GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO IX N.os 37-38 AGOSTO DEZEMBRO 1948

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 25$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

G A Z E T A   D E   M A T E M Á T I C A

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa - N

NOS PRÓXIMOS NÚMEROS DE «GAZETA DE MATEMÁTICA»:

Les géométries de figures orientées, por *Paul Belgodère*

O teorema dos resíduos e o cálculo da soma de uma série, por *João Farinha*

Sôbre a resolução numérica de equações, por *José Morgado* e *Laureano Barros*

As definições correntes de probabilidade, por *Maurice Fréchet* (trad.)

Introdução ao estudo das geometrias baseado no conceito de transformação (continuação) por *J. Sebastião e Silva*

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — R. Almirante Barroso, 20 r/c. — LISBOA - N.

GAZETA DE MATEMÁTICA

ANO IX – N.os 37-38 – AGOSTO-DEZEMBRO – 1948

REDACTOR PRINCIPAL: *J. Morgado* • EDITOR: *Gazeta de Matemática, Lda.* • ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N

PROFESSOR BENTO CARAÇA

18.4.1901 25.6.1948

Nasceu em Vila Viçosa, em 18 de Abril de 1901, filho de João António Caraça e de D. Domingas da Conceição Espadinha, trabalhadores rurais.

Terminou os estudos primários em 1911 e o curso liceal em 1918. Frequentou o Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras de 1918 a 1923, ano em que se licenciou.

Foi nomeado 2.º assistente do 1.º grupo de cadeiras do I. S. C. E. F. em 1 de Novembro de 1919, 1.º assistente em 13 de Dezembro de 1924, professor extraordinário em 14 de Outubro de 1927 e professor catedrático da 1.ª Cadeira (Matemáticas Superiores — Álgebra Superior. Princípios de análise infinitesimal. Geometria Analítica) em 28 de Dezembro de 1929.

Regeu no ano lectivo de 1924-25 a 2.ª cadeira (Matemáticas Superiores — Análise Infinitesimal. Cálculo das Probabilidades e suas Aplicações) e de 1925 a 1946 a 1.ª Cadeira.

Em 7 de Outubro de 1946 foi demitido do cargo de professor catedrático, mediante processo disciplinar de cuja decisão recorreu.

Foi eleito Presidente da Direcção da Sociedade Portuguesa de Matemática para o biénio 1943-44 e Delegado da Sociedade aos Congressos da Associação Luso-Espanhola para o progresso das Ciências de 1942 e 1944.

Em 1938 propoz, com os professores A. de Mira Fernandes e C. M. Beirão da Veiga, ao Conselho Escolar do I. S. C. E. F. a fundação do Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia de que foi Director até Outubro de 1946.

Em 1940 fundou, com os professores António Monteiro, Hugo Ribeiro, José da Silva Paulo e Manuel Zaluar, a Gazeta de Matemática, assumindo em 1942 o encargo de dirigir a secção «Pedagogia».

Em 1941 fundou a Biblioteca Cosmos de que foi o único director.

Foi Presidente da Direcção da Universidade Popular Portuguesa, durante muitos anos consecutivos.

BIBLIOGRAFIA

Sobre a intervenção do princípio de substituição de infinitésimos no estabelecimento de algumas fórmulas do Cálculo Diferencial. Separata da *Revista do Instituto Superior de Comércio*, Lisboa 1929.

Sobre a aplicação de um grupo de fórmulas do Cálculo das Probabilidades na teoria dos seguros de vida. Separata da *Revista do Instituto Superior de Comércio*, Lisboa 1930.

Sobre o espaço de capitalização. Separata da *Revista de Economia*, Lisboa 1948.

Interpolação e integração numérica. Lisboa 1933.

Lições de Álgebra e Análise — Volume I, 2.ª edição, Lisboa 1945; Volume II, Lisboa, 1940.

Cálculo Vectorial. Lisboa 1937.

Conceitos fundamentais da Matemática — Volume I, 4.ª edição, Lisboa, 1945: Volume II, 2.ª edição 1944.

A vida e a obra de Evaristo Galois *(Conferência)*. Lisboa 1932.

A cultura integral do indivíduo, problema central do nosso tempo *(Conferência)*. 3.ª edição, Lisboa 1941.

Galileo Galilei, valor científico e moral da sua obra *(Conferência)*, 2.ª edição, Lisboa 1940.

A arte e a cultura popular *(Conferência)*. Lisboa 1936.

Rabindranath Tagore *(Conferência)* Lisboa 1939.

Algumas reflexões sobre a Arte *(Conferência)* Lisboa 1943.

Colaboração em «Gazeta de Matemática»

Abel e Galois. N.º 2—Abril 1940.

Ao leitor. N.º 5—Janeiro 1941.

O cinema no ensino. N.º 10—Abril 1942.

Galileu e Newton. N.º 11—Julho 1942.

Nota (Pedagogia). N.º 11—Julho 1942.

Resposta às considerações anteriores (Pedagogia). N.º 12—Outubro 1942.

Algumas reflexões sobre os exames de aptidão. N.º 17—Novembro de 1943.

Nota (Pedagogia). N.º 19—Maio 1944.

O número π. N.º 22—Março 1944.

Em guisa da continuação dum debate (Pedagogia). N.º 23—Fevereiro 1945.

Colaborou ainda nas revistas «Técnica», «Seara Nova» e «Vértice», no quinzenário «O Globo» e nos semanários «O Diabo» e «A Liberdade».

O Professor Bento Caraça

Não chegou ainda, na verdade, a ocasião de se poder analisar, na sua verdadeira grandeza, a personalidade do Professor Bento Caraça, nem, e muito menos, a de se precisar com rigor o significado autêntico e a projecção real da sua obra. Existe, em primeiro lugar, a quási impossibilidade de, aqueles que mais de perto o conheceram, se aproximarem da sua memória, sem que os domine emoção quási irrefreável, por ventura susceptível de os induzir a avolumar aspectos secundários dessa personalidade riquíssima, se é que havia alguma faceta discordante no equílibrio do conjunto. Em segundo lugar, estudar a personalidade e a obra do grande Professor equivale no fundo a fazer a análise de uma das mais tortuosas épocas da nossa história, tão profundamente nela se faz sentir a sua intervenção. Falta, por outro lado ainda, que a distância nos permita uma perspectiva suficientemente ampla e profunda dos homens e dos acontecimentos nossos contemporâneos, para que, na relatividade de uns e outros, a estatura do Professor Bento Caraça possa avultar nas proporções que lhe convêm.

Estas e outras circunstâncias constituem escolhos quási impossibilitantes de que a figura do Professor Bento Caraça seja colocada no lugar próprio adentro da história contemporânea do nosso País. Mas, apesar das limitações que possamos encontrar, o futuro exige de nós, a seu respeito, o nosso depoimento de testemunhas oculares. E, desta maneira, se é justo explicitar as dificuldades em prestá-lo deve ser tão sòmente para tentar avaliar a influência de cada uma delas a fim de podermos superá-las. E só deste modo se poderá compreender, por agora, ao menos quanto lhe devem algumas gerações de portugueses e, daí, quão profunda foi a sua influência na vida nacional.

Foi para responder às solicitações mais urgentes do meio e da época que se orientou grande parte da sua actuação de Professor e homem público. E essa actuação manifesta um esfôrço permanente e sistemático no sentido de seriar os problemas nacionais por ordem de urgência e de dependência recíproca, de forma a que as soluções necessárias tivessem alicerces firmes.

Ao atacar esses problemas o Professor Bento Caraça abstraíu por completo de quaisquer vantagens pessoais e até mesmo, o que é mais importante, de algumas das suas mais legítimas aspirações de cientista. E este acto de renúncia pessoal, para o qual é necessário muito mais heroísmo do que geralmente se crê, encerra uma grande parte do significado moral da lição que da sua conduta nos é lícito tirar. Se ele, que possuía como poucos, as qualidades necessárias para deixar o seu nome ligado a contribuições originais no campo da sua especialidade, tivesse querido refugiar-se na «tôrre de marfim» do pensador (...), alheio ao bulício e às convulsões do seu tempo, quantos momentos dolorosos essa posição lhe teria evitado e quantas vantagens, de vária ordem, lhe poderiam ter advindo!

Mas não; o Professor Bento Caraça escolheu precisamente o caminho mais espinhoso.

Na verdade, sustentou que o movimento cultural que se tornava necessário impulsionar, só poderia conduzir a resultados verdadeiramente fecundos, se fossem chamadas a ele camadas sucessivamente mais amplas da população. Só assim estaria garantida a sua continuidade, só assim estaria ao abrigo das distorsões ocasionais e imprevisíveis, só assim haveria a certeza de que os seus resultados seriam colocados ao serviço de homem. Para isso, ele sentia ser necessário — e mais de uma vez o declarou — que os homens de hoje viessem a constituir a argamassa em que assentariam os alicerces do edifício que outros haveriam de levantar.

Norteado por estes princípios preocupou-se menos em construir a *sua* obra do que em preparar a obra *de todos*; menos em avaliar prèviamente os resultados que adviriam *para si* do que as vantagens que *os outros* poderiam colher dela. Destes objectivos não se afastou um só momento e, nem sequer alguma vez — fossem quais fossem as circunstâncias — se deixou vencer por hesitações ou desânimos.

Nunca alguém o viu delirar com o triunfo nem desesperar com o insucesso; nos momentos mais promotedores ou nas condições mais dramáticas a sua naturalidade, que não era indiferença, permanecia inalterável. e, no entanto, estava muito longe de possuir um temperamento frio ou insensível à emoção.

Assim como exercia sôbre as suas ideias um contrôlo permanente, exercia sôbre a conduta uma vigilância minuciosa porque considerava de altíssima importância o valor do exemplo na criação da auto-disciplina, no reforço do espírito crítico e, consequentemente, na determinação da conduta.

Não há, talvez, por isso mesmo, a mínima discrepância entre a sua obra e a sua vida. Aquilo que defendeu, praticou-o, e pode mesmo dizer-se que uma grande parte dos ensinamentos os transmitiu pela prática.

Ao ler hoje a sua obra é imprescindível determinar com rigor o momento e as circunstâncias a que corresponde; de outra forma, corre-se o risco de a desvirturar.

