$, *o que equivale a demonstrar que o sistema homogéneo*

$$\begin{cases} 4\lambda+6\mu=0 \\ -2\lambda-3\mu=0 \\ -4\lambda+\mu=0 \end{cases}$$

é determinado. De facto o determinante

$$\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

3642

R: *Suponhamos que* α *é limite inferior do conjunto dos números* η; *então* α *satisfaz às condições:*

$$1\begin{cases} \text{a) } \alpha \leqslant \eta \text{ qualquer seja } \eta \\ \text{b) se } \beta \leqslant \eta \text{ qualquer seja } \eta \text{ é } \beta \leqslant \alpha. \end{cases}$$

Vamos provar que as condições 1) *implicam*

$$2\begin{cases} \text{a) } \alpha \geqslant \xi \text{ qualquer seja } \xi \\ \text{b) se } \beta \geqslant \xi \text{ qualquer seja } \xi \text{ é } \beta \geqslant \alpha \end{cases}$$

que definem α *como limite superior do conjunto dos números* ξ. *Comecemos por observar que para cada* ξ *é* $\xi \leqslant \eta$, *qualquer seja* η; *por isso, atendendo a* 1. b) *resulta* 2. a). *Por outro lado, dado* $\beta \geqslant \xi$, *se fosse* $\beta < \alpha$

os números do intervalo (α, β), *que não são números* ξ *teriam de ser números* η *o que contradiz* 1. a). *É por conseguinte* $\beta \geqslant \alpha$. *De modo análogo se provaria que as condições* 2) *implicam as condições* 1). *As duas definições são portanto equivalentes.*

3643

R: a) *Pondo* $\mathfrak{G}'_1 \cap \mathfrak{H} = (\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{G}'_1$, *reconhece-se que* $\mathfrak{H}'_1 = \mathfrak{G}'_1 \cap \mathfrak{H}$ *é a intersecção do sub-grupo* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$ *com o invariante* $\mathfrak{G}'_1$ *em* $\mathfrak{G}_1$, *é por isso invariante no sub-grupo* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}$.

b) $\mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}'_1$ *é identico a* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}/(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}) \cap \mathfrak{G}'_1$ *que pelo primeiro teorema da isomorfia é isomorfo a* $(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}) \cdot \mathfrak{G}'_1/\mathfrak{G}'_1$. *Ora* $(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H}) \cdot \mathfrak{G}'_1/\mathfrak{G}'_1$ *é a imagem homomorfa de* $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$ *no homomorfismo* $\mathfrak{G}_1 \sim \mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}'_1$ *e e por isso sub-grupo de* $\mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}'_1$.

3647

R: *De modo análogo a* **3642**.

3648

R: *Pondo* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i = (\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}) \cap \mathfrak{G}_i$ *e, notando que* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}$ *e* $\mathfrak{G}_i$ *são respectivamente um sub-grupo e um invariante de* $\mathfrak{G}_i$, *conclui-se que* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i$ *é invariante em* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}$ *e por isso* $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G} \trianglerighteq \trianglerighteq \cdots \trianglerighteq \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_n = \mathfrak{E}$ *é uma série normal.*

Tomemos agora o factor desta serie

$$\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_i = \mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}/(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}) \cap \mathfrak{G}_i;$$

aplicando o primeiro teorema da isomorfia reconhece-se que o segundo membro daquela igualdade é isomorfo a $(\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}) \cdot \mathfrak{G}_i/\mathfrak{G}_i$ *que é um sub-grupo do factor da primeira série* $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$. *Tal sub-grupo é precisamente a imagem do sub-grupo de* $\mathfrak{G}_{i-1}$, $\mathfrak{H} \cap \mathfrak{G}_{i-1}$, *no homomorfismo canónico de* $\mathfrak{G}_{i-1}$ *sobre* $\mathfrak{G}_{i-1}/\mathfrak{G}_i$.

