GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO XIII — N.° 53 — DEZEMBRO 1952

SUMÁRIO

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N.

TIPOGRAFIA MATEMATICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA-N. — Telef. 55 282

ANO XIII — N.º 53 **GAZETA DE MATEMÁTICA** DEZEMBRO — 1952

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

REDACTORES ADJUNTOS: *J. Gaspar Teixeira, J. Morgado e J. da Silva Paulo*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Sobre um teorema de Kakeya*

por **Fernando Roldão Dias Agudo**

Observação prévia: Para não deixar passar o prazo do concurso o presente trabalho teve de ser dactilografado à medida que se iam encontrando os resultados, o que ocasionou o aparecimento de algumas conclusões em aditamento. Ainda pelo mesmo motivo insere-se na presente publicação um segundo aditamento com resultados que não chegaram a aparecer no trabalho apresentado em Setembro de 1947.

1. O teorema de KAKEYA.

Considere-se o polinómio $f(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+\cdots+p_{n-1} z+p_n \, (p_0 \neq 0)$ e designe-se por $\Sigma(\lambda)$, com $\lambda>0$, a expressão

$$\Sigma(\lambda)=\frac{|p_n|}{|p_0|\,\lambda^{n-1}}+\frac{|p_{n-1}|}{|p_0|\,\lambda^{n-2}}+\cdots+\frac{|p_2|}{|p_0|\,\lambda}+\frac{|p_1|}{|p_0|}$$

Se $\zeta \neq 0$ é uma raíz de $f(z)$, de módulo ρ, tem-se

$$-p_0\cdot\zeta^n=p_n+p_{n-1}\zeta+\cdots+p_1\zeta^{n-1}$$

ou

$$-\zeta=\frac{p_n}{p_0\zeta^{n-1}}+\frac{p_{n-1}}{p_0\zeta^{n-2}}+\cdots+\frac{p_2}{p_0\zeta}+\frac{p_1}{p_0}$$

donde

$$\rho \leqslant \Sigma(\rho).$$

Nestas condições se $\rho>\lambda$, é $\Sigma(\rho)<\Sigma(\lambda)$ e portanto $\rho<\Sigma(\lambda)$; se $\rho>\Sigma(\lambda)$, tem-se $\Sigma(\rho)>\Sigma(\lambda)$ e consequentemente $\rho<\lambda$, o que nos permite afirmar:

I. **Nenhum zero de $f(z)$ excede em módulo um dos números λ e $\Sigma(\lambda)$ sem ficar inferior ao outro.**

I_1. Os módulos dos zeros de $f(z)$ são excedidos pelo maior dos números λ e $\Sigma(\lambda)$ [limite de PERRON] (1). Em particular, pondo $\lambda=1$:

I_2. O maior dos números 1 e $\Sigma(1)=\frac{1}{|p_0|}(|p_n|+|p_{n-1}|+\cdots+|p_1|)$ é limite excedente dos módulos das raízes de $f(z)$.

Multiplicando $f(z)$ por $z-\alpha$ vem

$$g(z)=(z-\alpha)f(z)=p_0 z^{n+1}-(\alpha p_0-p_1)z^n-\cdots-(\alpha p_{n-1}-p_n)z-\alpha p_n=g_0 z^{n+1}+\cdots+g_{n+1}.$$

Se $p_0>p_1>\cdots>p_n>0$, as razões $\frac{p_{i+1}}{p_i}$ são inferiores a algum número $\alpha<1$ e portanto, com esse valor de α,

$$|g_0|=p_0\ ;\quad |g_i|=\alpha p_{i-1}-p_i\quad (1\leqslant i\leqslant n)\ ;$$
$$|g_{n+1}|=\alpha p_n,$$

o que dá, para $g(z)$,

$$\Sigma(1)=\frac{1}{|g_0|}(|g_1|+\cdots+|g_{n+1}|)=$$
$$=\frac{1}{p_0}(\alpha p_0-p_1+\alpha p_1-p_2+\cdots+\alpha p_{n-1}-p_n+\alpha p_n)=$$
$$=\frac{1}{p_0}[\alpha p_0+\alpha(p_1+\cdots+p_n)-(p_1+\cdots+p_n)]=$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{p_0}(p_1+\cdots+p_n)<\alpha<1$$

e os módulos dos zeros de $g(z)$ não podem atingir a unidade [por I_2]. E como os zeros de $f(z)$ são precisamente os de $g(z)$ (à parte α), segue-se que os zeros de $f(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+\cdots+p_n$ são de módulo inferior à unidade sempre que $p_0>p_1>\cdots>p_n>0$.

Tal é o teorema de KAKEYA.

---

* Trabalho a que foi atribuído o prémio Nacional Doutor Francisco Gomes Teixeira.

(1) Observe-se, porém, que se pode ter $\rho=\lambda$ quando $\lambda=\Sigma(\lambda)$.

2. Algumas generalizações.

O objecto do presente trabalho é estudar alguns casos em que se verifique a igualdade de coeficientes consecutivos de $f(z)$.

Antes de mais, se $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n > 0$, e pondo

$$g(z) = (z-1)f(z) = p_0 z^{n+1} + (p_1 - p_0) z^n + \cdots + (p_n - p_{n-1}) z - p_n$$

tem-se

$$\Sigma(1) = \frac{1}{|g_0|}(|g_1| + \cdots + |g_{n+1}|) = \frac{1}{p_0}[(p_0 - p_1) + (p_1 - p_2) + \cdots + (p_{n-1} - p_n) + p_n] = 1$$

o que nos permite concluir:

I. As raízes de $f(z)$ não excedem em módulo a unidade, podendo haver raízes de módulo igual a 1 [v, obs. a 1, I_1].

Supondo agora que se tem, mais particularmente,

$$p_0 > p_1 > \cdots > p_k = p_{k+1} > \cdots > p_n > 0$$

vem

$$g(z) = (z-\alpha)f(z) = p_0 z^{n+1} - (\alpha p_0 - p_1) z^n - \cdots - (\alpha p_k - p_{k+1}) z^{n-k} - \cdots - \alpha p_n$$

com

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} < \alpha < 1 \qquad (i \neq k) \quad , \qquad \frac{p_{k+1}}{p_k} = 1$$

e por conseguinte

$|g| = p_0$; $|g_i| = \alpha p_{i-1} - p_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n; i \neq k+1)$; $|g_{k+1}| = p_{k+1} - \alpha p_k = (1-\alpha) p_k$; $|g_{n+1}| = \alpha p_n$, o que dá

$$\Sigma(1) = \frac{1}{|g_0|}(|g_1| + \cdots + |g_{n+1}|) = \frac{1}{p_0}[(\alpha p_0 - p_1) + (\alpha p_1 - p_2) + \cdots + (\alpha p_{n-1} - p_n) + \alpha p_n + 2(p_{k+1} - \alpha p_k)] =$$

$$= \frac{1}{p_0}[\alpha p_0 + \alpha(p_1 + \cdots + p_n) - (p_1 + \cdots + p_n) + 2(1-\alpha)p_k] = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}[(p_1 + \cdots + p_n) - 2p_k].$$

Pode então afirmar-se

II. Se $k \geqslant 1$, $\Sigma(1) = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}(p_1 + \cdots + p_{k-1} + p_{k+2} + \cdots + p_n)$ e as raízes de $f(z)$ continuam, em módulo, inferiores à unidade.

II_1. Se $k = 0$, *i.e.*, $p_0 = p_1 > p_2 > \cdots > p_n > 0$.

$$\Sigma(1) = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}(p_1 + \cdots + p_n - 2p_0) = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}(p_2 + \cdots + p_n - p_0)$$

e pode dizer-se que o módulo das raízes não atinge a unidade quando $\sum_{i=2}^{n} p_i \geqslant p_0$. Quando $\sum_{i=2}^{n} p_i < p_0$ nada se pode afirmar.

Para o trinómio $p_0 z^2 + p_1 z + p_2$ com $p_0 = p_1 > p_2 > 0$ é sempre $\sum_{i=2}^{n} p_i < p_0$ mas é fácil verificar que as raízes não atingem em módulo a unidade.

Com efeito, $\zeta = \frac{-p_1 \pm \sqrt{p_1^2 - 4p_0 p_2}}{2p_0}$; se $p_1^2 \geqslant 4p_0 p_2$, o módulo da raíz de maior módulo vem a ser

$$\rho = \frac{p_1 + \sqrt{p_1^2 - 4p_0 p_2}}{2p_0} < \frac{p_1 + p_1}{2p_0} = 1;$$

e se $p_1^2 < 4p_0 p_2$, $\zeta = \frac{1}{2p_0}(-p_1 \pm i\sqrt{4p_0 p_2 - p_1^2})$ e

$$\rho = \frac{1}{2p_0}\sqrt{p_1^2 + 4p_0 p_2 - p_1^2} < \frac{1}{2p_0}\sqrt{4p_0^2} = 1.$$

*
* *

Prosseguindo na nossa análise, suponha-se que $p_0 > p_1 > \cdots > p_k = p_{k+1} > \cdots > p_l = p_{l+1} > \cdots > p_n > 0$.

Temos, como anteriormente,

$$\frac{1}{|g_0|}(|g_1| + \cdots + |g_{n+1}|) = \frac{1}{p_0}[(\alpha p_0 - p_1) + (\alpha p_1 - p_2) + \cdots + (\alpha p_{n-1} - p_n) + \alpha p_n + 2(1-\alpha)(p_k + p_l)] = \alpha - \frac{1-\alpha}{p_0}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i - 2(p_k + p_l)\right]$$

e as raízes de $f(z)$ mantêm-se interiores ao círculo unitário de centro na origem quando $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p_k + p_l$. É o que sucede, em particular, sempre que $l > k+1 > 1$. Generalizando, podemos afirmar:

III. As raízes de $f(z) = p_0 z^n + \cdots + p_{n-1} z + p_n$ com $p_0 > \cdots > p_k = p_{k+1} > \cdots > p_l = p_{l+1} > \cdots > p_m = p_{m+1} > \cdots = \cdots > p_s = p_{s+1} > \cdots > p_n > 0$ são de módulo inferior à unidade quando se tenha

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p_k + p_l + p_m + \cdots + p_s.$$

A análise que fizémos não nos permite tirar qualquer conclusão quando

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} p_i < p_k + p_l + p_m + \cdots + p_s.$$

Para terminar,

a) Se $p_0 = p_1 = \cdots = p_n > 0$, a equação $f(z) = 0$ pode escrever-se $z^n + z^{n-1} + \cdots + z + 1 = 0$ e as raízes dispõem-se todas sobre o círculo unitário (porque o produto dos módulos das raízes deve ser 1).

b) $f(z)=p_0 z^n+\cdots+p_{n-1}z+p_n$ com $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n > 0$ terá a raiz -1 quando e só quando n for ímpar e $p_0=p_1 \geqslant p_2=p_3 \geqslant \cdots \geqslant p_{n-1}=p_n$, como imediatamente se reconhece.

3. Aditamento a 2, II$_1$, e III.

Se $k=0$ podemos escrever

$$\Sigma(1)=\alpha-\frac{1-\alpha}{p_0}(p_2+\cdots+p_n)+1-\alpha=$$
$$=1-\frac{1-\alpha}{p_0}(p_2+\cdots+p_n)$$

e o módulo das raízes é inferior à unidade desde que $n \geqslant 2$.

Do mesmo modo a condição $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i \geqslant p_k+p_l+$ $+p_m+\cdots+p_s$ referida em 2, III, pode ser substituída, quando $k=0$, pela condição $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i > p_l+$ $+p_m+\cdots+p_s$.

E assim como a 1.ª condição permite concluir que as raízes continuam, em módulo inferiores à unidade se não há mais que dois coeficientes consecutivos iguais e $p_0>p_1$, a 2.ª condição leva-nos a afirmar que tal conclusão subsiste mesmo que $p_0=p_1$, excepto no caso $p_0=p_1>p_2=p_3>\cdots>p_{n-1}=p_n$ (n ímpar) em que $\zeta=-1$.

4. 2.º Aditamento (*)

Como se viu no § 2, podemos escrever, referindo-nos ao polinómio $g(z)=(z-\alpha)f(z)$,

$$\Sigma(1)=\frac{1}{p_0}\left[\alpha p_0+(\alpha-1)\sum_{1}^{n} p_i+2\sum_{j}(p_{j+1}-\alpha p_j)\right]$$

com $\alpha<1$ e desde que se designem com o índice j todos os coeficientes que fazem $\frac{p_{j+1}}{p_j}=1$.

(*) Este aditamento não figurava no trabalho apresentado a concurso.

Temos portanto

$$\Sigma(1)=\alpha+\frac{\alpha-1}{p_0}\sum_{1}^{n} p_i+\frac{2(1-\alpha)}{p_0}\sum p_j=$$
$$=\alpha-\frac{1-\alpha}{p_0}\left[\sum_{1}^{n} p_i-2\sum p_j\right]=$$
$$=\alpha+\frac{1-\alpha}{p_0}\left[2\sum p_j-\sum_{1}^{n} p_i\right]$$

donde

$$\Sigma(1)<\alpha \text{ quando } \sum_{1}^{n} p_i \geqslant 2\sum p_j$$
$$\text{e } \Sigma(1)<1 \text{ quando } \sum_{1}^{n} p_i > 2\sum p_j-p_0 .$$

A 2.ª condição é mais útil e permite-nos concluir que as raízes de $f(z)=p_0 z^n+p_1 z^{n-1}+\cdots+p_{n-1}z+p_n$ com $p_0 \geqslant p_1 \geqslant \cdots \geqslant p_n > 0$ tem módulo inferior a 1 quando

$$\sum_{0}^{n} p_i > 2\sum p_j , \qquad i \cdot e \cdot , \qquad \sum p_l > \sum p_j$$

designando por p_l todos os coeficientes seguidos do sinal $>$ e ainda o último e por p_j os coeficientes seguidos do sinal $=$.

$$\text{Se } \sum p_l=\sum p_j,\ 2\sum p_j=\sum_{1}^{n} p_i+p_0 \text{ e } \Sigma(1)=1;$$

$$\text{Se } \sum p_l<\sum p_j,\ 2\sum p_j>\sum_{1}^{n} p_i+p_0 \text{ e } \Sigma(1)>1$$

e em qualquer dos casos pode haver — mas não há necessàriamente — raízes de módulo igual a 1. Com $f_1(z)=z^2+z+1$ é $\sum p_l<\sum p_j$ e, para todas as raízes, $\rho=1$; mas com $f_2(z)=8z^3+8z^2+8z+3$ e $f_3(z)=2z^4+z^3+z^2+z+1$ todas as raízes têm módulo inferior à unidade, embora seja $\sum p_l<\sum p_j$ no 1.º caso e $\sum p_l=\sum p_j$ no segundo [1].