Mas, com êsse cuidado prévio, que grande lição ela encerra! Mostra-nos, precisamente, como o seu esforço era diário, sistemático e medido; como não perdia a mínima ocasião de colocar uma pedra, na impossibilidade de erguer um edifício; como o homem verdadeiramente interessado em ser útil pode sempre fazer alguma coisa e como a ambição do definitivo constitui muitas vezes um refúgio de incapacidade, do desinteresse ou da preguiça.

Esta sua qualidade avulta ainda mais na relatividade dos acontecimentos e dos homens. Quem hoje se der ao cuidado de rememorar a vida da maioria dos portugueses da sua geração e condições sociais, mesmo dos que partiram com ele, e observar sumàriamente as trajectórias que seguiram ficará impressionado com o contraste· Quantos passaram como meteoros, quantos seguiram trajectórias desnorteantes, quantos tentaram acompanhá-lo e, ao sentir a dureza da jornada, se afastaram em silêncio, e quantos, arrastados pela torrente das contradições que tem caracterizado esta época de instabilidade, se perderam, se acomodaram ou se comportam como vencidos!

Nada disso, porém, o fez desorientar ou desanimar. Cada reviravolta, cada incompreensão, ele as situava no seu verdadeiro motivo e significado, sabendo vê-las à luz das circunstâncias que as tornaram possíveis. E com os ensinamentos que delas ia colhendo, mais se fortaleciam as suas convicções, possibilitando que a sua firmeza se mantivesse completamente alheia a sentimentos de rancor, a desejos de vindicta ou a desalentos de vaidade ferida. É que a sua conduta alimentava-se em fontes muito mais profundas onde não cabem semelhantes atitudes de espírito. E isso lhe dava ainda uma compreensão e uma tolerância largas perante as pequenas fraquesas, ao lado de uma intransigência inquebrantável nas questões fundamentais.

Confiava essencialmente nas possibilidades do Povo Português para cuja valorização económica e cultural dirigiu o melhor dos seus esforços. Dedicou-lhe a vida inteira. Se alguma compensação desejou como prémio, foi a de que o seu esforço não fosse improfícuo. Estava profundamente convencido de que não o seria. E certamente o não foi.

Bento Caraça

Grande Educador

por **Ruy Luís Gomes**

A *Gazeta de Matemática*, ao completar-se um ano de actividade, sente como seu primeiro dever, e bem doloroso êle é, o de recordar perante os seus leitores, na sua maioria jovens estudantes das nossas Universidades, a forte personalidade de Bento de Jesus Caraça, querido companheiro de trabalho e um dos fundadores desta revista [1].

E se é certo que, como professor do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras e através da larga difusão dos seus livros — de ensino e de divulgação científica — Bento Caraça deu uma contribuição importante para a formação profissional da nossa juventude, no entanto, em meu parecer, foi pela ampla projecção educativa da sua vida exemplar que êle verdadeiramente se afirmou como um autêntico Mestre!

Na verdade, Bento Caraça pertenceu ainda a uma geração que fêz a sua própria preparação, no domínio da Matemática, numa época em que as nossas Escolas Superiores estavam inteiramente informadas pelo velho e desastrado conceito de que se pode ser um grande professor universitário sem nunca se ter patenteado, na análise exaustiva de algum problema concreto, a *garra* ou, pelo menos, *o sentido de investigador*.

De *aluno laureado* subia-se, pela mão de professores mais antigos até às culminâncias da cátedra e, uma vez lá, usufria-se de um direito de propriedade, absoluto, em arrogante desafio às restrições que o progresso da humanidade lhe tem imposto inexorávelmente no âmbito das coisas materiais. E quantos catedráticos assim viveram e morreram, sem se aperceberem de que estavam traindo a sua função de profissionais e educadores!

Bento Caraça, fez o seu curso sem nunca lhe ter sido apontado, estou certo disso, como único meio capaz de se chegar a *ensinar*, matemática ou qualquer outra ciência, o de primeiro *aprender* — num verdadeiro e estimulante ambiente de trabalho de investigação.

E quantas vezes o ouvi lamentar-se disso mesmo, ao analisarmos as grandes dificiências da nossa própria preparação e, o que é mais importante, as causas profundas do baixo nível científico e ético das universidades portuguesas.

Bento Caraça não foi, pois, um investigador, mas superando o meio em que foi educado e lançando-se desde muito novo nas tarefas do ensino, em breve se juntou aos que deram o primeiro passo para fazer triunfar nas nossas Escolas Superiores uma nova concepção da vida universitária.

Fundou com António Monteiro, Hugo Ribeiro, José Paulo e Manuel Zaluar a Gazeta de Matemática, ajudou a constituir a Sociedade Portuguesa de Matemática e, assim, facilitando o caminho aos mais novos, participou efectivamente na obra de renovação da cultura matemática iniciada em Portugal há cerca de 10 anos.

Vencendo as suas próprias dificuldades e tirando delas um ensinamento para facilitar a formação profissional da juventude, contribuiu em larga medida para que a investigação se tornasse uma primeira realidade, procedendo assim, deu um conteúdo real e progressivo à sua missão de educador.

Na verdade, que é um educador? É precisamente «*aquêle que propõe à juventude uma certa hierarquia de valores*» (Julien Benda).

E a sua orientação é boa ou má, quero dizer, útil ou nociva ao interesse nacional e à causa mais ampla do progresso da humanidade, conforme a escala de valores que escolhe e aplica através da sua própria actuação de educador.

Neste sentido, Bento Caraça foi um grande educador!

Alinhando com aqueles que pretendem transformar as nossas Universidades em Centros de Investigação e verdadeiras escolas de trabalho, escolheu como primeiro *valor*, no domínio da sua actividade de professor, a subordinação dos seus interesses imediatos a um interesse superior — o da preparação profissional da juventude.

E sacrificando tudo, desde a cátedra, de que foi afastado, até às exigências de uma saúde precária, aos grandes valores morais — inteireza de carácter, sentimento de solidariedade e coerência de princípios — deu-nos a todos a melhor lição da sua vida.

O seu exemplo pertence ao património moral da nossa Pátria. O povo português nunca o esquecerá!

---

[1] Juntamente com António Monteiro, prof. da Universidade do Rio de Janeiro, Hugo Ribeiro, prof. da Universidade da Berkeley (Califórnia), José Paulo, prof. do Liceu de Lamego, Manuel Zaluar, bolseiro em Paris. Estas situações referem-se à actualidade.

Um aspecto da acção escolar do Professor Bento Caraça

por A. M. Sá da Costa

De toda a acção escolar do Professor Bento Caraça que é, em muitos aspectos, do conhecimento dos leitores da «Gazeta de Matemática», pretende-se destacar aqui, apenas e em resumo, aquela parte que se relaciona directamente com a introdução no nosso País dos métodos da Econometria.

Pode dizer-se que o primeiro sinal do seu interêsse pelo desenvolvimento dos estudos econométricos em Portugal e pela garantia de objectividade que os métodos da Econometria oferecem no tratamento dos problemas económicos, foi a fundação do Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia (C. E. M. A. E.), em Janeiro de 1938. Na justificação da proposta de fundação deste centro de estudos, apresentada ao Conselho Escolar do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, está bem patente o reconhecimento da impossibilidade de um plano de estudos rígido seguir intimamente o progresso dos meios de investigação e assimilar ràpidamente novos métodos e novas técnicas. Nessa justificação acha-se também a constatação da extensão progressiva dos métodos matemáticos ao estudo dos fenómenos biológicos e sociais.

Nestes dois pontos e no reconhecimento do interesse nacional dos resultados da tarefa decorrente se radica a acção do Professor Bento Caraça no quadro do C. E. M. A. E. e atravéz dela é possível observar como procurou suprir com o trabalho do centro as insuficiências de um plano de estudos fixo e como tentou introduzir novas técnicas de observação, de análise e de interpretação por meio da formação de quadros especializados. O exame da acção do Professor Bento Caraça no C. E. M. A. E, que dirigiu desde a fundação até, pode dizer-se, à extinção — alguns dias após a sua demissão do cargo de professor catedrático do Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras, em Outubro de 1946, — o exame da sua acção, dizia-se, conduz à conclusão de que reservava aos métodos que a Matemática faculta agora para o ataque dos problemas sociais, o seu lugar justo — longe de uma universalidade de aplicação a tais problemas que nada hoje legitima, mas que nem por isso deixa de envolver a necessidade da extensão progressiva dessa aplicabilidade, para que haja ampliação efectiva do conhecimento.

A par da sua permanente preocupação de formar quadros, preocupação que nunca enfraqueceu, quer perante a ausência absoluta de meios financeiros que caracterizou a fase inicial da vida do C. E. M A. E., quer em face de perturbações do apoio material que o Instituto para a Alta Cultura reservou ao centro de 1942-43 até à sua extinção em 1946, deve colocar-se a não menor preocupação de aproveitar ao máximo todas as contribuições e de conseguir a coordenação de todos os esforços.

Vem a este propósito a citação da colaboração do C. E. M. A. E. no Congresso de Córdova do 1944 promovido pela Associação Luso-Espanhola para o Progresso das Ciências, e da aprovação unânime, neste mesmo Congresso, da proposta do Professor Bento Caraça, director e delegado do C. E. M. A. E. , relativa à unificação e à coordenação dos estudos demográficos sobre as duas nações ibéricas.

A primeira tentativa para a introdução sistemática, em Portugal dos métodos da Econometria deve-se ao Professor Bento Caraça e a importância desta tentativa não fica diminuída, nem pelos seus próprios e inevitáveis defeitos que representarão, depois de atentamente examinados, preciosa experiência adquirida, nem pela forma como se lhe pôz termo forçado.

Tal tentativa, aparentemente fracassada, ficará a ser, como foi efectivamente, apenas um aspecto da luta pela organização e defesa do trabalho científico, que há-de ser levada por diante, aspecto parcelar êsse que será reconsiderado e ampliado, como será inevitável, se se pretender resolver racionalmente problemas fundamentais. Então, a obra do Professor Bento Caraça, neste domínio, surgirá em toda a sua verdadeira extensão e revelará todos os seus autênticos méritos, dos quais não serão os menores a profunda intenção nacional e o total desinteresse pessoal com que foi realizada.

