GAZETA
DE
MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO X **N.° 39** MARÇO 1949

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 12$50

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N.

ANO X-N.º 39 GAZETA DE MATEMÁTICA MARÇO-1949

REDACTOR PRINCIPAL: *J. Morgado* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

Con motivo de un centenário — Juan Bernoulli

por ***J. Gallego Diaz***

Eadem mutata resurgo. El famoso epitáfio que Jacobo Bernoulli eligió pensando en las numerosas propiedades de la espiral logaritmica, por él descubiertas, podia muy bien ser adoptado como lema de la familia. ¿ No es sorprendente que en sólo tres generaciones se encuentren ocho matemáticos, varios de ellos geniales y que en un árbol geneológico donde figuran mas de ciento cincuenta descendientes de los Bernoulli matemáticos, la inmensa mayoria destaquen como hombres de ciência, artistas distinguidos juristas, eminentes y médicos notables ?

El caso de la familia Bernoulli reclama un profundo análisis de la herancia del genio y de las posibles relaciones e influencias que sobre él ejerce el medio ambiente. Otro matemático genial, Leon Pontriagin podía servir de ejemplo, altamente significativo, en nuestros dias. Que existen tesoros espirituales en el pueblo es indudable y que pera que aparezcan solo es menester determinados condiciones favorables, fuera inoportuno recordarlo aqui.

Los Bernoulli fueron una de tantas familias protestantes que huyeran de Amberes em 1583 para escapar a las «depuraciones» de aquellos tiempos. El fundador de la dinastia, Nicolás, contrajo matrimonio en Basilea. El dia 27 de Julio de 1667 nació el tercero y último de sus hijos, Juan I. Sus dos hermanos Jacobo I y Nicolás I tenian, entonces, trece y cinco años, respectivamente. Juan fué el mas prolifico de los tres. Primero se doctoró en medicina y mas tarde fué llamado a la universidad de Groninga para explicar Matemática. En la biblioteca de aquella universidad se conservan manuscritos suyos que recientemente hemos podido consultar. Parece que el clima de Holanda septentrional perjudicaba a su salud y por ello tuvo que regresar a Basilea, en cuya universidad sucedió en 1705 a su hermano Jacobo I. Parece, tambien, que era vanidoso, arrogante y presumido. Sus dotes de polemista agrio y violento le hacían temible; y sus disputas con su hermano Jacobo y hasta con su hijo Daniel, por el cual sentía verdadera envidia, prueban con abundancia los síntomas de esquizoide con que sus contemporáneos lo retratan.

Aun cuando, segun una leyenda, el origen del Cálculo de Variaciones se remonta a la reina Dido, quien en la fundacion de Cartago planteó el primer problema isoperimétrico, es indudable que se debe a los hermanos Bernoulli la gloria entera de su descubrimiento. Sobre su excepcional importancia en la fisica moderna basta recordar que extensos dominios de ella se apoyan como único cimiento en un sencillo «principio variacional». El de Fermat, en la óptica; el de Hamilton, en la dinámica y el nuestro en la Economia, son ejemplos notorios de como el Cálculo de Variaciones va invadiendo todos los provincios de la Ciencia Natural e incluso se atreve a legislar en Biología gracias al principio de la minima accion vital, descubierto por Volterra.

Pero no sólo fué en Matemática donde el genio de Juan I brilló con luz de creador. En Física, en Quimica, en Astronomia, en Óptica, en Navegacion y en Mecánica se encuentran parcelas por él acotadas como la teoría de los mareos, el principio de los desplazamientos virtuales, la teoría intrinseca de las cáusticas o la del sólido de minima resistencia que bastarian por si solos para inmortalizar el nombre de su autor.

Juan contrajo matrimonio con Dorotea Falknet, quien falleció el 30 de marzo de 1764 a la edad de 91 años. Fueron sus hijos: el primogénito, Nicolás, (tercero de la dinastia) nació el 27 de enero de 1695; fué profesor de derecho en Berna y luego de Matemática en San Peterburgo, donde murió el 9 de agosto de de 1726; Ana Catalina (nacida el 10 de febrero de 1697 y fallecida el 27 de mayo del mismo año); Ana Catalina (nacida el 29 de octubre de 1698; casó en primeras nupcias con Juan Dollfust y en segundas con Pedro Hanner; murió en octubre de 1780); Daniel, nació el 29 de enero de 1700; doctor en Medicina; professor de Quimica y de Matemàtica en San Peterburgo, luego profesor de Anatomía y de Botánica en Basilea y, por último, de Física en la misma ciudad, en donde falleció el 17 de marzo de 1782; Dorotea (1704-1800), contrajo matrimonio con Rodolfo Bafliser, profesor de Hebreo en Basilea; Margarita, (1706-1707); Juan II, (nacido el 18 de mayo de 1710, profesor de elocuencia y despues de matemática en Basilea; murió el 17 de julio de 1790); Jacobo, (1712-1769; se dedicó a los negocios y fué músico distinguido) y Manuel (1721-1761), tambien fué comerciante y protector de las bellas artes.

Cuando falleció Juan I, en Basilea, el 1.º de enero de 1748, sus amigos y discípulos, que lo consideraban como un nuevo Arquimedes, hubieron podido suscribir — excepto, quizá el segundo verso — los conocidos elogios a él dedicados màs tarde por Voltaire:

«Son esprit vit la verité
Et son coeur connut la justice
Il a fait l'honneur de la Suisse
Et celui de l'humanité».

Les géométries de figures orientées

par **Paul Belgodère,** (Attaché de Recherches C. N. R. S.)

Résumé:

Lorsqu'un groupe de transformations n'est pas connexe, on peut orienter certaines figures, en les distinguant de figures analogues, inaccessibles par continuité. Dans des cas usueles, le choix d'une orientation possible peut s'obtenir par l'introduction d'un paramètre surabondant, lié par une relation quadratique aux paramètres anciens, les éléments singuliers (non susceptibles d'orientation) jouent alors un rôle fondamental dans le dédoublement obtenu. De même, on peut, dans certains cas, associer conventionnellement dans éléments imaginaires à des figures réelles orientées. Les représentations impropres (non biunivoques) peuvent être considérées comme des orientations.

Les géométries des figures erientées

En Géométrie élementaire, l'idée d'orientation est en général liée aux choix d'un sens de parcours sur une ligne. et d'un sens de rotation autour d'un point ou d'un axe dans le plan ou l'espace.

En Géométrie analytique, où l'on a en particulier à manipuler des éléments complexes, ces notions deviennent insuffisantes et doivent être remplacées, dans chaque cas, par une définition précise.

Deux problèmes se posent, en quelque sorte inverses l'un de l'autre, selon que l'on cherche à définir si une figure complètement donnée peut être considérée comme« *orientée*» par rapport à l'ensemble des figures analogues, ou si une figure connue peut servir de support à un ensemble discret de figures nouvelles.

Signature

Le premier problème cherche à décomposer un ensemble de figures analogues en classes partielles, à l'intérieur desquelles les figures considérées peuvent se déduire l'une de l'autre *par continuité*, sans rencontrer de dégénérescence, par les opérations d'un groupe déterminé.

Si cette décomposition est possible, on peut attribuer à chaque figure non dégénérée une *signature* (généralement le signe + ou —) indiquant à quelle classe de l'ensemble total elle appartient.

Exemples:

— Sens d'un segment non nul (groupe affine de la droite).

— Segments enchevêtrés ou non, non adjacents (groupe projectif de la droite).

— Trièdres positifs et négatifs, non aplatis (groupe affine de l'espace).

— Sens de parcours d'un cercle de rayon non nul (groupe métrique du plan).

— Nombre de carrés positifs et négatifs dans l'équation d'une quadrique sans point double (groupe projectif de l'espace).

— Nature elliptique ou hyperbolique (à points limits ou à points de base) d'un faisceau de cercles non tangents (groupe anallagmatique du plan).

Cette décomposition est ici essentiellement liée à un domaine de réalité, et l'on peut passer d'une figure à une figure analogue de signature opposée, sans rencontrer de singularité, à condition de passer par des intermédiaires imaginaires: la notion de signature disparaît dans le domaine complexe.

D'une manière générale, cette notion d'orientation peut disparaître à l'intérieur d'un sur-groupe du groupe initial: la distinction entre figures directement et inversement égales dans un espace à nombre impair de dimensions disparait avec l'introduction des homothéties imaginaires de module 1, ou d'une dimension supplémentaire. La séparation du plan en deux régions par une droite réelle orientée disparaît ellemême en géometrie projective réelle plane, où le plan se conduit comme une surface unilatère, sur laquelle on ne peut définir qu'une orientation locale. Signalons en passant que le passage par continuité d'une valeur d'une variable à la valeur opposée, par multiplication par un nombre complexe de module 1 et d'argument variable, permet souvent des généralisations: c'est par une telle méthode que l'on peut passer d'une surface minima à la surface adjointe puis à la symétrique, par l'intermédiaire continu des surfaces associées.

Analytiquement, on obtient une signature, caractérisée par le signe + ou —, chaque fois que, avec les «coordonnées» de la figure, on peut former un invariant par rapport au groupe envisagé.

Le signe de l'invariant donne la signature, et l'annulation de l'invariant entraîne une dégénérescence de la figure: dans le domaine complexe, on peut faire varier par continuité cet invariant d'une valeur positive à une valeur négative, sans traverser la valeur zéro.

Il existe d'ailleurs des signatures plus compliquées, pouvant par exemple prendre plus de deux valeurs, ou conserver leur sens dans le domaine complexe. C'est le cas pour les génératrices d'une quadrique, qui restent toujours séparées en deux systèmes différents: ici l'invariance analytique correspond à la condition de rencontre de deux droites; selon que deux génératrices sont ou non de systèmes différents, on peut former avec leurs coordonnées un invariant nul ou non, condition qui garde évidemment un sens dans le domaine complexe.

Choix de figures orientées portées par une même figure existante.

Etant donnée une figure dont le sous-groupe d'invariance à l'intérieur d'un groupe déterminée est formé de plusieurs parties continues, on peut attacher à chaque partie continue de ce sous-groupe un sens possible pour la figure initiale [1], ce qui est facilité par le fait que cette figure et l'espace ambiant ne peuvent rester invariants point par point que par l'identité. Cela permet de considérer plusieurs «figures» pour un même support pontuel.

Analytiquement, ce genre d'orientation est le plus souvent lié à l'extraction d'une racine carrée, et la distinction entre deux éléments orientés de même support revient simplement aux choix d'une détermination pour la valeur du radical.

Exemples en géométrie analytique plane:

— détermination des cosinus directeurs d'une direction de paramètres directeurs a, b

$$\cos \Omega = a/\pm\sqrt{}(a^2+b^2)\,.$$

— distance d'un point à une droite $ux+uy+w=0$

$$d=(vx+vy+w)/\pm\sqrt{}(u^2+v^2)$$

—rayon d'un cercle $x^2+y^2-2\,ax-2\,by+c=0$

$$R=\pm\sqrt{}(a^2+b^2-c)$$

Une méthode générale d'étude des figures orientées consiste alors à prendre pour variable suplémentaire la valeur ainsi choisie pour la racine carrée et à la considérer comme une *coordonnée surabondante* pour la figure, l'ensemble total des coordonnées étant lié par une relation, souvent quadratique. Dans certains cas, l'une des variables initiales peut se calculer linéairement en fonction des autres et de la variable nouvelle, ce qui permet de ne plus garder que des variables indépendantes, le signe de la dernière imposant l'orientation (exemple: cercle a, b. R). D'aprés la conception de PLUCKER de géometries abstraites à n dimensions comme figuration des éléments à n paramètres de l'espace ordinaire, on peut appliquer aux figures, même orientées, les résultats de la géométrie ponctuelle des espaces supérieurs.

Une relation quadratique entre variables surabondantes est, lorsqu'elle existe, la source de propriétés fondamentales, à cause de l'importance de la *forme polaire*, dont l'annulation indique que les 2 figures considérées sont conjuguées par rapport aux figures spécialisées de leur faisceau (pour une figure spécialisée, les deux orientations possibles sont vennues se confondre). Les relations quadratiques entre coordonnées surabondantes des figures orientées peuvent évidemment être spécialisées, c'est-à-dire comporter mions de carrés que n'en permet le nombre de variables (Géométrie de LAGUERRE des cercles orientés, par exemple).

On peut dire, en généralisant, que le choix d'une racine d'une équation algébrique d'ordre n est un phénomène d'orientation où une figure est susceptible de n orientations différentes. Plus loin encore, une permutation, un arrangement ou une combinaison entre les racines d'une équation algébrique est un phénomène d'orientation qui disséque le groupe de recouvrement d'une figure. (Félix KLEIN a, dans ses «*Leçons sur l'icosaèdre*», fait correspondre les positions

[1] Voir E. CARTAN: La notion d'orientation dans les différentes géométries, *Bull. Soc. Math. France*, tome 69 (1941), p. 47-70.

d'un icosaèdre régulier aux permutations des racines de l'équation du 5e degré).

Dans le cas habituel où deux orientations seulement sont possibles pour chaque support donné, on voit ainsi apparaître un doublement de l'espace ponctuel qui se trouve recouvert deux fois.

On peut alors envisager une géométrie plus générale, pour laquelle il y ait dissociation des éléments géométriques, les figures orientées prenant vraiment leur individualité propre et se transformant indépendamment de la variété «opposée», le support ponctuel de la variété orientée initiale. On obtient ainsi des transformations (non ponctuelles), qui ne laissent plus invariante *l'opposition* de deux figures orientées: la notion d'orientation est donc beaucoup plus profonde et plus riche que la notion élémentaire de sens de parcours, puisqu'elle permet d'élargir le groupe fondamental.

Par exemple, en Géométrie plane, on peut plonger le groupe métrique dans le groupe de LAGUERRE, formé de transformations de contact qui changent un cercle en deux cercles différents selon le sens d'orientation, la notion d'éléments impropres, non susceptibles de dissociation par orientation (points) disparaissant dans la transformation. De même, en Géométrie de l'espace, on peut élargir le groupe anallagmatique en groupe LIE, par dissociation de la sphère en deux semi-sphères constituées par les génératrices de l'un et de l'autre système, à qui l'on permet de se transformer chacun pour son propre compte. On peut, de même, avec STUDY, considérer des transformations de droites orientées de l'espace pour lesquelles deux axes de même support se transforment en axes de support différent, sans que soit détruite la perpendicularité entre axes appartenant à deux couches différents; ces transformations sont précieuses dans la géométrie métrique des complexes linéaires et des torseurs.

Remarquons l'importance primordiale que présentent les éléments *impropres* (non susceptibles de dissociation par orientation) dans la théorie des figures orientées. Par exemple, si un élément impropre est caractérisé par une relation quadratique entre coordonnées non surabondantes d'une figure orientée, les transformations projectives de ces coordonnées conservant cette relation donnent une *géométrie orientée élémentaire*, qui conserve l'opposition de deux figures de même support (Exemple: géométrie annallagmatique du plan, qui transforme entre eux les cercles de rayon nul). Par contre, si les coordonnées *surabondantes* d'une figure orientée sont liées par une relation quadratique, les transformations projectives de ces coordonnées conservant la relation, donnent naissance à une *géométrie orientée* supérieure, dont le groupe élargit le précédent, en dissociant les figures orientées de même support.

La géométrie des figures orientées est plus riche et plus précise que celle des figures ordinaires. Le dédoublement qui s'est opéré permet en effet, d'obtenir des formules analytiques valables *sans ambigüité de signe*. D'ailleurs, la recherche des figures qui ne diffèrent d'une figure donnée que par la détermination à attribuer à un radical peut donner des résultats intéressants: prenons, par exemple, l'icosaèdre régulier convexe; toutes ses dimensions se déduisant de l'une d'elles par des formules contenant le symbole $\sqrt{5}$, caractéristique de l'inscription dans le cercle du pentagone régulier: il suffit de remplacer formellement $\sqrt{5}$ par $-\sqrt{5}$ dans toutes ces formules pour avoir les propriétés d'un icosaèdre régulier étoilé, qui se déduit du convexe comme le pentacle (pentagone étoilé) se déduit du pentagone convexe, et possède le même nombre d'éléments de nature analogue, à l'étoilement prés.