[1] As raízes de f_2 são $-1/2$ e $\frac{1\pm i\sqrt{11}}{4}$; quanto a f_3 aplique-se o método de COHN — *Álgebra Superior* — VICENTE GONÇALVES — 2.º vol., pág. 479.

Matemática pura e Matemática aplicada

por ***A. Pereira Gomes***

Attaché de Recherches du Centre National de la Recherche Scientifique

Entre os aficionados da matemática aplicada e os da matemática pura ouvem-se por vezes discussões, sobre o papel, a importância e as relações mútuas dos dois campos matemáticos, nas quais mais aparente é o menosprezo recíproco (ou o desconhecimento?) do que um real desejo de encontrar uma plataforma de entendimento.

Parece valer a pena tratar deste assunto nas páginas da *Gazeta de Matemática*, onde desde já queremos registar alguns comentários.

São conhecidos no nosso país (e também fora dele) os largos esforços de actualização que em certos domínios fundamentais de matemática pura foram feitos, alguns anos atrás, nos Centros de Estudos Matemáticos de Lisboa e Porto, e que hoje são prosseguidos, ainda que através dificuldades múltiplas, pela Junta de Investigação Matemática. Teria sido feito um esforço paralelo no domínio da matemática aplicada? Em todo o caso nenhum eco dum tal movimento de actualização se repercutiu no *Boletim da S. P. M.*, ou nas páginas da *G. M.* que é uma revista «dos estudantes de Matemática das Escolas Superiores» portuguesas.

Ora em quase todas estas Escolas Superiores o ensino da matemática tem em vista a sua aplicação às diferentes técnicas, sendo portanto natural que os cursos de matemática pura estejam subordinados aos da matemática aplicada. Nas Faculdades de Ciências, nos cursos que constituem a licenciatura em Matemática, uma tal subordinação poderia à primeira vista supor-se inexistente. No entanto, quando se compara o volume de matérias que constituem essa licenciatura, no campo da matemática aplicada e no da matemática pura, verificamos ainda aqui a posição privilegiada que ocupa a matemática aplicada (Geometria Descritiva, Mecânica Racional, Cálculo das Probabilidades. Astronomia, Geodesia, Mecânica Celeste, Física Matemática). De resto, a própria estrutura desta licenciatura o confirma, pois aí vemos, nos dois últimos anos, os estudos de Matemática pura cederem o passo quase por completo às aplicações dos cursos de introdução feitos nos dois anos anteriores.

Nestas condições, não será sem dúvida desprovido de interêsse indagar, entre outras, as razões por que a *G. M.*, àparte os pontos de exame e uma colaboração esporádica vinda geralmente do estrangeiro, oferece o aspecto duma revista destinada a leitores alheados das aplicações da matemática.

Poderia talvez ser-se tentado a dar como explicação imediata o facto de os fundadores e colaboradores iniciais desta revista se interessarem sobretudo pela matemática pura. Mas como explicar então que do forte predomínio das matemáticas aplicadas no quadro de estudos matemáticos das Universidades portuguesas não tenha resultado um «élan» que levasse ao aparecimento de novos colaboradores vindos dos diferentes sectores da matemática aplicada? Por quê, também, na correspondência dos leitores, nunca se reclamou contra esta situação, que bem poderia ser julgada como uma carência pelos alunos das nossas Universidades. Ter-se-iam eles sequer apercebido disso?

É certo que os jóvens solicitados pelas aplicações da matemática se não propõem, em geral, uma licenciatura em matemática, mas um diploma de engenheiro. Mas isso não subtrai nada à força das interrogações anteriores, a menos que se admita que os candidatos a engenheiros frequentando as nossas Universidades consideram os conhecimentos matemáticos especializados como uma bagagem inútil, entre outras, para a sua preparação profissional. Muito me custaria ter de aceitar esta suposição como exacta.

Seja como for, parece inegável existir em Portugal um profundo divórcio entre os estudiosos da matemática pura e os da matemática aplicada, que muito dificulta o encontro dum terreno comum de colaboração. E no entanto essa colaboração é duma importância capital. Será ela imediatamente realizável?

Para responder com propriedade a tal pergunta seria necessário saber se se dispõe duma gama suficientemente graduada de matemáticos, cada um especializado no seu domínio, que possa assegurar uma espécie de ligação em cadeia, desde os ramos mais abstractos da matemática moderna às técnicas matemáticas que hoje servem os engenheiros.

Há aí, creio, matéria para reflectir. No sentido de acentuar o interêsse desta questão e de estimular iniciativas que venham ao encontro dela, damos aos leitores da *G. M.* a tradução dum artigo de Theodore von Kármán, que abre o n.º 1 do *Quaterly of Applied Mathematics* [Abril, 1943]: *Forjar matemáticas para engenheiros.* Nele assistimos a uma discussão entre um matemático e um engenheiro, conduzida a um nível elevado, com um certo humor... e competência.

Agosto 1952

Forjar Matemática para Engenheiros*

por Theodore von Kármán

Muitas vezes se tem dito que um dos primeiros objectivos da Matemática é de fornecer aos físicos e engenheiros os instrumentos para a solução dos seus problemas. Da história das Ciências Matemáticas ressalta como evidente que muitas descobertas matemáticas fundamentais foram iniciadas pelo impulso para compreender as leis da natureza e muitos métodos matemáticos foram inventados por homens

* Quaterly of Applied Mathematics, n.º 1 (April 1943), p. 2-6.

interessados pelas aplicações práticas. Não obstante todo o verdadeiro matemático sentirá que a restrição da pesquisa matemática aos problemas que têm aplicações imediatas seria uma injustiça para a «Rainha das Ciências». Na verdade, os devotos «minnesingers» da Rainha têm-se revoltado muitas vezes contra a degradação da sua «senhora» a uma posição de «ajudante» das suas irmãs de feição mais prática, e ocasionalmente mais prósperas.

Não é difícil compreender as razões para uma troca de pontos de vista de matemáticos e engenheiros. Elas foram indicadas mais de uma vez por representantes de ambas as profissões.

O matemático diz ao engenheiro: Eu levantei uma construção sobre sólidas fundações: um sistema de teoremas baseados sobre postulados bem definidos. Aprofundei a análise dos processos do pensamento lógico para descobrir se existem ou não proposições que possam ser consideradas verdadeiras ou pelo menos potencialmente verdadeiras. Interesso-me por relações funcionais entre entidades que são criações bem definidas do meu próprio espírito e por métodos que me habilitam a explorar vários aspectos de tais relações funcionais. Se vós achais úteis para o vosso trabalho diário alguns dos conceitos, processos lógicos ou métodos que eu desenvolvi, certamente me regozijarei. Todos os meus resultados estão à vossa disposição, mas deixai-me prosseguir os meus próprios objectivos pelas vias que me são próprias.

Diz o engenheiro: Os vossos grandes antepassados, que foram matemáticos bem antes de vós, falavam uma outra linguagem. Leonardo Euler não distribuíu o seu tempo entre descobertas em matemáticas puras e na teoria de invenções de engenharia? Os fundamentos da teoria das turbinas, a teoria da flexão de colunas, a teoria da cravação de estacas no solo foram contribuições de Euler. O desenvolvimento da análise matemática não pode ser separado do desenvolvimento da física, especialmente do da mecânica. É duvidoso se um espírito humano poderia jamais ter concebido a ideia das equações diferenciais sem o acicate de encontrar um instrumento matemático para a determinação da trajectória dos corpos móveis. Se se supõe que o movimento é determinado por certas relações fundamentais mecânicas ou geométricas, que são válidas a cada instante do movimento, é-se naturalmente conduzido à ideia da equação diferencial. Também o cálculo das variações foi inventado principalmente para a solução de problemas físicos; alguns dos quais eram de natureza teleológica, outros de natureza prática. O século dezóito e as primeiras décadas do século dezanove foram talvez o período de mais glorioso progresso na ciência matemática; nesses tempos não havia distinção entre matemáticos puros e matemáticos aplicados. Posteriormente, os matemáticos de espírito abstracto consideraram que o grosso do trabalho estava feito; eles trataram de preencher certas lacunas lógicas, de sistematizar e codificar a abundância de métodos que os gigantes do período anterior tinham criado por uma combinação do pensamento lógico e da intuição criadora.

O matemático: Parece que vós subestimais a importância do que chamais sistematização e codificação. Não pensais que, a fim de assegurar uma aplicação correcta do cálculo e das equações diferenciais, era de absoluta necessidade definir exactamente o que significa o processo dos limites? Ou não era necessário dar um sentido preciso a termos tais como infinitamente pequeno ou infinitamente grande? Podeis recordar-vos que Galileu — que dificilmente podereis chamar matemático puro ou abstracto — poz em relêvo as contradições que são inevitáveis se se tenta aplicar as noções de igualdade e desigualdade a quantidades infinitas. Ele notou que ou se pode dizer que o número de inteiros é maior do que o número de quadradros, pois cada quadrado é um inteiro, mas nem todos os inteiros são quadrados; ou se pode dizer, com a mesma justificação, que há tantos quadrados como inteiros, pois cada número tem um quadrado. As noções de comensurabilidade, numerabilidade e análise lógica do contínuo, a teoria dos conjuntos e, em tempos mais recentes, a topologia, foram étapas fundamentais no desenvolvimento do espírito humano. Muitos destes desenvolvimentos foram concebidos independentemente de qualquer aplicação física consciente. Mas mesmo para as aplicações era necessário melhorar as fundações da nossa própria casa, quer dizer, melhorar a estrutura lógica das matemáticas. Sem uma análise exacta das condições de convergência das séries (as condições que permitem levar por diante os processos de diferenciação e integração) ninguém pode sentir-se seguro a manejar séries. Não é exacto que a tendência para procurar uma fundamentação sólida para as novas descobertas tenha começado depois de os homens dotados de imaginação e intuição terem feito o trabalho de fundo. Já D'Alembert pedia que o Cálculo assentasse no método dos limites. Cauchy, Legendre e Gauss figuram certamente entre os génios matemáticos criadores, no vosso sentido; eles contribuíram efectivamente para a transição da intuição ao rigor. Na segunda metade do século dezanove este desenvolvimento continuou em direcção ao grande objectivo que os matemáticos daquela época — talvez com optimismo — consideravam ser a lógica perfeita e o absoluto rigor. Contudo, a juntar à clarificação dos fundamentos, aquele período também abriu novos caminhos para as matemáticas aplicadas. Vós mencionastes, por exemplo, as equações diferencias. Não crêdes que, a teoria das funções de variável complexa, a classificação das equações diferenciais segundo as suas singularidades, e a pesquisa destas singularidades, tudo isto desenvolvido no período que vós chamais o período de codificação, foram contribuições da maior importância para a construção de muitos ramos de matemática dos quais vós, engenheiros, tirais tanto benefício? Estas teorias mudaram o primitivo caminho de determinar soluções das equações diferenciais por tentativas num método sistemático dominando todo o campo.

O engenheiro: Concordo, especialmente com o que vós dissestes sobre variável complexa. Na verdade a tranformação conforme é um dos métodos mais poderosos e mais elegantes para a solução de problemas físicos e de engenharia. Também concordo convosco sobre a importância fundamental das singularidades. De facto, os nossos métodos gráficos e numéricos falham necessàriamente ou tornam-se desastrados na proximidade dos pontos irregulares e nós temos de recorrer aos métodos analíticos. Contudo, vós, matemáticos, estais infelizmente de certo modo na situação dum médico que se interessa menos pelas leis normais do funcionamento do corpo humano do que pelas suas enfermidades, ou na situação dum psicólogo que em vez de investigar as leis do processo mental normal concentra a sua atenção sôbre as aberrações patológicas do espírito humano. Nós temos de lidar em muitos casos com «funções sondas» («sound functions») e gostaríamos de ter métodos eficientes para determinar, com boa precisão, o seu comportamento em certos casos definidos.

Responde o matemático: Não podereis aplicar os métodos gerais que nós desenvolvemos para a solução das equações diferenciais e integrais? Se as soluções são dadas por funções sondas, como vos agrada chamar-lhes, não vejo qualquer grande dificuldade nem vejo o que esperais de nós.

O engenheiro: Os vossos teoremas gerais tratam todos da existência das soluções e da convergência dos vossos métodos de solução. Podeis recordar-vos do dito de HEAVISIDE: «Segundo os matemáticos esta série é divergente; por conseguinte devemos poder fazer qualquer coisa de útil com ela». Vós gastais muito tempo e muito engenho para mostrar a existência de soluções que muitas vezes é evidente para nós, por razões óbvias de natureza física. Raramente vos dais a pena de encontrar e discutir as verdadeiras soluções. Se fazeis isso, então restringis-vos de ordinário a casos simples, como por exemplo, problemas envolvendo corpos de formas geométricas simples. Refiro-me às chamadas funções especiais. Concedo que uma grande parte de tais funções foram investigadas por matemáticos. Os seus valores foram tabulados e os seus desenvolvimentos em série e as suas representações por integrais definidos foram estabelecidos com grande pormenor. Infelizmente, tais funções têm apenas um campo restrito de aplicação em engenharia. O físico, na sua pesquisa das leis fundamentais, pode escolher especímenes de formas geométricas simples para a sua experimentação. O engenheiro tem de tratar directamente com estruturas de formas complicadas; ele não pode dar a uma estrutura uma forma geométrica simples, apenas pelo facto de a distribuição importante em tais estruturas pode ser calculada por funções especiais. Além disso, a maior parte das funções especiais são aplicáveis sòmente aos problemas lineares. No passado, físicos e engenheiros muitas vezes linearizavam os seus problemas para maior simplicidade. Os matemáticos gostavam desta simplificação porque ela fornecia um belo terreno de caça para aplicação de belos métodos matemáticos. Infelizmente, com o progresso da ciência de engenharia, a necessidade duma mais exacta informação e a necessidade de tocar a realidade física cada vez de mais perto, forçou-nos a debater-nos com muitos problemas não lineares.