O método dos limites [1]

por Bento Caraça

1. Dificuldades antigas

O leitor que tenha acompanhado a exposição feita nos capítulos anteriores (volume I e II) deve estar recordado do que representou, na história da Filosofia e da Ciência, a crítica desenvolvida no século V a. C. pela Escola de Elea contra as proposições da *Escola Pitagórica*. A ruína desta Escola representou a *primeira grande crise da História da Matemática*, crise cujas características essencias procurámos traçar no capítulo IV do volume I e que o leitor deve ter agora bem presentes para a compreensão do que vai seguir-se

O principal objectivo da crítica eleática — objectivo diga-se de passagem, realizado plenamente — foi mostrar que a teoria pitagórica das *mónadas,* que aspirava a ser a matriz duma interpretacão geral do Universo, era inadequada a tal fim e era uma fonte de incapacidade e contradições. *Zenão de Elea*, numa crítica impiedosa de que nos foram conservados por *Aristóteles* os seus célebres *quatro argumentos*, verdadeiros modelos de vigor e de clareza na argumentação, provara com efeito:

1.° — que a afirmação da *Escola Pitagórica* de que *todas as coisas têm um número* era inconsistente em face da teoria das mónadas;

2.° — que a mesma teoria não fornecia base suficiente para a compreensão do movimento.

Estes são os dois aspectos fundamentais da *crise.* Do primeiro, adicionado à verificação, já anterior, do fenómeno da *incomensurabilidade*, resultou o eclipse, durante séculos, daquela grandiosa aspiração numa *ordenação matemática do cosmos*, de que a Escola Pitagórica nos fornecera uma primeira realização. Dele nos ocupámos, com algum pormenor, nos volumes I e II, mostrando como foram forjados, embora só muito tarde, dois instrumentos necessários à solução da crise — uma teoria satisfatória dos *números irracionais* e o conceito de *função.*

O segundo aspecto vai ser agora objecto do nosso estudo. Vamos recordar em que consiste a dificuldade, ver os desenvolvimentos a que deu origem a solução encontrada, e lançar uma vista de olhos sobre as perspectivas que essa solução permitiu abrir.

2. A argumentação de Zenão de Elea

Expusemos no volume I [1], com alguma minúcia, os argumentos de Zenão tradicionalmente designados por *argumentos contra o movimento* mas que melhor será designar por *argumentos contra a compreensão do movimento.* Deles resulta que, *em face da teoria pitagórica das mónadas e, por consequência, considerado o movimento como uma sucessão de estados dum móvel* [2] ele é igualmente incompreensível, quer essa sucessão seja finita (argumento da flecha — não se percebe o que se passa entre um estado e o seu sucessivo), quer seja infinita (argumento de Aquiles e a Tartaruga — não se percebe como aquele alcança esta desde que ela parta com um avanço por mínimo que seja).

3. A essência da dificuldade

Qualquer que tenha sido o objectivo efectivo e inicial de Zenão (nós não possuímos mais do que o breve testemunho de *Aristóteles* que é de quáse dois séculos posterior), a sua argumentação ficou na História da Ciência com este valor inestimável — mostrar-nos que o *movimento* não pode ser compreendido como uma sucessão de estados particulares; considerá-lo assim, equivale a abordar o seu estudo por um *método estático* que traz consigo o germen da infecundidade e da incompreensão — não é, já de si, o abordar o estudo do movimento por um *método estático* qualquer coisa de paradoxal?

Na verdade, a essência do *movimento* é tal que quando vamos a querer fixar a posição dum móvel, em determinado instante, num ponto da sua trajectória, já ele aí se não encontra — entre dois instantes, por mais aproximados que sejam um do outro, o mó-

---

(1) Constitui este artigo parte do Capítulo I do Volume III dos «Conceitos Fundamentais da Matemática» ainda inédito e que aparecerá brevemente.

(1) A págs. 96-99, cuja leitura é neste momento recomendada para o entendimento do que se segue.

(2) Efectivamente, a teoria das mónadas, oposta à continuidade eleática, implica que o movimento dum móvel é uma sucessão de estados — passagens de mónadas a mónadas sucessivas.

vel percorreu um segmento, com uma infinidade de pontos. Deste fenómeno se pode dizer, como *Leonardo da Vinci* disse da chama — *olha para a chama e considera a sua beleza; fecha os olhos e torna a olhar: o que vês não estava lá e o que lá estava já o não encontras.*

Reconhecemos aí um permanente compromisso entre o *ser* e o *não ser* — a cada instante, o móvel *está* e *não está* em determinado ponto: e entre ponto e ponto, por mais próximos, há uma infinidade de pontos. Tudo isto é inabordável pelo *método estático* que considera o movimento como uma sucessão de estados (posições) do móvel.

4. Novos tempos, novos problemas, novas atitudes

E eis o dilema posto em toda a sua crueza simples — ou renunciamos a compreender o movimento, a integrá-lo num quadro racional interpretativo dos fenómenos naturais, ou temos que ir para o seu estudo numa atitude de espírito diferente.

Entendamo-nos bem sobre o que queremos dizer quando escrevemos — *ir para o seu estudo.* Com isto queremos significar: *procurar obter uma teoria quantitativa, da qual resultem métodos de cálculo que nos permitam fazer previsões, sujeitas ao test da experiência e da observação.*

Se o objectivo é diferente, por exemplo, especular de feição metafísica, sobre a quinta essência do movimento, a atitude de espírito pode ser diferente, pode mesmo ser qualquer: daí não resultará provàvelmente grande mal para o mundo, mas também, decerto, não um muito grande bem — a Física de Aristóteles oferece-nos disso o primeiro grande exemplo.

Mas cada época, com a sua particular compleição social, tem os seus problemas dominantes. E a partir do século XVI, a técnica pôs problemas para cuja resolução se tornou indispensável a criação duma *teoria quantitativa.* Um dêsses problemas, sem dúvida um dos mais importantes, foi o do estudo dos movimentos dos astros, tornado indispensável pelas necessidades da navegação de alto mar. Foi preciso para êsse efeito efectuar um duplo trabalho — realizar uma grande massa de observações; procurar integrar esses dados num quadro interpretativo racional, um conjunto de leis.

Sabe-se como a primeira parte dessa tarefa foi realizada por *Tycho-Brahe* e a segunda por *Kepler* e terminada na obra magistral de *Newton.*

A obra de Kepler representa um grande marco na História da Ciência e pode dizer-se que marca o início palpável, duma grande viragem na atitude dos pensadores, e que interessa neste momento registar. Como vimos no capítulo IV do volume I, posteriormente à grande crise a que já acima fizemos referência, a mentalidade grega encerrou-se numa atitude *finitista* de que encontramos uma das manifestações mais acentuadas na cosmogonia que ficou sendo geralmente aceite[1] — um mundo finito, geocêntrico, formado por uma sucessão de esferas centradas sobre a Terra, esferas nas quais todos os astros se deslocavam em movimentos circulares. O *círculo* era a figura que convinha a uma tal concepção finitista — com efeito o movimento circular fecha-se sobre si mesmo, completa-se, o plano em que ele se dá pode rodar de qualquer ângulo sobre si mesmo sem que a trajectória circular se altere; era, por isso, considerado como o movimento perfeito, o *movimento natural.*

Kepler, estabelecendo em 1609 a sua primeira lei — *as órbitas planetárias são elipses das quais o Sol ocupa um dos focos* — deu a primeira machadada nesta *supremacia do círculo*[2] que assim se viu demitido da situação proeminente de *lugar do movimento natural*[3]. Uma das consequências imediatas desse facto foi que se pôs naturalmente ao espírito dos pensadores esta pregunta — qual é a força responsável por que os planetas sem movam em órbitas elípticas? (tal pregunta não se punha enquanto os planetas eram considerados como movendo-se de *movimento natural*). Assim se instalou no primeiro plano das preocupações dos pensadores este problema da *causa física* do movimento[4].

Para abordar o estudo deste problema em condições que permitam êxito, é preciso tomar esta atitude do espírito — o movimento é um *dado* e não uma *coisa a explicar,* um fenómeno que se trata de estudar nas suas manifestações observadas, fìsicamente e não metafìsicamente, o objectivo é encontrar uma lei ou conjunto de leis, que englobando os dados observados, permita prever resultados a confirmar, ou não, pela experiência. Nenhum preconceito devemos portanto levar que nos incline, por pouco que seja, a pretender explicar a natureza íntima do fenómeno dentro de quadros racionais pre-estabelecidos; tal atitude seria mortal para o êxito da empreza.

---

(1) Apesar das vozes discòrdantes, pelo menos, quanto ao geocentrismo a de *Aristarco de Samos.*

(2) Que a revolução copernicana, com toda a sua importância, deixara, no entanto, intacta.

(3) A segunda foi dada por *Galileu* com o *princípio de inércia* o lugar do movimento natural passou a ser *recta.* Será preciso acentuar o que este facto representa na passagem duma atitude finitista para uma infinitista ?

(4) Sobre este problema e a sua importância na creação duma determinada *atitude científica,* nos cientistas post-renascimento, ver *H. T. Pledge, Science since* 1500; the Philosophical Library, 1947.

Caracterização dos espaços topológicos regulares e normais por meio de coberturas

por **J. Abdelhay** (Rio de Janeiro)

Espaço topológico é qualquer conjunto E sobre o qual se fixou uma família de subconjuntos A gozando das seguintes propriedades: 1) o conjunto vazio $\dot{O}$ e o conjunto E pertencem a A; 2) toda união de conjuntos de A é um conjunto de A, toda intersecção de um número finito de conjuntos de A é um conjunto de A. Cada conjunto da família A chama-se *conjunto aberto* do espaço topológico E. Cada conjunto aberto contendo um ponto $x \varepsilon E$ diz-se uma *vizinhança* de x.

Dois conjuntos C' e C'' de um espaço topológico E dizem-se *separados* se for possível encontrar dois conjuntos abertos e disjuntos A' e A'' tais que $C' \leqslant A'$ e $C'' \leqslant A''$.