Ce *principe de conjugaison* sert avec succès dans l'étude des polyèdres semi-réguliers et des hyperpolyèdres réguliers étoilés. *(Continua)*

Sobre a definição de multiplicação no grupo aditivo dos números reais [1]

por **Luiz Neves Real**

Considere-se no conjunto dos números reais, a operação de *soma* como base da organização dêsse conjunto como espaço algébrico. É sabido que assim se obtém um grupo abeliano, uma vez que se verificam os axiomas: I — Quaisquer que sejam α e β existe a soma $\alpha+\beta$; II — A soma é associativa, $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$; III — É comutativa $\alpha+\beta=\beta+\alpha$; IV — A equação $\alpha+\xi=\beta$ é sempre resolúvel em ξ.

Se tomarmos a relação« menor do que», $\alpha<\beta$ para base da ordenação dêste espaço algébrico, êle aparecer-nos-há como grupo abeliano ordenado; além dos quatro anteriores axiomas tem ainda logar a lei de monotonia V — Se $\alpha<\beta$, $\alpha+\gamma<\beta+\gamma$, qualquer que seja γ.

(1) F. Bachmann — Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Band I$_1$, Heft 2 — 3,23.

Se entre os elementos de um grupo se estabelece uma correspondência biunívoca de modo que, sendo α' e β' os elementos correspondentes respectivamente a α e β, a $\alpha+\beta$ corresponda $\alpha'+\beta'$ — diz-se que se definiu no grupo um *automorfismo*. Esta noção permite que se introduza no grupo aditivo dos números reais a operação de multiplicação, através da seguinte:

Definição. *Produto* — $\alpha \,.\, \beta$ — *de dois números reais* α *e* β *é o número real que corresponde a* β *naquele automorfismo do grupo aditivo dos números reais, em que o número* 1 *tem como correspondente o número* α. *Assim se encontra o sentido profundo e geral da definição: o produto obtem-se do multiplicando como o multiplicador se obteve da unidade* — pelo mesmo automorfismo.

A justificação dêste modo de definir encontra-se no seguinte:

Teorema. *Fazendo corresponder a todo o número real* ξ *o número real* $\xi\,.\,\alpha$ *(resultado da multiplicacão de* ξ *por* α*) com* $0<\alpha$ *(com* $\alpha<0$*) estabelece-se no conjunto dos números reais, considerado como grupo aditivo ordenado, um automorfismo que conserva (inverte) a ordem do grupo. Inversamente, há um único automorfismo no grupo dos números reais, que faça corresponder ao número* 1 *o número* α*, conservando a ordem (invertendo, a ordem): é a multiplicação por* α*, com* $0<\alpha$ *(com* $\alpha<0$*).*

É a primeira parte do teorema consequência imediata das leis da multiplicação dos números reais (de fecho, de distributividade, de monotonia). Só a segunda carece de demonstração.

Represente-se por $\xi \leftrightarrow \gamma(\xi)$ o automorfismo no grupo ordenado e aditivo dos números reais, que, conservando a ordem faz corresponder ao número 1 o número positivo $\alpha : \gamma(1)=\alpha$. Como $2=1+1$ deverá ser $\gamma(2)=\gamma(1)+\gamma(1)=\alpha+\alpha=2\,.\,\alpha$ e para n inteiro e positivo $\gamma(n)=\underbrace{\gamma(1)+\cdots+\gamma(1)}_{n \text{ vezes}}=n\cdot\alpha$. Sendo $\gamma(0)=0$ pois 0 é a unidade do grupo, $\gamma(-1)=-1\cdot\alpha$, visto que deve ser $\gamma(-1)+\gamma(1)=\gamma(-1)+\alpha=0$; e, anàlogamente, para n inteiro e positivo $\gamma(-n)=-n\cdot\alpha$. Por outro lado de $1=1/2+1/2$ segue-se $\alpha=\gamma(1/2)+$ $+\gamma(1/2)$ e $\gamma(1/2)=1/2\cdot\alpha$. Dêste modo se vê que aos números reais da forma $k/2^m$, com $k=0,\pm1,\pm2,\pm3\cdots$ e $m=1,2,3\cdots$ correspondem os números $k/2^m\cdot\alpha$. Mas sabe-se que o conjunto $\{k/2^m\}$ de todos os números da forma $k/2^m$ é denso no conjunto dos números reais — sabemos que todo número real ξ se pode escrever, na base 2, como limite de uma sucessão de números desse conjunto. Esta propriedade vai ser utilizada para determinar o número $\gamma(\xi)$ correspondente a ξ. Representemos por $\{x_n\}$ uma sucessão de números da forma $k/2^m$ cujo limite seja $\xi : \xi=\lim_n x_n$. Como $\gamma(x_n)=x_n\cdot\alpha$, à sucessão convergente $\{x_n\}$ corresponde por automorfismo a sucessão $\{x_n\cdot\alpha\}$ igualmente convergente e tendo como limite $\xi\cdot\alpha$. Mostremos que se tem precisamente $\gamma(\xi)=\xi\cdot\alpha$. Seja δ um número real positivo qualquer; existe sempre m tal que $1/2^m\cdot\alpha<\delta$; e como $\xi=\lim_n x_n$ existe também N tal que $\xi-$ $-1/2^m<x_n<\xi+1/2^m$, se $n>N$. Sendo a ordem do grupo mantida pelo automorfismo, ter-se-á, por correspondência $\gamma(\xi)-\gamma(1/2^m)<\gamma(x_n)<\gamma(\xi)+\gamma(1/2^m)$, para $n>N$ ou $\gamma(\xi)-1/2^m\cdot\alpha<x_n\cdot\alpha<\gamma(\xi)+1/2^m\cdot\alpha$ e, por maioria de razão $\gamma(\xi)-\delta<x_n\cdot\alpha<\gamma(\xi)+$ $+\delta$, para $n>N$ condição para que $\gamma(\xi)=\lim_n(x_n\cdot\alpha)=$ $=\xi\cdot\alpha$, como desejávamos provar. Se o automorfismo γ invertesse a ordem do grupo e $\alpha<0$, determinaria m pela condição $1/2^m(-\alpha)<\delta$ e a desigualdade $\xi-$ $-1/2^m<x_n<\xi+1/2^m$ arrastaria semelhantemente $\gamma(\xi)-1/2^m\cdot\alpha>x_n\cdot\alpha>\gamma(\xi)+1/2^m\cdot\alpha$ ou $\gamma(\xi)+$ $+\delta>x_n\cdot\alpha>\gamma(\xi)-\delta$.

Inégalités (*)

par *Jean Aczél*

Introduction. On connait bien l'inégalité

$$(1) \qquad (a+b)/2>\sqrt{ab}$$

qui lie la moyenne arithmétique $(a+b)/2$ et la moyenne géométrique $\sqrt{ab}$ de deux nombres positifs a, b $(a\neq b)$. Dans le cas oú $a=b$ les deux membres de (1) sont évidemment égaux.

Pour prouver (1) il faut montrer que la différence $(a+b)/2-\sqrt{ab}$ est positive. Mais ceci est immédiat d'après la relation $a+b-2\sqrt{ab}=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, tenant compte du fait que le carré d'un nombre différent de zéro est toujours positif (aux sens strict).

Considérons tout de suite quelques applications de cette inégalité. Montrons que la somme d'un nombre positif et différent de 1 et de sa réciproque est toujours supérieure à 2, c'est à dire que pour $x>0$ $(x\neq1)$ on a $x+1/x>2$. En effet, d'après l'inégalité (1) on a $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\Big/2>\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=1$.

(*) Artigo destinado à publicação «KÖZEPISKOLAI MATEMATICAI LAPOK», jornal de Matemática para os alunos dos liceus húngaros.

Comme deuxième application cherchons, parmi les rectangles de même périmètre, celui qui a la plus grande aire. Si nous désignons les cotés d'un rectangle par a et b, son périmètre sera égal à $2a+2b=k$, oú k est commun à tous les rectangles considérés. Or

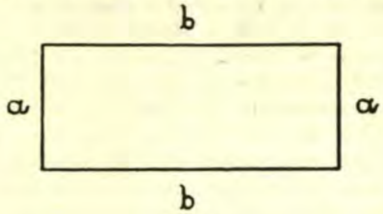


Fig. 1

l'aire A de ce rectangle a comme valeur ab, donc en vertu de (1) $\sqrt{A}<k/4$, sauf pour le cas où $a=b$, quand $\sqrt{A}=a=k/4$ On a donc le résultat que *parmi tous les rectangles de même périmètre le carré est celui qui a la plus grande aire.*

Exercice 1. Dans la figure 2. nous avons dessiné des rectangles ayant lc même périmètre, le même centre et les cotés paralléles. Si on dessine *tous* ces rectangles ils recouvrent une partie du plan. Quelle est la forme de cette partie ?

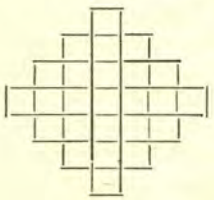


Fig. 2

Exercice 2. Parmi tous les rectangles ayant la même aire, lequel a-t-il le plus petit périmètre ?

Exercice 3. Si on dessine tous les rectangles ayant la même aire, le même centre et les cotés parallèles, quelle partie du plan vont-ils recouvrir ?

Problème 1. Soit $A>B$. Démontrons qu'on a $A+D>B+D$ pour tout nombre réel D, $CA>CB$ pour C positif et $CA<CB$ pour C négatif.

Si A et B sont positifs, $A>B$ implique $A^n>B^n$ (n étant un entier positif), $1/A<1/B$, $1/A^n<1/B^n$ (n entier positif).

$A>B$ et $C>D$ impliquent $A+C>B+D$ et, si A, B, C, D sont tous positifs, aussi $AC>BD$.

Probleme 2. On appelle moyenne harmonique de deux nombres positifs a et b la valeur $2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$. Montrons que pour $a\neq b$, la moyenne harmonique est toujours inférieure à la moyenne géométrique, c'est à dire $2\Big/\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)<\sqrt{ab}$.

Exercice 4. Parmi tous les triangles rectangles ayant la même hauteur sur l'hypothénuse, quel est celui qui a la plus petite hipothénuse ?

Exercice 5. Parmi tous les triangles rectangles ayant la même hypothénuse, quel est celui qui a la plus grande hauteur sur l'hypothénuse ?

Voilà donc quelques applications de l'inégalité (1). Au cours de cet article nous allons étudier d'autres inégalités et nous allons les appliquer à divers problèmes. Nous laissons les démonstrations au soin du lecteur, mais dans les communications qui vont suivre nous indiquerons chaque fois les démonstrations de la communication précédente, afin que le lectenr puisse vérifier si son raisonement était correct.

Les inégalités dont nous allons parler sont connues depuis très logtemps. Le premier traitement systématique n'était donné cependant qu'en 1934 par Hardy, Littlewood et Polya dans leur livre célèbre, intitulé «Inequalities». Ils basent la théorie des inégalités sur la notion de fonction convexe. Nous allons suivre le même chemin dans le presente article. Outre ce livre nous nous sommes servis du premier volume du traité de Haupt, Aumann et Pauc: Differential-und Integralrechnung et des cours faits par M. Frédéric Riesz à l'Université de Budapest et par M. Tibor Gallai à l'Université libre de Budapest.

1. *Fonctions continue convexes.* Une fonction $y=f(x)$ est continue si son graphique ne présente pas des sauts. Cette notion intuitive peut être remplacée par une définition précise à partir de laquelle on peut démontrer d'une façon rigoureuse que la plupart des fonctions élémentaire (par exemple les fonctions $y=x$, $y=x^2$, $y=x^n$ (n entier), $y=a^x$, $y=\log x$, $y=\sin x$, $y=\cos x$ sont continues. Nous ne donnons pas ici cette définition précise, mais nous allons uti-

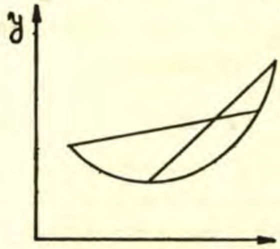


Fig. 3

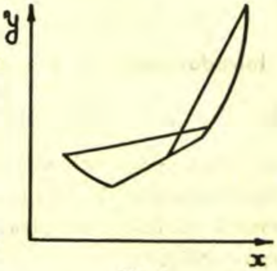


Fig. 4

liser cependant la continuité des fonctions mentionnées. Une des propriétés les plus importantes d'une fonction continue est la propriété de Darboux: si une fonction continue prend deux valeurs différentes $y_1=f(x_1)$ et $y_2=f(x_2)$ $(x_1 < x_2)$, alors elle prend toutes les valeurs comprises entre y_1 et y_2 dans l'intervalle $x_1 < x < x_2$. Par exemple la fonction $y=\sin x$, dont nous avons signalé la continuité, est égale à 0 pour $x=0$ et à 1 pour $x=\pi/2$, on peut donc être sûr qu'elle prenda toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 dans l'intervalle $0 < x < \pi/2$.

Une fontion sera dite *convexe* si une corde quelconque de son graphique laisse l'arc entre ses deux extrémités au-dessous d'elle (fig. 3.). Remarquons

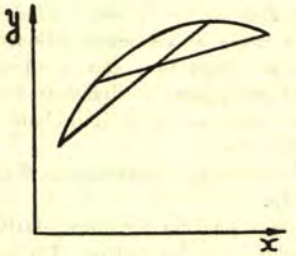


Fig. 5

qu'au delà des extrémités de la corde, la courbe est située au-dessus de la droite qui porte la corde. Nous dirons qu'une fonction est *convexe au sens large* si son graphique est constitué d'arcs convexes et de segments de droite (fig. 4.). Dans ce cas un arc de la courbe peut aussi coïncider avec la corde.

Une fonction sera dite *concave* si une corde quelconque de son graphique laisse au-dessus d'elle l'arc qu'elle soustend (fig. 5). On dèfinit la *concavité au sens large* d'une façon analogue à celle de la convexité au sens large.

Problème 3. Si la fonction $y=f(x)$ est convexe, alors la fonction $y=-f(x)$ est concave, et réciproquement.

Problème 4. Faisons le dessin des fonctions suivantes et déterminons à partir *de la figure* pour quelles valeurs de x sont-elles convexes ou concaves:

$$y=x^2,\ y=x^3,\ y=\sqrt[3]{x^2},\ y=\sqrt{x^3},\ y=1/x,\ y=1/x^3,$$
$$y=1/\sqrt{x^3},\ y=+\sqrt{x},\ y=-\sqrt{x},\ y=2^x,\ y=10^x,$$
$$y=\log x,\ y=\sin x,\ y=\operatorname{tg} x$$

(au points $x=\pm\pi/2, \pm 3\pi/2, \cdots$ cette dernière fonction ne sera pas continue !)

Problème 5. Quelle particularité ont-elles les fonctions de la forme $y=ax+b$ (a, b quelconques) au point de vue de la concavité et de la convexité ?

(Continua)

Teoremas recíprocos nos casos de igualdade de triedos

por Maria Teodora

A reciprocidade em geometria tem maior extensão do que à primeira vista poderá parecer.

Os compêndios de geometria elementar, nacionais e estrangeiros que conheço e alguns deles da autoria de nomes notáveis na Metodologia e no domínio da

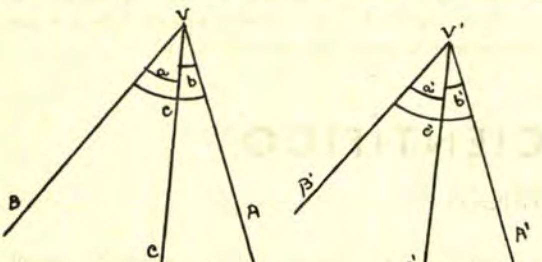


Fig (1)

investigação Matemática não põem em evidência essa extensão e generalidade.

Como se sabe, dado um teorema em que a hipótese e a tese são decomponíveis em hipóteses e teses parciais, se permutarmos, total ou parcialmente, as condições de relação da hipótese com as teses parciais, obtemos teoremas, verdadeiros ou falsos que se chamam teoremas recíprocos do teorema proposto.