O matemático: Bem, muitos matemáticos modernos estão extremamente interessados em problemas não lineares. Parece que a vossa primeira necessidade é o desenvolvimento de métodos apropriados de aproximação. Contudo, não tendes razão na vossa crítica das nossas demonstrações de existência. Muitas demonstrações de existência em matemática moderna vão para além dos limites da intuição. Então, também, compreendo que vós, engenheiros, tendes muito êxito com vários métodos de iteração. Se nós queremos demonstrar, por exemplo, a existência duma solução dum problema de valores fronteiras, muitas vezes utilizamos o método de iteração. Por outras palavras, nós construímos realmente uma sucessão de soluções aproximadas exactamente como vós fazeis. A grande diferença é que nós provamos, e vós sòmente presumis, que o processo de iteração conduz a uma única solução. Também o vosso chamado «método de energia» («energy method»), utilizado para a solução dos vossos problemas em elasticidade e em estruturas, parece-me estreitamente relacionado com os métodos directos de cálculo das variações, isto é, com métodos que tentam construir directamente a função minimizante para valores fronteiras dados, sem referência à equação diferencial de EULER-LAGRANGE. Parece-me que, finalmente, existem muitos elementos comuns em análise pura e matemática aplicada.

O engenheiro: Não o negarei; na verdade sempre senti que a análise é a espinha dorsal da matemática aplicada. Contudo, se vós realmente ides aplicar a análise aos casos reais, vereis que há uma grande distância desde a ideia geral do método de aproximação até a aplicação com êxito do mesmo método. Existe, por exemplo, a questão do tempo disponível e do poder humano. Para certos tipos de trabalho temos engenhosas invenções mecânicas ou eléctricas, tais como o analisador diferencial ou calculadores eléctricos. Contudo na maior parte dos casos temos de fazer o cálculo sem esse auxílio. Então não é suficiente saber que o processo de aproximação converge. Nós temos que encontrar qual o método que requere o menor tempo para um dado grau de aproximação. Nós temos que ter uma boa estimativa do melhoramento na precisão através das sucessivas étapas. Todas estas questões práticas requerem difíceis considerações matemáticas. Penso que necessitamos definitivamente de matemáticos que nos auxiliem a apurar e, se assim desejais dizê-lo, a criticar e sistematizar os nossos métodos intuitivos. De facto, aplicações frutuosas da matemática à engenharia requerem a cooperação de matemáticos e engenheiros. Não é de modo algum uma tarefa rotineira reconhecer as relações matemáticas basilares comuns em campos aparentemente muito diferentes. O matemático que intenta fazer pesquisas em matemática aplicada tem de ter um muito bom sentido dos processos físicos envolvidos. Por outro lado o engenheiro tem de entrar nos fundamentos da análise até uma profundidade considerável de modo a poder utilizar com propriedade os instrumentos matemáticos. Uma reunião arbitrária de máquinas não constitui um eficiente estabelecimento de máquinas. Sabemos que há no vosso arsenal matemático poderosos instrumentos. A tarefa que se nos depara é saber como adaptá-los e aplicá-los.

O matemático: Penso que vós haveis apreendido aí alguma coisa. Para levar mais longe a vossa analogia, a fim de transformar a solução dos problemas de engenharia em produção, vós necessitais uma certa espécie de inventores de instrumentos. Estes são os verdadeiros matemáticos aplicados. Os seus domínios originais podem diferir; eles podem partir da matemática pura, da física, ou da engenharia, mas o seu alvo comum é «forjar» matemática para a engenharia.

Tradução de A. Pereira Gomes

Duas desigualdades

por Ruy Luís Gomes

No livro VI, Integração, da colecção BOURBAKI, a páginas 220-221, vem enunciado (1) — exercício 10) a) — o seguinte resultado:

Num espaço de BANACH (2) F, *sejam* a *e* b *dois vectores tais que* $|a| = |b| = 1$. *Mostrar que para todo número* t *tal que* $0 \leqslant t \leqslant 1$, *e para todo* p *tal que* $1 \leqslant p \leqslant \infty$

(1) $$|a - tb|^p \leqslant 2^p\, |a - t^p b|$$

(2) $$|a - t^p b| \leqslant 2p\, |a - tb|\,.$$

E como indicação para a sua resolução acrescenta-se — *exprimir* $a - t^p b$ *como combinação linear de* $a - tb$ *e* $a - b$ *e observar que para* $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, *vem* $|a - \rho b| \geqslant 1 - \rho$ *e* $|a - b| \leqslant 2\, |a - \rho b|$.

Ora, tratando-se de duas desigualdades fundamentais para o estudo das relações entre diferentes espaços L^p, pareceu-nos útil enviar para a *Gazeta de Matemática* uma demonstração de (1) e (2).

Desigualdade (1).

Se $|a - t^p b| \geqslant 1$ o resultado é imediato, pois as hipóteses feitas permitem-nos escrever

$$|a - tb| \leqslant |a| + |tb| = 1 + t \leqslant 2$$

e portanto

$$|a - tb|^p \leqslant 2^p \leqslant 2^p\, |a - t^p b|\,.$$

Se $|a - t^p b| < 1$, temos

$$|a - tb| = |a - t^p b + t^p b - tb| \leqslant |a - t^p b| + \\ + t - t^p \leqslant |a - t^p b| + 1 - t^p \leqslant 2\, |a - t^p b|\,,$$

visto ser (3)

$$1 - t^p = \big|\, |a| - |t^p b| \,\big| \leqslant |a - t^p b|\,.$$

Por outro lado, como $|a - t^p b| < 1$, vem

$$|a - t^p b|^p < |a - t^p b|$$

(1) Com a marca que distingue os exercícios mais difíceis.

(2) Espaço vectorial sobre o corpo dos números reais ou complexos em que cada vector a tem uma *norma* $|a|$, finita, não-negativa, tal que: 1) $|a| = 0$ equivale a $a = 0$; 2) $|\lambda a| = |\lambda|\, |a|$, qualquer que seja o número λ, real ou complexo; 3) $|a + b| \leq |a| + |b|$. Não interessa neste exercício o facto de F ser ainda um espaço *completo*.

(3) A desigualdade triangular aplicada a $a = b + (a - b)$ e $b = a + (b - a)$ dá-nos $|a| \leq |b| + |a - b|$, $|b| \leq |a| + |a - b|$, donde $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

e portanto

$$|a-tb|^p \leqslant 2^p\,|a-t^p b|\,.$$

Desigualdade (2).

Comecemos por supor que $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Escrevendo, segundo a indicação expressa no próprio Bourbaki,

$$a - t^p b = \lambda(a-tb) + \mu(a-b)\,,$$

vem (1), para $t \neq 1$,

$$\lambda = \frac{1-t^p}{1-t}\,, \qquad \mu = -t\,\frac{1-t^p}{1-t}$$

e como

$$|a-b| = |a-tb+tb-b| \leqslant 2\,|a-tb|\,,$$

chega-se ao resultado

$$|a-t^p b| \leqslant \frac{1+2t-3t^p}{1-t}\,|a-tb|\,.$$

Mas, (2)

$$\frac{1+2t-3t^p}{1-t} \leqslant 2p\,,$$

logo

$$|a-t^p b| \leqslant 2p\,|a-tb|\,.$$

Passemos agora à hipótese $2 \leqslant p$ e façamos $p = n + q$, com $1 \leqslant q \leqslant 2$ e n inteiro.

Aplicando sucessivamente o processo de decomposição

$$\begin{aligned} |a-t^p b| &= |a-tb+tb-t^p b| \\ &\leqslant |a-tb| + 1 - t^{p-1} \\ &\leqslant |a-tb| + |a-t^{p-1}b| \end{aligned}$$

vem finalmente

$$|a-t^p b| \leqslant n\,|a-tb| + |a-t^q b|$$

e portanto

$$\begin{aligned} |a-t^p b| &\leqslant n\,|a-tb| + 2q\,|a-tb| = \\ &= p\,|a-tb| + q\,|a-tb| \leqslant 2p\,|a-tb|\,, \end{aligned}$$

pois (3) $q \leqslant p$.

De (1) e (2) é fácil deduzir

$$(3) \qquad |y-z|^p \leqslant 2^p \left|\,|y|^{p-1}\cdot y - |z|^{p-1}\cdot z\,\right|$$

e

$$(4) \qquad \left|\,|y|^{p-1}\cdot y - |z|^{p-1}\cdot z\,\right| \leqslant p\,|y-z|\,(|y|+|z|)^{p-1}\,,$$

nas quais y e z repesentam dois vectores quaisquer de F. (1)

Na verdade, supondo, por exemplo, que $|z| \leqslant |y|$, podemos aplicar (1) com

$$a = \frac{y}{|y|}\,, \quad b = \frac{z}{|z|} \quad \text{e} \quad t = \frac{|z|}{|y|}\,,$$

obtendo-se

$$\left|\frac{y}{|y|} - \frac{|z|}{|y|}\frac{z}{|z|}\right|^p \leqslant 2^p \left|\frac{y}{|y|} - \frac{|z|^p}{|y|^p}\frac{z}{|z|}\right|$$

donde

$$|y-z|^p \leqslant 2^p \left|\,y\,|y|^{p-1} - z\,|z|^{p-1}\,\right|\,.$$

Mas como esta desigualdade é simétrica em y, z, continua válida para $|y| \leqslant |z|$ e portanto é geral.

Passemos agora à dedução de (4). Partindo da hipótese $|z| \leqslant |y|$, vem

$$\left|\frac{y}{|y|} - \frac{|z|^p}{|y|^p}\frac{z}{|z|}\right| \leqslant 2p\left|\frac{y}{|y|} - \frac{|z|}{|y|}\frac{z}{|z|}\right|$$

donde

$$\left|\,|y|^{p-1}y - |z|^{p-1}z\,\right| \leqslant 2p\,|y|^{p-1}\,|y-z|\,.$$

Trocando y com z, o que corresponde à hipótese $|y| \leqslant |z|$, vem

$$\left|\,|y|^{p-1}\cdot y - |z|^{p-1}z\,\right| \leqslant 2p\,|z|^{p-1}\,|y-z|\,.$$

Portanto

$$\left|\,|y|^{p-1}\cdot y - |z|^{p-1}z\,\right| \leqslant 2p\,|y-z|\,(|y|^{p-1} + |z|^{p-1})$$

e, a fortiori,

$$\left|\,|y|^{p-1}y - |z|^{p-1}z\,\right| \leqslant 2p\,|y-z|\,(|y|+|z|)^{p-1}\,.$$

Nota I. As desigualdades (3) e (4), mas apenas para números reais, foram deduzidas, pela primeira vez, por S. Mazur (Lwow) no artigo *Une remarque sur l'homéomorphie des champs fonctionnelles* [Studia Mathematica, Tome 1 (1929), p. 83-85].

Estão escritas desta outra maneira:

$$\left|\text{sinal } y\,|y|^{\frac{1}{p}} - \text{sinal } z\,|z|^{\frac{1}{p}}\right|^p \leqslant 2^p\,|y-z|$$

e

$$\text{sinal } y\,|y|^p - \text{sinal } z\,|z|^p\,| \leqslant p\,|y-z|(|y|+|z|)^{p-1}\,,$$

e a sua dedução directa de (1) e (2) é muito simples pois a e b só podem ter os valores ± 1.

Note-se, porém, que na segunda desigualdade de Mazur figura o coeficiente p e não $2p$.

---

(1) Para $t=1$ a desigualdade é evidente.

(2) Basta verificar que $\Phi(t) = 1 + 2t - 3t^p - 2p(1-t)$ tem derivada ≥ 0 e anula-se para $t=1$.

(3) Para $p=\infty$, ainda as desigualdades são válidas, mesmo na hipótese $|a-t^p b| = 0$ quanto a (1) e $|a-tb| = 0$, quanto a (2), pois ambas exigem $t=1$ e portanto implicam $|a-tb| = |a-t^p b| = |a-b| = 0$.

(1) Enunciadas ainda no mesmo exercício, mas a segunda com o coeficiente $2p$ em vez de p.

Des rapports entre le langage et les mathématiques (*)

par Luiz Freire

La mathématique est un langage, disent beaucoup d'hommes de science et philosophes, ainsi que certains mathématiciens professionnels: le sens d'une telle affirmation demande à être précisé.

Qu'entend-on par langage?

La forme «intentionnellement expressive» d'extérioriser les réactions psychiques et dont «l'expression symbolique» prédomine.

Cette forme, en pratique, revêle plusieurs aspects qui sont les *langues*.

C'est là le sens juste du langage comme phénomène

Ainsi, la mathématique ne peut pas être un langage

Mais, à employer un système de symboles, s'attribuons-nous, par extension — il serait plus juste d'employer le mot *restriction*, puisqu'on utilise seulement un des aspects du langage, c'est à dire l'expression symbolique —s'attribuons nous donc la valeur d'un langage, nous aurons alors obtenu la signification d'ailleurs unique de la mathématique comme langage. Autrement, il y aura jusqu'à une vraie opposition entre le langage et la mathématique.

En effet, si l'élaboration de la mathématique obéit à un plan complet, logique, quelqu'une de ses branches se présentant à la fin comme un système rationnel, il n'en est pas de même pour le langage.

Dans la vie du langage, bien au contraire, «rien ne pourra être demandé à la logique» (A. Dauzat — La philosophie du langage).

Le langage comme «instrument de la pensée» se soumet aux lois psychologiques, et jamais à celles de la logique. L'irrégularité c'est d'être sa loi suprême. Si j'accepte le langage comme «instrument de la pensée», je ne lui attribue aucun caractère de passivité.

Bien au contraire, je lui attribue la capacité de réaction, pouvoir créateur même, comme le fait Paulhan dans son livre «La double fonction du langage»: le «langage suggestion» créateur, le «langage signal» qui définit et precise.

En effet, le mot, la phrase, sont «les signes d'une réalité extérieure, les substitutions d'images, d'idées, de perceptions».

Mais ces signes pourraient aussi provoquer ou suggèrer d'autres concepts, d'autres formes de pensée, parce que à ceux-ci s'allie toujours un sens d'ordre psychologique, jamais rigide, statique. Ils ne sont pas une pure copie ou reproduction du réel.