3649

R: *Representando por* x', *a imagem de* $\mathrm{x} \in \mathfrak{S}$ *teremos* $1 \cdot \mathrm{x} \longrightarrow 1' \cdot \mathrm{x}$ *visto que o endomorfismo é operatório e* $\mathfrak{S}$ *é considerado como módulo com operadores à direita em* $\mathfrak{S}$. *Como* $1 \cdot \mathrm{x} = \mathrm{x}$ *resulta então*

$$\mathrm{x}' = \mathrm{e} \cdot \mathrm{x} \qquad \mathrm{e} = 1' \in \mathfrak{S}.$$

Por outro lado é fácil reconhecer que a igualdade $\mathrm{x}' = \mathrm{e} \cdot \mathrm{x}$ *define um endomorfismo* $-\mathfrak{S}$, *de* $\mathfrak{S}$ *considerado como módulo com operadores à direita de* $\mathfrak{S}$.

Os endomorfismos considerados obtêm-se portanto multiplicando à esquerda os elementos $\mathrm{x} \in \mathfrak{S}$ *por um elemento arbitrário* $\rho \in \mathfrak{S}$.

3650

R: *Cada elemento* $\mathrm{x} \in \mathfrak{S}$ *tem a forma*

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{x}_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} \mathrm{x}_i$$

em que $\mathrm{x}_i \in \mathfrak{B}_i$ *sendo os* $\mathfrak{B}_i$ *ideais direitos simples e distintos de* $\mathfrak{S}$. *Em particular resulta para o elemento* 1,

$$1 = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2 + \cdots + \mathrm{e}_n$$

e podemos supor todos os e_i *não nulos.*

Desta relação tira-se

$$\mathfrak{S} = \mathrm{e}_1 \mathfrak{S} + \cdots + \mathrm{e}_i \mathfrak{S} + \cdots + \mathrm{e}_n \mathfrak{S}.$$

Ora $\mathrm{e}_i \mathfrak{S}$ *é o ideal direito gerado por* $\mathrm{e}_i \in \mathfrak{B}_i$ *e como não é nulo identifica-se com* $\mathfrak{B}_i$ *porque este ideal é simples.* $\mathfrak{S}$ *toma então a forma* $\mathfrak{S} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2 + \cdots + \mathfrak{B}_n$ *que é uma soma directa porque as parcelas são simples e distintas.*

Resoluções dos n.os 3637 a 3650 de S. Guerreiro.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame ordinário — 13 de Março de 1953 — Parte prática.

3559 — Determinar a equação binómia de coeficientes reais e grau mínimo que admite como raízes os dois números:

$$z_1 = \cos 5\pi/13 + i \cdot \operatorname{sen} 5\pi/13$$
$$z_2 = \cos 7\pi/9 - i \cdot \operatorname{sen} 7\pi/9 .$$

z_1 e z_2 são raízes primitivas? Justificar.

3560 — Calcular a e b de modo que os planos de equações:

$$\begin{aligned} x - y + 3z &= b \\ 7x + ay + z &= 8 \\ -5x + ay + 2z &= 0 \end{aligned}$$

pertençam ao mesmo feixe.

3561 — Averiguar da natureza da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, b^n}{(b+a_1) \cdot (2b+a_2) \cdots (nb+a_n)},$$

sabendo que a sucessão de termo geral a_n tende para $A > 1$, e b é positivo e menor que 1.

3562 — Dadas as rectas

$$r_1) \begin{cases} y = 1/2 \cdot (-x-3) \\ z = 1/2 \cdot (5x+1) \end{cases}$$

$$r_2) \begin{cases} 3x + y - z + 6 = 0 \\ -2x + y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$r_3) \quad \frac{x-7}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-4}{5}$$

a) provar que são as arestas duma superfície prismática triangular;

b) escrever as equações do lugar dos pontos do espaço que distam igualmente das três rectas.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — 1.º Exame extraordinário — 16 de Março de 1953 — Parte prática.

3563 — Resolver o sistema: $\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - z = 0 \\ x - z^2 = 0, \end{cases}$

apresentando as soluções na forma trigonométrica.

3564 — Determinar os pontos comuns aos três planos de equações:

$$\begin{aligned} x + ay + a^2z &= 1 \\ ax + a^2y + z &= 0 \\ a^2x + y + az &= 0 , \end{aligned}$$

sabendo que entre o adjunto e o recíproco do determinante formado pelos coeficientes que afectam as variáveis, existe a relação: $A + R = 0$.