Apliquemos esta doutrina ao teorema seguinte da igualdade de triedros: — Se dois triedros têm as faces iguais, cada uma a cada uma, e semelhantemente dispostos, esses triedros são iguais.

Sejam, a, b, c e a', b', c' as faces dos triedros; e $\widehat{VA}, \widehat{VB}, \widehat{VC}$; $\widehat{V'A'}, \widehat{V'B'}, \widehat{V'C'}$, os rectilíneos dos diedros correspondentes.

$$H: \left| \begin{array}{ll} a=a' & (H_1) \\ b=b' & (H_2) \\ c=c' & (H_3) \end{array} \right.$$

e semelhantemente dispostas

$$T: \left| \begin{array}{ll} \widehat{VA}=\widehat{V'A'} & (T_1) \\ \widehat{VB}=\widehat{V'B'} & (T_2) \\ \widehat{VC}=\widehat{V'C'} & (T_3) \end{array} \right.$$

Os teoremas recíprocos verdadeiros, são obtidos da seguinte maneira:

1) Por permuta de (H_3) com (T_3).

$$H: \left| \begin{array}{ll} a = a' & (H_1) \\ b = b' & (H_2) \\ \widehat{VC} = \widehat{V'C'} & (T_3) \end{array} \right.$$

e semelhantemente dispostos

$$T: \left| \begin{array}{ll} c = c' & (H_3) \\ \widehat{VA} = \widehat{V'A'} & (T_1) \\ \widehat{VB} = \widehat{V'B'} & (T_2) \end{array} \right.$$

donde o teorema:

Se dois triedros têm um diedro igual, compreendido por faces iguais, cada um a cada um, e semelhantemente dispostos, então são iguais.

2) Por permuta de (H_2) e (H_3) com (T_2) e (T_3).

$$H: \left| \begin{array}{ll} a = a' & (H_1) \\ \widehat{VB} = \widehat{V'B'} & (T_2) \\ \widehat{VC} = \widehat{V'C'} & (T_3) \end{array} \right.$$

e semelhantemente dispostos

$$T: \left| \begin{array}{ll} b = b' & (H_2) \\ c = c' & (H_3) \\ \widehat{VA} = \widehat{V'A'} & (T_1) \end{array} \right.$$

Logo o teorema:

Se dois triedros têm uma face igual e os diedros adjacentes a essa face iguais, cada um a cada um, e semelhantemente dispostos, então são iguais.

3) Por permuta de (H_1), (H_2) e (H_3) com (T_1), (T_2) e (T_3).

$$H: \left| \begin{array}{ll} \widehat{VA} = \widehat{V'A'} & (T_1) \\ \widehat{VB} = \widehat{V'B'} & (T_2) \\ \widehat{VC} = \widehat{V'C'} & (T_3) \end{array} \right.$$

e semelhantemente dispostos

$$T: \left| \begin{array}{ll} a = a' & (H_1) \\ b = b' & (H_2) \\ c = c' & (H_3) \end{array} \right.$$

tem lugar o teorema:

Se dois triedros têm os diedros iguais cada um a cada um e semelhantemente dispostos, então são iguais.

Se considerarmos inicialmente qualquer dos teoremas correspondentes a um dos casos de igualdade de triedros, os outros teoremas de igualdade de triedros poderiam ser considerados recíprocos desse.

Devemos notar que a partir do teorema proposto se poderiam obter 19 teoremas recíprocos, isto é:

$$3 \times {}^3C_2 + 3 \times {}^3C_1 + {}^3C_3 = 19.$$

Destes teoremas apenas 7 são verdadeiros. Os 12 restantes, não tendo os elementos (diedros ou faces) semelhantemente dispostos, são recíprocos falsos. Dos 7 teoremas recíprocos verdadeiros, 3 deles correspondem a um mesmo caso de igualdade de triedros, outros 3 a outro caso.

O último é aquele que permuta as 3 faces com os 3 ângulos diedros.

Estudo análogo poderia ser feito relativamente aos casos de igualdade de tetraedros: Dado um dos casos de igualdade de tetraedros, os outros casos podem ser considerados teoremas recíprocos do caso considerado como primeiro.

Anàlogamente para os casos de semelhança de tetraedros, isto é, dado um caso de semelhança de tetraedros, os outros casos podem ser considerados teoremas recíprocos do teorema correspondente ao caso considerado.

Ainda para os casos de igualdade de triângulos. considerado um caso de igualdade de triângulos, os outros casos podem ser considerados, como teoremas recíprocos do teorema que corresponde ao caso que se considerou.

Também, na semelhança de triângulos, estabelecido um dos casos de semelhança, os outros casos podem ser considerados teoremas recíprocos do teorema que corresponde ao caso que se considerou.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

FILMES CIENTÍFICOS

Na noite de 28 de Fevereiro de 1949 realizou-se no Grande Anfiteatro da Sorbonne, promovida pela «União Nacional dos Intelectuais» e pela «Associação dos Trabalhadores Científicos», a primeira sessão de filmes científicos com o fim de apresentar algumas das investigações realizadas em diversos domínios da Ciência e como meio de propaganda a favor da investigação científica e dos novos métodos de ensino, de que, infelizmente, não se ocupa a chamada grande imprensa. Além dum filme de Jean Painlevé e Georges Rouquier sobre Pasteur, e de outros sobre microorganismos, reanimação do organismo, protuberâncias solares, etc., destacaremos, pelo interesse, — e para alguns novidade — o filme intitulado Famílias de rectas e de parábolas» de M. Cantagrel, cedido pelo Museu Pedagógico de Paris.

Julgamos de um alto interesse pedagógico a exibição em escolas portuguesas de filmes como este. Cremos também — apesar da nossa ignorância da técnica cinematográfica — na facilidade da montagem.

Os modelos com fios, de matérias plásticas ou gesso, bem como os quadros murais com gráficos, são um precioso instrumento pedagógico quando bem executados. O cinema dispõe porém de meios vivos e sugestivos que muito podem ajudar tanto a exposição do professor como a compreensão do aluno. O filme pode mesmo exemplificar a técnica utilizada nos laboratórios de matemática para a construção dos gráficos. Até talvez sob o ponto de vista económico fosse vantajosa a introdução do cinema.

Segundo o testemunho do Prof. Bauer, encarregado da apresentação e justificação da sessão este filme foi exibido em vários liceus franceses com êxito pedagógico. Como o leitor sabe, o ensino da Geometria, sintética e analítica, é feito com largo desenvolvimento em França, já no ensino secundário, e contribui largamente para a formação matemática do estudante.

O filme exemplificava a construção geométrica de uma recta, ou parábola definida pela sua equação cartesiana. No caso das famílias consideradas os coeficientes das respectivas equações dependiam linearmente, ou eram polinómios do 2.º grau, de um parâmetro contínuo, casos evidentemente simples. Recordamos terem sido apresentados feixes de rectas, uma família de rectas tangentes a uma parábola, uma família de parábolas tangentes num ponto a uma dada recta outra família de parábolas cujo foco descrevia uma cúbica, etc. O cinema permitia dar ideia do deslocamento, com ou sem deformação, resultante da variação do parâmetro dum elemento genérico da famíla.

M. Z.

SEMINÁRIOS DE MATEMÁTICA NA UNIVERSIDADE DE PARIS

Há muito a *Gazeta de Matemática* vem dando aos seus leitores notícia dos programas de estudos e de alguns aspectos do trabalho em Universidades estrangeiras. Esse noticiário, mais ou menos breve, pormenorizado ou não, oferece contudo a possibilidade de conhecerem certos traços essenciais da feição que em diferentes centros universitários tem hoje o ensino das ciencias matemáticas e a preparação para a investigação científica. Um destes aspectos, que sempre se vai encontrar adentro das escolas superiores, de organização e níveis científicos embora variados, é a existência de núcleos de trabalho, geralmente designados por *Seminários*, cuja actividade se desenvolve a par e em relação com os estudos básicos feitos nos cursos regulamentares.

As conferências comentadas e discutidas que se realizam nos *Seminários*, o estudo e o intercâmbio de conhecimentos feitos nas suas reuniões científicas, onde uma experiência intelectual adquirida em comum por professores, assistentes, alunos e toda uma gama de outros estudiosos constitui um laço forte de unidade de trabalho e uma garantia de actualização científica permanente, são hoje parte integrante da actividade normal, regular, de todos os gandes centros universitários.

A finalidade dos *Seminários* pode definir-se pelos resultados úteis que se obtêm da sua actuação e que em poucas palavras procuraremos caracterizar: O desenvolvimento e a actualização de conhecimentos, até à primeira linha dos problemas que constituem a preocupação da ciência dos nossos dias; o exercício do espírito crítico na análise de memórias científicas recentes, prenhes de questões não inteiramente esclarecidas e de métodos de trabalho a aperfeiçoar, e que, pelos seus ensinamentos e estímulos, conduzem à investigação científica; o amadurecimento intelectual indispensável a um professor e que a frequencia de cursos e a leitura de tratados de ciencia feita, por si só, não permitem atingir.

Vemos assim que aí se procura obter um prolongamento do quadro, cada dia mais largo, dos estudos universitários considerados hoje fundamentais e que estão compreendidos entre os programas. Mas, mais do que isso, se pretende simultâneamente introduzir um trabalho com um carácter diferente do dos cursos, com maior intervenção da iniciativa pessoal, exigindo e pondo em jogo capacidades e faculdades desenvolvidas naqueles. O ritmo e os processos de trabalho são outros, correspondendo a novos interesses e objectivos.

Será a existência dos *Seminários* apenas uma solução de compromisso entre, dum lado, as necessidades criadas por um rápido desenvolvimento da ciência e por uma progressiva intervenção desta na vida social atravez das técnicas que lhe correspondem e, doutro lado, a orgânica do ensino vigente que deixou de satisfazer a estas necessidades? uma solução de compromisso, uma solução provisória, desempenhando em relação aos cursos regulamentares um papel análogo ao dos Institutos de investigação relativamente às Universidades, e porventura destinada a desaparecer no futuro, por uma fusão destes com aqueles, em virtude duma reforma profunda no sistema de formação dos quadros científicos e técnicos? É possível. Seja porém como for, o que nos detem neste momento é observar, nas circunstâncias existentes, a utilidade dos *Seminários* para ir ao encontro dos problemas que se apresentam no campo da educação científica e da preparação técnica, e que pedem solução urgente.

Também nas nossas Universidades se fizeram já experiências neste sentido e os resultados foram pelo menos animadores.

Mas ao recordar os Centros de Estudos Matemáticos que há anos existiam nas Faculdades de Ciências de Lisboa e do Porto, somos levados a reconhecer que a sua actividade — marcada pela realização de colóquios e por um trabalho de iniciação na investigação científica, de que nos ficaram importantes elementos — nunca pôde integrar-se inteiramente na vida universitária. Talver por isso não foi longa a sua duração e haverá que recomeçar.

Trazendo hoje ao conhecimento dos leitores da Gazeta de Matemática uma breve referência aos trabalhos que se realizam em alguns dos *Seminários* de escolas superiores de Paris, como actividade regular — — embora não regulamentada—de professores, alunos e outros estudiosos, queremos ilustrar com mais um exemplo o que acima dizemos. Fazemo-lo também na convicção de que, para cuidar entre nós de empreendimentos desta natureza, estas e outras informações bem merecem ser apreciadas nos seus diferentes aspectos e utilizadas, tendo em conta as condições do desenvolvimento dos estudos matemáticos no nosso país.

A. Pereira Gomes

SEMINÁRIO DE ALGEBRA SUPERIOR

Na Faculdade de Ciências de Paris (Instituto Henri Poincaré) tem lugar quinzenalmente um Seminário de Álgebra Superior, presidido pelo Professor A. Châtelet. Em continuação dos trabalhos do ano passado, efectuam-se aí exposições e correspondente discussão de memórias de grande importância e actualidade, não tendo carácter de iniciação. Os assuntos tratados são escolhidos pelo interesse que apresentam e não estão necessàriamente em correlação imediata entre si.

As conferências realizadas até Fevereiro versaram os temas seguintes:

1 — Memórias de Jacobson relativas à teoria de Galois, por L. Kaloujnine.

2 — Generalização da Teoria de Galois, por J. Dieudonné.

3 — Memórias de Artin relativas aos aneis de valuação.

4 — O teorema de Remach e Schmidt, por Riguet.

Também aqui um resumo policopiado das conferências é distribuido pelos que frequentam o Seminário.

SEMINARIO DE BOURBAKI

Voltou a funcionar o Seminário Bourbaki, que reune em Paris matemáticos vindos de diferentes centros universitários de França. É secretariado pelo professor J. Dieudonné, que há um ano regressou à Universidade de Nancy, depois de ter ensinado durante um largo periodo na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de São-Paulo.

A primeira reunião do Seminário teve lugar na Escola Normal Superior em tres dias consecutivos (sábado, domingo e segunda-feira) da primeira quinzena de Dezembro. Cada sessão foi preenchida por duas conferências e sua discussão.

As conferências versaram os seguintes temas:

1 — A hipótese de Riemann para os corpos de funções algébricas de característica p, por C. Chevalley.

2 — O teorema de Minkowski-Hlawka — por C. Chabauty.

3 — As representações unitárias irredutíveis do grupo complexo unimodular (Gelfand e Neumark, Recueil de Moscou (1947), por R. Godement.

4 — Sobre a estrutura de p-grupo de Sylow dos grupos simétricos finitos e de algumas generalizações infinitas destes grupos, por L. Kaloujnine.

5 — Os trabalhos de Koszul, por H. Cartan.

6 — Sobre a teoria das correspondências biracionais, por P. Samuel.

Os trabalhos deste Seminário, verdadeiras reuniões científicas, decorrem num nível altamente especializado.

As próximas sessões estão previstas para a 1.ª quinzena de Março.

SEMINARIO DE CALCULO DAS PROBABILIDADES

Todas as 6.as feiras têm lugar, no anfiteatro Darboux do Instituto Henri Poincaré da Faculdade de Ciências de Paris, as sessões do Seminário de Cálculo das Probabilidades presidido pelo Professor Fréchet. No presente ano lectivo até Fevereiro foram expostos e discutidos os temas seguintes:

1948, Nov. 5 — Une propriété générale des valeurs typiques aléatoires — Fréchet.

Nov. 12 et 19—Problèmes de Probabilité qui se posent pour un groupe de lignes téléphoniques sans possibilité d'attente (Phénomène de blocage; recherche de diverses fonctions caractéristiques; méthodes analytiques; solutions) — Pollaczek.

Nov. 26 — Les valeurs typiques d'ordre déterminé d'un nombre aléatoire — Fréchet.

Déc. 3 — Problème d'estimation statistique dans le cas d'un tirage de boules d'une urne — Bouzitat.

Déc. 10—Loi de distribution du premier chiffre d'un nombre dans les tableaux statistiques — R. Féron.

Déc. 17—Le problème de la collinéarité — Gerhard Tintner.

1949, Janv. 7 — Distribution assymptotique du «range» dans le cas d'échantillons tirés d'une population laplacienne — R. Féron.

Janv. 14 — Sur certaines classes de fonctions aléatoires — J. Bass.

Janv. 21 — Estimation des paramètres lorsque le nombre des paramètres inconnus croit indefiniment avec le nombre des observations — Le Cam.

Janv. 28 — Sur la concurrence intra-spécifique («Nouvelle Génétique») — Kostitzin.

SEMINÁRIO DE TOPOLOGIA ALGÉBRICA

Sob a direcção do Professor Henri Cartan, realiza-se semanalmente, na Escola Normal Superior de Paris, um Seminário de Topologia Algébrica. O Seminário abriu com uma sessão preparatória, onde se estabeleceu um programa de trabalhos e se deu começo à sua distribuição. Frequentado sobretudo por jovens, destina-se a uma iniciação no estudo da Topologia Algébrica, pela exposição de problemas e resultados fundamentais da teoria e não pressupõe conhecimentos prévios neste domínio, da parte dos que nele participam.

Cada sessão é ocupada por uma exposição de uma hora a uma hora e meia, seguida de uma discussão.