Combien le phénomène du langage se rebelle contre les canons de la logique, cela est expressivement indiqué dans les tentatives de «création d'idiomes rationellement parfaits et conformes aux lois de la logique».

En effet, on peut affirmer que quelqu'une de ces langues artificielles «serait certainement soumise à la loi des évolutions divergentes», et «le désordre succèderait au bel ordre initial». (J. Vendryes — Le langage).

En conclusion: on peut remarquer combien est profonde la différence substantielle entre le langage et la mathématique.

C'est donc nécessaire de ne pas oublier le sens juste de la phrase souvent répétée: «la mathématique est un langage», et même «il n'est qu'un langage».

Note I. M. Felix le Dantec, brillant biologiste-philosophe, beaucoup lu au début de ce siècle, a écrit: La Physique est la Science; la Mathématique n'est que la langue de la Science».

Cette phrase avec son affirmation respective *n'est que*, indique bien la fonction subalterne que son auteur donnait au langage, en général, et à la mathématique en particulier.

Même dans un grand ouvrage, «La Philosophie de Newton», de Léon Bloch, on lit à la page 108: «En même temps physicien et géomètre, Newton par son «Calcul des Fluxions» comme par ses «Principia», n'a prétendu apporter aux problèmes *que* la contribution d'un langage nouveau (je souligne le mot *que*).

La mathématique n'est pas seulement un langage dans le sens ici établi et qui est l'unique, mais c'est encore une science avec objectifs propres autant que les autres sciences.

C'est un admirable instrument au service des sciences de la nature, c'est vrai.

Mais à cela la mathématique ne se borne pas.

Note II. Le point de départ de la mathématique est psychologique, comme est d'ailleurs celui de toute science.

Mais la mathématique ayant fixé son point de départ, tout ce qui le dépasse est demandé à la logique; c'est le contraire de ce qui survient dans le langage dont les influences psychologiques accompagnent fortement toute la formation du langage.

(*) Comunicação apresentada ao Congresso de Lógica Matemática — Paris, 25 a 30 de Agosto de 1952.

I — Différence entre la logique et les mathématiques
II — Les Mathématiqes et la Réalité (*)

par Luiz Freire

La Logique est la forme pure ou vide des théories, sans laquelle il ne peut y avoir de science.

Elle donne à la science sa structure et son sens organique.

Cette forme-là reçoit le contenu réel ou objectif — directement ou indirectement réel — spécifique de chaque science, et ils s'ajustent d'autant plus que le degré de progrès de la science respective est avancé.

Dans un certain sens on peut dire avec HUSSERL: la Logique est une théorie de la science.

C'est vrai comme théorie structurelle mais pas comme explication des faits mêmes.

La forme, c'est une chose, et le contenu ou substance, en est une autre.

C'est par leur contenu que les sciences se différencient de la logique et même se différencient l'une de l'autre.

Dans les mathématiques ce contenu est très riche et en apparence très diversifié.

Le progrès incessant des mathématiques a conduit à des réductions de branches irréductibles en apparence.

A la fin celles-ci sont apparues comme équivalentes et échangeables.

C'est cela qui a fait écrire à M. BENNO ECKMANN devant la difficulté de séparer l'origine algébrique (discontinue) de l'origine topologique (continue) d'une propriété: «malgré les apparences, on est loin d'avoir séparé effectivement le schéma du continu de celui du discontinu sous leur forme de structure topologique ou algébrique. Si différentes qu'elles soient, elles peuvent se remplacer mutuellement dans une si large mesure qu'on est presque tenté d'y voir deux manifestations d'une seule chose que je ne saurais guère préciser» (*Continu et Discontinu*, texte d'une comunication faite en octobre 1949 au Congrès international de Philosophie des Sciences de Paris, paraissant également dans les «Études de Philosophie des Sciences» en hommage à FERDINAND GONSETH à l'occasion de son soixantième anniversaire).

Et encore: «on constate simplement que deux structures, deux schémas mathématiques, d'origine et de nature entièrement différentes, peuvent apparaître comme équivalentes et échangeables une fois superposées.

Ce n'est pas la première fois que les mathématiques font preuve d'une telle harmonie et d'une telle stabilité impréssionantes, qui dépassent en somme les intentions du formalisme; je me contenterai d'y voir une expression de l'esprit mathématique qui, dans ses innombrables nuances, reconstruit toujours l'unité des mathématiques».

J'ai choisi un exemple relatif à la topologie parce que l'on considère la topologie comme une branche indépendante des sciences mathématiques.

A ceux qui aiment les études de philosophie naturelle, l'expression employée par FOURIER: «l'object de l'Analyse est un élement préexistant de l'ordre universel», est très chère.

Ils croient en une espèce d'«harmonie préétablie» qui «éclaire la route du géomètre».

Je crois davantage en une harmonie *établie* que préétablie.

Je n'appartiens pas à l'école des logiciens qui veulent une mathématique construite sur des principes absolument logiques, dépourvus de tout résidu intuitif, cherchés dans une logique préexistante, aprioristique, qu'il ne m'a pas encore été possible d'atteindre.

Si nous adoptions l'hypothèse même qu'il eût été possible de donner à notre organisation une autonomie par rapport à tout ce qui la conditione, intrinsèquement et extrinsèquement, et pourtant de rendre faisable la construction de cette mathématique avec laquelle rêvent les logiciens, ce ne serait pas la mathématique que nous avons jusqu'à maintenant appliquée aux sciences de la nature.

Cette dernière que nous étudions et appliquons, nous présente ses notions fondamentales «non comme des synthèses de données abstraites, mais comme des abstractions dégagées d'une intuition», intuition qui, d'ailleurs, «n'est pas le simple résultat de la sensation, elle est l'acte intelligible qui transforme la sensation en perception ou en conception. C'est l'appréhension de l'être par l'intélligence dans ce qu'elle a d'immédiat. Le raisonnement rend explicite son intel-

(*) Pontos de vista defendidos por ocasião da «Discussão Geral sobre a Lógica e a Matemática no Congresso de Lógica Matemática de Paris — Agosto de 1952.

ligibilité en l'analysant». (F. WARRAIN — Les notions premières des mathématiques et la réalité. Revue de Philosophie, Sep.—Oct. 1925, Paris).

«Loin d'être des formes vides de tout contenu, les mathématiques ont un contenu réel, contenu qui est en quelque sorte la diffraction du concret».

Si grande que puisse être la rigueur logique attendue par la mathématique dans tous ses domaines, la vérité sera toujours celle-là.

A travers le filigrane subtil du formalisme logique, nous rencontrerons toujours, même de loin, leurs derniers filaments pénétrant dans le terrain des réalités les plus vives.

C'est là l'«ultima ratio» de l'harmonie entre la mathématique et les sciences de la nature, entre cellesci et celle-là qui, est aussi, en rigueur, une science de la nature.

Nous ne pouvons pas nier le caractère formel qui prédomine en mathématique.

Cette prédominance est tellement forte qu'elle a donné à beaucoup de savants la conviction que la mathématique, c'est la logique même.

F. WARRAIN fait observer avec beaucoup de perspicacité que cette prédominance est due au rôle d'intermédiaire de la mathématique.

Elle «établit précisement la transition entre les deux aspects irréductibles de la réalité, l'aspect physique et l'aspect psychique».

Mais cette prédominance n'est pas tout.

Dans l'étude des fondements de toute science, il y a deux plans à considerer: le plan technique et le plan métatechnique ou métaphysique.

Les logiciens prennent l'air de pas connaître le plan métaphysique.

MOVIMENTO CIENTÍFICO E PEDAGOGIA

INSTITUTO DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA — C. N. P. B. — Rio de Janeiro

A 15 de Outubro de 1952, o Conselho Nacional de Pesquisas do Brasil aprovou a criação de um Instituto de Matemática Pura e Aplicada, com séde no Rio de Janeiro. A nova instituição tem por finalidade a investigação no campo das ciências matemáticas e das suas aplicações bem como a difusão e elevação da cultura matemática no Brasil, devendo cumprir os seus objetivos através das pesquisas de seus membros, dos seminários e cursos de post-graduação e especialização que promover e das publicações que realizar. O Conselho Nacional de Pesquisas adquiriu para o Instituto de Matemática uma excelente biblioteca constituída por coleções quasi completas das revistas matemáticas fundamentais. Em virtude de acôrdo estabelecido entre a comissão de redação de *Summa Brasiliensis Mathematicae* — revista especializada que vem sendo publicada sob os auspicios do Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura — e o Instituto de Matemática, este assumirá a responsabilidade pela orientação científica desse periódico e passará a se encarregar do seu intercâmbio com as revistas congêneres. O Almirante Alvaro Alberto, presidente do Conselho Nacional de Pesquisas, designou para diretor do Instituto de Matemática o matemático brasileiro Dr. Lélio I. Gama, bem conhecido por seus trabalhos de pesquisa nos campos de Matemática e da Astronomia. Para membros do Conselho Orientador do Instituto de Matemática foram designados os Drs. Ari Nunes Tietbohl (de Porto Alegre), Candido da Silva Dias (de São Paulo), José Leite Lopes (do Rio de Janeiro), Leopoldo Nachbin (do Rio de Janeiro), Luiz de Barros Freire (de Recife) e Roberto Marinho de Azevedo (do Rio de Janeiro). Como secretário geral do Instituto de Matemática foi escolhido o Dr. Mauricio Matos Peixoto. O Instituto de Matemática ficará na mesma séde do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas, dado o grande interesse de uma intima colaboração entre esses dois orgãos de investigação científica. Toda correspondência para o Instituto poderá ser dirigida ao endereço seguinte: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Caixa Postal 46, Rio de Janeiro.

L. Nachbin

NOTICIÁRIO

SOCIEDADE BRASILEIRA PARA O PROGRESSO DA CIÊNCIA

De 3 a 8 de Novembro de 1952, realizou-se em Porto Alegre a quarta reunião anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência. A exemplo dos anos anteriores, foram feitas várias comunicações e conferências nos campos da Matemática, Física, Biologia, Química, etc., as quais contaram, desta vez, com a colaboração de cientistas uruguaios, argentinos e chilenos, em virtude da proximidade de Porto Alegre de seus paízes. Foram as seguintes as actividades matemáticas que fizeram parte da quarta reunião anual da S. B. P. C.:

4 de Novembro.

C. Colombo dos Santos (Univ. de Minas Gerais), *Análise tensorial.*

B. Castrucci (Univ. de São Paulo), *Fundamentos da Geometria projetiva.*

5 de Novembro.

Simpósio de Análise Funcional, constante dos seguintes trabalhos:

C. S. Hönig (Univ. de São Paulo), *Espaços vetoriais topológicos.*

G. Lumer (Univ. de Montevideu), *Estrutura fina e continuidade dos espectros em álgebras de* Banach.

C. Silva Dias (Univ. de São Paulo), *Espaços funcionais analíticos.*

J. J. Schaeffer (Univ. de Montevideu), *Alguns problemas sobre operadores em espaços de* Hilbert.

L. Nachbin (Univ. do Brasil), *Álgebras topológicas de funções analíticas.*

J. L. Massera (Univ. de Montevideu), *Estabilidade de homeomorfismos em espaços de* Banach.

7 de Novembro.

C. Ehresmann (Univ. de Estrasburgo), *Fundamentos da Geometria Diferencial.*

O. Catunda (Univ. de São Paulo), *O papel da Matemática no ensino médio.*

Remy Freire (Univ. do Paraná), *Regressão generalizada.*

M. L. Mousinho (Univ. do Brasil), *Reticulados projetivos.*

P. Ribenboim (Univ. do Brasil) *Aneis normais reais de caracter finito.*

As reuniões foram realizadas na Sociedade de Engenharia e na Faculdade de Filosofia da Universidade do Rio Grande do Sul. A quinta reunião anual da S. B. P. C. acha-se prevista para novembro de 1953, em Curitiba, por ocasião do centenário desta cidade.

L. Nachbin

PROFESSOR ALMEIDA COSTA

Foi nomeado para desempenhar o cargo de professor catedrático do 1.º grupo da 1.ª secção da Faculdade de Ciências de Lisboa, o Prof. Almeida Costa, da Universidade do Porto, distinto algebrista.

A F. C. L. encarregou-o de reger as cadeiras de Álgebra Superior (que substitue na actual organização os Complementos de Álgebra), de Geometria Superior e de Física Matemática. O Instituto Superior Técnico convidou-o também para reger nesta escola.

A «Gazeta de Matemática» felicita vivamente o seu ilustre colaborador.

M. Z.

ALGUMAS ALTERAÇÕES NO PLANO DE ESTUDOS DAS FACULDADES DE CIÊNCIAS

Pelo decreto n.º 39.021 (Diário do Governo, 1.ª sér., n.º 271 de 3 de Dezembro de 1952) é alterado o plano de estudos das Faculdades de Ciências e introduzidas modificações na redacção do artigo 24.º do Decreto n.º 18.477 de 17 de Junho de 1930 que regulava a prestação de provas para a obtenção do grau de doutor.

Transcrevemos do decreto agora publicado alguns dos artigos que mais interessa à licenciatura em Ciências Matemáticas:

Artigo 1.º — A cadeira de Álgebra Superior, Geometria Analítica e Trigonometria Esférica é suprimida do quadro das Faculdades de Ciências e substituída pela disciplina de Matemáticas Gerais nos elencos das licenciaturas em Ciências Matemáticas e em Ciências Físico Químicas e dos cursos de engenheiro geógrafo e preparatórios para ingresso nas escolas superiores de engenharia.

Art. 2.º — O curso semestral de Complementos de Álgebra e Geometria Analítica é transformado em cadeira anual, com a designação de Álgebra Superior.