3565 — Averiguar da natureza da série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdots(2n-1)\cdot(2n)}{2^n \cdot n^n}$$

3566 — Faz-se rodar uma recta r em torno de um dos seus pontos $P(2,1)$. Seja C o centro da circunferência de equação: $x^2+y^2-4x=0$ e A e B os pontos em que r intersecta a circunferência.

a) Determinar a expressão da área do triâgulo variável $[ABC]$;

b) Determinar a equação do lugar do baricentro do triângulo.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **2.º exame de frequência ordinário — 1 de Julho de 1953 — Parte prática.**

3567 — Considere-se a representação gráfica da função $y = \dfrac{12x^3+4x^2-3x-1}{x+1}$.

a) Determinar as intersecções com o eixo das abscissas, e os sinais da função nos intervalos de que estes pontos são extremos; *b)* Estudar a sua posição em relação às assíntotas; *c)* Contar e separar os pontos de estacionaridade, averiguando se se trata de máximos ou mínimos, e calcular com um decimal exacto o valor da abscissa de um deles; *d)* Esboçar a representação gráfica.

3568 — *a)* Deduzir a equação da parábola que passa pelos focos da cónica: $16x^2+25y^2-400=0$, e pelo ponto A (2, — 1), onde admite a tangente: $y+1=0$; *b)* Calcular a distância do foco da parábola à directriz; *c)* Escrever as equações das tangentes tiradas pelo ponto B (5,0).

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **2.º exame de frequência extraordinário — 3 de Julho de 1953 — Parte prática.**

3569 — Dada a função $y = log\,(x^4-8x^3+3x^2+32x-28)$: *a)* Determinar os intervalos em que é definida e os valores que toma nos seus extremos; *b)* Recorrendo ao teorema de Sturm, provar que existe apenas um ponto de estacionaridade; indicar se se trata de um máximo ou de um mínimo, e calcular a sua abscissa com um decimal exacto; *c)* Esboçar a representação gráfica.

3570 — Considere-se a quádrica de equação:

$$4x^2+z^2-8x+2\sqrt{2}\,yz+4z+1=0 .$$

a) Classifica-la; b) Escrever as equações dos seus planos de simetria; c) Indicar precisamente como se poderia calcular o valor de B_{23}, mantendo os outros coeficientes, para que a equação representasse uma quádrica de revolução.

Enunciados dos n.os 3559 a 3570 de F. Alves da Silva

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3650 — Se uma recta, r, tirada do vértice C do triângulo ABC divide ao meio a mediana tirada do vértice A, então essa recta r divide o lado AB na razão $1:2$.

3651 — Determine os pontos comuns a todas as circunferências $(x-a)(x-3)+y(y-4-a)=0$.

Secção Média

3652 — Designando por $[x]$ o maior inteiro contido em x, demonstrar que, sendo n um inteiro positivo e x um número real se tem sempre

$$[nx] = [x] + \left[x+\frac{1}{x}\right] + \left[x+\frac{2}{x}\right] + \cdots + \left[x+\frac{n-1}{n}\right] .$$

3653 — Seja $f(x)$ um polinómio de grau n, de coeficientes inteiros, e α uma raíz da equação $f(x)=0$. Mostre que todo o polinómio $g(\alpha)$ de coeficientes racionais se pode escrever sob a forma $a_0+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, onde $a_0, a_1, \cdots a_{n-1}$ são números racionais.

Secção Superior

3654 — Mostre que se a e b são elementos do do grupo multiplicativo $\mathfrak{G}$, então existem em $\mathfrak{G}$ elementos x e y tais que $abx=ba$ e $yab=ba$ (comutadores do par a, b). Que relação existe entre os comutadores dos pares $a^{-1}b^{-1}$ e $b^{-1}a^{-1}$?

3655 — Determinar a forma geral das funções $f(x, y, z, p, q)$ para os quais, as equações diferenciais das características da equação $f=0$ admitem a combinação integrável $d\left(\dfrac{q}{p}\right)=0 \quad \left(p=\dfrac{\partial z}{\partial x}, q=\dfrac{\partial z}{\partial z}\right)$.

N. R. — No próximo número da «Gazeta» serão publicadas as soluções dos problemas propostos no fascículo anterior.

A Redacção

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas extrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

Em 1889, o eminente matemático alemão, DAVID HILBERT publicou a primeira edição de «Grundlagen der Geometrie» que teve enorme repercussão em todo o mundo científico e foi logo traduzida em todas as línguas dos países civilizados, mas não fora ainda traduzida em português, o que não era honroso para a nossa cultura.