O complementar de um conjunto aberto do espaço topológico E diz-se *conjunto fechado de* E. Quando cada ponto de um espaço topológico E é separado de cada conjunto fechado que não o contém então diz-se que o espaço topológico E é *regular*. Diz-se que E é *normal* se cada par de conjuntos fechados e disjuntos de E for também um par de conjuntos separados de E.

Cobertura de um espaço topológico E é qualquer família C de conjuntos abertos de E tal que cada ponto de E pertence a algum membro do família C. Diz-se que uma cobertura C é *subordinada* a outra cobertura C' se cada membro de C estiver contido em algum membro da cobertura C'. [1]

Espaço pontualmente para compacto é um espaço topológico separado E satisfazendo à condição seguinte: para toda cobertura C de E e todo ponto x de E existem uma cobertura C' de E subordinada a C e uma vizinhança V de x tais que V só intercepta um número finito de membros de C'. [2] (Um espaço topológico E diz-se *separado* se e sòmente se dois pontos quaisquer do espaço E forem separados).

Espaço localmente para compacto: Seja E um espaço topológico separado e X um subconjunto de E. Diz-se que E é *para compacto em* X se para toda cobertura C de E tal que um dos membros contenha X existe uma cobertura C' de E subordinada a C e gozando da propriedade seguinte: para todo ponto x de X existe uma vizinhança de x que só intercepta um número finito de membros de C'. Um espaço topológico separado que seja para compacto em cada subconjunto fechado diz-se um *espaço localmente para compacto*.

Propriedades dos espaços regulares e normais: Seja X um subconjunto do espaço topológico E. Se cada vizinhança de x e o conjunto X tiverem uma intersecção não vazia diz-se que x é *ponto de aderência* para o conjunto X. O conjunto dos pontos de aderência para X chama-se *aderência de* X e para indicar este conjunto usa-se o símbolo $\overline{X}$. Demonstra-se que: (1) se E é separado e regular então para cada ponto $x \varepsilon E$ e cada vizinhança de x, V, existe uma vizinhança V' de x tal que $\overline{V'} \leqslant V$ (cfr. Topologie de Alexandroff e Hopf, pág. 70, n. 7, «Satz IV»). Demonstra-se também que: (2) se E é um espaço topológico separado e normal, então para cada conjunto fechado F de E e cada conjunto aberto A contendo F existe um conjunto aberto V contendo F e tal que $\overline{V} \leqslant A$ (cfr. Top. de Alexandroff e Hopf, pág. 71, «Satz V»).

Teorema 1: *A condição necessária e suficiente para que um espaço topológico separado seja regular é que ele seja pontualmente para compacto.*

Demonstração: (1) a condição é necessária; seja, com efeito, E um espaço topológico separado e regular e seja C uma cobertura de E. Seja x um ponto qualquer de E e indiquemos com A_λ os membros da cobertura C (λ varia num conjunto Λ de índices). Temos logo que o ponto x pertence a algum dos conjuntos A_λ, suponhamos, para fixar ideias, que x pertence a A_0. Sendo E regular, por hipótese, existe uma visinhança V de x tal que $\overline{V} \leqslant A_0$ (v. resultado (1) citado acima). Pois bem, consideremos o cobertura C' formada pelo conjunto A_0 e pelos conjuntos $A_\lambda \cap \complement \overline{V}$. [3] Esta cobertura é evidentemente subordi-

[1] Esta definição é de J. Dieudonné, vide «Une généralisation des espaces compacts», Journal de Mathematiques pures et appliquées.

[2] Esta bem como a definição de espaço localmente para compacto dada abaixo são noções diversas das que, com o mesmo nome, se encontram no trabalho de J. Dieudonné citado anteriormente.

[3] $A_\lambda \cap \complement \overline{V}$ significa a intersecção do conjunto A_λ com o complementar do conjunto $\overline{V}$.

nada a C e a visinhança V intercepta sòmente o elemento A_0 de C'.

(2) a condição é suficiente; seja, com efeito, E um espaço topológico separado e pontualmente para compacto. Seja F um conjunto fechado de E e y um ponto de E que não pertence a F. Para todo ponto $x \in F$ existe, pois que E é separado por hipótese, uma vizinhança V_x de x e uma vizinhança W_x de y, as quais não tem ponto comum. Consideremos a cobertura C de E formada por todas as vizinhanças V_x, quando x varia em F, e pelo complementar F' de F. Existe, pois que E é pontualmente para compacto por hipótese, uma cobertura C' subordinada a C e uma vizinhança W de y tal que W só encontra um número finito $A_1, \cdots, A_n$ dos conjuntos de C'. Chamemos de U a união dos conjuntos de C' que interceptam F; temos que U é um conjunto aberto contendo F. Vamos mostrar que existe uma vizinhança V de y que não intercepta U, o que provará a nossa proposição. Com efeito, cada um dos A_i que intercepta F está contido, por definição, em um V_{x_i} correspondente a um ponto $x_i \in F$. Se se toma para V a intersecção W com as vizinhanças W_{x_i} correspondentes a estes pontos, tem-se que V é uma vizinhança de y que não encontra nenhum dos A_i que interceptam F; portanto, a fortiori, V não intercepta U. [4]

TEOREMA 2: *A condição necessária e suficiente para que um espaço topológico separado seja normal é que ele seja localmente para compacto.*

Demonstração: (1) a condição é necessária: seja com efeito, E um espaço separado normal. Seja F um conjunto fechado de E e C uma cobertura de E tal que um de seus elementos contenha o conjunto F. Devemos mostrar que existe uma cobertura C' de E subordinada a C e tal que para cada ponto de F existe uma vizinhança que só intercepta um número finito de elementos de C'. De facto, suponhamos que por exemplo, o elemento A_0 de C contenha F. Existe, então, sendo E normal por hipótese, um conjunto aberto V contendo F tal que $\overline{V} \leqslant A_0$ (v. resultado (2) citado acima). Consideremos a cobertura C' formada por A_0 e pelos conjuntos $A_\lambda \cup \complement \overline{V}$ (indicamos com A_λ os elementos da cobertura C). Esta cobertura C' é obviamente subordinada a C e o conjunto aberto V contendo F só intercepta o elemento A_0 de C'. Mas V é vizinhança de cada ponto de F, logo, a proposição está demonstrada.

(2) a condição é suficiente: suponhamos que o espaço topológico E seja separado e localmente para compacto e sejam F e G dois conjuntos fechados e disjuntos de E. Para todo $x \in F$ existe uma vizinhança V_x de x e um conjunto aberto W_x contendo G, os quais são disjuntos pois, sendo E localmente para compacto por hipótese, E é obviamente pontualmente para compacto e por conseguinte, pelo teorema anterior, regular. Consideremos a cobertura C de E formada por todas as vizinhanças V_x que se obtêm quando x varia em F e pelo complementar F' de F. Sendo o espaço E localmente para compacto por hipótese, existe uma cobertura C' subordinada a C tal que para todo ponto $y \in G$ existe uma vizinhança T_λ de y que só intercepta um número finito $A_1, \cdots, A_n$ de membros de C'. A união U dos conjuntos de C' que interceptam F é um conjunto aberto contendo F. Vamos mostrar que existe um conjunto aberto contendo G — chamemo-lo V — o qual não intercepta U, o que termina a demonstração. De facto, cada um dos A_n que intercepta F está contido por definição em um V_{x_i} correspondente a um ponto $x_i \in F$. Seja S_λ a intersecção dos T_λ e dos W_{x_i} correspondentes a estes pontos; S_λ é uma vizinhança de y qne não intercepta U. Se V é a união dos S_λ que se obtêm quando y percorre G, V é um conjunto aberto que contém G e que não encontra o conjunto U.[5]

---

[4] Esta parte da demonstração (condição suficiente) é devida a J. DIEUDONNÉ, v. Memória citada em (1).

[5] Esta parte da demonstração (condição suficiente) é devida a J. DIEUDONNÉ, v. Memória citada em (1).

Conchoïdes de cercles et equations de Riccati

par **Gabriel Viguier** (Paris)

Canonisation géométrique de l'équation de Riccati

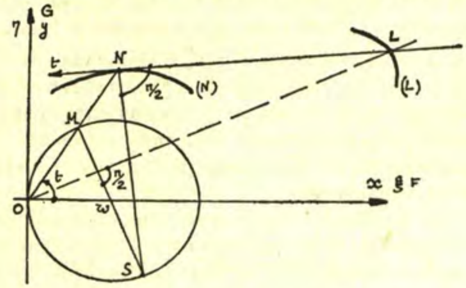
Nous considérons le cercle (M) de coordonnées paramétriques:

$$(1) \qquad (M) \begin{cases} x = a\cos^2 t \\ y = a \cos t \sin t \end{cases}$$

k désignant une constante quelconque, nous associons à la courbe-base (M) la courbe-adjointe (L) dont les équations paramétriques s'écrivent

$$(2) \qquad (L) \begin{cases} F = \dfrac{2\cos t}{k}(a\cos t + k)^2 \\[2ex] G = -\dfrac{\cos 2t}{k \sin t}(a\cos t + k)^2 . \end{cases}$$

Les points M et L correspondent à une même valeur du paramètre t. Sur le rayon vecteur OM, nous portons la longueur $\overline{MN}=\tau(t)$. La courbe (N), lieu du



point N que nous envisageons d'étudier, doit avoir sa tangente qui passe par le point L, correspondant de la courbe-adjointe.

Les coordonnées de N sont alors

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = a\cos^2 t + \tau(t)\cdot\cos t \\ \eta = a\cos t\cdot\sin t + \tau(t)\cdot\sin t\,. \end{cases}$$

Exprimant que la tangente $\overrightarrow{Nt}$ passe par le point L, nous obtenons la relation:

$$(4) \qquad \frac{\frac{2}{k}\cos t\,(a\cos t+k)^2-(a\cos+\tau)\cos t}{\tau'\cos \mathrm{t}-(2a\cos t+\tau)\sin t}=$$

$$=\frac{-\frac{\cos 2t}{k\sin t}(a\cos t+k)^2-(a\cos t+\tau)\sin t}{\tau'\sin t+a\cos 2t+\tau\cos t}\,.$$

Les termes en $\tau\tau'$ disparaissant, il reste l'équation de Riccati:

$$(5) \qquad \tau'-\frac{k\,\mathrm{tg}\,t}{(a\cos t+k)^2}(\tau^2+a^2\cos^2 t)+$$

$$+\left[\mathrm{tg}\,t-\frac{2a\,k\sin t}{(a\cos t+k)^2}\right]\tau=0\,.$$

On n'obtient donc pas une seule courbe (N), mais toute une famille à propriétés anharmoniques.