Art. 4.º — A duração em horas semanais dos trabalhos escolares nas Faculdades de Ciências é a seguinte:

Disciplinas	1.º semestre		2.º semestre	
	Aulas teóricas	Aulas práticas	Aulas teóricas	Aulas práticas
Licenciatura em Ciências Matemáticas				
1.º ano				
Matemáticas Gerais . .	3	4	3	4
Geometria Descritiva .	2	4	2	4
Curso geral de Química.	3	4	3	4
Desenho Rigoroso . . .	–	4	–	4
	24 horas		24 horas	
2.º ano				
Cálculo Infinitesimal . .	3	4	3	4
Álgebra Superior . . .	2	2	2	2
Geometria Projectiva. .	2	2	–	–
Curso geral de Física. .	3	4	3	4
Desenho de Máquinas. .	–	4	–	4
	26 horas		22 horas	
3.º ano				
Mecânica Racional. . .	2	2	2	2
Análise Superior. . . .	2	2	2	2
Cálculo das Probalidades	2	2	2	2
Astronomia	2	6	2	6
	20 horas		20 horas	

Disciplinas	1.º semestre		2.º semestre	
	Aulas teóricas	Aulas práticas	Aulas teóricas	Aulas práticas
4.º ano				
Mecânica Celeste. . . .	2	2	2	2
Geometria Superior . .	–	–	2	2
Física Matemática . . .	2	2	2	2
Geodesia	2	2	–	–
Desenho Topográfico. .	–	4	–	–
	16 horas		12 horas	

. . . .

Art. 5.º – As aulas teóricas têm a duração de uma hora; as aulas práticas são de duas horas, salvo as de Astronomia, Aperfeiçoamento de Astronomia, Topografia, Meteorologia, Geofísica e Análise Química (2.ª parte), que poderão ser de duas ou três horas.

Art. 24.º – O grau de doutor será conferido ao licenciado que, tendo sido admitido, obtenha aprovação nas seguintes provas:

a) Dois interrogatórios, feitos por dois membros do júri, durante um período mínimo de meia hora e máximo de uma hora cada um, sobre dois pontos tirados à sorte pelo candidato, com quarenta e oito horas de antecedência, de entre doze expostos pela Faculdade noventa dias antes da prova;

b) Defesa de uma dissertação, a qual será discutida durante uma hora, pelo menos, por dois professores designados pela secção respectiva.

§ Único. A votação far-se-á no final das provas por escrutínio secreto; a deliberação será tomada por maioria dos professores presentes e o resultado expresso em valores, nos termos do Decreto n.º 34.467, de 28 de Março de 1945.

MODELOS MATEMÁTICOS

A União Matemática Italiana, por deliberação da sua Assembleia Geral, reunida em Taormina, em Outubro de 1951, tomou a iniciativa de promover a construção de modelos para o ensino da Geometria e da Análise. O Prof. L. Campedelli, da Universidade de Florença, encarregado desta realização, apresentou, na reunião de Bolonha, em Abril de 1952, um relatório sobre as diligências e resultados obtidos. Comunicou estar em estado de fornecer duas séries de modelos em gesso: a série elementar compreendendo as habituais quádricas e outra complementar e superior constituída por modelos de superfícies de 3.ª e 4.ª ordens, superfícies pseudosféricas, etc. Está-se estudando a construção de modelos em metal e em fio.

A «Società Metallurgica Italliana», de Florença, a «Società Rhodiatoce», de Milão e o «Istituto Tecnico Industriale Comunale L. da Vinci», de Florença, prestam auxílio gratuito.

As escolas interessadas podem dirigir-se ao Prof. Campedelli, Istituto di Matematica dell'Università di Firenze, via degli Alfani, 81.

M. Z.

(Notícia extraída do *Bolletino della Unione Matematica Italiana*, Série III, Ano VII, n.º 2, 1952).

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

UMA DEMONSTRAÇÃO POR INDUÇÃO FINITA

por Hamilcar da Silva Lobo

Demonstrar, recorrendo ao teorema da indução finita, que *a soma dos produtos dos coeficientes do desenvolvimento do «binómio» pelos quadrados das ordens respectivas, é igual a* $n(n+1)2^{n-2}$, *sendo* n *o expoente do binómio:*

$$1^2\binom{n}{1}+2^2\binom{n}{2}+\cdots+n^2\binom{n}{n}=n(n+1)2^{n-2}.$$

A igualdade a demonstrar é uma proposição

$$P(n)\equiv\sum_n p^2\binom{n}{p}=n(n+1)2^{n-2}$$

associada a um inteiro n e estendendo-se o somatório desde $p=0$ até $p=n$, como é manifesto.

Verificaremos que $P(2)$ é verdadeira e provaremos que a validade de $P(n)$, para qualquer inteiro n, implica a validade da proposição para o sucessor de n, de acordo com o teorema da indução finita.

A demonstração exige o recurso à fórmula de Stifel

$$\binom{n+1}{p}=\binom{n}{p}+\binom{n}{p-1}$$

fácil de estabelecer (basta efectuar a soma do 2.º membro!) e o cálculo de $\sum_n p\binom{n}{p}$. Vamos portanto provar em primeiro lugar, que:

$$1')\qquad \sum_n p\binom{n}{p}=n\cdot 2^{n-1}.$$

Note-se desde já, como é evidente, que

$$\sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} p \binom{n}{p} .$$

Como

$$\sum_{n} p \binom{n}{p} = 1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \cdots + n \binom{n}{n}$$

pode escrever-se (decompondo as parcelas e associando-as convenientemente)

$$\begin{aligned} &\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} + \\ &\quad + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} + \\ &\qquad + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} + \\ &\qquad + \cdots\cdots\cdots\cdots + \\ &\qquad\qquad + \binom{n}{n} = \end{aligned}$$

Somas Parciais

$$\begin{aligned} &= 2^n - \binom{n}{0} \\ &= 2^n - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] \\ &= 2^n - \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= 2^n - \left[\binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n-1}\right] \end{aligned}$$

o que é evidente, somando por linhas. Somando agora por coluna e notando que estas são em número de n advirá imediatamente:

$$\sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} = n \cdot 2^n - \left[n \binom{n}{0} + (n-1) \binom{n}{1} + \right.$$
$$\left. + (n-2) \binom{n}{2} + \cdots + 2 \binom{n}{n-2} + 1 \cdot \binom{n}{n-1} \right]$$

ou, pela conhecida propriedade $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$,

$$\sum_{n} p \binom{n}{p} = n \cdot 2^n - \left[1 \cdot \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \right.$$
$$\left. + \cdots + (n-1) \binom{n}{n-1} + n \binom{n}{n} \right.$$

e portanto

$$\sum_{n} p \binom{n}{p} = n - 2^n \cdot \sum_{n} p \binom{n}{p} \Big]$$

donde se conclui:

$$\sum_{n} p \binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1} \qquad \text{q. e. d. (}^1\text{)}$$

(1) A mesma fórmula pode, ràpidamente, ser deduzida derivando ambos os membros do desenvolvimento binomial $(1+x)^n$ e, na expressão obtida, fazer $x = 1$. N. R.

Podemos agora passar à demonstração de 1), pelo método da indução finita:

I — P (2) verifica-se.

Com efeito, para $n=2$ tem-se

$$1^2 \binom{2}{1} + 2^2 \binom{2}{2} = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 6$$

e $$2(2+1) \cdot 2^{2-2} = 2 \cdot 3 = 6$$

isto é:

$$P(2) \equiv \sum_{2} p^2 \binom{2}{p} = 2(2+1)\, 2^{2-2}$$

é verdadeira.

II — Demonstraremos agora que a legitimidade de $P(n)$ implica a de $P(n^+)$.

Admitindo então, por hipótese, que $P(n)$ é verdadeira, há que provar também o ser, necessàriamente,

$$2) \quad P(n^+) \equiv \sum_{n+1} p^2 \binom{n+1}{p} = (n+1)(n+2)\, 2^{n-1} .$$

Ora pela fórmula de Stifel, tem-se

$$2') \quad \sum_{n+1} p^2 \binom{n+1}{p} = \sum_{p=1}^{n+1} p^2 \left[\binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} \right]$$

ou

$$2'') \quad \sum_{n+1} p^2 \binom{n+1}{p} = \sum_{p=1}^{n} p^2 \binom{n}{p} + \sum_{p=1}^{n+1} p^2 \binom{n}{p-1} .$$

Observe-se que

$$\sum_{p=1}^{n+1} p^2 \binom{n}{p} = \sum_{p=1}^{n} p^2 \binom{n}{p}$$

visto que $\binom{n}{n+1} = 0$ pela própria significação do símbolo.

Para calcularmos o 2.º somatório do 2.º membro de 2'') e visto as combinações de n serem tomadas $(p-1)$ a $(p-1)$, transformemos p^2 pela igualdade evidente

$$p^2 = (p-1)^2 + 2(p-1) + 1 .$$

A expressão 2'') toma, por consequência, a forma

$$3) \qquad \sum^{n+1} p^2 \binom{n+1}{p} = \sum^{n} p^2 \binom{n}{p} +$$
$$+ \sum_{p=1}^{n+1} (p-1)^2 \binom{n}{p-1} + 2 \sum_{p=1}^{n+1} (p-1) \binom{n}{p-1} +$$
$$+ \sum_{p=1}^{n+1} \binom{n}{p-1}$$

Mas, como é evidente, podemos nos 3 últimos somatórios do 2.º membro de 3) substituir $p-1$ por

p passando a defini-los desde $p=0$ até $p=n$. Advirá, portanto

$$4)\qquad \sum^{n+1} p^2\binom{n+1}{p} = 2\sum_{p=0}^{n} p^2\binom{n}{p} + \\ + 2\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} + \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}.$$

Então, por hipótese, pela expressão que calculamos anteriormente do $\sum p\binom{n}{p}$ e pelo conhecido valor do $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$, resulta

$$5)\qquad \sum^{n+1} p^2\binom{n+1}{p} = 2^n(n+1)2^{n-2} + 2\cdot n\cdot 2^{n-1} + 2^n$$
$$= n(n+1)2^{n-1} + 2n\cdot 2^{n-1} + 2\cdot 2^{n-1}$$
$$= n(n+1)2^{n-1} + 2(n+1)2^{n-1}$$

e finalmente

$$6)\qquad \sum^{n+1} p^2\binom{n+1}{p} = (n+1)(n+2)2^{n-1} \quad \text{q. e. d.}$$

A proposição está pois demonstrada com toda a generalidade visto que se verificou directamente ser válida para $n=2$ e se provou que a validade para qualquer inteiro n implica a validade para o seu sucessor n^+.

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em Ciências Matemáticas, Ciências Fisico-Químicas e Ciências Geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ano de 1952 — Ponto n.º 1.

3559 — Provar que, se a soma de dois números inteiros positivos é um número primo, os dois números são primos entre si. R: *Seja* $a+b=p$, *onde* $a<p$, $b<p$ *e* p *um número primo. Qualquer divisor comum de* a *e* b *será um divisor de* p, *ou seja* 1 *ou* p, *e como* $a<p$ *e* $b<p$ *será* 1 *o único divisor comum e por isso* a *e* b *primos entre si.*

5560 — Calcular dois números inteiros positivos, sabendo que um deles é $\frac{4}{3}$ do outro e que o produto do seu máximo divisor comum pelo seu menor múltiplo comum é 2352. R: *Sabe-se que o produto do m. d. c. pelo m. m. c. é igual ao produto dos dois números. Então se um deles for* x *será* $4/3\cdot x^2=2352$ *donde* $x=\pm 42$. *Os números serão então* 42 *e* 56 *visto só servir a solução positiva.*

3561 — Se o número 6 divide o produto $35a$, qual é o resto da divisão de a por 6? Enunciar e demonstrar o teorema que justifica a resposta. R: *O resto é zero, porque se um número divide o produto de dois factores e é primo com um deles divide necessàriamente o outro.*

3562 — Decompor 100 em duas parcelas inteiras positivas, divisíveis por 7 e por 11 respectivamente. R: *Será* $7x+11y=100$ *equação que admite a solução em números inteiros e positivos* $x=8$, $y=4$. *É fácil ver que esta solução em números inteiros e positivos e única, donde resulta que os números são* 56 *e* 44.

3563 — Determinar os valores de m para os quais $x^2-(m+2)x+m+3$ é positivo qualquer que seja o valor real atribuído a x. R: *São os valores de* m *que tornam o discriminante negativo, ou seja* $(m+2)^2-4(m+3)<0$ *ou ainda* $m^2-8<0$ *e por isso* $-2\sqrt{2}<m<+2\sqrt{2}$.

3564 — Determinar a equação biquadrada cujas raízes são ± 2, ± 3. Enunciar e demonstrar o teorema que justifica a resposta.
R: $(x^2-2^2)(x^2-3^2)=0$ *ou* $x^4-13x^2+36=0$.

Exames de aptidão para frequência do Instituto Superior Técnico e Faculdade de Engenharia do Porto — Ano de 1952 — Ponto n.º 2 — Outubro.

3565 — Resolva a equação

$$1-\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}=\frac{3}{2}(x+1).$$

R: *A equação proposta pode ser equivalente à seguinte* $4\sqrt{2}=3(x+1)(x+\sqrt{2})$ *que se obtem desembaraçando de denominadores a primeira. Esta equação tem por raizes* $x=(-3-3\sqrt{2}\pm\sqrt{27-30\sqrt{2}}):6$, *expressões que não se podem simplificar. Como aqueles valores de* x *não anulam o denominador* $(x+\sqrt{2})$, *eles são raízes da equação proposta.*

3566 — Resolva a inequação

$$\frac{1}{2}\left(x^2-2x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)<0.$$

R: *A inequação pode escrever-se sob a forma* $1/2\,[x-(2+\sqrt{6}):2]\,[x-(2-\sqrt{6}):2]\,(x-1/3)<0$. *A inequação é verificada para os valores que tornem ou os três factores negativos ou um só. Estes factos verificam-se para os valores de* x *tais que* $1/3<x<(2+\sqrt{6}):2$ *e* $x<(2-\sqrt{6}):2$.

3567 — Faça o desenvolvimento de $\left(x^{-2}-\frac{1}{2}x^2\right)^4$ e simplifique os seus termos. R: *O desenvolvimento simplificado é* $x^{-8}-2x^{-4}+3/2-1/2x^4+1/16x^8$.

3568 — Determine o valor de m para o qual ${}^mC_{m-3}=969$. R: *Como* ${}^mC_{m-3}={}^mC_3$ *será* $m(m-1)(m-2):(1\cdot2\cdot3)=969$ *ou* $m(m-1)(m-2)=2\cdot3\cdot3\cdot17\cdot19=17\cdot18\cdot19$ *donde é* $m=17$.

3569 — Calcule o número de rectas que são determinadas por 15 pontos entre as quais há dois grupos distintos de 3 e 5 pontos colineares. R: *O número de rectas é* ${}^{15}C_2-{}^5C_2-{}^3C_2+2=94$ *que também se podia calcular do seguinte modo* ${}^7C_2+7\times(5+3)+5\times3+2=94$.