Até Fevereiro foram tratados os seguintes assuntos:

1 — Complexos simpliciais, por H. Cartan;

2 — Grupo de homologia dum complexo simplicial. Generalidades sobre os grupos com derivação, por J. P. Serre;

3 — Grupos abelianos discretos, por J. Cerf;

4 — Dualidade, cocadeias e cohomologia, por P. Samuel.

5 — Homologia e cohomologia singulares, por Dixmier.

6 — A cohomologia de Cech-Alexander, por H. Cartan.

7 — Operadores de homotopia, por H. Cartan.

Um apanhado de cada conferência, redigido pelo seu autor, é policopiado e distribuido por todos os que frequentam o Seminário.

COLLÈGE DE FRANCE

No corrente ano escolar, 1948-49, realizam-se no «Collège de France», entre numerosos outros, os seguintes cursos:

Mathématique et Mécanique — Prof. Mendelbrojt. *Transformées de Fourier dans le plan complexe.*

Théorie des équations differentielles et fonctionnelles — Prof. J. Leray, *Équations intégrales, équations fonctionnelles.*

Physique Théorique — Prof. L. Brillouin, *Problèmes modernes sur la propagation des ondes.*

INSTITUTO ROMANO DI CULTURA MATEMÁTICA

De uma circular enviada a vários professores extraímos o seguinte programa das conferências a realizar no corrente ano, por êste centro de estudos pedagógicos.

5 de Fevereiro — G. Armellini: *As ideias modernas sobre a cosmogonia do sistema planetário.*

12 de Fevereiro — L. L. Radice e L. Talamo: Debate sobre o tema: *O método cíclico no ensino das matérias científicas.*

26 de Fevereiro — T. Viola: *Sobre a origem da perspectiva.*

12 de Março — G. Fichera e A. Perna: Debate sobre o tema: *Sobre a preparação para os concursos de matemática aos lugares das escolas secundárias.*

26 de Março — A. Fraiese: *Onde deve ser colocado o IV postulado de Euclides?*

9 de Abril — R. Giannarelli: Debate sobre o tema: *O que podemos aprender dos métodos de ensino da matemática nas escolas estrangeiras?*

23 de Abril — G. Vacca: *Investigações sobre Arquimedes.*

14 de Maio — G. Fano: *O método e o valor das ciências matemáticas e físicas nas doutrinas dos pensadores modernos.*

UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Promovida pela Sociedade Portuguesa de Geofísica e pela Secção de Física da Faculdade de Ciencias da Universidade de Coimbra, realizou-se, em 21 de Janeiro deste ano, no Antiteatro de Física, da Universidade, uma conferência do Dr. António Gião sobre o tema: «Teoria das relações entre a gravitação e o electromagnetismo e suas aplicações astrofísicas e geofísicas».

M. Z.

PEDAGOGIA

ALGUMAS CONSIDERAÇÕES ACERCA DOS NOVOS PROGRAMAS DE MATEMÁTICA PARA ENSINO LICEAL

por ***Laureano Barros*** e ***F. Soares David***

Ao publicar os novos programas de Matemática para o ensino secundário, tenciona a Gazeta de Matemática emitir acerca dos mesmos programas certas considerações críticas que julga enquadrarem-se perfeitamente nos objectivos que se tem proposto. E assim, deixando para próximos números referências mais pormenorizadas, limitamo-nos por agora a fazer perante os leitores da Gazeta as observações sugeridas por uma primeira leitura dos programas.

Entre os requisitos fundamentais a que deve obedecer a elaboração dum programa ocupam lugar de destaque a precisão do enunciado dos seus tópicos e um criterioso encadeamento dos vários assuntos. Ora parece-nos que nenhum destes requisitos foi devidamente considerado na elaboração dos novos programas de Matemática.

Como exemplos flagrantes de imprecisão ou incorrecção podem citar-se, entre outras, as expressões seguintes:

— «Ângulos formados por um sistema de duas rectas cortadas por uma terceira» (1.º ano), quando se deveria dizer: «ângulos formados por um sistema de tres rectas complanas não concorrentes no mesmo ponto»;

— «Gráficos de barras» (1.º ano), expressão de tal modo imprecisa que pode levar à incompreensão total do que se pretende;

— «Fracções generalizadas» (Aritmética, 2.º ano), quando o que se deveria dizer era: «Cocientes de números fraccionários»;

— «Limite duma variável» (Álgebra, 6.º ano), expressão sem qualquer sentido;

— «Divisão por $(x-a)$» (Álgebra, 6.º ano), quando certamente o que se pretendia era dar uma condição necessária e suficiente para que um número seja zero dum polinómio;

— «Fórmulas da soma e diferença de dois ângulos» (Trigonometria, 7.º ano), quando o que se pretendia mencionar eram as «fórmulas que permitem exprimir as funções circulares da soma e diferença de dois ângulos á custa das funções circulares desses ângulos»;

— «Coordenadas do ponto médio de dois pontos dados» (Geometria, 7.º ano), expressão que nos abstemos de comentar;

— «Equações da recta que passa por *um* (o grifado é nosso) e dois pontos» (Geometria, 7.º ano), idem;

— «Elementos distintos e sem repetição» (Álgebra 7.º ano), expressão evidentemente pleonástica.

Além das imprecisões e incorrecções da natureza, das citadas, que revestem um carácter grosseiro, são frequentes os enunciados vagos ou ambíguos. Por exemplo, ainda gostaríamos de saber o que pretendem os autores dos programas significar por «representação gráfica» de números fraccionários; o que se deve entender por um «pequeno problema» quando se referem à concretização das propriedades das operações; a que «propriedades angulares» se refere a rubrica com êste título, no estudo de rectas feito no 3.º ano; qual é o «quarto caso» de igualdade dos triângulos (e, a propósito, quais são o primeiro, o segundo e o terceiro casos...); quantos «modos de *definir* o plano» (o grifado é nosso) conhecem os autores dos programas; como poderão os logaritmos ser «considerados como expoentes» se não foram definidas potências de expoente irracional; qual o sentido da palavra «elementar» quando dizem «noção elementar de variável e de função» ou «noção elementar de continuidade de uma função»; o que será um polinómio não inteiro, uma vez que se referem a «polinómios inteiros»; a que «fórmulas de transformação logarítmica» se refere o programa do 7.º ano.

São também abundantes — e estão de certo modo em oposição à linguagem imprecisa que acabámos de exemplificar — as referências exageradamente detalhadas a certas questões particularíssimas, próprias para serem tratadas como exercícios se o professor assim o achasse conveniente. Essas referências, além do aspecto pouco elegante que por vezes lhes conferem as designações viciadas pela rotina, têm o grave inconveniente de tirar ao ensino aquela margem de liberdade onde a personalidade do professor mais utilmente se pode fazer sentir. Chega-se ao ponto de proibir certos tipos de exercícios, para mais sem qualquer razão justificativa.

Como exemplos do que acabamos de citar destacamos as frases seguintes:

— «Nos casos de igualdade de triângulos não se devem destacar os casos de igualdade de triângulos rectângulos» (Notas ao programa do 2.º ano);

— «No estudo de progressões não se deve tratar do problema da insersão de meios» (Notas ao programa do 5.º ano);

— «Equações envolvendo logaritmos ou qualquer outro tipo de problemas teóricos são inteiramente banidos» (Notas ao programa do 5.º ano);

— «As equações trigonométricas a considerar são as que se podem reduzir a equações algébricas dos programas do 6.º e 7.º anos, quando se toma para incógnita $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{tg} x/2$» (Notas ao programa do 7.º ano);

Para documentarmos a afirmação feita relativa a um criterioso encadeamento dos vários assuntos vamo-nos servir sobretudo dos programas do 3.º ciclo, onde a própria natureza das matérias tratadas impunha um maior respeito por aquela norma.

Só no 7.º ano se estuda a noção de derivada e suas aplicações. Parece fora de dúvida que a altura própria para abordar este assunto seria imediatamente a seguir ao estudo dos infinitésimos, tanto mais que é precisamente no 6.º ano que o programa de Física mais necessita dos elementos de cálculo diferencial.

Ainda no programa do 6.º ano, no capítulo relativo a «indeterminações» seria conveniente aludir expressamente à continuidade de funções, para evitar um tratamento incorrecto daquele problema; tanto mais que o precedente está aberto por alguns dos livros actualmente seguidos.

Cabe aqui mais um exemplo de incorrecção de linguagem. Efectivamente, a designação de «verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada» é ao mesmo tempo errada e imprecisa: a palavra «expressão» aparece no sentido de «função» e o designativo de «verdadeiro valor», embora consagrado, implicava naturalmente a definição da função no ponto em que ela é indeterminada.

Uma deficiência do género daquelas que vimos apontando é a exclusão do programa de Trigonometria de 6.º ano da resolução de triângulos rectângulos quando este problema devia ali ser tratado como aplicação imediata das noções dadas sobre funções trigonométricas. Também não compreendemos as razões que levaram os autores dos programas a deixar o uso das tábuas de funções trigonométricas para o 7.º ano, uma vez que no ano anterior já se alude a valores particulares das funções.

A excessiva extensão do programa de 6.º ano poderia então ser corrigida deixando para o ano seguinte o estudo das funções circulares inversas.

O programa de Geometria Analítica do 7.º ano tem um aspecto extremamente confuso, em virtude da inexplicável repetição de tópicos que o caracteriza. Assim, não poderão todas as cónicas ser apresentadas como «lugares geométricos muito simples»? E para que se faz no fim uma referência especial às equações cartesianas destas curvas se essas mesmas equações foram anteriormente estabelecidas com base no conceito de lugar geométrico?

Um exemplo da mesma natureza, nos programas do 2.º ciclo, é a inclusão do estudo de progressões apenas no fim do programa de Álgebra do 5.º ano, quando estava naturalmente indicado apresentá-las como casos particulares de sucessões. O capítulo relativo a sucessões (incluindo o estudo de progressões) poderia ser tratado no 4.º ano ou, o que nos parece preferível, no 5.º. Neste caso impunha-se o deslocamento do capítulo sobre equações do 2.º grau para o 4.º ano. De qualquer modo, parece-nos que o estudo das progressões deveria preceder o dos logaritmos.

Conforme dissemos de início, as considerações que acabamos de apresentar só parcialmente correspondem ao que a *Gazeta de Matemática* se propõe fazer nos aspectos de análise, discussão e crítica sobre os novos programas para o ensino secundário.

Na nossa opinião impõe-se um estudo detalhado dos programas dos diferentes anos, da sua sequência, suas relações com os programas de outras disciplinas, etc.

Para realizar este objectivo conta a Gazeta de Matemática com a colaboração de todos os professores que a lêem. Só essa colaboração dará a este debate o interesse e a utilidade que ele pode e deve ter.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAME DO CURSO COMPLEMENTAR DE CIÊNCIAS DOS LICEUS

Liceu Pedro Nunes — Desenho — **Exercício de apuramento, 6.º ano — Dezembro de 1948.**

2841 — Determinar as projecções da parte visível da recta definida por dois dos seus pontos, A e B, cujas coordenadas são:

A — Cota: 5 cm; Afastamento: $-1{,}5$ cm
B — Cota: -2 cm; Afastamento: 6 cm.

2842 — Determinar os traços no β_{13} e no β_{24} da recta que une os pontos C e D cujas coordenadas são:

C — Cota: -6 cm; Afast.: $-2{,}5$ cm;
D — Cota: 8 cm; Afast.: 1,5 cm;

Distância entre as linhas de referência respectivas, 6,5 cm.

2843 — Determine a verdadeira grandeza do segmento de recta EF existente num plano de perfil cujas coordenadas dos pontos extremos são:

E — cota: 3,5; afast.: 4 cm.
F — cota: 0,8; afast.: 6 cm.

2844 — Dado um pentágono regular de 2,5 cm. de raio existente num plano projectante horizontal, determine as suas projecções, sabendo que o centro do polígono dista 4 cm. do plano horizontal, que o plano projectante faz um ângulo de 60 graus com o P. V. e que um dos lados do polígono é de nível.

Nota — Rebata o plano sobre PH.

Enunciados dos n.º 2841 a 2844 de Lacerda Ferreira

Liceus de Lisboa — Curso complementar de ciências — 1.ª Chamada — Julho de 1948.

ÁLGEBRA

2845 — Determinar os valores de k para os quais é positiva a raiz da equação $(k^2-2k+2)\,x-k^2+2k\sqrt{2}+1=0$. R: *Como é*

$$x=(k^2-2k\sqrt{2}-1):(k^2-2k+2)$$

e como os zeros do 1.º trinómio são $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ *e* $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ *e os do 2.º são* $1+i$ *e* $1-i$, *para que* x *seja positivo basta que seja* $k<\sqrt{2}-\sqrt{3}$ *ou* $k>\sqrt{2}+\sqrt{3}$, *por o 2.º trinómio ser positivo para qualquer valor real de* k.

2846 — Um comerciante pagou 428 escudos pela compra de lapiseiras a 24 escudos e canetas a 44 escudos. Quantas eram as lapiseiras e as canetas? R: *Se for* x *o número de lapiseiras e* y *o número de canetas será:* $24x+44y=428$ ou $6x+11y=107$; *esta última equação tem a solução* $x_0=16, y_0=1$, *como é fácil ver. As soluções gerais são então dadas pelas expressões* $x=16-11m, y=1+6m$; *e como os valores de* x *e* y *têm de ser inteiros e positivos* m *só pode ter os valores* 0 *e* 1. *O problema tem então duas soluções* $x=16, y=1$ *ou* $x=5, y=7$.

2847 — Formar a equação biquadrada que tem duas raizes iguais aos termos médios do desenvolvimento de $(1/\sqrt{2}+1/\sqrt{5})^5$. R: *Os termos médios do desenvolvimento são* ${}^5C_2\,(1/\sqrt{2})^3\cdot(1/\sqrt{5})^2$ *e* ${}^5C_3\,(1/\sqrt{2})^2\cdot(1/\sqrt{5})^3$ *ou seja* $1/\sqrt{2}$ *e* $1/\sqrt{5}$; *as outras raizes serão* $-1/\sqrt{2}$ *e* $-1/\sqrt{5}$ *e a equação pedida* $10x^4-7x^2+1=0$.

ARITMÉTICA

2848 — *a*) Determinar o resto da divisão por 23 de $E=(46h+5)^2\,(230k+30)+(92m+55)$. *b*) Enuncie os teoremas que empregou na resolução do problema anterior. R: $E\equiv5^2\cdot30+55\equiv2\cdot7+9\equiv23\equiv0$ (*módulo* 23). *Isto é, o resto da divisão de* E *por* 23 *é zero.*

2849 — Demonstre o seguinte teorema: «Se um número divide um produto de dois factores e é primo com um deles, divide o outro».

Liceus de Lisboa — Curso complementar de ciências — 2.ª Chamada — Julho de 1948.

ÁLGEBRA

2850 — Forme a equação de Diofanto que admite as soluções $x=1, y=1$ e $x=3, y=8$. R: *Seja* $ax+by=c$ *a equação pedida. Pelo enunciado deve ser* $a+b=c$ *e* $3a+8b=c$ *ou, por subtracção ordenada,* $2a+7b=0$. *Como* a *e* b *devem ser primos entre si e não nulos só pode ser* $a=7$ *e* $b=-2$ *o que dá* $c=5$. *Então a equação pedida é* $7x-2y=5$.

2851 — Dados os números 2, 3, 5, 7, 11, 13, diga quantos produtos distintos se podem formar tomando três pelo menos daqueles números como factores e não figurando em cada produto dois factores iguais. R: ${}^6C_3+{}^6C_4+{}^6C_5+{}^6C_6=20+15+6+1=42$.

2852 — Determine m de forma que entre as raizes do trinómio $2x^2+(m-2)\,x+3m+5$ fiquem compreendidas as do trinómio $x^2-7x+10$. R: *As raizes do segundo trinómio são* $x_1=2, x_2=5$. *As raizes do primeiro trinómio devem ser reais, para o que deve ser* $(m-2)^2-8\,(3m+5)\geqslant0$, *ou seja,* $m^2-28m-36\geqslant0$, *quer dizer, deve ser ou* $m\geqslant14+\sqrt{242}$ *ou* $m\leqslant14-\sqrt{232}$. *Por outro lado, como* 2 *e* 5 *são exteriores ao intervalo das raizes deve-se ter* $2\cdot2^2+(m-2)\cdot2+3m+5<0$ *o que dá* $m<-9/5$, *e* $2\cdot5^2+(m-2)\cdot5+3m+5<0$ *o que dá* $m<-5/2$. *Destas desigualdades conclui-se que é* $m<-5/2$.