Cas des conchoïdes de cercle

L'équation différentielle (5) du problème admet la solution particulière

$$(6) \qquad \tau=k=\mathrm{c.^{te}}.$$

La longueur $\overline{MN}$ étant constante, on trouve les conchoïdes du cercle (M) qu'illustrent les figures 1, 2 et 3, correspondant aux cas $k \gtrless a$.

Nous notons dans ces cas de figures particuliers, une propriété géométrique simple attachée aux points N et L: S étant diamétralement opposé au point M sur le cercle-base (M) de centre ω, la tangente en N à la courbe (N) est normale à la droite SN; le point L se trouve d'une part sur la perpendiculaire à SM issue de l'origine 0 et d'autre part, sur la tangente Nt à la courbe (N).

La figure 1 correspond au cas où $k=a$; la courbe (N) est la cardioïde d'équations

$$(7) \qquad \begin{cases} \xi = a\cos t\,(1+\cos t) \\ \eta = a\sin t\,(1+\cos t) \end{cases}$$

la courbe adjointe étant donnée par:

$$(8) \qquad \begin{cases} F = 2a\cos t\,(1+\cos t)^2 \\ G = -\dfrac{a\cos 2t}{\sin t}(1+\cos t)^2 \end{cases}$$

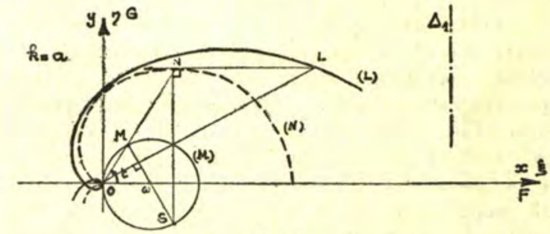


Fig. 1

admet une asymptote verticale Δ_1 dont l'équation est

$$(9) \qquad F=8a\,.$$

La figure 2 correspond au cas $k>a$, la courbe adjointe (L) admettant les deux asymptotes verticales:

$$(10) \qquad (\Delta_2)\ F=2/k\cdot(a+k)^2;\quad (\Delta_2')\ F=-2/k\cdot(a-k)^2.$$

Enfin le cas $k<a$ est envisagé sur le figure 3.

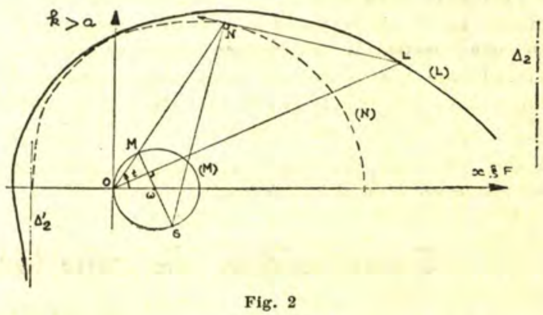


Fig. 2

Si nous reprenons la solution particulière (6), nous voyons qu'il est possible de calculer l'intégrale générale de (5) qui doit de ramener à une quadrature.

Nous avons en effet:

$$(11) \qquad \tau=k+\frac{(a\cos t+k)^2}{C_1\cos t-k}=\frac{a^2\cos t+k\,(2a+C_1)}{C_1\cos t-k}\cos t\,.$$

Remarquons que les conchoïdes du cercle (M) correspondent à la valeur infinie de la constante C_1.

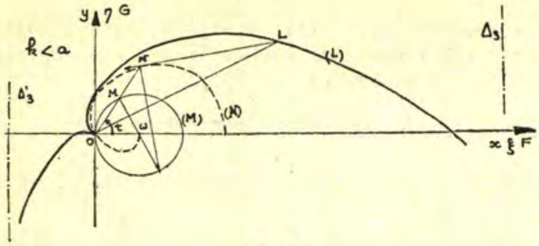


Fig. 3

Pour $C_1 = a$, nous trouvons $\tau = -a\cos t$; la courbe (N) se réduit à l'origine 0 qui joue le rôle de cercle-point.

Enfin, pour $C_1 = 0$, la courbe (N) du sixième degré admet pour équation cartésienne la relation :

$$(\xi^2+\eta^2)^4\,(\xi^2+\eta^2+2a\,\xi)+a^2\,\xi^2\,(\xi^2+\eta^2-\frac{a^2}{k^2}\,\xi^2)=0\,.$$

Ainsi, nous voyons que les conchoïdes de cercle et avec elles, la plus simple, la cardioïde, se placent parmi les dégénérescences des courbes integrales de l'équation de Riccati. Elles s'ajoutent aux coniques et cubiques circulaires qui, nous l'avons vu dans une précédente note (*Gazeta de Matemática*, Lisbonne, Août 1947, n.º 33), peuvent correspondre également à des cas dégénérés de l'équation de Riccati.

Os potenciais escalar e vectorial e os espaços a conexão simples e múltipla

por **Luís Freire** (Recife)

Espaço de simples conexão *linear* ou simplesmente conexo *linear*: aquele em que qualquer linha fechada de Jordan (simples — sem pontos múltiplos) ou contorno de Jordan que nele se trace, pode, por deformação contínua, e sem dele sair, reduzir-se a um ponto.

Exemplos: os espaços interior e exterior a uma esfera, o espaço interior a um cilindro, a superfície de uma esfera (daí as superfícies simplesmente conexas).

Espaço multiplamente conexo *linear*: aquele em que, dentre as curvas fechadas de Jordan que nele se podem traçar, há as que, por deformação contínua, e sem dele sair, jámais se reduzirão a um ponto.

Exemplos: o espaço *exterior* a um cilindro — as curvas que envolvem o cilindro, estão naquelas condições; os espaços interior e exterior a um toro; a superfície de um toro (daí as superfícies multiplamente conexas).

Nos espaços simplesmente conexos *lineares* é sempre possível fazer passar por um qualquer dos seus contornos de Jordan uma superfície regular bilateral e contínua — diafragma — que neles fique inteiramente contida.

Ao contrário se dá com os espaços multiplamente conexos *lineares*.

Espaço de simples conexão *superficial* ou simplesmente conexo *superficial*: aquele em que qualquer superfície fechada de Jordan que nele se trace, pode, por deformação contínua, e sem dele sair, reduzir-se a um ponto.

Exemplo: o espaço *interior* a uma esfera.

Espaço multiplamente conexo *superficial*: aquele em que, dentre as superfícies fechadas de Jordan que nele se podem traçar, há as que, por deformação contínua, e sem dele saír, jámais se reduzirão a um ponto.

Exemplo: o espaço *exterior* a uma esfera — as superfícies que envolvem a esfera, estão naquelas condições.

Nos espaços simplesmente conexos *superficiais*, o volume delimitado por qualquer de suas superfícies fechadas, está inteiramente contido em tais espaços.

Ao contrário se dá com os espaços multiplamente conexos *superficiais*. O espaço *exterior* a uma esfera é, pois, *simplesmente* conexo *linear* e *multiplamente* conexo *superficial*.

Para os espaços de simples conexão linear, em que reinam campos de vectores $\mathbf{u}$, e para os quais $\nabla\wedge\mathbf{u}=0$, tem-se, aplicando o teorema de Stokes a uma de suas curvas fechadas e à superfície que nela se apoia não deixando o campo:

$$\int_\sigma \nabla\wedge u \times d\sigma = \oint u\times d\lambda = 0\,,$$

isto é,
$$\int_{\lambda_1} u\times d\lambda - \int_{\lambda_2} u\times d\lambda = 0$$

ou
$$\int_{\lambda_1} u\times d\lambda = \int_{\lambda_2} u\times d\lambda = f(P_1)\,,$$

o que diz: o integral de $u\times d\lambda$ a partir de P_0 é independente do caminho λ que termina em P_1 — ele tem um unico valor.

Assim, $\int_\lambda u\times d\lambda = \varphi$, sendo φ uma função escalar uniforme ou monodroma dos pontos do campo; uma função escalar monodroma de posição, pois.

Daí $u \times d\lambda = d\varphi = \nabla\varphi \times d\lambda$, portanto, $u = \nabla\varphi$, isto é: Se em um espaço simplesmente conexo se tem, para um campo de vectores u nele contido, $\nabla \wedge u = 0$, o vector u é o gradiente de uma função escalar uniforme ou monodroma de posição.

Como o integral acima é independente do caminho, a esse campo se dá o nome de *aciclico*.

$\int_\lambda u \times d\lambda = \varphi$ se escreve melhor $\int_{P_0(\lambda)}^{P_1} u \times d\lambda = \int_{P_0}^{P_1} d\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$.

A φ dá-se o nome de *função do campo*, e a $-\varphi$, que se faz igual a V, o de *potencial do campo*.

Quando u é uma força, φ é a *função de forças* simplesmente (função do campo de forças), e V o *potencial de forças*.

A última relação diz, então, que o trabalho da força em um campo aciclico, é independente do caminho percorrido, e igual à diferença da função de forças nos pontos final e inicial ou do potencial nos pontos inicial e final $(\varphi_1 - \varphi_0 = -V_1 - (-V_0) = V_0 - V_1)$.

Quando um vector é o gradiente de uma função escalar de posição, chama-se-lhe de *vector potencial*.

Teorema recíproco: Se $\oint u \times d\lambda = 0$, $u = \nabla\varphi$.