A Senhora Dr.ª D. MARIA PILAR RIBEIRO, em colaboração com o Dr. JOSÉ PAULO, traduzindo para português aquela obra de HILBERT e o Instituto para Alta Cultura editando a tradução, prestaram um relevante serviço ao nosso país e merecem, por isso, justos louvores. A estes louvores, devo associar o nome Dr. HUGO RIBEIRO, actualmente professor da Universidade de Nebraska, na América que, em 1947, dirigiu as sessões de seminário, às quaes eu tive a honra de assistir, onde foi estudado um capítulo de «Grundlagen der Geometrie» e que serviu de base à tradução, como o afirmam, de resto, os próprios tradutores.

A tradução está feita com muita clareza e o volume apresenta-se bem impresso.

Foi pena que não tivessem sido traduzidos os apendices de «Grundlagen der Geometrie». É certo que na última página de «Fundamentos da Geometria» estão indicadas as revistas donde foram extraídos. Mas eu suponho que essas revistas não existem em Portugal, além de que, sendo os artigos escritos em alemão, são pouco acessíveis à leitura dos estudiosos portugueses.

Pela minha parte, lamento a economia que resultou de ter sido suprimida a tradução desses apendices.

O Instituto para Alta Cultura completaria o serviço que prestou, se promovesse a tradução desses artigos e os publicasse em separata.

Quanto à tradução de «Grundlagen der Geometrie», atrevo-me a fazer um ligeiro reparo, sem mesmo saber, dada a minha total ignorância da língua alemã, se esse reparo terá consistência e mesmo, neste caso, é um reparo de somenos importância que em nada afecta as virtudes da tradução, à qual presto a minha homenagem.

Ao primeiro grupo de axiomas, estabelecidos por HILBERT, de 1—8, foi dado em «Fundamentos de Geometria» o nome de axiomas de incidência.

Em «Puntos criticos de la Matemática contemporánea», à página 102, F. VERA, a respeito deste grupo de axiomas, diz: «Los axiomas siguientes completan el primer grupo llamado de pertenencia: verknüpfund». L. GODEAUX, em «Les Geometries», à página 112, chama, ao mesmo grupo de axiomas, «axiomes d'association».

Não teria sido preferível, em vez de termo incidência, escolher um termo mais afim com os termos em espanhol ou em francês?

Este reparo, mesmo que tenha consistência, é de somenos importância, repito. O que interessa são as ideias e não as designações; como disse EÇA DE QUEIROZ, «As palavras são apenas o esqueleto das ideias».

A crítica aos conceitos fundamentais da matemática e aos seus métodos vinha de longe e também a geometria não estava a coberto dessa crítica.

As numerosas tentativas, realizadas durante séculos, para demonstrar o postulado das paralelas; a negação desse postulado sucessivamente por LOBATCHEWSKY e por RIEMANN que desse modo criaram duas geometrias, diferentes entre si e diferentes da de EUCLIDES; as críticas de VERONESE, PASCH e outros ao de postulados da Geometria de Euclides; a axiomatização da aritmética por FREGE e por PEANO; levaram HILBERT a proceder à axiomatização da geometria, isto é, transformá-la numa teoria dedutiva.

Estabelecidos os grupos de axiomas para fundamento da geometria como teoria dedutiva, HILBERT, demonstrou que esses axiomas eram independentes. O método seguido por HILBERT, embora trabalhoso, foi simples. Consistiu em constituir grupos de axiomas independentes uns dos outros e extrair, de cada sistema, as conclusões necessárias, embora seja, por vezes, impossível determinar todas as consequências. E, para cada axioma, em cada grupo, considerar válidos todos os restantes com excepção daquele de que se quer demonstrar a independência, construindo, deste modo, uma geometria parcial.

Por este processo demonstrou HILBERT que o postulado das paralelas era um postulado independente dos várias sistemas de axiomas que estabeleceu.

Em quanto que LOBATCHEWSKY e RIEMANN negaram o postulado das paralelas, HILBERT foi mais longe e mostrou a independencia desse postulado. Quer dizer: não é possível demonstrar o postulado das paralelas, baseando-se nos sistemas de axiomas que fundamentam a geometria Euclidiana.