ARITMÉTICA

2853 — Demonstre o seguinte teorema:

«Se dividirmos vários números pelo mesmo divisor, a soma dos números dados e a soma dos restos, divididos por esse divisor dão restos iguais. R: *Seja* d *o divisor,* a *e* b *dois números cujos restos na divisão por* d *são* r_1 *e* r_2, *isto é, seja* $a=d\cdot m_1+r_1$, $r_1<d$ *e* $b=d\cdot m_2+r_2$, $r_2<d$. *Então* $a+b=d\,(m_1+m_2)+r_1+r_2$ *ou* $(a+b)-(r_1+r_2)=d\cdot(m_1+m_2)$ *o que mostra serem iguais os restos das divisões de* $(a+b)$ *e* (r_1+r_2) *por* d. *Se considerarmos agora verdadeiro o teorema para* n *números, por indução se demonstra que o teorema é válido para um número qualquer de números, demonstrando que êle é válido para* $n+1$ *números.*

2854 — Determine dois números que tenham o máximo divisor comum e o menor múltiplo comum respectivamente iguais a $2\times3\times h^2$ e $2^2\times3^2\times5\times h^2$. R: $N_1=2\cdot3\times h^2$ *e* $N_2=2^2\times3^2\times5\times h^2$ *são dois números que satisfazem ao enunciado.*

Liceus de Lisboa — Curso Complementar de Ciências — Setembro de 1948.

ÁLGEBRA

2855 — Determine os valores inteiros e positivos dos parâmetros k e m que tornam igual a -2 a raiz da equação $m\,(1-3x)-k\,(3x+1)=84$, R: *Se* -2 *é* *raiz da equação será* $7\,m+5\,k=84$; *como* $84=7\times 12$ *uma solução em números inteiros daquela equação é o par* $m_0=12$, $k_0=0$ *e as soluções gerais serão dadas pelas expressões* $m=12-5p$ $k=7p$ *onde* p *é um inteiro qualquer. Determinando* p *de modo que* $12-5p>0$ *e* $7p>0$ *vê-se que é* $p=1$ *ou* $p=2$ *donde* $m=2$, $k=2$ *ou* $m=7$, $k=1$.

2856 — Determine os valores do parâmetro real k para os quais a equação $k\,x^2\,(x^2-1)+5\,x^4-2\,x^2+1=0$ admite quatro raizes imaginárias puras. R: *A equação pode escrever-se sob a forma* $(k+5)\,x^4-(k+2)x^2+$ $+1-0$. *Para que as raizes sejam imaginários puros é necessário que as raizes da resolvente sejam ambas negativas para o que é necessário ser* $\triangle\geqslant 0$ $S<0$ $P>0$; *ou seja* $(k+2)^2-4\,(k+5)\geqslant 0$; $(k+2:(k+5)<0$ *e* $1:(k+5)>0$. *A primeira desigualdade dá* $k>4$ *ou* $k<-4$; *a segunda dá* $-5<k<-2$ *e a terceira* $k>-5$. *Em resumo terá que ser* $-5<k<-4$.

2857 — Torne irredutível a fracção:

$$(A_p^n-A_{p-1}^n)/A_p^{n-1}$$

R: *Notando que* $A_p^n=n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-p+1)$ $A_{p-1}^n=n\,(n-1)\,(n-2)\cdots(n-p+2)$ *e* $A_p^{n-1}=(n-1)$ $(n-2)\cdots(n-p+2)\;(n-p+1)\;(n-p)$; *obtem-se, pondo em evidência o factor comum*

$$(n-1)\,(n-2)\cdots(n-p+2)$$
$$\frac{n\,(n-p+1)-n}{(n-p+1)\,(n-p)}=\frac{n}{n-p+1}.$$

Aritmética

2858 — Demonstre o teorema:

«Se um número é divisível separadamente por três números primos entre si dois a dois, é divisível pelo produto deles». R: *Seja* N *o número divisível por* a, b *e* c *primos entre si dois a dois. As decomposições em factores primos de* a *de* b *e de* c *existem inteiramente na decomposição de* N; *e como cada uma delas não contém qualquer factor primo que pertença a qualquer das outras, o produto* abc *está inteiramente contido na decomposicão de* N *que é assim divisível por êle.*

2859 — A soma de dois números é 240 e o seu máximo divisor comum é um número inferior a 30.

Calcule os números sabendo que têm *oito* divisores comuns. R: *O* m.d.c. *dos números pedidos deve ser um divisor de* 240. *Os divisores deste números menores que* 30 *são* 1, 2, 3, 4, 6, 8, 10, 12, 20 *e* 24; *dêstes só* 24 *tem oito divisores e é êle, portanto, o* m.d.c. *dos números pedidos. Se forem* a *e* b *êsses números é* $a=24\,p$ *e* $b=24\,q$ *onde* p *e* q *são primos entre si*; *logo* $a+b=24.(p+q)$ *e por isso* $p+q=10$; *então só pode ser* $p=1$, $q=9$ *ou* $p=3$, $q=7$. *Donde as soluções do problema* $a=24$, $b=216$ *ou* $a=72$, $b=168$.

Soluções dos n.os 2845 a 2859 de J. da Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES

MATEMÁTICAS GERAIS — COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

I. S. C. E. F. — Matematicas Superiores — 1.ª cadeira, 2.ª época — Exame final, 2-10-1948.

2860 — Em certo determinante de 3.ª ordem de valor 1, cada elemento a_i^k tem por menor complementar $(-1)^{i+k}\dfrac{i\cdot k}{i+k}$. Quais são os elementos da primeira linha? R:
$$\left\{\begin{array}{l} a_1^1\,A_1^1+a_1^2\,A_1^2+a_1^3\,A_1^3=1\\ a_1^1\,A_2^1+a_1^2\,A_2^2+a_1^3\,A_2^3=0\\ a_1^1\,A_3^1+a_1^2\,A_3^2+a_1^3\,A_3^3=0\end{array}\right.$$
com
$$|A_i^k|=(-1)^{i+k}\,i\cdot k/(i+k)\qquad \left\{\begin{array}{l} 1/2\,a_1^1+2/3\,a_1^2+3/4\,a_1^3=1\\ 2/3\,a_1^1+\quad a_1^2+6/5\,a_1^3=0\\ 3/4\,a_1^1+6/5\,a_1^2+3/2\,a_1^3=0\end{array}\right.$$

e por condensação da matriz

$$\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ \frac{2}{3}&1&\frac{6}{5}&0\\ \frac{3}{4}&\frac{6}{5}&\frac{3}{2}&0\end{matrix}\right\|\to\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ 0&\frac{1}{9}&\frac{1}{5}&-\frac{4}{3}\\ 0&\frac{1}{5}&\frac{3}{8}&-\frac{3}{2}\end{matrix}\right\|\to\left\|\begin{matrix}\frac{1}{2}&\frac{2}{3}&\frac{3}{4}&1\\ 0&\frac{1}{9}&\frac{1}{5}&-\frac{4}{3}\\ 0&0&\frac{3}{200}&\frac{9}{10}\end{matrix}\right\|$$

$$\frac{1}{2}\,a_1^1+\frac{2}{3}\,a_1^2+\frac{3}{4}\,a_1^3=1\,,\quad \frac{1}{9}\,a_1^2+\frac{1}{5}\,a_1^3=-\frac{4}{3}\,,$$

$$\frac{3}{200}\,a_1^3=\frac{9}{10}\quad ou\quad a_1^1=72\,,\ a_1^2=-120\,,\ a_1^3=60\,.$$

2861 — Represente geomètricamente a função $y=(a-x)/[(x+a)^2+12\,ax]$ $(a>0)$. (Dispensa-se a determinação precisa das inflexões). R: Domínio: $(-\infty\,,-a\,[7+\sqrt{48}])$, $(-a\,[7+\sqrt{48}]\,,-a\,[7-\sqrt{48}])$, $(-a\,[7-\sqrt{48}]\,,+\infty)$. Traços nos eixos: $\left(0\,,\dfrac{1}{a}\right)$, $(a,0)$. Assíntotas: $x=-a\,[7\pm\sqrt{48}]$; $y=0$; *não há assíntotas obliquas.* Máximos e mínimos: Máximo $\left(-3a,-\dfrac{1}{8a}\right)$; mínimo $\left(5a\,,-\dfrac{1}{24a}\right)$. Variação: $-\infty$, *crescente,* $-3a$, *decrescente,* $5a$, *crescente.* $+\infty$. Inflexões: $y''=-(x^3+22\,ax^2-118\,a^2\,x-419\,a^3)\,(x^2+14\,ax+a^2)^{-3}$, *limite excedente das raizes de* y'', $L=7a$; *existe uma inflexão entre* 5a *e* 7a.

A representação gráfica fazia-se, notando que: a) *a ordenada do máximo é tripla da ordenada do mínimo*; b) *a curva não pode ser cortada em mais de três pontos por qualquer recta do seu plano.*

Soluções dos n.os 2860 e 2861 de José R. Albuquerque

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 1.º exercício escrito de revisão — 15-12-48.

2862 — Determine a equação cartesiana do lugar geométrico dos centros das circunferências que passam pelos pontos $P\,(1\,,2)$ e intersectam no eixo dos xx um segmento de comprimento igual a 2. R: *Tem-se* $(\mathrm{x}-1)^2+(\mathrm{y}-2)^2=\mathrm{r}^2$ *e* $1+\mathrm{y}^2=\mathrm{r}^2$ *donde, eliminando* r *se obtém* $\mathrm{x}^2-2\mathrm{x}-4\mathrm{y}+4=0$.

2863 — Determine as equações cartesianas dos lados AC e BC e as coordenadas dos vértices dum triângulo equilátero ABC, tal que, o lado AB está assente sobre a recta de equação $y=x/2$ e o ponto médio de BC é o ponto $(3\,,3)$.

R: $$\mathrm{r\,(BC)} \equiv \mathrm{y}-2=\frac{1-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\,(\mathrm{x}-3)\,;$$

$$\mathrm{r\,(AC)} \equiv \mathrm{y}-\frac{21-\sqrt{3}}{5}=-\frac{1+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}\left(\mathrm{x}-\frac{12-2\sqrt{3}}{5}\right);$$

$$\mathrm{A}\left(\frac{18\,(\sqrt{3}-1)}{5\sqrt{3}},\frac{9\,(\sqrt{3}-1)}{5\sqrt{3}}\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{6+18\sqrt{3}}{5\sqrt{3}},\frac{3+9\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}\right),$$

$$\mathrm{C}\left(\frac{12\sqrt{3}-6}{5\sqrt{3}},\frac{21\sqrt{3}-3}{5\sqrt{3}}\right).$$

2864 — Determine e equação cartesiana do lugar geométrico dos simétricos do ponto $(2\,,0)$ em relação à família de rectas $y=(1+K)\,x+(1+K)$. R: *Coordenadas do ponto médio* $(\mathrm{X}+2)/2\,,\mathrm{Y}/2$, *logo* $\mathrm{Y}/2=(1+\mathrm{K})\,(\mathrm{X}+2)/2+(1+\mathrm{K})$ *e* $\mathrm{Y}/2=-(\mathrm{X}-2)/2\,(1+\mathrm{K})$ *donde eliminando* K *se obtém* $\mathrm{X}^2+\mathrm{Y}^2+2\mathrm{X}-8=0$.

Enunciados e soluções dos n.os 2862 a 2864 de F. A. Carvalho Araújo.

F. C. L. — Complementos de Álgebra — Exames de frequência de 1948.

2865 — Mostre que a função de $z_1\,,z_2\,,z_3$

$$u=\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{vmatrix}$$

é simétrica, e exprima o seu valor em função racional das funções simétricas elementares de $z_1\,,z_2\,,z_3$.

2866 — Designando por α uma das raizes da equação z^3-z-1, determine um polinómio $p\,(z)$, de coeficientes racionais e de grau inferior a 3, tal que $p\,(\alpha)=(\alpha^2+1)/(\alpha-1)$. Enuncie e demonstre o teorema que intervém nesta questão. R: $(\mathrm{z}^3-\mathrm{z}-1)/(\mathrm{z}-1)\equiv \mathrm{z}^2+\mathrm{z}-1/(\mathrm{z}-1)$, *donde* $1/(\alpha-1)=\alpha^2+\alpha$ *e* $(\alpha^2+1)/(\alpha-1)=(\alpha^2+1)\,(\alpha^2+\alpha)=\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha=(\alpha^3-\alpha-1)\,(\alpha+1)+2\alpha^2+2\alpha+1=2\alpha^2+\alpha+1$.

2867 — Mostre que as substituições sobre $z_1\,,z_2\,,\cdots,z_n$ que deixam invariante uma dada função destas variáveis formam um grupo. Determine o grupo H a que pertence a função $u=z_1\,z_2+(z_3+\varepsilon\,z_4+\varepsilon^2\,z_5)^3$, designando por ε uma raiz cúbica primitiva da unidade. É o grupo H cíclico? Indique os seus subgrupos.
R: $\mathrm{z}_1\,\mathrm{z}_2$ *pertence ao grupo* $\{\mathrm{I},\ (12)\}$; $(\mathrm{z}_3+\varepsilon\,\mathrm{z}_4+\varepsilon^2\,\mathrm{z}_5)^3$ *pertence ao grupo gerado pelo ciclo* (345): *a funcão dada pertencerá ao grupo*

$$\mathrm{H}=\{\mathrm{I},\ (12),\ (345),\ (543),\ (12)\ (345),\ (12)\ (543)\}$$

pois que os indices duma das parcelas são distintos dos da outra. O grupo é cíclico: é gerado pela substituição $\sigma=(12)\,(345)$. *Os subgrupos de* H *são:* $\{\mathrm{I}\}\,,\mathrm{H}$, *o grupo gerado por* σ^2 *e o grupo gerado por* σ^3.

2868 — Considere uma função $u=\varphi\,(z_1\,,z\,,\cdots z_n)$ e um grupo G qualquer de substituições sobre os zz. Sendo $u_i\,,u_k$, duas quaisquer funções conjugadas de u em G, deduza a expreesão geral das substituições de G que fazem passar de u_i para u_k. O que conclui no caso $i=k$?

2869 — Defina o conceito do isomorfismo entre grupos. Mostre que os grupos das funções $u=(z_1-z_2)\,(z_3-z_4)$, $v=z_1\,z_3$ (consideradas ambas como funções de $z_1\,,z_2\,,z_3\,,z_4$) são isomorfos e estude-os do ponto de vista da transitividade. R: *A função* u *pertence ao grupo* $\mathrm{G}=\{\mathrm{I},\ (12)\ (34),\ (14)\ (23),\ (13)\ 24)\}$; *a função* v *pertence ao grupo* $\overline{\mathrm{G}}=\{\mathrm{I}\,,\ (13),\ (24),\ (13)\ (24)\}$. *Entre* G *e* $\overline{\mathrm{G}}$ *pode definir — se o isomorfismo:* $\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{I}$, $(12)\,(34)\leftrightarrow(13)$, $(14)\,(23)\leftrightarrow(24)$, $(13)\,(24)\leftrightarrow(13)\,(24)$. G *é transitivo, mas* $\overline{\mathrm{G}}$ *é intransitivo, pois admite os sistemas de transitividade* $\{1\,,3\}$ *e* $\{2\,,4\}$.

Soluções resumidas dos n.os 2865 a 2869 do estudante António César de Freitas.

F. C. L. — Complementos de Álgebra — Exame final de 1948 — 2.ª época.

2870 — Defina os conceitos de isomorfismo e automorfismo entre corpos e prove que o corpo racional admite como único automorfismo a identidade.