3570 — Forme uma equação biquadrada cujas raízes sejam ±1 e $\pm i\sqrt{2}$. R: $(x^2-1)(x^2+2)=0$ *ou* $x^4+x^2-2=0$.

Soluções dos n.os 3559 a 3570 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência do Instituto de Ciências Económicas e Financeiras — Ano de 1952 — Ponto n.º 2 — Outubro.

3571 — Demonstre que se a^2-b^2 é um número primo, então os números a e b são inteiros consecutivos. R: *Seja* $a>b$ *e* $N=a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ *um número primo. Se* $a-b\neq1$, N *admitiria divisores, contràriamente à hipótese. Logo* $a=b+1$ c. q. d.

3572 — Sabe-se que o número $\overline{1x1yz}$ (base 10) é divisível por 180. Calcule os valores dos algarismos x, y e z. (Indique todas as soluções do problema). R: *O número dado é divisível por* 10, *o que obriga a ser* $z=0$, *e também por* $18=2\times9$ *o que implica dever ser* $y=0,2,4,6,8$ *e* $2+x+y=\dot{9}$. *As soluções são*: $x=7$, $y=0$, $z=0$; $x=5$, $y=2$, $z=0$; $x=3$, $y=4$, $z=0$; $x=1$, $y=6$, $z=0$ *e* $x=8$, $y=8$, $z=0$.

3573 — No desenvolvimento de $\left(\sqrt{ab}+\frac{1}{\sqrt[3]{b}}\right)^n$ o coeficiente do 3.º termo é igual a 91. Calcule n e escreva o *antepenúltimo* termo do desenvolvimento. Simplifique esse termo. R: *Deverá ser* $C_2^n=91$ *o que conduz à única solução de interesse* $n=14$. *O termo pedido é* $T_{13}=C_{12}^{14}\,a\,b\cdot b^{-3}=91\,a\,b^{-3}$.

3574 — Dada a equação $x^4+px^2+q=0$, deduza a relação que deve existir entre os seus coeficientes para que as quatro raízes reais da equação estejam em progressão aritmética. *(Como se sabe, numa progressão aritmética é constante a diferença entre um termo e o anterior).* R: *Se as 4 raízes da equação,* x_1, $x_2=-x_1$, x_3 *e* $x_4=-x_3$ *estão em progressão aritmética, será* $x_3=x_1/3$. *Além disso, por ser* $x_1^2+x_3^2=-p$ *e* $x_1^2\cdot x_3^2=q$, *a eliminação de* x_1 *e* x_3 *entre estas 3 relações conduz à relação pedida* $9p^2-100q=0$.

3575 — Verifique que, para arcos do 1.º quadrante, é verdadeira a seguinte igualdade

$$\text{arc. tg}\frac{1}{7}+\text{arc. tg}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

R: *Tomando a tangente de ambos os membros da igualdade proposta e atendendo a que* $\operatorname{tg}\operatorname{arctg}x=x$, *tem-se* $(1/7+3/4)/(1-1/7\cdot3/4)=1$ *o que é uma identidade.*

3576 — Calcule os ângulos positivos e inferiores a 180º que verificam a desigualdade

$$2\operatorname{sen}^2x-(1+2\sqrt{3})\operatorname{sen}x+\sqrt{3}<0.$$

R: *A inequação proposta é equivalente a* $2z^2-(1+2\sqrt{3})z+\sqrt{3}<0$ *(com* $z=\operatorname{sen}x$*) donde* $1/2<\operatorname{sen}x<\sqrt{3}$ *ou* $1/2<\operatorname{sen}x\leq1$ *e portanto, os valores de* x *pedidos são* $30^\circ<x<150^\circ$.

Soluções dos n.os 3571 a 3576 de Orlando Morbey Rodrigues

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — Matemáticas Gerais — 1.º exame de frequência — Março de 1952.

3577 — Considere a curva $y=\frac{x}{x^2-5x+4}$ e determine os pontos A e B onde a tangente é paralela a $\overline{OX}$. Ache o lugar dos pontos M tais que $\overline{AM}=K\,\overline{BM}$. Caracterize o lugar segundo os possíveis valores de K. R: *A derivada* $y'=\frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)^2(x-4)^2}$ *anula-se com mudança de sinal para* $x=-2$ *e* $x=2$, *onde a função tem respectivamente os valores* $-\frac{1}{9}$ *e* -1. *Portanto* $A(-2,-1/9)$ *e* $B(2,-1)$ *são pontos de tangente paralela a* $\overline{OX}$.

$\sqrt{(x+2)^2+(y+1/9)^2} = K\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ *donde*

$$(x+2)^2 - K^2(x-2)^2 + (y+1/9)^2 - K^2(y+1)^2 = 0$$

que desenvolvida conduz a

$$x^2(1-K^2) + y^2(1-K^2) + 2x[(1+K)^2 + (1-K)^2] + \\ + y[(1+K)(1/9-K) + (1-K)(1/9+K)] + \\ + 4 + 1/81 - 5K^2 = 0.$$

Com $K = \pm 1$ *o lugar geométrico é visìvelmente de 1.ª ordem (uma recta).*

Com $|K| \neq 1$ *vem*

$$x^2 + y^2 - 2x\left(-2\frac{1+K^2}{1-K^2}\right) - \\ - 2y\left(\frac{K^2-1/9}{1-K^2}\right) + \frac{4+1/81-5K^2}{1-K^2} = 0$$

e o lugar geométrico é uma circunferência do centro no ponto $C\left(-2\frac{1+K^2}{1-K^2}, \frac{K^2-1/9}{1-K^2}\right)$ *e de raio dado por* $r = 4\sqrt{85}\,\frac{K}{1-K^2}$. *Será* $r > 0$ *para os valores de* K *nos intervalos abertos* $(-\infty, -1)$ *e* $(0, 1)$. *Para* $K = 0$ *o lugar reduz-se a um ponto.*

3578 — Defina série absolutamente convergente e prove que a sua soma é independente da ordem dos termos.

Se a série é simplesmente convergente verifica ainda essa propriedade? Enuncie o teorema em que baseou a resposta.

3579 — Defina série absolutamente convergente e prove que a série $\Sigma a_n x^n$ é absoluta e uniformemente convergente em todo o intervalo onde a série dos módulos for uniformemente convergente.

Estude a série $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ e o comportamento nos extremos do intervalo de convergência absoluta. R:

$$\lim_{n=\infty} \frac{|x|^{n+1}}{n+1} : \frac{|x|^n}{n} = |x| \lim_{n=\infty} \frac{n}{n+1} = |x|;$$

portanto a série é absolutamente convergente para $|x| < 1$. *O intervalo de convergência é* $(-1, 1)$. *Converge no extremo direito (série harmónica alternada); diverge no extremo esquerdo.*

3580 — Defina função crescente num ponto e num intervalo e prove que se $f(x)$ é crescente em (a, b) a sua função inversa também o é. Deduza a expressão que liga as derivadas de $f(x)$ e da sua função inversa. R: *Dada* $y = f(x)$ *sejam* $y_1 < y_2$ *tais que* $x_1 = \varphi(y_1)$ *e* $x_2 = \varphi(y_2)$ *onde com* $x = \varphi(y)$ *se representa a inversa. Não se pode ter* $x_1 > x_2$ *porque então, por hipótese, se teria* $y_1 > y_2$. *Portanto necessàriamente: dados* $y_1 < y_2$ *se tem sempre* $\varphi(y_1) \leqslant \varphi(y_2)$.

3581 — Prove que $3\sqrt[3]{x}$ tem ponto de inflexão na origem.

Seja $0 < a < b$ e estude a concavidade da curva no intervalo (a, b).

Escreva a equação da tangente no ponto a e demonstre que a curva fica toda para o mesmo lado desta tangente.

Demonstre que naquele intervalo a curva fica entre a corda e a tangente paralela à corda. R: *A equação da tangente no ponto* $(a, f(a))$ *é* $Y = f(a) + f'(a)(X - a)$ *ou seja:* $Y = 3\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}(X-a)$ $(a \neq 0)$.

A ordenada da tangente no ponto $X = a + h$ *é dada por* $Y = f(a) + hf'(a)$. *A concavidade é positiva ou negativa conforme for positiva ou negativa a diferença* $\Delta = f(a+h) - f(a) - hf'(a)$.

Pela fórmula de Taylor tem-se $\Delta = \frac{h^2}{2!} f''(a + \Theta h)$ *com* $\Theta > 0$.

Vem pois $\Delta = \frac{h^2}{2!}\left(-\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(\Theta h)^5}}\right)$, *que muda de sinal com* h; *fica assim provada a existência de inflexão na origem (de tangente vertical).*

Como a segunda derivada $y'' = -\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ *é sempre negativa para* x *no intervalo* (a, b) *considerado, a expressão* $\Delta = \frac{h^2}{2!} f''(a + \Theta h)$ *mostra que nesse intervalo a concavidade é sempre voltada para baixo.*

As restantes perguntas desta questão são directas, isto é, foram tratadas no curso tal como aqui se apresentam, e como de costume não se dão sugestões para elas.

Soluções dos n.os 3577 a 3581 de J. Ribeiro de Albuquerque.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 1 de Outubro de 1952.

I

3582 — Sendo

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a} - \frac{1}{(x-a)\cdot\cos a}$$

mostre que

$$\frac{d}{da}\left[\lim_{x=a} f(x)\right] = \sec^3 a - \frac{1}{2}\sec a.$$

R: *Para* $x = a$ *a função é indeterminada do tipo* $\infty - \infty$. *Transformando a indeterminação numa outra da forma* $0/0$ *e aplicando duas vezes a regra de* L'Hospital, *obtemos*

$$\lim_{x=a} f(a) = \frac{\operatorname{sen} a}{2\cos^2 a} = \frac{1}{2}\operatorname{tg} a \cdot \sec a.$$

Derivando o resultado obtido alcançamos com toda a facilidade

$$\frac{d}{da}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg} a\cdot\sec a\right) = \sec^3 a - \frac{1}{2}\sec a.$$

3583 — Dados os pontos $A(d, 0, 0)$, $B(0, d, 0)$, $C(0, 0, d)$, determine um outro ponto do espaço equidistante dos três dados e à distância d do seu plano. Qual é o volume do tetraedro definido pelos quatro pontos? R: *A equação do plano definido pelos três pontos dados é, como se verifica imediatamente,* $x+y+z-d=0$. *A distância do ponto* $P(x, y, z)$ *ao plano é dada por*

$$\left|\frac{x+y+z-d}{\sqrt{3}}\right|=d.$$

Como as coordenadas de P *são necessàriamente iguais (o que, de resto, tem verificação imediata), obtemos logo*

$$x=y=z=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{3}\right)d.$$

O volume do tetraedro será dado, por exemplo, pelo determinante

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} d & 0 & 0 & 1 \\ 0 & d & 0 & 1 \\ 0 & 0 & d & 1 \\ x & y & z & 1 \end{vmatrix}.$$

O valor do determinante pode ser obtido fàcilmente utilizando a regra de Chiò *e vem*

$$V=\frac{\sqrt{3}}{6}d^3.$$

II

3584 — Verifique que as raízes de índice n não reais dum número real são complexos conjugados dois a dois.

No caso dum número complexo, poderão as suas raízes de índice n ser conjugadas duas a duas?

3585 — Métodos para a determinação dos pontos de estacionaridade duma função. Suas vantagens e inconvenientes.

Como aplicação, mostre que se for $f'(x_0)=0$ e $f''(x_0)\neq 0$, as funções $f(x)$ e $g(x)=[f(x)]^3$ são simultâneamente máximas e mínimas no ponto x_0.

3586 — Cálculo numérico das séries. Expressões que o limite superior do erro pode tomar. Casos em que é possível o cálculo exacto da soma.

3587 — Uma equação algébrica inteira diz-se *recíproca* se as suas raízes são recíprocas duas a duas. Nestas condições, estabeleça as condições a que terão de satisfazer os coeficientes, supostos reais, duma equação recíproca.

Mostre que uma equação binómia, escrita sob a forma normal, é uma equação recíproca.

3588 — Dada uma hipérbole referida às assíntotas, verifique que a equação da tangente num ponto (x_0, y_0) é

$$y_0\cdot x+x_0\cdot y=2x_0y_0.$$

A partir desta equação, mostre que a tangente corta as assíntotas em dois pontos que definem um segmento cujo ponto médio é o ponto de tangência, e que a área do triângulo definido pela tangente e pelas assíntotas é constante.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — 8 de Outubro de 1952.

I

3589 — Mostre que

$$y=\left(a-\frac{1}{a}-x\right)\cdot(4-3x^2)$$

tem um máximo e um mínimo, e que a diferença entre eles é

$$\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3.$$

Calcule o valor mínimo desta diferença, supondo a um parâmetro variável. R: *Igualando a zero a primeira derivada da função, verificamos com facilidade que as raízes da equação obtida são* $x_1=2a/3$ e $x_2=-2/3a$. *Supondo, para fixar ideias, que* a *é positivo, e atendendo a que a segunda derivada da função é igual a* $y''=18x-6\cdot(a-1/a)$ *concluimos que a função tem um mínimo no ponto* x_1 *e um máximo em* x_2. *A diferença entre o máximo e o mínimo é igual, realmente, ao valor indicado no enunciado como se pode verificar.*

Chamando $g(a)$ *àquela diferença, será*

$$g'(a)=\frac{4}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\cdot\left(1-\frac{1}{a^2}\right).$$

Igualando a zero $g'(a)$ *obtemos uma equação cujas únicas raízes reais são* 1 *e* -1. *Mas*

$$g''(a)=\frac{8}{3}\left(a+\frac{1}{a^3}+\frac{2}{a^5}\right).$$

Logo, o mínimo da diferença dá-se para $a=1$, *e tem o valor* $g(1)=\frac{32}{9}$.

3590 — Determine a distância focal da cónica:

$$x^2+4y^2+4x+15y+4=0.$$

R: *A maneira mais rápida de resolver o problema consiste em achar a equação reduzida da cónica (trata-se duma elipse) referida aos eixos.*

Os invariantes tem os valores: $I_1=5$; $I_2=4$; $I_3=-64$.