Com efeito, de acôrdo com a hipótese, temos:

$$\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda + \int_{P_2(\lambda_1)}^{P_1} u \times d\lambda = 0, \quad \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda + \int_{P_2(\lambda_2)}^{P_1} u \times d\lambda = 0,$$

$$\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda + \int_{P_2(\lambda_2)}^{P_1} u \times d\lambda = 0, \quad \text{ou} \quad \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda =$$

$$= -\int_{P_2(\lambda_1)}^{P_1} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_1)}^{P_2} u \times d\lambda, \quad \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_2)}^{P_2} u \times d\lambda,$$

$$\int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_2)}^{P_2} u \times d\lambda. \quad \text{Portanto:} \quad \int_{P_1(\lambda)}^{P_2} u \times d\lambda =$$

$$= \int_{P_1(\lambda_1)}^{P_2} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_2)}^{P_1} u \times d\lambda = \int_{P_1(\lambda_3)}^{P_2} u \times d\lambda,$$ isto é, a circuitação de u depende apenas de P_1 e P_2 e não dos λ, desde que as trajectorias estejam contidas integralmente no campo do vector.

Isso corresponde a afirmar que $\int_{P_1(\lambda \text{ qualquer})}^{P_2} u \times d\lambda =$ valor único, isto é, $\varphi(P)$. Daí $u \times d\lambda = d\varphi$, sendo φ uma função escalar de P, uniforme. Mas $\nabla\varphi \times d\lambda = d\varphi$, e sendo $u \times d\lambda = d\varphi$, tem-se $u = \nabla\varphi$.

Consideremos agora os campos contidos em espaços multiplamente conexos *lineares*.

Para as curvas fechadas que em tais campos se podem reduzir a um ponto, nas condições já definidas, tem-se ainda a relação $\oint u \times d\lambda = 0$ condicionada a $\nabla \wedge u = 0$.

Para as curvas que a tal não se reduzem, virá, então, desde que a superfície σ não se contém inteiramente no campo considerado:

$$\int_\sigma \nabla \wedge u \times d\sigma = \oint u \times d\lambda \neq 0$$

$\oint u \times d\lambda$ depende, então, do caminho λ. O campo é, pois, *ciclico*.

Mantendo ainda u como gradiente de φ, será φ uma função escalar poliforme ou polidroma.

Assim o potencial do campo será polidrómico.

Portanto, um campo irrotacional pode derivar de um potencial monodrómico ou polidrómico.

Para este último caso não tem sentido a superfície de nível ou equipotencial.

Sejam campos B contidos em espaços de conexão simples *superficial* e tais que $\nabla \times B = 0$.

Portanto, $B = \nabla \wedge A$, sendo A o que se chama o *potencial vector* de B. O teorema de Green dá:

$$\int_\tau \nabla \times B\, d\tau = \int_\sigma B \times d\sigma = \int_\sigma \nabla \wedge A \times d\sigma = \oint A \times d\lambda = 0.$$

No caso em que o campo se contém em espaços de conexão múltipla *superficial*, mantendo-se a mesma condição $\nabla \times B = 0$, e, portanto, $B = \nabla \wedge A$, os integrais acima são ainda nulos para as superfícies do campo que se podem reduzir a um ponto, nas condições já definidas.

Para os que a isso não se reduzem, $\oint A \times d\lambda \neq 0$, pois, o volume τ não está inteiramente contido no campo considerado. No 1.º caso o potencial-vector é monodrómico, e no 2.º é polidrómico.

Observações. Representamos aqui os gradientes, divergencias, e rotacionais, por meio do ∇ (nabla), que, como sabemos, é um operador diferencial dado por $\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. $\operatorname{Grad}\varphi = \nabla\varphi$, $\operatorname{div} u = \nabla \times u$, $\operatorname{rot} u = \nabla \wedge u$, os sinais $\times$ e $\wedge$ representando respectivamente os produtos escalar e vectorial de dois vectores.

A linha de Jordan que consideramos é a da última definição de Jordan, isto é, o extremo do paradoxo de Peano.

Uma superfície de Jordan (simples — sem pontos múltiplos) é constituída por um conjunto de pontos omeomorfo a uma superfície esférica.

Ela divide o espaço em duas regiões, como o fazem com o plano as linhas fechadas de Jordan: são as regiões a pontos internos e externos.

Comprimento de uma curva. Área de uma superfície (1)

por *Ruy Luís Gomes*

1. Trajectórias

Perante a dificuldade que se sente à menor tentativa de definir *curva* ou *superfície*, dada a circunstância de se lhes atribuirem sentidos diferentes conforme o domínio — Geometria ou Análise — em que se consideram, vamos tomar como ponto de partida do desenvolvimento deste capítulo uma noção muito mais clara — a de *trajectória*.

Ora, interpretando-a à maneira corrente em Mecânica, como *a sucessão contínua das posições* de um ponto (móvel) com relação a um referencial determinado, chamaremos *trajectória* em E_2 ou E_3, *a toda transformação contínua*, $\Phi(t)$, *de um intervalo fechado*, $I=[a,b]$, *no espaço* E_2 *ou* E_3.

O ponto $t \in I$ tem como imagem o ponto $\Phi(t) \in E_2$ ou E_3, de coordenadas $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t)\}$ ou $\{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$, que são, evidentemente, *funções contínuas*, de t, em I.

Inversamente, todo sistema, $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t)$ ou $x_1=\varphi_1(t)$, $x_2=\varphi_2(t)$, $x_3=\varphi_3(t)$, de funções contínuas de t em I, define uma transformação contínua $\Phi[\varphi_1,\varphi_2]$ ou $\Phi[\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3]$, de I em E_2 ou E_3 e, portanto, uma *trajectória* de E_2 ou E_3.

O conjunto $\Phi(I)$, imagem do intervalo fechado I e lugar das posições sucessivas do ponto móvel em E_2 ou E_3, chama-se *gráfico* ou *traço* da trajectória.

Se é possível decompôr I num número, n, de intervalos $I_k=[t_{k-1}, t_k]$, $t_0=a<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b$, em cada um dos quais as funções $\varphi_i(t)$ são *lineares*, a *trajectória* diz-se *poligonal*. Os segmentos $\Phi(I_k)$, $k=1,\cdots,n$, chamam-se *lados* e os pontos $\Phi(t_k)$, $k=0,\cdots,n$, *vértices* da poligonal; a soma dos comprimentos dos lados constitui o *trajecto* (2) da poligonal.

Dada uma trajectória qualquer, $\Phi=\Phi(t)$, $t \in I$, diz-se que uma poligonal $\mathscr{P}=\mathscr{P}(t)$, $t \in I$, está *inscrita* em Φ, se os *vértices* de $\mathscr{P}$ são pontos de $\Phi(I)$.

Nestas condições, toda cadeia $\{t_k\}$, $k=0,\cdots,n$, entre a e b dá origem a uma *poligonal inscrita* em Φ: a que tem por *lados* os segmentos $\Phi[t_{k-1}, t_k]$, $k=1,\cdots,n$,

Comprimento (trajecto) de uma trajectória, $\Phi=\Phi(t)$, $t \in I$, é o supremo, $L(\Phi)$, dos trajectos, p, das poligonais $\mathscr{P}$, inscritas em Φ.

(1) Excerpto do Capítulo VII da obra a publicar brevemente intitulada «Integral de Riemann».

(2) Não lhe chamamos *perímetro*, visto que até se pode dar o caso de os lados $\Phi(I_k)$, como conjuntos de E_2 ou E_3, não serem todos *distintos* ou de se reduzirem a um ponto.

Teorema 1. *O comprimento*, $L(\mathscr{P})$, *de uma poligonal coincide com o seu trajecto.*

Com efeito, segundo a definição de $L(\mathscr{P})$, tem-se $p(\mathscr{P}') \leq L(\mathscr{P})$, qualquer que seja a poligonal $\mathscr{P}'$ inscrita em $\mathscr{P}$.

Mas, por outro lado, se $\mathscr{P}'$ está inscrita em $\mathscr{P}$, vê-se imediatamente que $p(\mathscr{P}') \leq p(\mathscr{P})$, portanto $p(\mathscr{P}) = L(\mathscr{P})$.

A noção de *comprimento*, $L(\Phi)$, é, pois, uma extensão da de *trajecto* $p(\mathscr{P})$, de uma poligonal. Trata-se de uma função da trajectória $\Phi(t)$ e não do conjunto $\Phi(I)$.

Se forem $\Phi(t_k)$, $k=0,\cdots,k=n$ os vértices de $\mathscr{P}$, considerados por ordem crescente dos t_k, teremos

$$p(\mathscr{P}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2}.$$

Teorema 2. *A condição necessária e suficiente para que* $L(\Phi)$ *seja finito, é que as funções* $\varphi_i(t)$, $i=1,2,3$, *tenham variação total limitada.*

Condição necessária. Na verdade, como

$$|\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2},$$

vem

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)| \leqslant p(\mathscr{P}) \leqslant L(\Phi),$$

donde (1) $V(\varphi_i) \leqslant L(\Phi)$.

Condição suficiente. De

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{3} [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2} \leqslant \sum_{i=1}^{3} |\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)|,$$

tira-se $p(\mathscr{P}) \leqslant \sum_{i=1}^{3} V(\varphi_i)$ e, portanto, $L(\Phi) \leqslant \sum_{i=1}^{3} V(\varphi_i)$.

Consideremos agora a família, $\{\Phi\}$, de todas (2) as transformações contínuas ou trajectórias, $\Phi(t)$, $t \in I$ e introduzamos a noção de *distância*, $d(\Phi, \Psi)$, de duas transformações Φ, Ψ, pela seguinte relação: $d(\Phi,\Psi) = \sup_{t \in I} d(\Phi(t), \Psi(t))$, em que $d(\Phi(t), \Psi(t))$ representa a distância dos pontos $\Phi(t)$, $\Psi(t)$ de E_m.

(1) Ver *condição* V_1, Cap. II, § 3, pág. 63.

(2) Transformações contínuas de um mesmo intervalo I.

Como $\varphi_i(t)$, $\psi_i(t)$, $i=1,2,3$, são funções contínuas no intervalo fechado I,

$$d(\Phi(t), \Psi(t)) = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [\varphi_i(t) - \psi_i(t)]^2}$$

admite um *supremo* (*máximo*) finito em I e, portanto, $d(\Phi, \Psi)$ é um número não-negativo.