2871 — Enuncie o critério geral de resolubilidade por meio de radicais e exponha a marcha da resolução algébrica duma equação metacíclica. Verifique se a equação $z^4+z^3+3\,z-3=0$ é ou não resoluvel por meio de radicais quadráticos. R: *Considerando a função das raizes* $\mathrm{u}_1=\mathrm{z}_1\,,\mathrm{z}_3+\mathrm{z}_2\,\mathrm{z}_4$ (*pertencente ao grupo do quadrado,* Q_4) *e a equação* $\mathrm{g}\,(\mathrm{u})=\mathrm{u}^3+14\,\mathrm{u}-1=0$ (*resolvente de Ferrari da proposta*), *o facto, facilmente verificável, de que esta equação não tem raizes racionais, garante que* Q_4, *e portanto os seus conjugados, não são grupos admissíveis de* $\mathrm{g}\,(\mathrm{u})=0$ *a respeito de* Ra. *Ora além destes grupos, o único subgrupo máximo de* S_4 $(\neq\mathrm{S}_4)$ *é o grupo alternante* A_4; *mesmo que este grupo fosse admissível, não o poderia ser* $\mathrm{A}_4\cap\mathrm{Q}_4$, *e, como* *na sua cadeia de composição intervém o índice* 3, *seria inevitável a introdução dum radical cúbico. A equação proposta não é pois resoluvel por meio de radicais quadráticos.*

2872 — Demonstre que a equação $z^n=a$ é cíclica a respeito de todo o corpo que contenha o número a e uma raiz primitiva de índice n de unidade (n inteiro e maior que zero).

Nota: Considera-se aqui como cíclica toda a equação cujo grupo de Galois é um subgrupo de algum grupo cíclico transitivo.

2873 — Diga o que se entende por raiz duma equação com coeficientes variáveis.

2874 — Definição axiomática de grupo. Verifique se o conjunto P dos números positivos forma ou não um grupo a respeito da potenciação, isto é, a respeito da operação θ assim definida: $x\theta y=x^y$. É a operação θ associativa? É invertível? R: *A operação* θ *é unívoca, mas não associativa, visto que* $(x^y)^z=x^{yz}$, $x^{(y^z)}=x^{y^z}$; *não se tendo geralmente* $x^{yz}=x^{y^z}$. *O conjunto* P *não é portanto um grupo a respeito de* θ. *Esta operação não é invertível, pois que a equação* $a\theta x=b$ *não admite solução em* P, *sempre que se tenha conjuntamente* $a<1$ *e* $b\geqslant 1$ *ou* $a>1$ *e* $b\leqslant 1$, *mas é de notar que* θ *é invertível à esquerda.*

Soluções resumidas do estudante Jaime Campos Ferreira.

CÁLCULO INFINITESIMAL E DAS PROBABILIDADES

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal e das Probabilidades — 1.º Exercício escrito de revisão — 15-12-1948.

2875 — Seja π_1 o plano que passa por $P(1,1,1)$ e é paralelo aos dois vectores $\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$; e π_2 o plano definido por $A(1,0,1)$, $B(0,1,0)$ e $C(0,0,1)$. Determine a equação do plano que passa pela origem das coordenadas e é perpendicular à intersecção de π_1 e π_2. R: $2x-y-z=0$.

2876 — Se os complexos $w=u+iv$ e $z=x+iy$ estiverem relacionados pela igualdade $w=-i(z-1)/(z+1)$, mostre que o complexo w se encontra no semi-plano dos vv positivos quando z é interior ao círculo de centro na origem e raio 1. R: *De* $w=-i(z-1)/(z+1)$ *vem* $z=(i-w)/(w+i)$.

Ora $|z|<1$ *implica* $|w-i|<|w+i|$, *o que demonstra o que se pretendia, se notarmos que esta última desigualdade significa que a imagem de* w *dista menos da imagem de* i *do que da imagem de* $-$i.

2877 — Duas circunferências de centros $(-a,0)$ e $(a,0)$, respectivamente, passam pela origem. Determine o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a cada uma das circunferências tem soma constante e igual a $2a$. R: *Se for* P *um ponto genérico do lugar geométrico, a soma das suas distâncias aos centros das circunferências é constante e igual a* 4a, *o que permite concluir que o lugar procurado é a elipse de equação* $x^2/4a^2+y^2/3a^2=1$.

Enunciados e soluções dos n.os 2875 a 2877 F. R. Dias Agudo.

F. C. P — Cálculo das Probabilidades — Julho de 1948.

2878 — Um dado, com as faces numeradas de 1 a 6, é lançado ao acaso uma ou mais vezes — tantas quantas as unidades do ponto obtido no 1.º lançamento.

a) Calcular a probabilidade de tirar a soma de pontos 10 (no conjunto de todos os lançamentos).

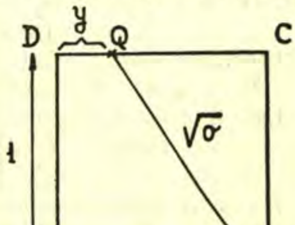
b) Obteve-se essa soma. Calcular a probabilidade de no primeiro lançamento ter saído um ponto ímpar. [Utilizar em parte a análise combinatória]. R: *a*) Maneiras de obter a soma 10 — pontos obtidos nos vários lançamentos. R: a) *Maneiras de obter a soma* 10 — *pontos obtidos nos vários lançamentos*:

1.º lançamento	Restantes lançamentos	N.º de combinações	Probabilidades
3	1—6	2	$6\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3$
	2—5	2	
	3—4	2	
4	1—1—4	3	$10\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4$
	1—2—3	6	
	2—2—2	1	
5	1—1—1—2	4	$4\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^5$

$$\therefore\quad (A)=\frac{280}{6^5}=\frac{35}{972}$$

$$\text{b)}\quad (I\,|\,A)=\frac{(I\,A)}{(A)}=\left(\frac{6}{6^3}+\frac{4}{6^5}\right):\frac{280}{6^5}=\frac{220}{280}=\frac{11}{14}.$$

2879 — Dois pontos P e Q são lançados ao acaso sobre os dois lados opostos AB e CD de um quadrado.



Seja σ o quadrado da distancia dos dois pontos obtidos:

$$\sigma=\overline{PQ}^2.$$

a) Indicar o domínio certo de σ, justificando, e calcular o valor médio dessa variável.

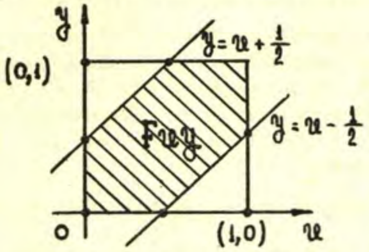
b) Calcular a probabilidade de ser $\sigma<5/4$.

R: *a*) $N\sigma(1,2)$ $\sigma=1+(x-y)^2$; $T_{xy}=T_x \cdot T_y=1$;

$M(\sigma)=\iint(1+(x-y)^2)\,dx\,dy=\frac{7}{6}$.

b) $1+(y-x)^2<5/4 \quad \therefore \quad (y-x)^2<1/4$

$\therefore \quad |y-x|<1/2 \quad \therefore \quad -1/2<y-x<1/2$



$\therefore \begin{cases} y>x-1/2 \\ y<x-1/2 \end{cases}$ (região tracejada).

$T_{xy}=1 \quad \therefore \quad (A)=F_{xy}/N_{xy}=1-2\cdot 1/2\cdot(1/2)^2=3/4$.

2880 — A força electromotriz de um elemento termoeléctrico, para uma dada diferença de temperatura t entre os polos, pode ser representada pela equação

$$e/t=A+B\cdot t.$$

São dados os seguintes pares de valores:

t	e/t
50°	0,000.243
100	248
150	254
200	268

Supor igualmente precisos os valores de e/t.

a) *b*) Determinar os valores mais plausíveis das constantes A e B, e avaliar os correspondentes erros pelo método das medições indirectas.

c) *d*) Efectuar a compensação desses quatro valores de e/t, e avaliar os erros desses valores compensados.

R: *Para simplificar os cálculos numéricos, começar por fazer a transformação*

$$A=A'+0{,}000.243\,,\quad B=B'/50\,.$$
$$\therefore A'+B'\cdot t/50=e/t-0{,}000.243$$
$$\therefore 10^6 A'+10^6 B'\cdot t/50=10^6\cdot e/t-243$$

Tomamos

$$u=10^6\cdot A'=10^6\cdot A-243\,,\quad y=10^6\cdot B'=5\cdot 10^7 B\,,$$

Os 2.os membros das quatro equações das medições são igualmente precisos.

FÍSICA MATEMÁTICA

F. C. P. — Física Matemática — **Outubro de 1948.**

2881 — Reconhecer se será possível incluir nos casos de separação de variáveis que conhece um problema de Dinâmica em que é

$$2T=\alpha^2\cdot\alpha'^2+\alpha^2\beta^2\cdot\beta'^2+\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdot\gamma'^2,\qquad U=\beta^2/\alpha^2.$$

Se for, indicar um modo de fazer essa inclusão.

R: *Tomemos* $q^1=\alpha$, $q^2=\beta$, $q^3=\gamma$.

a) *Caso de* Liouville:

$$2T=B\cdot(A_\alpha\cdot\alpha'^2+A_\beta\cdot\beta'^2+A_\gamma\cdot\gamma'^2$$
$$A_\alpha/\alpha^2=A_\beta/\alpha^2\beta^2=A_\gamma/\alpha^2\beta^2\gamma^2 \;\therefore\; A_\alpha/A_\gamma=$$
$$=A_\alpha(\alpha)/A_\gamma(\gamma)=1/\beta^2\gamma^2$$

(dependente de β — inclusão impossível).

b) *Caso de* Staeckel:

$$2T=\alpha'^2/\psi_\alpha+\beta'^2/\psi_\beta+\gamma'^2/\psi_\gamma \;\therefore\; \psi_\alpha=1/\alpha^2,\;\psi_\beta=1/\alpha^2\beta^2,$$
$$\psi_\gamma=1/\alpha^2\beta^2\gamma^2.$$

Condições — com

$$X_\alpha=X_\alpha(\alpha)\,,\quad X_\beta=X_\beta(\beta)\,,\quad X_\gamma=X_\gamma(\gamma):$$

$$1/\alpha^2\cdot X_\alpha+1/\alpha^2\beta^2\cdot X_\beta+1/\alpha^2\beta^2\gamma^2\cdot X_\gamma=\begin{cases}0 & (\textit{duas}\text{ soluções})\\ 1 & (\textit{uma}\text{ solução})\\ \beta^2/\alpha^2 & (\textit{uma}\text{ solução}).\end{cases}$$

É possível determinar essas soluções, vindo:

$\varphi_{11}=1$, $\varphi_{12}=-\beta^2$, $\varphi_{13}=0$ (Soluções linearmente in-
$\varphi_{21}=0$, $\varphi_{22}=1$, $\varphi_{23}=-\gamma^2$ dependentes da 1.ª eq.).
$\varphi_{31}=\alpha^2$, $\varphi_{32}=0$, $\varphi_{33}=0$ (Solução da 2.ª eq.).
$U_1=0$, $U_2=\beta^4$, $U_3=0$ (Solução da 3.ª eq.).

2882 — Verificar que é *completo* de o sistema equações $x_2\frac{\partial f}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$, $x_2\frac{\partial f}{\partial x_3}+x_3\frac{\partial f}{\partial x_2}=0$.

Determinar um integral desse sistema pelo método de *Mayer*.

Escrever o integral geral. R: a) *Resolvamos em ordem a duas das derivadas:*

$$\begin{cases} X_1(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x_1}-\frac{x_1}{x_2}\frac{\partial f}{\partial x_2}=0\\ X_2(f)\equiv\frac{\partial f}{\partial x_3}+\frac{x_3}{x^2}\frac{\partial f}{\partial x_2}=0\,.\end{cases}$$

$$X_1X_2(f)-X_2X_1(f)\equiv\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_3}{x_2^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}-$$
$$-\frac{x_3}{x_2}\cdot\frac{x_1}{x_2^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x_2}\equiv 0$$

(*o sistema é* completo).

b) *Os coeficientes das novas equações são holomorfos na vizinhança do ponto* $x_1=x_3=0$, $x_2=1$.

Façamos a mudança de variáveis

$$x_1=y\,,\quad x_3=yu\,,\quad x_2=x_2\,.$$

Equação a considerar do sistema transformado:

$$Y(F)\equiv\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{u^2(y-1)}{x_2}\frac{\partial F}{\partial x_2}=0\,.$$

Equação diferencial associada:

$$x_2\,dx_2=(u^2-1)\,y\,dy \quad \therefore \quad x_2^2=(u^2-1)\,y^2+C\,(u)\,.$$

Integral da equação $Y=0$:

$$F\,(y\,|\,u\,|\,x_2)=x_2^2+(1-u^2)\,y^2.$$

$F\,(0\,|\,u\,|\,x_2)=x_2^2$ *não depende de* u, *portanto trata-se de um integral do sistema completo.*

Regresso às primitivas variáveis:

$$f=x_1^2+x_2^2-x_3^2.$$

c) *Integral geral:*

$$f=\Theta\,(x_1^2+x_2^2-x_3^2)\,.$$

2883 — Um ponto pesado P move-se sem atrito sobre uma linha fixa de extremos nos pontos

$$O\,(0\,,0\,,0) \quad \text{e} \quad A\,(1\,,0\,,0)\,,$$

sob a acção de uma força *constante* normal ao plano Oxz.

Parte de O com velocidade nula e pretende-se determinar essa linha de modo a atingir A o mais ràpidamente possível.

Reduzir à determinação da trajectória de um ponto material livre num campo dado. R: *Tomemos*

$$U=m\,a\,y-m\,g\,z\,.$$

De

$$2T=2\,(U+E)=2\,(may-mgz+E)$$

resulta (*ponto* O) $E=0$.

$$\therefore \quad v^2=2\,(ay-gz)\,.$$

$$t_{OA}=\int_{OA}\frac{ds}{v}=\int\frac{ds}{\sqrt{2\,(ay-gz)}}\,, \quad \delta t_{OA}=0\,.$$

Princípio da acção estacionária, para um ponto P′ *de massa* $m'=1$:

$$A=\int\sqrt{2\,(U'+E')}\,ds \;\;(S=s)\,, \quad \delta A=0\,.$$

Pondo de lado um factor numérico constante e fixando $E'=0$, *será*

$$U'=\frac{1}{ay-gz}\,.$$

Equações de movimento do ponto P′:

$$x''=\frac{\partial U'}{\partial x}=0\,, \quad y''=\frac{\partial U'}{\partial y}=-\frac{a}{(ay-gz)^2}\,,$$

$$z''=\frac{\partial U'}{\partial z}=\frac{g}{(ay-gz)^2}\,.$$

Resultam imediatamente três integrais primários:

$$x'=\alpha\,, \quad gy'+az'=\beta\,,$$

e o integral da força viva, que tem a constante de integração fixada $(E'=0)$

$$x'^2+y'^2+z'^2=2/(ay-gz)\,.$$

Só teremos de reter as equações das trajectórias que se obtêm eliminando t:

$$\left\{\begin{array}{ll} y'=\dfrac{dy}{dx}\cdot\alpha \quad \therefore & \alpha\left(g\dfrac{dy}{dx}+a\dfrac{dz}{dx}\right)=\beta \\[2ex] z'=\dfrac{dz}{dx}\cdot\alpha & \alpha^2\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{dx}\right)^2\right]=\dfrac{2}{ay-gz} \end{array}\right.$$

$\alpha\neq 0$, *porque* x *não pode ser constante.*

A 1.ª equação integra-se imediatamente, vindo

$$gy+az=0$$

depois de obrigar a trajectória a passar por O *e* A, *o que fixa* β *e a nova constante de integração.*

A última equação dá a outra equação da trajectória, mediante uma quadratura; ficam fixados α^2 *e a nova constante de integração.*

Enunciados e soluções dos n.os 2881 a 2883 de Manuel Gonçalves Miranda.

CRÍTICA DE LIVROS

LIÇÕES DE ÁLGEBRA SUPERIOR E GEOMETRIA ANALÍTICA, (Tomo I)

por ***Arnaldo Madureira*** *(Professor catedrático da Faculdade de Ciências do Porto)*

Durante largos anos a preparação dos estudantes das nossas Escolas Superiores, tanto para as aulas como para os exames, fez-se pela «sebenta».