Tomando como é usual, o eixo maior para eixos dos xx, *chegamos fàcilmente à equação*

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}-1=0.$$

A semi-distância focal tem então o valor $c=\sqrt{16-4}=2\sqrt{3}$ *e a distância focal é, portanto,* $2c=4\sqrt{3}$.

II

3591 — Raízes primitivas da unidade: definição, propriedades e importância.

Sabendo que i é raiz primitiva de índice n da unidade, que valor terá n?

3592 — Diga o que é uma função homogénea e enuncie a sua propriedade fundamental.

Como aplicação, considere uma função homogénea $F(x,y)$ e, partindo da identidade de Euler, averigue em que condições $F'_x(x,y)$ é também função homogénea. Qual será, nesse caso, o grau de homogeneidade de $F'_x(x,y)$?

3593 — Faça o estudo da série de Dirichlet e, a partir dele, determine as condições de convergência absoluta da série

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^k}.$$

Que poderá concluir ainda quanto à natureza da série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} nx}{n^k}$ para os diferentes valores de x? Porquê?

3594 — Resolução de um sistema de Cramer: método das matrizes.

O determinante de um sistema de Cramer poderá ser ortogonal? E hemi-simétrico?

3595 — Considere numa cónica sem centro, definida pela sua equação canónica, um ponto P e a sua projecção E sobre o eixo. Se forem A e B, respectivamente, os pontos de intersecção da tangente e da normal em P com o eixo dos xx, e chamarmos sub-tangente ao segmento AE e sub-normal ao segmento EB, mostre que a sub-tangente é dividida ao meio pelo vértice da cónica e que a sub-normal é constante.

Enunciados e soluções dos n.os 3582 a 3590 de J. H. Arandes

ANÁLISE INFINITÉSIMAL

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º exame de frequência — 25 de Fevereiro — 1950.

3596 — Estude a convergência do integral e calcule-o na hipótese de ser convergente

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{4x^2+x+1}}.$$

3597 — Calcule $F(a)=\int_0^{\infty}\log\left(1+\frac{a^2}{x^2}\right)dx$.

3598 — Dados os vectores: $\vec{OA}=I+2J$, $\vec{OB}=2I+K$, $\vec{OC}=J+2K$ e $\vec{OD}=3I+3J+3K$, determinar:

a) O volume do tetraedro $ABCD$;

b) A equação da aresta AB;

c) A distância de D a ABC;

d) A área ABC;

e) O plano que contém AD e é perpendicular a ABC.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º exame de frequência extraordinário — 1950-51.

3599 — Seja dado o tetraedro $ABCD$, $A(0,1,2)$, $B(1,0,2)$, $C(1,2,0)$ e $D(5,5,5)$. Determinar: *a*) O volume do tetraedro cujos vértices são os baricentros das faces do tetraedro dado. *b*) O volume do tetraedro obtido, conduzindo pelos 4 vértices planos paralelos às faces opostas. *c*) A equação da altura tirada de A. *d*) o plano mediador de AB. *e*) O plano bissector do ângulo das faces ABC e ABD. *f*) A área do tetraedro $OABC$.

3600 — Mostre que dos 2 integrais $\int_0^1\frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}}$ e $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^8\sqrt{1+x^2}}$ só um tem valor finito e calcular esse valor.

3601 — Calcular: $\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{4\cos x+5}$.

I. S. C. E. F. — Análise Infinitesimal — 1.º exame de frequência — 1.ª chamada — 1952.

3602 — Calcular os integrais:

$$\int_0^{\pi}x^2\operatorname{sen}^3 x\,dx\ ,\quad \int_0^{\pi}x\operatorname{sen}^4 x\,dx \quad \text{e}$$

$$\int_0^{\pi}x^m\operatorname{sen}^n x\,dx.$$

3603 — Estudar a função

$$f(z)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+z\cos^2 x}.$$

a) Mostre que $f(z)$ é irracional e efectue o seu desenvolvimento a partir de $\dfrac{1}{1+z\cos^2 x}$. *b*) Comprove o resultado. *c*) Deduzir por processos convenientes os valores dos seguintes integrais:

$$a)\ \int_0^{\pi} \frac{dx}{(1+\cos^2 x)^2}\,, \quad b)\ \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sec^4 x} \quad \text{e}$$

$$c)\ \int_0^{\pi} \frac{\cos^{2n} x\,dx}{(1+\cos^2 x)^{n+1}}.$$

3604 – Sendo $A(1,1,1)$, $B(1,3,1)$, $C(3,1,1)$, $D(3,3,1)$, $E(2,2,0)$ e $F(2,2,2)$ determine vectorialmente: *a*) O volume do poliedro regular de vértices A, B, C, D, E e F. *b*) O momento resultante do sistema $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ e $\overrightarrow{OD}$ em relação ao baricentro dos vértices do poliedro, nos quais se aplicam massas iguais. *c*) Demonstre que

$$\Sigma\, m_i\, \overline{OM_i}^2 = (\Sigma\, m_i)\, \overline{OG}^2 + \Sigma\, m_i\, \overline{GM_i}^2$$

sendo M_i os pontos em que se aplicam massas m_i, G o centro de gravidade e O um ponto qualquer, fazendo a correspondente aplicação ao poliedro $ABCDEF$.

PROBLEMAS

Problemas propostos ao concurso

Secção Elementar

3605 — Um número que, no sistema de base 10, se escreve com três algarismos, escreve-se, num outro sistema de base menor que dez, com os mesmos algarismos dispostos em ordem inversa. Determinar o número.

3606 — Considere uma esfera de raio R. Quantas esferas de raio R são tangentes à primeira e simultâneamente tangentes a mais cinco destas últimas?

Secção Média:

3607 – Considere a equação

$$\cos 2x + \xi \operatorname{sen} x = \eta$$

em que ξ e η são as coordenadas dum ponto P do plano $\xi o \eta$. Determinar o número de soluções da equação proposta segundo a posição de P no respectivo plano.

3608 – Determinar os polinómios $f(x)$ do 3.º grau tais que

$$f(x^2) \equiv k\, f(x) \cdot f(-x)$$

Secção Superior:

3609 – Provar que, se o polinómio trigonométrico

$$p(t) = a_0 + a_1 \cos t + \cdots + a_n \cos nt$$
$$+\, b_1 \operatorname{sen} t + \cdots + b_n \operatorname{sen} nt$$

é nulo qualquer que seja o valor dado a t, todos os seus coeficientes são nulos.

3610 – Provar que $\vec{v} = |\, r\,|^a\, \vec{r}$ é um vector irrotacional qualquer que seja o inteiro a; só é porém solenoidal se $a = -3$.

Resolução dos problemas do concurso propostos no n.º 51

3436 – Enviaram soluções exactas os Srs. J. Vinhas Novais e José Machado Gil. Publicamos a solução do primeiro:

Representando por a, b, c e d respectivamente os três lados e a altura do triângulo referente ao lado a, e atendendo a que $d < b, c$, temos 4 hipóteses a considerar:

1.ª H	$a=n$	$b=n+2$	$c=n+3$	e	$d=n+1$
2.ª H	$a=n+1$	$b=n+2$	$c=n+3$	e	$d=n$
3.ª H	$a=n+2$	$b=n+1$	$c=n+3$	e	$d=n$
4.ª H	$a=n+3$	$b=n+1$	$c=n+2$	e	$d=n$.

A altura d de um triângulo, em relação ao lado a, está relacionada com os três lados pela expressão

$$d = \frac{2}{a} \times \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

com $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

Considerando as 4 hipóteses possíveis acima indicadas somos conduzidos a 4 equações em n, cujas raízes são também raízes das equações

1.ª H $\quad n^4 + 6n^3 - 18n^2 + 20n + 25 = 0$

2.ª H $\quad n^3 - 16n^2 - 56n - 48 = 0$

3.ª H $\quad n^3 - 16n^2 - 52n - 48 = 0$

4.ª H $\quad n^3 - 24n - 48 = 0$

obtidas quadrando as equações referidas.

Existem tantos triângulos nas condições do enunciado quantas as raízes inteiras destas equações, que sejam ainda raízes das equações donde foram obtidas por quadratura.

Sabendo-se que as raízes inteiras de $P(n)$ dividem o termo independente e que se m é raíz então $P(n) = (n-m) \cdot Q(n)$, chegamos à conclusão de que só na 3.ª hipótese existe uma raíz inteira, e uma só: $n=12$.

Fica assim demonstrada a existência do triângulo nas condições do enunciado, que é único, e fica também determinado $a = 14$, $b = 15$, $c = 13$ e $d = 12$.

3437 — Apresentaram soluções exactas os Srs. J. Vinhas Novais e J. Machado Gil; as demonstrações eram ambas baseadas no método de redução ao absurdo. Damos uma demonstração directa por ser este tipo de demonstração preferível ao indirecto:

Seja b a base; então

$$a\,b^2 + a\,b + a = a^3$$

ou

$$b^2 + b + 1 = a^2$$

donde

$$b = \frac{-1 \pm \sqrt{4\,a^2 - 3}}{2}.$$

Para ser $4\,a^2 - 3 = N^2$ deve ser $(2a+N)(2a-N) = 3$ e, como N e a devem ser inteiros, terá que ser $2a + N = 3$ e $2a - N = 1$, sistema cuja solução dá $a=1$ e $N=1$ e portanto $b=0$ ou $b=-1$.

Quere dizer, não existe base de sistema de numeração em que aquele facto se dê.

3438 — Apresentou solução correcta, que damos a seguir, o sr. J. Machado Gil.

De $\operatorname{sen} 7\,a = 7 \operatorname{sen} a - 56 \operatorname{sen}^3 a + 112 \operatorname{sen}^5 a - 64 \operatorname{sen}^7 a$ vem para $a = \frac{\pi}{7}$

$$\operatorname{sen} \pi = 0 = 7 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} - 56 \operatorname{sen}^3 \frac{\pi}{7} + 112 \operatorname{sen}^5 \frac{\pi}{7} - 64 \operatorname{sen}^7 \frac{\pi}{7}$$

e, por ser $\operatorname{sen} \frac{\pi}{7} \neq 0$

$$64 \operatorname{sen}^6 \frac{\pi}{7} - 112 \operatorname{sen}^4 \frac{\pi}{7} + 56 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{7} - 7 = 0 .$$

Ora, fazendo $\operatorname{sen} \frac{\pi}{7} = x$, vem

$$(1) \qquad 64\,x^6 - 112\,x^4 + 56\,x^2 - 7 = 0$$

equação cujas raízes são os valores que pode ter $\operatorname{sen} \frac{a}{7}$, quando a é determinado pelo valor dado de $\operatorname{sen} a$ e $a = \pi$.

Dado $\operatorname{sen} a$, os arcos com este seno pertencem a

$$n\,\pi + (-1)^n\,a \qquad (n \text{ inteiro})$$

cuja sétima parte é

$$\frac{n\,\pi}{7} + (-1)^n \frac{a}{7} = \alpha .$$

Ora, α é côngruo para o módulo 2π com um dos arcos: $\frac{a}{7}$; $\pi - \frac{a}{7}$; $\frac{\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\frac{2\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{2\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\frac{3\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{3\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\frac{4\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{4\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\frac{5\pi}{7} - \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{5\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\frac{6\pi}{7} + \frac{a}{7}$; $\pi + \frac{6\pi}{7} - \frac{a}{7}$, quando n varia. Estes arcos dão os senos distintos, para $a = \pi$, $\pm \operatorname{sen} \frac{\pi}{7}$; $\pm \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7}$ e $\pm \operatorname{sen} \frac{4\pi}{7}$ que são as raízes de (1).

Estas raízes têm por produto

$$-\operatorname{sen}^2 \frac{\pi}{7} \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi}{7} \operatorname{sen}^2 \frac{4\pi}{7} = (-1)^6 \left(-\frac{7}{64}\right) = -\frac{7}{64}$$

e, por ser $\frac{\pi}{7} + \frac{2\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi$, vem

$$\operatorname{sen} \frac{2\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{4\pi}{7} + \operatorname{sen} \frac{8\pi}{7} =$$

$$= 4 \operatorname{sen} \frac{\pi}{7} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{7} \operatorname{sen} \frac{4\pi}{7} = 4 \times \frac{\sqrt{7}}{8} = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

3439 — Não foram recebidas soluções completas deste problema. Enviaram, porém, soluções satisfatórias os Srs. J. Machado Gil, Fernando de Jesus e J. Vinhas Novais. A mais completa de todas é a deste último.

Tomemos para eixos coordenados a recta fixa (eixo dos $x\,x$) e a perpendicular a esta passando pelo ponto fixo $P(0, a)$. Seja θ o menor ângulo positivo constante definido pelo eixo dos $x\,x$ e pela tangente à circunferência no ponto $M(0, b)$ em que esta corta o mesmo eixo.

O centro da circunferência é o ponto de intersecção das rectas, r, $y - \frac{a}{2} = \frac{b}{a}\left(x - \frac{b}{2}\right)$ — mediatriz do segmento PM —, e r' $y = -\frac{1}{m}(x - b)$ $(m = tg\,\theta)$ — perpendicular à tangente em M; as suas cordenadas verificam pois a equação

$$x^2 - m^2\,y^2 - 2\,a\,y + a^2 = 0$$

do lugar geométrico procurado. Trata-se pois duma hipérbole $(m \neq 0)$ ou parábola $(m = 0)$.

Se porém é $m = \infty$ o lugar é uma cónica degenerada no eixo dos $x\,x$.

J. S. Paulo

3440 — Não foram recebidas soluções deste problema.

A série proposta, $1 + r \cos z + r^2 \cos 2z + \cdots + r^n \cos nz + \cdots$ reduz-se à série de Laurent

$$\frac{1}{2}\left[1 + r\,\xi + r^2\,\xi^2 + \cdots + r^n\,\xi^n + \cdots\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[1 + r\,\xi^{-1} + r^2\,\xi^{-2} + \cdots + r^n\,\xi^{-n} + \cdots\right]$$

mediante a transformação $\xi = e^{iz}$, e é portanto convergente sempre que $|r| < 1$ e $z \neq 0$.

Nestas condições, fixado um r, a série de LAURENT converge sempre que

$$a \leq |\xi| \leq b$$

(dependendo a e b do valor atribuído a r). Como $|\xi| = e^{-y}$, a série proposta é convergente desde que

$$\log a \leq -y \leq \log b$$

isto é, numa faixa do plano dos z, contida entre duas rectas paralelas ao eixo real.