Imediato é também que

$d(\Phi, \Psi) = 0$ se e só se, $\varphi_i(t) = \psi_i(t)$, $t \in I$;
$d(\Phi, \Psi) = d(\Psi, \Phi)$;
$d(\Phi, \Psi) \leqslant d(\Phi, \Pi) + d(\Pi, \Psi)$,

sendo Φ, Ψ, Π três trajectórias quaisquer (relativas ao mesmo intervalo I).

Ora, a partir da *distância*, $d(\Phi, \Psi)$, podemos introduzir na *família* ou *espaço* das transformações contínuas, $\{\Phi\}$, de um mesmo intervalo I, uma *topologia*, nos termos indicados no § 7, Cap. II, pág. 17.

Essa topologia transforma $\{\Phi\}$, num *espaço* de Kuratowski [1].

Teorema 3. *Nos termos dessa topologia, $L(\Phi)$, considerada como função numérica das trajectórias Φ, de comprimento finito, é semi-contínua inferiormente.*

Segundo a definição de continuidade, dada no Cap. II, pág. 43, em que o ponto x_0 é substituido pela trajectória $\Phi^{(0)}$ e o conjunto $A \subset E_m$ pelo subconjunto do espaço topológico $\{\Phi\}$ no qual $L(\Phi) < \infty$, tudo se reduz a demonstrar que, dado $\delta > 0$, existe uma vizinhança $V(\Phi^{(0)}) \subset \{\Phi\}$, tal que

$$L(\Phi^{(0)}) - \delta < L(\Phi) \quad \text{para} \quad \Phi \in V(\Phi^{(0)}), L(\Phi) < \infty \cdot$$

Ora, considerando a poligonal $\mathcal{P}^{(0)}$, de vértices $\Phi^{(0)}(t_k)$, $k=0, \cdots, n$, inscrita em $\Phi^{(0)}$, vem [2]

$$p(\mathcal{P}^{(0)}) = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=0}^{3} \{[\varphi_i^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_i(t_{k+1})] + [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)] + [\varphi_i(t_k) - \varphi_i^{(0)}(t_k)]\}^2}$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [\varphi_i^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_i(t_{k+1})]^2} + \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{3} [\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)]^2} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\sum_{i=0}^{3} [\varphi_i(t_k) - \varphi_i^{(0)}(t_k)]^2},$$

donde

(1) $$p(\mathcal{P}^{(0)}) \leqslant L(\Phi) + 2\,nd(\Phi^{(0)}, \Phi),$$

visto que a segunda parcela da desigualdade anterior não excede $L(\Phi)$ e cada uma das outras duas é menor ou igual a $nd(\Phi^{(0)}, \Phi)$, se atendermos à definição de distância de duas trajectórias.

Mas, por definição de $L(\Phi^{(0)})$, dado $\frac{\delta}{2} > 0$, é sempre possível determinar uma poligonal $\mathcal{P}^{(0)}$, inscrita em $\Phi^{(0)}$, tal que $L(\Phi^{(0)}) - \frac{\delta}{2} < p(\mathcal{P}^{(0)})$.

Logo, $L(\Phi^{(0)}) - \delta < L(\Phi)$, para todas as trajectórias de comprimento finito, que pertençam à vizinhança (esférica), $d(\Phi^{(0)}, \Phi) < \frac{\delta}{4n}$, de centro $\Phi^{(0)}$ e raio $\frac{\delta}{4n}$.

Corolário. *$L(\Phi)$ é o limite comum dos trajectos das poligonais inscritas en Φ, que convergem para Φ nos termos da topologia já introduzida.*

Em primeiro lugar, dada uma poligonal $\mathcal{P}(t)$, $t \in I$, inscrita em Φ, de vértices $\Phi(t_k)$, $k=0, \cdots, n$, tem-se no intervalo $[t_k, t_{k+1}]$,

$$d(\Phi(t), \mathcal{P}(t)) \leqslant d(\Phi(t), \Phi(t_k)) + d(\Phi(t_k), \Phi(t_{k+1})) < \delta,$$

desde que o diâmetro, $d(t_k)$, da cadeia $\{t_k\}$ seja suficientemente pequeno [1].

Consequentemente, *dado $\delta > 0$, é sempre possível determinar $\varepsilon > 0$, por maneira que $d(\Phi, \mathcal{P}) < \delta$, para toda poligonal, $\mathcal{P}$, inscrita em Φ, tal que $d(t_k) < \varepsilon$.*

Em segundo lugar, partindo de uma poligonal $\mathcal{P}'$, tal que $L(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2} < p(\mathcal{P}')$ e aplicando a desigualdade (1), a uma sucessão $\{\mathcal{P}^{(m)}\}$ que convirja para Φ, vem [2]

$$L(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2} < p(\mathcal{P}^{(m)}) + 2n'\,d(\Phi, \mathcal{P}^{(m)}),$$

donde

$$L(\Phi) - p(\mathcal{P}^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2n'\,d(\Phi, \mathcal{P}^{(m)}) < \varepsilon,$$

sob a condição $d(\Phi, \mathcal{P}^{(m)}) < \frac{\varepsilon}{4n'}$.

Como ε é qualquer, tem-se $L(\Phi) = \lim\limits_{m} p(\mathcal{P}^{(m)})$, sempre que $\{\mathcal{P}^{(m)}\}$ converge para Φ nos termos da topologia do espaço das trajectórias.

---

(1) Ver definição em Cap. II, § 7, pág. 17.

(2) Basta utilizar a desigualdade

$$\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)^2} \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sqrt{(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)},$$

que é verdadeira para quaisquer três sucessões $\{x_j\}$, $\{y_j\}$, $\{z_j\}$ $j=1, \ldots, n$, de números reais, mediante as seguintes substituições:

$n=3$, $x_1 = \varphi_1^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_1(t_{k+1})$, $x_2 = \varphi_1(t_{k+1}) - \varphi_1(t_k)$, $x_3 = \varphi_1(t_k) - \varphi_1^{(0)}(t_k)$; $y_1 = \varphi_2^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_2(t_{k+1})$, $\cdots$; $z_1 = \varphi_3^{(0)}(t_{k+1}) - \varphi_3(t_{k+1})$, $\cdots$

Se a trajectória pertence a E_2, fazemos $z_1 = z_2 = z_3 = 0$. A demonstração da desigualdade faz-se, por indução, a partir de $n=2$, em que é imediata [consultar *S. Saks — Theory of the Integral*, Warsowa, 1937, pág. 171].

---

(1) Atender a que as funções $\varphi_i(t)$, $i=1,2,3$, são *uniformemente contínuas* em I.

(2) Designamos por n' o número de lados de $\mathcal{P}'$.

TEOREMA 4. *Se* Φ *é uma trajectória de comprimento finito,* $L(\Phi)=\inf \lim_n p(\mathscr{P}'^{(n)})$, *designando por* $\mathscr{P}'^{(n)}$ *uma sucessão de poligonais, inscritas ou não em* Φ, *que convergem para* Φ *e cujos trajectos constituem uma sucessão convergente (de números).*

Na verdade, como $L(\Phi)=\underline{L}(\Phi)$, tem-se [1]

$$L(\Phi)=\lim_m \inf_{\Phi' \in V_m(\Phi)} L(\Phi') .$$

Ora, como $\mathscr{P}'^{(n)}$ converge para Φ, há necessàriamente em cada $V_m(\Phi)$ um elemento $\mathscr{P}'^{(n_m)}$ de $|\mathscr{P}'^{(n)}|$ e, portanto, $L(\Phi)\leqslant \lim_m p(\mathscr{P}'^{(n_m)})=\lim_n p(\mathscr{P}'^{(n)})$.

Logo, $L(\Phi)\leqslant \inf \lim_n p(\mathscr{P}'^{(n)})$.

Por outro lado, como a família das poligonais — *inscritas e não inscritas* — contém a das *inscritas* e para estas se verifica a igualdade $L(\Phi)=\lim_n p(\mathscr{P}^{(n)})$, resulta que na hipótese mais ampla que estamos a analisar, se tem $\inf \lim p(\mathscr{P}'^{(n)})\leqslant L(\Phi)$ para toda sucessão $\mathscr{P}'^{(n)}$ que converge para Φ. Logo, $L(\Phi)= =\inf \lim_n p(\mathscr{P}'^{(n)})$, sendo $|\mathscr{P}'^{(n)}|$ uma sucessão de poligonais $\mathscr{P}'^{(n)}(t)$, $t \in I$, que converge para $\Phi=\Phi(t)$, $t\in I$.

A própria definição de $L(\Phi)$, o Corolário do Teor. 3 e o Teor. 4 mostram-nos que o comprimento de uma trajectória pode ser obtido a partir de poligonais, de três maneiras igualmente significativas: 1) *como supremo dos trajectos das poligonais inscritas;* 2) *como limite dos trajectos de qualquer sucessão de poligonais inscritas que tendem para a trajectória;* 3) *como ínfimo dos limites de qualquer sucessão de poligonais, inscritas ou não, que convergem para a trajectória.*

TEOREMA 5. *Se a trajectória* Φ *é tal que as funções* $\varphi_i(t)$, $i=1,2,3$, *admitem derivadas* $\varphi_i'(t)$, *integráveis em* I, *tem-se*

$$L(\Phi)=L(\Phi;I)=\int_I \sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2+\varphi_3'^2}\,dt .$$

Na verdade, a uma sucessão de decomposições de I cujos diâmetros tendam para zero, corresponde uma sucessão de poligonais inscritas $|\mathscr{P}^{(n)}|$, que tendem [2] para Φ.

Mas, como as fuuções φ_i têm derivadas, vem

$$p(\mathscr{P}^{(n)})=\sum_{k=0}^{k_n-1}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}[\varphi_i(t_{k+1})-\varphi_i(t_k)]^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{k_n}\sqrt{\sum_{i=1}^{3}[\varphi_i'(t_k')\,(t_{k+1}-t_k)]^2}$$

sendo $t_k\leqslant t_k'\leqslant t_{k+1}$.

(1) Ver definição da pág. 29 e, na pág. 23, a maneira prática de calcular a função, $\underline{f}$, limite inferior de f.

(2) Ver primeira parte da demonstração do Cor., pág. 243.