Ùltimamente, porém, esta prática tem sido substituída pela publicação das lições, sob a imediata responsabilidade dos próprios professores.

Ora, é precisamente um livro deste tipo que neste momento nos cabe analisar e, sendo assim, o que interessa, acima de tudo, é esclarecer em que medida a Universidade atinge através dele o objectivo fundamental de fornecer aos estudantes de Álgebra um bom manual de trabalho e um valioso elemento de consulta, tudo isso avaliado à luz de um critério actual do que deve ser o ensino superior daquela disciplina.

Dentro desta orientação, destacaremos os três pontos seguintes: *prefácio, introdução e segunda parte.*

Prefácio. Diz-se nele, textualmente: «Ao publicarmos este trabalho, temos apenas em vista prestar um serviço aos nossos alunos, fornecendo-lhes um compêndio que lhes permita seguirem fàcilmente as nossas lições, sem precisarem de distrair a atenção na recolha de apontamentos nem *perderem* tempo na consulta de vários livros, em que decerto encontrariam tratados os mesmos assuntos».

E a reforçar esta afirmação, logo no período seguinte se acrescenta, à maneira de implicação: «Não se trata, portanto, de um livro com pretensão de originalidade, mas sim, como o título indica, de uma exposição das lições...».

Ora, se se pode admitir, até certo ponto, que um autor ligue a sua responsabilidade às afirmações que entender, já o mesmo não é legítimo quando essas afirmações envolvem, como é o caso neste livro o ensino numa Escola Superior.

Não se pode aceitar que uma Universidade subscreva a doutrina deste prefácio, onde a função do professor e do livro de texto aparecem reduzidos a um simples papel burocrático, do qual se baniram as preocupações de originalidade, o estudo de bons autores e a íntima colaboração de mestres e alunos na análise de verdadeiros problemas!

Introdução. O autor, depois de dar uma definição de *Álgebra Ordinária*, sem qualquer sentido, (pág. 7) esboça uma teoria dos números reais e complexos, que hoje ninguém pode justificar.

Efectivamente, pelo que respeita aos números reais, há três maneiras fundamentais (todas equivalentes) de proceder à sua construção lógica: 1) pelas sucessões convergentes (Cantor); 2) pelos cortes de Dedekind; 3) pelas sucessões de encaixe.

No entanto o que o autor diz sobre este assunto a págs. 9-12, longe de constituir uma exposição mesmo elementar de qualquer desses métodos, só pode servir para aumentar a confusão de um aluno de Álgebra a respeito da maneira de introduzir os números irracionais com base na noção de *corte* ou *cisão* (Dedekind).

Na verdade, diz-se assim: «chamando *contínuo* a um conjunto em que todas as cisões nele produzidas são feitas por elementos do próprio conjunto, diremos que o conjunto dos números racionais não é contínuo. Torna-se, porém, contínuo, desde que introduzamos nele uma nova entidade necessária, *o número irracional,* definido justamente pela cisão (A/B), em que A não tem máximo e B não tem mínimo».

Ora, a circunstância de se afirmar que o conjunto dos números racionais não é *contínuo*, passando no entanto a sê-lo mediante a introdução de uma nova entidade numérica, o *número irracional*, desperta no aluno, até pelo próprio significado corrente das palavras *contínuo* e *introduzir*, a idéia-imagem de uma lacuna no conjunto dos números racionais, lacuna que se pretende preencher com qualquer coisa de novo.

Mas o valor desta imagem, como elemento auxiliar de esclarecimento, logo se perde, quando a seguir se exige da sua inteligência, compreenda o que seja preencher uma lacuna com uma *entidade numérica definida pela cisão* (A/B).

No entanto, como o autor falou em *cisões*, no propósito, é evidente, de abordar uma das construções lógicas possíveis dos números irracionais, teria, ao menos, de enfrentar o problema com os meios de que hoje dispomos, tornando, então, compreensível a operação lógica de preencher lacunas do conjunto dos números racionais. Mostraria como é possível definir na família das cisões (A/B) as operações fundamentais de soma e produto de cisões e uma relação de ordem, tais que se verifiquem todas as propriedades já encontradas nos números racionais.

Acabaria por fazer compreender como se obteve, assim, uma verdadeira ampliação do corpo dos números racionais, pois nele está contida uma parte autêntica isomorfa daquele.

Em vez de o aluno partir a cabeça a tentar descobrir a maneira de introduzir novas entidades numéricas no conjunto dos números racionais, aprenderia a ampliar este no sentido atrás indicado, de modo a chegar, no final, a um *contínuo.*

E para atingir êsse objectivo bastaria utilizar a explêndida Biblioteca da Faculdade de Ciências do Porto e recorrer à colaboração de algumas das pessoas que mais se têm ocupado deste assunto entre nós — Prof. Almeida Costa, Assistente Andrade Guimarães e Lic. Neves Real. E desse modo teria prestado um grande serviço à sua escola e ao ensino.

Ao expor os números complexos cai o autor em deficiências análogas, escrevendo, por exemplo, pág. 12, «Números imaginários são os números de forma $a+bi$, em que $i=\sqrt{-1}$ e a e b são números reais.

Na expressão $a+ib$ estão incluidos os números reais para $b=0$, etc.»

Há aqui, no fundo, os mesmos erros de construção lógica que já referimos a respeito dos números irracionais, erros apontados já por Hamilton há um século, mas que hoje não é legítimo cometer num livro de ensino de Álgebra Superior. Hamilton [1] exprimia-se nestes termos: «In the Theorv of Simple Numbers, the Symbol $\sqrt{-1}$ is *absurd*, and denots an Impossible Extraction, or a merely Imaginary Number; but in the Theory of Couples, the same symbol $\sqrt{-1}$ is *significant*, and denotes a Possible Extraction, or a Real Couple, namely the *principal square-root of the couple* $(-1,0)$. In the later theory, therefore, though not in the former, this sign $\sqrt{-1}$ may properly be employed; and we may write, ifwe choose, for any couple (a_1, a_2), whatever,

$$(a_1, a_2)=a_1+a_2\sqrt{-1}\ .»$$

Fazemos aqui estas transcrições, tiradas por sua vez de *Algebra's Debt to Hamilton by C. C. Mac Duffee* [1], pois contêm o ponto de vista actual sobre

(1) The Scripta Mathematica Studies, n.° 2, A Collection of Popers in mewores of Sir William Rowan Hamilton, 1945.

o verdadeiro significado do símbolo $a+bi$, ponto de vista que para o génio de Hamilton era já evidente em 1835!

Na segunda parte, encontramos defeitos idênticos como sejam a afirmação de que ∞ não é limite pròpriamente dito, acompanhada *da demonstração de que é absurdo escrever* $|u_n - \infty| < \delta$ e, a pág. 239, esta definição de função: «Consideremos duas variáveis z e u e uma sucessão arbitrária $z_1, z_2, \cdots z_n, \cdots$ de valores da primeira. Suponhamos que entre as duas variáveis existe uma relação tal que faça corresponder àqueles valores de z respectivamente os termos de sucessão $u_1, u_2 \cdots, u_n, \cdots$ Diz-se então que u é função de z e escreve-se $u=f(z)$» — definição que se não pode admitir e à qual dificilmente se poderá atribuir qualquer sentido. De facto, no conceito de função o que há de característico é uma correspondência entre dois conjuntos, domínios de z e u, e o que interessaria era exemplificar e não introduzir a sucessão $z_1 \cdots, z_n, \cdots$, não se sabe a que propósito.

Em resumo, livro que não constitui uma contribuição positiva para o ensino de Álgebra, antes persiste em expor alguns dos seus principais problemas de uma maneira incorrecta e antiquada, inadmissível num curso universitário.

Ruy Luis Gomes

ARITMÉTICA E LÓGICA (Edit. Giulio Einaudi, Torino 1947)

por **G. Frege**

1. L'opera classica: «*Die Grundlagen der Arithmetik*» del celebre logico tedesco, pubblicata a Breslavia nel 1884, appare per la prima volta tradotta in italiano e accuratamente annotata dal prof. *L. Geymonat*, incaricato di storia delle matematiche presso l'Universitá di Torino. Il volume raccoglie, oltre a quest'opera, anche le traduzioni, parziali o integrali, d'alcuni articoli dello stesso A., articoli che si connettono all'argomento ed anzi possono quasi considerarsene il seguito[1]. Termina con la traduzione d'alcune pagine salienti, ricavate dalla prefazione d'una seconda opera dell'A., pubblicata a Jena negli anni 1893 (I° vol.) e 1903 (II° vol.) col titolo: *Grundegsetze der Arithmetik*, opera di ben piú vasta mole e particolarmente interessante dal punto di vista matematico[2].

Quest'edizione dei *Grundlagen* non mancherà d'alimentare negli satudiosi italiani e, speriamo, anche in quelli di lingue portoghese e spagnola, l'interesse per un complesso di questioni filosofico-matematiche che, lungi dall'esser risolte, sembrano anzi attualmente coinvolte in una profonda crisi del pensiero scientifico. *Frege* è oggi più che mai discusso, riscuotendo ammirazione (anche superiore, crediamo, ai suoi meriti reali) da quelli che, pur metendo in luce l'innegabile aspetto contraditorio del suo pensiero, affermano d'aver proseguito la sua opera, applicando i suoi metodi fondamentali di ricerca e traendo dai suoi principi le ultime conseguenze.

2. Nella feconda collaborazione di matematici e filosofi, si puó dire che l'atteggiamento dialettico secondo cui i primi hanno la tendenza a separare il piú nettamente possibile la loro scienza da ogni influsso filosofico, mentre i secondi si reservano lo studio dei problemi relativi all'esistenza, al contenuto concettuale, al valore (nel quadro generale della conoscenza) degli enti posti a fondamento delle richerche matematiche, s'è andato accentuando a partire dalla fine del secolo scorso. Nel campo dell'aritmetica, piè precisamente della teoria dei numeri naturali, la tendenza matematica ha portato, com'è noto, a un risultato perfetto e definitivo con l'opera dell'italiano *G. Peano* (1858-1932), al quale è dovuta la scoperta della definizione assiomatica dei tre concetti: lo *zero*, il *numero*, il *successivo*.

Frege, coi suoi "*Grundlagen*", è l'iniziatore delle ricerche filosofiche moderne relative alla natura del concetto di *numero naturale* e delle leggi fondamentali dell'aritmetica. I "*Grundlagen*" constano d'un'introduzione, d'una breve premessa e di cinque capitoli, ciascuno dei quali è suddiviso in sezioni e paragrafi. I primi tre capitoli (e cioè più di metà dell'opera) hanno carattere prevalentemente critico: vi si discutono con notevole acutezza le opinioni dei più illustri matematici e filosofi, sulla natura delle proposizioni aritmetiche (cap. I), sul concetto di numero naturale (cap. II), sull'unità e sul numero uno (cap. III). Gli ultimi due capitoli costituiscono la parte più propriamente costruttiva dell'opera. L'A. attribuisce al concetto di numero naturale due caratteri essenziali: a *sovrasensibilità* e l'*oggettività* (p. 75). Egli non es-

---

[1] Gli articoli (alcuni solo parzialmente tradotti) hanno i seguenti titoli: *Ueber Begriff und Gegenstand* (Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie XVI, 1892, pp. 192-205); *Ueber das Trägheitsgesetz* (Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik XCVIII, 1890, pp. 145-161); *Ueber Sinn und Bedeutung* (Id. Id. C, 1892, pp. 25-50).

[2] Quest'opera trovasi ampiamente riassunta nel volume di *A. Natucci: Il concetto di numero e le sue estensioni* (Torino, Bocca 1923, cap. XXI pp. 320-333) e recensita da *G. Peano* nella *Rivista di Matematica* (vol. V, 1895, p. 122).

clude che l'esperienza sensibile o quella psicologica interna siano condizioni necessarie affinchè *possa formarsi* nel nostro spirito il concetto di numero. Ma questo è problema che interessa, afferma l'A., esclusivamente la psicologia e la cui soluzione non getta in realtà alcuna luce sull'essenza del concetto di numero. L'A. infatti distingue il concetto del numero dalla *rappresentazione* di esso: questa, soltanto questa, interessa la psicologia, è soggettiva, personale. Si parla o si può parlare della *mia* rappresentazione del numero 2, della *tua*, della *sua*. Ma non si può parlare che d'un solo concetto del numero 2: e perciò s'adopera l'articolo indicativo, dicendo "*il*" numero 2. Se esistessero più numeri 2 (cioè più concetti del numero 2), potrebbe sorgere il dubbio che questi fossero diversi non solo da uomo a uomo, ma anche nel tempo e si potrebbe sospettare che il concetto del numero 2 avesse ad evolversi nei secoli, talchè per es. il prodotto 2×2 non divenisse un giorno, per avventura, uguale a 5 (pp. 23, 75). Ma contro la possibilità d'un'evoluzione storica sia del concetto di numero che delle leggi fondamentali dell'aritmetica, l'A. si pronuncia con estrema decisione: "Il metodo storico, che vuole affermare le cose nel loro divenire e scoprirne in questo modo l'essenza profonda, avrà senza dubbio la sua ragion d'essere ma ha pure i suoi limiti. Se nel flusso ininterrotto di tutte le cose non esistesse proprio nulla d'immobile, d'eterno, allora cesserebbe la conoscibilità del mondo e tutto precipiterebbe in grande confusione" (p. 24).

La prima parte dei "*Grundlagen*" è chiaramente ispirata a un idealismo platonico. L'A. insiste, con particolare efficacia, nel dimostrare che *il numero non è una proprietà degli oggetti* (p. 79). *Euclide*, nel libro VII degli *Elementi*, chiama *unità* "ciò secondo cui ogni cosa è detta uno". Sostanzialmente analoga è la definizione di *Leibniz*: "è uno tutto ciò che può venir colto per mezzo d'un atto del pensiero". Ma *Frege* obietta: " non è forse possibile cogliere anche il molteplice per mezzo d'un atto del pensiero?". E non è forse tautologica questa definizione di *Leibniz*, se non dice che cosa debba intendersi per *un* atto del pensiero? (pp. 80-81). In realtà, afferma l'A., i singoli oggetti non hanno affatto la proprietà d'esser ciascuno un'unità. Infatti si può dire che un certo oggetto possiede una certa proprietà, soltanto se qualche altro oggetto ne risulta privo". L'affermazione che Solone è saggio, acquista un senso esclusivamente per la possibilità che qualcuno non sia saggio; il contenuto d'un concetto diminuisce, se la sua estensione si amplia; se questa poi viene a comprendere tutto, il contenuto del concetto andrà completamente perso" (pp. 79-80). D'altra parte, prosegue l'A., non è certo possibile ricavare dall'esperienza il concetto del *numero uno*, perchè l'esperienza non ci può suggerire, relativamente a un determinato oggetto preso in esamo, che certi caratteri d'indivisibilità e di delimitatezza, caratteri convenzionali che in realtà sono una creazione del nostro pensiero. Per essere esatti, si dovrebbe dire: "la tal cosa viene *pensata* come indivisibile e delimitata", cioè vien pensata come in realtà *non è*. E allora: come sarebbe possibile, da un'affermazione falsa intorno a una certa cosa dedurne una vera, cioè l'affermazione che quella cosa costituise un'unità? "Noi riusciamo a cogliere l'idea dell'unità solo per mezzo delle alte capacità spirituali che ci distinguono dagli animali. E quindi le pure e semplici proprietà degli oggetti (come l'esser delimitati e il non esser divisi) che vengono percepite altrettanto bene dagli animali quanto dagli uomini, non possono constituire i caratteri essenziali del concetto d'unità" (p. 82). Analoghe osservazioni valgono per il concetto di numero in generale: si riescono a contare degli oggetti soltanto dopo che s'è riusciti a riunirli sotto uno stesso concetto, ciò che contiene maggior forza di connessione che non l'appercezione sintetica (propria degli animali) (p. 107). In conclusione:" il numero non può venir rappresentato, nè come oggetto a sè, nè come proprietà connessa a qualche oggetto esterno; esso non è nè qualcosa di sensoriale, nè una proprietà degli oggetti esterni" (pp. 120-121); "l'attribuzione d'un numero contiene sempre un'affermazione intorno ad un concetto" (p. 103).