J. G. Teixeira

3441 — Apresentou solução correcta que damos a seguir, o Sr. J. Vinhas Novais.

Uma homografia que conserve a recta do infinito no plano $x0y$ é uma afinidade.

As equações da transformação afim são

$$x = a_1 x' + a_2 y' + a_3 \qquad \text{com} \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = J \neq 0$$
$$y = b_1 x' + b_2 y' + b_3$$

e $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ constantes.

Representando por ξ e η as coordenadas do centro de gravidade da área S e por ξ' e η' as do centro da gravidade da área S', temos

$$\xi = \frac{\int_S x\,dx\,dy}{\int_S dx\,dy} \qquad \xi' = \frac{\int_{S'} x'\,dx'\,dy'}{\int_{S'} dx'\,dy'}$$

e expressões análogas para η e η'.

Pretendemos demonstrar que

$$\xi = a_1 \xi' + a_2 \eta' + a_3$$
$$\eta = b_1 \xi' + b_1 \eta' + b_3$$

Vamos demonstrar para a coordenada ξ:

$$\xi = \frac{\int_S x\,dx\,dy}{\int_S dx\,dy} = \frac{\int_{S'} (a_1 x' + a_2 y' + a_3)\,J\,dx'\,dy'}{\int_{S'} J\,dx'\,dy'} =$$

$$= \frac{\int_{S'} (a_1 x' + a_2 y' + a_3)\,dx'\,dy'}{\int_{S'} dx'\,dy'} =$$

$$= \frac{a_1 \int_{S'} x'\,dx'\,dy' + a_2 \int_{S'} y'\,dx'\,dy' + a_3 \int_{S'} dx'\,dy'}{\int_{S'} dx'\,dx'} =$$

$$= a_1 \xi' + a_2 \eta' + a_3 .$$

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

95 — CURRY, HASKELL B. — **Leçons de Logique Algébrique,** Gauthier-Villars, Paris, 1952.

A Universidade de Lovaina convidou, em 1951, o Professor HASKELL CURRY a fazer um curso sobre Lógica da Matemática.

As lições do Professor CURRY foram editadas em volume pela Livraria Gauthier Villars em 1952, com o título *Leçons de logique algébrique.*

Também há anos, em 1942, a convite da Universidade de S. Paulo, o Professor W. QUINE fez um curso de Lógica da Matemática e as suas lições foram reunidas em volume, editado pela Livraria Martins (S Paulo), com o título *O Sentido da nova lógica.*

É assim que procedem os países que desejam eliminar ràpidamente o seu desfasamento num dado ramo da ciência.

Quando será que uma universidade portuguesa, ou o Instituto para a Alta Cultura, se resolverá a convidar um destes dois eminentes professores, ou outro de igual categoria, a fazer, em Portugal, um curso de lógica da Matemática no intuito de eliminar o nosso desfasamento (digo desfasamento por eutemismo) neste importantíssimo ramo da ciência?

Se se reconhece que em Portugal os estudos sobre Lógica da Matemática são incipientes e que se torna necessário iniciá-los com rapidez e vigor, julgo que o único processo será convidar um professor da categoria dos eminentes professores que citei para reger um curso frequentado pelas pessoas que se devem interessar pelo assunto, como sejam os assistentes de matemática e filosofia das escolas superiores e os professores de matemática e filosofia dos liceus. É uma sugestão que infelizmente eu sei que não será aproveitada.

Algumas conferências realizadas no nosso país sobre Lógica da Matemática não eliminam as nossas deficiências. Numa conferência, a assistência está separada do conferente pela sua passividade de ouvinte, ao passo que num curso os alunos estão em contacto com o professor por meio do trabalho que lhes é distribuído, pelas dúvidas que surgem e troca de impressões que daí resulta.

Enquanto que as conferências seriam de resultado muito precário ou nulo, o curso seria uma sementeira de ideias e de métodos de trabalho o que produziria necessàriamente os seus frutos.

As belezas naturais do nosso país e a benignidade do seu clima talvez contribuissem para que um desses nomes de categoria internacional na Lógica da Matemática se resolvesse a aceitar o convite de uma das nossas universidades ou do Instituto para a Alta Cultura e, numa estadia de seis ou sete meses, fazer a sementeira de ideias e de métodos de trabalho de que temos tanta carência.

Voltemos às *Leçons de logique algébrique* do eminente CURRY.

O volume é constituído pelo seguintes capítulos: Os sistemas formais (capítulo I); As álgebras lógicas (capítulo II); As estruturas (Lattices) (capítulo III); A teoria da implicação (capítulo IV); A negação (capítulo V); e as álgebras mais complicadas (capítulo VI).

O volume contém ainda um apêndice, referente às notações usadas em Lógica da Matemática e termina por uma lista bibliográfica de tratados e artigos de revistas (1) que parece ser exaustiva.

CURRY estabelece um conceito muito geral de sistema formal e, pela introdução sucessiva de postulados, submete as estruturas (lattices), a teoria da implicação e a da negação a esse conceito geral, simplificando e generalizando os processos da álgebra da lógica.

O conceito de sistema formal proposto por CURRY é tão geral e fecundo que «on peut adopter la notion de système formel comme idée centrale de la mathématique. La mathématique peut être définie comme la science des systèmes formels.

La logique mathématique est donc l'étude de ces systèmes formels qui ont vis-à-vis de la logique philosofique le même rapport que la géométrie vis-à-vis de l'espace» (2).

O Professor CURRY é autor de uma obra vasta e que é constantemente citada por todos os tratadistas da Lógica Moderna e *Leçons de logique algébrique* é outra das suas obras que tem de ser estudada por todos aqueles que se interessem por este ramo da ciência.

Para principiantes destes estudos, como eu sou, alguns capítulos de *Leçons de logique algébrique* são de leitura difícil, mas todo o esforço feito no sentido de penetrar no pensamento generalizador do eminente CURRY é bem compensado pelos novos horizontes que são abertos.

Eu permito-me aconselhar a leitura de *Leçons de logique algébrique* aos professores de filosofia e de matemática dos liceus.

Maria Teodora Alves

(1) Os tratados e artigos de revistas que pretendi consultar, infelizmente, não existem nas bibliotecas portuguesas em que os procurei.

(2) *Leçons de logique algébrique*, p. 27.

96 — FORDER, H. G.—**Geometry**—Hutchinson's University Library, n.º 19, London, 1950.

Conhecíamos já na mesma colecção o maravilhoso livro do Prof. LITTLEWOOD intitulado *The skeleton key of Mathematics*. O livro do Prof. FORDER não se lê com menos interesse e encanto e não podemos deixar de admirar a arte com que são tratados e apresentados sob forma moderna alguns dos principais ramos da Geometria. Não se trata evidentemente duma exposição didáctica para principiantes ou de divulgação; apesar de se darem vistas de conjunto e se omitir um grande número de demonstrações não se descura o rigor dos conceitos apresentados sob um ponto de vista rigoroso e moderno (cf., por exemplo, os primeiros números do Cap. IV e o Cap. VI).

A obra em questão compreende onze capítulos. Os três primeiros tratam de Geometria Elementar e de Geometria Analítica Plana necessàriamente por forma, por vezes, muito sucinta. No 4.º capítulo, a Geometria Projectiva Plana é desenvolvida a partir dum sistema de axiomas e apresentados alguns dos seus teoremas fundamentais. Prepara-se assim o tratamento adoptado nos capítulos seguintes: Geometria Não-Euclideana e a estrutura lógica das geometrias. O Cap. VII compreende elementos de geometria analítica no espaço ordinário. O Cap. VIII trata da geometria diferencial das curvas e das superfícies dedicando-se uma maior atenção às linhas notáveis das superfícies e aos pontos notáveis bem como às superfícies de curvatura constante e mínimas. Os três últimos de leitura mais difícil e tratados bastante ràpidamente abrangem as curvas algébricas planas, a geometria em espaços euclideanos n-dimensionais e em espaços mais gerais. Uma pequena bibliografia e um índice analítico terminam o volume.

Manuel Zaluar

97 — THÉBAULT, VICTOR — **Les Récréations Mathématiques** — Gauthier-Villars — Paris-1952.

Trata, este livro de Recreações Matemáticas, exclusivamente de propriedades dos números e o autor dá-lhe mesmo como sub-título «Parmi les nombres curieux». É um trabalho que requere uma paciência de «beneditino», mas que, pelo imprevisto de certos resultados, deve compensar suficientemente o investigador. Muitas destas propriedades têm para o leigo um carácter rebarbativo por, aparentemente, serem *casos* acidentais não obedecendo a nenhuma lei geral, no entanto o estudo teórico delas abre, por vezes, novos horizontes a certas questões da teoria dos números. É o caso das propriedades dos números primos em progressão aritmética de que pouco se conhece e parece ser um campo rico em propriedades. O livro é constituído por problemas, alguns revistos, publicados pelo autor em diversas revistas, em especial na *Mathesis*. Constitue um repositório de propriedades de certos números, de que alguns títulos de parágrafos podem dar ideia:

Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9 tomados uma só vez.

Quadrados e cubos notáveis.

Através dos diferentes sistemas de númeração.

Sobre os quadrados das formas *aabb*, *abba*, *abab*.

Sobre os números que terminam quadrados.

Sobre as sucessões infinitas de potências de inteiros.

Sobre os números de Pitágoras.

Nota sobre a equação de Peel-Fermat.

Contém ainda o livro tabelas dos quadrados dos números inteiros de 1 a 1000 nos sistemas de numeração de base B = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11 e 12.

O livro é, portanto, e para muitos cheio de curiosidades.

J. S. Paulo

98 — REY PASTOR, PI CALLEJA y TREJO, C. A. — **Analisis Matemático** — Editorial Kapelusz — Buenos Aires, 1952.

É bem conhecido o labor de investigador e publicista do matemático espanhol Prof. REY PASTOR. A vizinha Espanha tem a felicidade de o possuir e a sua influência nos estudos matemáticos e na literatura pedagógica espanhola, pelo seu exemplo e pela actividade dispendida em revistas, livros e no professorado, faz-se sentir há boas dezenas de anos. Os seus livros pedagógicos, em especial, influenciaram decididamente os estudos matemáticos em todo o mundo espanhol. Mas apesar do seu valor, que não perderam ainda, o movimento renovador que atravessa toda a Matemática, a *maneira nova* pela qual a Matemática se está reorganizando aceleradamente, criou a necessidade, no dizer do próprio Prof. REY PASTOR, da publicação de livros que tenham em conta esses novos rumos.

O Prof. REY PASTOR foi assim levado a organizar, de colaboração com os professores argentinos da Universidade de La Plata, PEDRO PI CALLEJA e CÉSAR A. TREJO, e com base no seu conhecido livro *Elementos de Analisis Algebraico*, um quase totalmento novo tratado, de que este livro em referência é o volume I, e onde se encontra tudo o que *há de bom no clássico e no novíssimo*. Não poderíamos melhor definir o que é o livro do que servirmo-nos das palavras de REY PASTOR, na introdução, quando presta homenagem aos seus colaboradores e ao seu extraordinário esforço. O livro é *ao mesmo tempo introdução, texto e enciclopédia*.

Conseguiram os autores o fim que se propuseram: fazer um livro que servisse de base a cursos formativos de iniciação universitária e preparatório de estudos superiores, fornecendo, com o rigor necessário e exaustivamente, os elementos para o estudo das diversas questões de Álgebra que apresentam. Esse estudo é feito tendo em conta, mesmo quando se trata de teorias elementares, a evolução da matemática nos últimos anos, mas a introdução de novos conceitos é sempre precedida duma *exemplificação concreta e familiar*, de modo a não pedir ao aluno abruptamente um esforço para o qual se requer sempre tempo e adaptação.

Não se julgue no entanto que os métodos clássicos são abandonados, pelo contrário, eles são ainda bem usados mas pondo em evidência, sempre, as influências com que os marcou cada época. Não é por isso um livro de *Álgebra Moderna*, no sentido que ùltimamente se dá a esta expressão, mas é sem dúvida um livro de Álgebra onde as teorias modernas são tidas na devida conta em especial na construção de uma teoria com todo o seu rigor lógico, aproveitando do formalismo todas as suas vantagens de economia do esforço e de aprofundamento do conhecimento das questões nas suas bases. É mesmo, e por isso dos livros de Álgebra, de que ùltimamente temos conhecimento, aquele que melhor serve como livro de consulta sobre todas as questões fundamentais da Álgebra.

Um resumo do índice dará ideia dos assuntos versados:

Fundamentação dos números racionais.
O número real e o complexo.
Combinatória. Álgebra linear (determinantes e matrizes).
Algoritmo Algébrico (Polinómios).
Limite aritmético.
As funções reais e a continuidade.
As funções transcendentes elementares.
Funções deriváveis.
Teoremas do valor médio e consequências.
Fórmula de Taylor. Equações Algébricas.
Séries de potências.
Interpolação e diferenças finitas.
A área e a integração.
Cálculo de primitivas e aplicações.
Aplicações geométricas e físicas.
Integração aproximada.

No fim de cada capítulo além de muitos e bem escolhidos problemas, é dada uma bibliografia seleccionada onde o estudo de cada assunto pode ser aprofundado.

As notas finais de cada capítulo versando casos de que no texto se aflorou o estudo, ou a que simplesmente se fez referência, tornam o livro de facto uma enciclopédia.

É um livro que aconselhamos vivamente.

J. S. Paulo

GAZETA DE MATEMÁTICA

Três números publicados em 1952

Número avulso: 17 escudos e 50 centavos

Assinatura relativa a 1953 (3 números) 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de Matemática do exame do 3.º ciclo do ensino liceal e de exames de aptidão às Universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. II (N.os 5 a 8)

Continua aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.os 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-á, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, durante 1952 quando pedidas directamente, assinaturas de três números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu termo, salvo aviso prévio em contrário. Todas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.os 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.os 12 e 15 a 49, cada número.	12$50
N.º 50	60$00
N.os 51 e 52, cada número	17$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

ANGARIE ASSINANTES PARA A «GAZETA DE MATEMÁTICA»

concorrerá, assim, para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

PREÇO ESC. 17$50

DISTRIBUIDOR EXCLUSIVO PARA O BRASIL:

EDITORIAL LATINO AMERICANA — Caixa Postal 1524 — RIO DE JANEIRO

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N — Telef. 55282