Para demonstrar que o sistema de axiomas que foi adoptado era coerente, isto é, não conduzia a nenhuma contradição, estabeleceu HILBERT uma correspondência biunívoca entre os axiomas geométricos e a sua representação analítica.

Se houvesse entre os axiomas geométricos admitidos, qualquer contradição, ela seria denunciada por contradições entre as proposições analíticas que lhes correspondiam.

E, por isso, a axiomatização da aritmética realizada por FREGE e por PEANO, que estabeleceram teorias analíticas do número real, independentemente de qualquer representação geométrica, garantiam a não contradição das proposições analíticas utilizadas. Isto é, HILBERT aceita a não contradição do sistema de postulados que adoptou para fundamentar a geometria Euclidiana, tomando por base a não contradição da teoria dos números reais, estabelecida anteriormente por FREGE e PEANO.

BROUWER, o ilustre criador da lógica trivalente que é designada pelo seu nome, (lógica Brouweriana) não se mostra muito convencido do rigor deste processo de demonstração quando afirma:

«...a false theory which is not stopped by a contradiction is none the less false, just as a criminal policy uncheked by a reprimanding court is none the less criminal.»

Em 1931, o matemático e logístico GÖDEL demonstrou que a não contradição de uma teoria não é demonstrável dentro da própria teoria, o que veio abrir uma forte crise nas teorias formalistas da matemática, dar razão às dúvidas postas por BROUWER e ao neo-intuicionismo.

Como não podia deixar de ser os casos de congruência de triângulos foram demonstrados por HILBERT sem recorrer ao chamado método de sobreposição.

Com efeito, o método de sobreposição, pelas numerosas críticas que sofrera anteriormente, não era considerado um método demonstrativo com validade.

Actualmente, e depois da crítica verdadeiramente destrutiva que lhe fez RUSSELL, nenhum tratadista da geometria, com autoridade, o usa; foi postergado da geometria, mesmo elementar.

No relatório com o título «The teaching of geometry in schools» da Mathematical Association, de Inglaterra (1.ª edição, em 1923), onde são dados conselhos aos professores para o ensino da geometria, dividido em vários estádios, conforme a idade dos alunos, há este conselho:

«The method of superposition not be used at any stage.»

Também o professor americano J. SWENSON em «Graphic methods of teaching congruence in geometry», acerca do método de sobreposição, afirma:

«The mathematician does not consider the method of proof by superposition very satisfactory. The psychologist says we should introduce no unnecessary habits in connection with the processes of learning. The use of superposition in surely one of these unnecessary habits because it is a barely introduced before it is discarded.»

Infelizmente, em Portugal o método de sobreposição resiste *vitoriosamente* a todas as críticas que lhe têm sido feitas e aparece *triunfante* nos nossos compêndios de geometria para o ensino secundário.

Por esta e outras razões «Fundamentos da Geometria» destinam-se a prestar um serviço inestimável à cultura nacional e a sua leitura atenta deverá influir poderosamente, para uma melhor compreensão da geometria e dos métodos da matemática, a que corresponderá uma melhoria no ensino desta disciplina.

Antes de terminar esta breve notícia transcreverei as primeiras linhas do texto de «Fundamentos da Geometria».

«*Definição.* Imaginemos três sistemas de objectos: aos objectos do primeiro sistema chamemos pontos e representemo-los por A, B e $C, \ldots$; aos objectos do segundo sistema chamemos rectas e representemo-los por $a, b, c, \ldots$; aos objectos do terceiro sistema chamemos planos e representemo-los por $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$»

Os ilustres tradutores de «Grundlagen der Geometrie» não recearam chamar *objectos* a entidades geométricas, como eu também já tivera ocasião de fazer, tendo sido criticada, por esse motivo, por duas *autoridades* nestes assuntos. Veja-se o meu artigo «Os poliedros não são objectos?» (Labor N.º 116).

Maria Teodora Alves

GAZETA DE MATEMÁTICA

Três números publicados em 1952

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1953 (3 números) 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.ºs 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1953 quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.ºs 12 e 15 a 49, cada número	12$50
N.º 50	60$00
N.ºs 51 a 55, cada número	17$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:

EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D. — Lisboa-N — Telef. 55282