3. Qual'è dunque l'origine del concetto di numero, se non l'esperienza sensibile? Cercando una risposta a questa domanda e facendo propria la classificazione di *Kant*, dei giudizi o concetti a priori e a posteriori[3], analitici e sintetici, l'A. comincia col dimostrare che il numero non è un concetto a posteriori e ciò gli riesce facile valendosi dei caratteri d'oggettività e di sovrasensibilità sopra accennati. Analogamente anche le leggi dell'aritmetica non sono giudizi a posteriori. Dunque il numero è un concetto a priori, ma è esso, analitico o sintetico?

Kant affermava la natura sintetica del concetto di numero. *Frege* lo nega, entrando in distinzioni molto sottili e, a nostro parere, non del tutto chiare e sicure. Ci sembra che, come matematici italiani, abituati allo stile cristalino, semplice, quasi scarno del *Peano*, a quello elegante e ricco dell'*Enriques*, non si possa fare a meno di provare, leggendo queste pagine, una certa impressione di prolissità e di confusione. Cerchiamo tuttavia di chiarire, nella sua intima essenza, il pensiero dell'A..

Ogni concetto, secondo *Kant*, ha il suo fondamento in un'intuizione. Ora noi possiamo certamente avere un'intuizione dei numeri piccoli 1, 2, 3, $\cdots$, ma non la possiamo avere dei numeri grandi, per es. di $\left(1000^{1000^{1000}}\right)$ (p. 163). Perciò non possiamo considerare evidente di per sè stessa un'uguaglianza come per es. $135.664 + 37.863 = 173.527$. E sicomme la distinzione fra numeri grandi e numeri piccoli è soggettiva e quindi arbitraria, così non dobbiamo considerare evidentemente intuitive neppure delle uguaglianze come $2+2=4$ o $2+1=3$ (p. 36). Qui l'A. si rifa sostanzialmente a *Leibniz*, del quale accetta la dimostrazione (opportunamente perfezionata) dell'uguaglianza $2+2=4$ (pp. 37-38). Questa dimostrazione si può generalizzare a proposito della somma $a+b$ di due numeri naturali qualunque, riconducendo l'operazione rappresentata dal simbolo $a+b$, a b sucessive addizioni d'un'unità, a partir dal numero a. Con ciò il problema si semplifica soltanto in apparenza, occorrendo spiegare la natura dell'operazione elementare indicata dal simbolo $a+1$.

Ma l'A. non è un platonico nel senso di *Leibniz*, il qual considerava il numero, per così dire, como una *figura metafisica ed incorporea* (p. 67). L'A. ritiene di dover dimostrare che $2+1=3$, appunto perchè il concetto del numero è analitico e non sintetico e perchè le leggi dell'aritmetica sono analitiche e non sin-

(3) Cfr.: *Critica della ragion pura*, introduz IV, V.

tetiche. Pura deduzione dunque? *Frege* recorre a delle immagini originali e suggestive. "In realtà, egli dice, tali conseguenza sono davvero contenute nelle definizioni: ma come la pianta nel seme, non come una trave nella casa" (p. 163). L'aggiunta d'un' unità ad un numero qualunque è sì un'operazione analitica, ma non deduttiva nel senso che il suo risultato possa farsi rientrare in una definizione di carattere generale, come per es. se si dicesse: il numero è ciò che s'ottiene proseguendo ad aumentare d'un'unità". Quasi che i numeri si distinguessero l'uno dall'altro, soltanto per il fatto d'esser l'uno più grande e l'altro più piccolo, e quindi dovessero considerarsi "modi semplici come quelli dello spazio" Già *Leibniz* aveva criticato un tale tentativo di difinizione, osservando che: "questo può venir detto del tempo e dei segmenti rettilinei[4], ma non delle figure e ancor meno dei numeri, i quali risultano non soltanto diversi fra loro per grandezza, ma pure dissimili. Infatti un numero pari è divisibile per due, mentre non lo è uno dispari; 3 e 6 sono numeri triangolari; 4 e 9 sono quadrati, 8 è un cubo, ecc.; e ciò ha luogo ancor più per i numeri che per le figure, dato che due figure disuguali possono essere totalmente simili, mentre ciò non accade mai per due numeri" (pp. 45-46). *Frege* precisa ed approfondisce in modo efficace quest'osservazione. "Nemmeno sarebbe lecito, egli dice, paragonare i numeri agli individui di una stessa especie animale; essi hanno infatti, per loro natura, un ordinamento fisso, ognuno è formato in un modo suo proprio e possiede le sue particolari caratteristiche... Il paragone più appropriato potrebbe essere il seguente. Supponiamo d'aver scavato un pozzo e d'aver osservato che, in esso, la temperatura cresce proporzionalmente alla profondità. Si siano inoltre incontrati, nello scavo, strati pietrosi assai diversi. In questa ipotesi è evidente che, dalle osservazioni finora compiute, è impossibile ricavare alcunchè circa le proprietà degli strati ulteriori e che resta indeciso se si conserverà acora, o no, la precendente regolarità nella distribuzione delle temperature. Senza dubbio, tanto quello che venne finora osservato, quanto ciò che giace più in fondo, cadono entrambi sotto il concetto generico di «ciò che s'incontra proseguendo lo scavo del pozzo»; una tal subordinazione logica giova però, nel nostro caso, assai poco... Qualcuno obietterà forse che fra i due casi (l'esempio del pozzo e l'esempio della successione dei numeri naturali) sussiste una notevole diversità: gli strati successivi del terreno vengono, nello scavo del pozzo, soltanto incontrati; i numeri invece vengono proprio criati e determinati in tutto il loro essere, dall'aggiunta di un'unità. Rispondiamo: questo può significare soltanto che è possibile dedurre tutte le proprietà d'un numero, per es. di 8, dal modo con cui esso è formato dall'aggiunta di successive unità" (p. 46).

Conseguentemente l'operazione indicata dalla formula $2+1=3$, non può significare semplicimente "*riunione*" d'un'unità al numero 2, cioè il segno $+$ non può avere lo stesso valore della copula *e*. Il resultato dell'operazione indicata dal segno $+$ è invece qualcosa d'essenzialmente nuovo, d'essenzialmente diverso dal numero 2 e cioè il numero 3 (p. 42).

4. A questo punto del ragionamento, avviene però una profonda fractura nel pensiero dell'A. Egli pone, a fondamento della sua ricerca, tre principi fondamentali o canoni, il più importante dei quali consiste nel "*cercare il significato delle parole, considerandole non isolatamente, ma nei loro nessi reciproci*" (p. 27). Dopo esser giunto, come s'è detto, alla conclusione che *il numero è un attributo d'un concetto e non d'un oggetto*, l'A. è indotto da questo canone a dare anzittuto un preciso significato ad una proposizione come questa: "il concetto F è *ugualmente numeroso* al concetto G" e cioè: una tale proposizione significa che "esiste la possibilità di porre in corrispondenza biunivoca gli oggetti che cadono sotto G e quelli che cadono sotto F". Per es., con questa definizione, dobbiamo dire che: il concetto *numero complesso* ordinario è ugualmente numeroso al concetto *punto d'un piano cartesiano*, il concetto *punto d'una recta projettiva* è ugualmente numeroso al concetto *punto d'una eirconferenza*, ecc. L'A. giunge così finalmente alla definizione del *numero naturale*, che spetta a un determinato concetto F: esso è l' *estensione* del concetto "*ugualmente numeroso ad F*" (p. 134). Questo è il punto cruciale di tutta l'opera e va esaminato con molta attenzione. L'A. compie sostanzialmente, con questa definizione, il tentativo di ricondurre l'aritmetica alla logica, tentativo che, come è noto, è stato poi ripreso con molto successo da *B. Russell* e dalla sua scuola. Ora si deve, a questo punto, fare un'obiezione di principio. Nelle pagine che contengono la definizione del numere or ora riportata, l'A. presuppone che si sappia che cos'è l'*estensione d'un concetto*. Ma poichè il significato di tale *estensione* non è in realtà dato e non può affatto dirsi di per sè evidente, o più evidente di quanto non lo sia il significato del termine *numero*, si può obiettare che la definizione d'un termine, ricorrendo ad un altro termine del quale non sia stata data a sua volta una definizione, non risolve nulla. Comprendiamo perfettamente la risposta che il *Geymonat* (nota a p. 135) dà a questa obiezione: "nel pensiero di *Frege*, è completamente fuori luogo porre il problema se un'idea risulti più o meno chiara dell'altra; l'importante è che l'idea d'estensione appartiene, senza possibilità di dubbio, al campo della logica". Rileviamo però l'intima contradizione che, proprio a questo punto, s'inserisce nel ragionamento dell'A.. Infatti, in termini sostanzialmente equivalenti, possiamo formulare l'obiezione dicendo che, in fondo, la teoria dell'A. diventa qui non meno formale di altre, non meno per es. di quella del *Peano*. Anche gli assiomi del *Peano* seguono il canone fondamentale di *Frege*: essi infatti spiegano il significato delle parole *numero*, *zero* e *successivo* non considerandole isolatamente, ma nei loro nessi reciproci. La diferenza fra *Peano* e *Frege* è soltanto questa: che il primo non valica i ben definiti confini dell'aritmetica il secondo invece definisce (o tenta di definire) i suddetti termini mediante altri termini presi in prestito dalla logica, ma questi ultimi definisce l'uno con l'altro, cioè appunto *nei loro nessi reciproci*. Ma è chiaro che ciò contradice alle idee platoniche espresse dall'A. nella prima parte del libro, spalancandosi ora le finestre a quel formalismo cui s'eran prima sbarrate le porte. Di questo formalismo l'A. è evidentemente consapevole, ma ciò non diminuisce l'aspetto contradittorio del suo ragionamento.

---

(4) Perchè i singoli istanti presentano fra di loro una certa uniformità, cosi i segmenti rettilinei, i punti, i piani, le rette ecc. Per es., dati due piani, uno dei due può portarsi a coincidere e cioè a *identificarsi* con l'altro, mediante un'operazione (movimento) che, in certo senso, non ne fa perdere i caratteri distintivi.

5. Il formalismo s'accentua nelle definizioni che s'incontrano nel seguito del libro: nella definizione dello zero, in quella d'un numero n che segue immediatamente ad un altro numero m, nella serie dei numeri naturali, infine in quella del numero 1.

Accenniamo per sommi capi. Per la prima di queste definizioni, zero è il numero naturale (cioé l'estensione) che spetta al concetto "diseguale da sè stesso" (p. 144). Per la seconda, s'afferma l'esistenza "d'un concetto F e d'un oggetto x che cade sotto F, per i quali valgono le seguenti proposizioni: n è il numero che spetta ad F, ed m è invece il numero che spetta al concetto «ciò che cade sotto F ma è diverso da x»" (p. 147). Per la terza definizione, "1 è il numero naturale che spetta al concetto «uguale a 0»" (p. 149).

Nel cap. IV l'A. dà anche le dimostrazioni, più o meno complete, dei più importanti teoremi deducibili dalle precedenti definizioni e cioè: "il numero spettante al concetto F è uguale al numero spettante al concetto G, se F e G sono fra loro ugualmente numerosi" (p. 142); "ad ogni numero ne segue un altro nella serie dei numeri naturali" (p. 155), ecc. Nello stesso cap. IV è anche la definizione del *numero infinito* che spetta al concetto "*numero naturale finito*" (p. 156) e sono esposte alcune osservazioni critiche sulla teoria dei numeri di *G. Cantor* (pp. 157-159).

Il cap. V contiene le conclusioni dell'opera, con considerazioni filosofiche profonde che ritornano ai concetti platonici dai quali l'A. aveva prese le mosse.

La contradizione cui abbiamo accennato sminuisce purtroppo il valore della profonda ricerca, ma induce forse ad esaltarne l'importanza, coloro che credono nell'avvenire del formalismo e vi contribuiscono coi loro studi: è lecito suporre che questi eccedano un poco nella loro ammirazione, interpretando la contradizione dell'insigne logico di Jena, come un'evidente dimostrazione dell'impossibilità di risolvere, esclusivamente sul terreno filosofico o almeno su quello idealistico platonico, i problemi da loro studiati.[5]

Tulio Viola

[5] Alludiamo, in particolare, ai neo-positivisti del «circolo viennese» e all'opera di *F. Waismann: Introduzione al pensiero matematico* (Edit. G. Einaudi, 1942).

SITUAÇÃO FINANCEIRA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

As contas da *Gazeta de Matemática* que o leitor poderá apreciar neste número da revista confirmam inteiramente as previsões e os comentários feitos no número anterior da Gazeta (N.º 37-38, pág. 42).

Assim, previu-se para 1948 um déficit da ordem da dezena de contos e ele é efectivamente de Esc. 14.131$80, importância na qual está contido o déficit resultante da publicação da 2.ª edição do ano I (N.º 1-4) que foi de Esc. 5.398$10.

O carácter permanente da situação deficitária da *Gazeta de Matemática* e a necessidade de urgente saneamento financeiro, para não comprometer totalmente a tarefa da revista, destacam-se referindo que o déficit no período 1946-47 (dois anos) foi de Esc. 6.859$15 e o déficit no período 1946-48 (três anos) foi de Esc. 18.306$70.

Fornecem uma razoável medida da compreensão dos assinantes da *Gazeta de Matemática* pela necessidade de elevar o preço da assinatura e do interesse despertado pelo apelo para a angariação de novos assinantes, os números que adiante se referem.

Novos assinantes inscritos depois da publicação do N.º 37-38: 117.

Números aproximados de assinantes e receita em:

	31-12-1947	31-12-1948	31-3-1949
Assinantes	700	670	496 [a]
Receita de assinaturas	21.000$00	20.100$00	19.840$00 [a]

[a] A cobrança das assinaturas para 1949 ainda não está terminada.

	Conta de 1946-47	N.º 35	N.º 36	N.º 37-38	N.º 1-4	Total 1948	N.os 5 a 34	Total geral 1948
Despesa								
Composição, impressão, papel e cartolina	48.861.75	5.982.45	4.994.70	9.495.70	9.224.70	29.697.55	—	29.697.55
Despesas gerais. . .	22.547.55	1.992.60	1.992.60	3.985.15	115.40	8.085.75	1.30	8.087.05
Deficit de 1947 . . .	—	—	—	—	—	—	6.859.15	6.859.15
Total. . . .	71.409.30	7.975.05	6.987.30	13.480.85	9.340.10	37.783.30	6.860.45	44.643.75
Receita								
Assinaturas e venda avulsa	64.550.15	5.383.75	5.285.25	9.040.50	3.942.00	23.651.50	2.685.55	26.337.05
Deficit.	6.859.15	2.501.50	1.702.05	4.440.35	5.398.10	14.131.80	4.174.90	18.306.70

LITERATURA MATEMÁTICA RECENTE

PUBLICAÇOES DA SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Álgebra Moderna por L. Van der Waerden (trad. da 2.ª ed. por Hugo B. Ribeiro)

PUBLICAÇÕES DA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Integral de Riemann por Ruy Luís Gomes

Sumários destas duas obras publicados nos números anteriores de Gazeta de Matemática

PUBLICAÇÕES DO CENTRO DE ESTUDOS MATEMÁTICOS DO PORTO

Sistemas Hiper-complexos e Representações, por A. Almeida Costa

NOTAS DE MATEMÁTICA, publicadas sob a direcção do Prof. A. Monteiro

1. *Combinação de Topologias* por L. Nachbin
2. *Filtros e Ideais* por A. Monteiro
3. *Recticulados vectoriais*, por J. Abdlhay
4. *Espaços vectoriais topológicos*, por L. Nachbin
5. *Filtros e Ideais II*, por A. Monteiro
6. *Convexidade das curvas*, por M. Peixoto

Les surfaces algébriques sur lesquelles l'opération d'adjontion est périodique, por Louis Nollet

(Les Mathématiques et leurs Applications II) Sciences et Lettres, Liége, 1948 — Masson & Cie

Introduction à la Biologie Quantitative

Présentation statistique des donnés numériques, por Maxime Lamotte — 1948 — Masson & Cie.

Les Mathématiques de l'Hérédité, por G. Malécot — 1948 — Masson & Cie.