Consequentemente [1], tomando o limite,

$$L(\Phi;I)=\lim_n p(\mathscr{P}^{(n)})=\int_I \sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2+\varphi_3'^2}\,dt .$$

Utilizando integral-L em vez de integral-R, pode demonstrar-se o seguinte [2]

TEOREMA 6. *A condição necessária e suficiente para que* $L(\Phi)=\int_I \sqrt{\varphi_1'^2+\varphi_2'^2+\varphi_3'^2}\,dt$, *é que as funções* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *sejam absolutamente contínuas.*

Trajectórias equivalentes.

Em Mecânica, em todas as questões em que intervem a noção de trajectória t é, em geral, o tempo.

Mas, para efeito da resolução de determinados problemas, é, por vezes, conveniente substituir t por outro parâmetro, $s=H(t)$, em que H designa uma transformação (topológica) especial de I sobre $K= =[s_a, s_b]$, $s_a=H(a)$, $s_b=H(b)$.

Ordinàriamente, substituiu-se o tempo, t, pelo trajecto $s=L(\Phi;[a,t])$ e diz-se, então, que as funções $x=\psi_1(s)$, $y=\psi_2(s)$, $z=\psi_3(s)$, *transformadas* de $x= =\varphi_1(t), y=\varphi_2(t)\, z=\varphi_3(t)$ por intermédio de $s=L(\Phi;[a,t])$, constituem uma *nova representação da mesma trajectória. Mais corretamente, uma representação em termos de trajecto* (ou espaço andado).

Na realidade, trata-se de duas transformações Φ e Ψ que, embora diferentes [3], possuem um conjunto de invariantes: de significado geométrico, como o *gráfico* e o *trajecto;* de significado físico como, por exemplo, o trabalho de uma força (X, Y, Z)

$$\int_I (X\varphi_1'+Y\varphi_2'+Z\varphi_3')\,dt=\int_K (X\psi_1'+Y\psi_2'+Z\psi_3')\,ds.$$

São, pois, *equivalentes* para o cálculo desses *invariantes* e por isso se diz, impròpriamente, que representam a *mesma trajectória.*

Ora, ampliando este resultado e exprimindo-o em termos de maior rigor, diremos *que duas trajectórias,* $\Phi(t)$, $t\in I$ e $\Psi(u)$, $u\in K$, *são equivalentes, quando, dado um* $\varepsilon>0$, *é sempre possível determinar uma transformação topológica,* $u=H_\varepsilon(t)$, *de* I *em* K, *tal que* [4]

$$d(\Phi(t), \Psi[H_\varepsilon(t)])<\varepsilon,\ t\in I.$$

(1) Atender a Cor., Cap. VII e Teor. 21, Cap. IV.

(2) Ver, por exemplo, *S. Saks — Theory of the Integral,* pág. 123, Teor. (8.4).

(3) Não é necessàriamente $I=K$ nem $\varphi_i(t)=\psi_i(t)$, $t\in I$.

(4) É a noção de *equivalência à Frechet,* que compreende como caso particular a de Lebesgue. Na verdade, segundo Lebesgue, diz-se que Φ é equivalente a Ψ, quando Ψ é simplesmente a transformada de Φ por intermédio de uma transformação topológica H: $\Psi[H(t)]=\Phi(t)$, $t\in I$. Ora, se assim for, também Φ e Ψ resultarão equivalentes à Frechet, com $H_\varepsilon=H$, pois se tem $d(\Phi(t), \Psi[H(t)])=0$, $t\in I$.

Radó, na obra a seguir citada, chama às trajectórias equivalentes à Lebesgue, *semelhantes topològicamente.* Consultar *T. Radó — Lenght and Area. Amer. Math. Soc. Coll. Publ. vol. XXX.* 1948, pág. 57.

Em símbolos, escreveremos $\Phi \sim \Psi$ e nenhuma dificuldade há em demonstrar que se trata efectivamente de uma relação de equivalência, quer dizer, *reflexiva, simétrica e transitiva.*

Cada *classe de equivalência* constitue um *variedade-F* ou *curva de Frechet do tipo arco simples em* E_2 ou E_3. E podemos tomar para sua *representante* qualquer das trajectórias da respectiva classe.

Teorema 7. *Trajectórias equivalentes tem o mesmo gráfico.*

Demonstremos que $\Phi(I) \subset \Psi(K)$, partindo para isso de um ponto $p = \Phi(t') \in \Phi(I)$.

Como $\Phi \sim \Psi$, podemos arranjar uma transformação topológica de I em K, H_n, tal que

$$d(\Phi(t), \Psi[H_n(t)]) < \frac{1}{n}.$$

Consequentemente, $p_n = \Psi[H_n(t')] \in \Psi(K)$ converge para $p = \Phi(t')$ e, portanto, como $\Psi(K)$ é um conjunto compacto de $E_3, p \in \Psi(K)$. Logo, $\Phi(I) \subset \Psi(K)$. Trocando Φ com Ψ, vem $\Phi(I) = \Psi(K)$.

O inverso deste teorema não é verdadeiro: dada uma trajectória (ou movimento) $\Phi(t), t \in I$, basta mudar a lei do movimento no tempo, para obter nova trajectória não equivalente mas com o mesmo gráfico.

Pode, no entanto, demonstrar-se o

Teorema 8. *Se* $\Phi(t), t \in I$ e $\Psi(u), u \in K$, *forem duas transformações topológicas (biunívocas e bicontínuas) com o mesmo gráfico,* $\Phi(I) = \Psi(K)$, *então* $\Phi \sim \Psi$.

Na verdade, pondo $H(t) = \Psi^{-1}[\Phi(t)]$, vem $\Psi[H(t)] = \Phi(t)$, quere dizer, Φ e Ψ são semelhantes topològicamente e, portanto, $\Phi \sim \Psi$.

Ora, chamemos *trajectória geométrica à que é equivalente a uma transformação topológica,* $T(v), v \in I_0$. O seu gráfico é um *arco simples*, visto ser a imagem topológica de um intervalo I_0. O teorema anterior diz-nos que: 1) as trajectórias geométricas com o mesmo gráfico, são todas equivalentes entre si; 2) há há uma correspondência biunívoca entre a família dos *arcos simples* e a das classes de equivalência que tem como representante uma trajectória geométrica.

A estas classes chama Radó *variedades topológicas do tipo arco simples em* E_3.

Lema. *Se* $\Phi \sim \Psi$ *é possível determinar uma sucessão* $\{\Phi^{(n)}\}$ *convergente para* Φ, *constituida por trajectórias semelhantes topològicamente a* Ψ. [1]

Na verdade, pondo $\Phi^{(n)}(t) = \Psi[H_n(t)]$, em que H_n é a transformação topológica utilizada no Teor. 7, vem

[1] Ver nota (2), pág. 246.

$d(\Phi, \Phi^{(n)}) \leq \frac{1}{n}$, donde $\Phi(t) = \lim_n \Phi^{(n)}(t)$. E, por outro lado, $\Phi^{(n)}$ é a transformada de Ψ por intermédio de H_n, portanto $\Phi^{(n)}$ e Ψ são topològicamente semelhantes.

Teorema 9. *Trajectórias equivalentes têm o mesmo trajecto.*

Dadas as trajectórias $\Phi \sim \Psi$, comecemos por determinar a sucessão $\{\Phi^{(n)}\}$ segundo o Lema.

Como $\Phi^{(n)}(t) = \Psi[H_n(t)]$, é imediato que $L(\Phi^{(n)}; I) = L(\Psi; K)$.

Em segundo lugar, pela semi-continuidade inferior de $L(\Phi) = L(\Phi; I)$, vem $L(\Phi; I) - \delta < L(\Phi^{(n)}; I)$ para $N < n$, donde $L(\Phi, I) \leq L(\Psi; K)$.

Permutando Φ com Ψ, resulta $L(\Phi; I) = L(\Psi; K)$. O inverso é falso.

Teorema 10. *Dada uma trajectória,* $\Phi(t) \in I$, *cujo gráfico não se reduz a um ponto, é sempre possível determinar uma outra equivalente à primeira, cujo parâmetro é o trajecto* [1].

Essa representação de Φ, em termos de

$$s = L(\Phi; [a, t]),$$

tem a forma

$x = \psi_1(s), y = \psi_2(s), z = \psi_3(s), K = [0, L], L = L(\Phi; I)$ e, é claro, que $s = L(\Psi; [0, s])$.

Note-se ainda que as funções ψ_i são lipschitzianas, pois $|\psi_i(s') - \psi_i(s'')| \leq L(\Psi; [s', s'']) = |s'' - s'|$.

Em Mecânica utilizam-se correntemente as duas representações — Φ *em termos de tempo e* Ψ *em termos de trajecto* — e o valor do teorema anterior é precisamente o de assegurar a existência da segunda.

Em geral, parte-se de Φ e deduz-se, depois, Ψ; mas também é frequente dar Ψ e uma lei horária $s = H(t)$, resultando depois Φ, por via da homeomorfia H.

2. Curva rectificável. Comprimento.

Demos no parágrafo anterior a noção de trajectória, que fomos buscar à ideia primitiva de movimento dum ponto.

O gráfico repectivo aparece assim como um conjunto de E_3, mas interpretado como lugar das posições sucessivas do ponto móvel.

Ora, a família dos *gráficos* possíveis compreende: os *arcos simples*, isto é, as imagens topológicas de um intervalo; os *arcos simples fechados*, quere dizer, as imagens topológicas de uma circunferência, que podemos representar por $x = \cos u, y = \operatorname{sen} u, z = 0, 0 \leq$

[1] Ver demonstração em T. Radó, obra citada, III. 3. 97.

$u \leqslant 2\pi$; de um modo geral, *todas as curvas da geometria elementar.*

Além disso, podemos demonstrar o

Teorema 11. *O gráfico de uma trajectória, $C \subset E_3$, tem medida-J nula.*

Na verdade, se tomarmos uma decomposição $\{I_j\}$, de diâmetro suficientemente pequeno, podemos fazer com que

$$|\varphi_1(K)| < \varepsilon, \ |\varphi_2(K)| < \varepsilon,$$

para todo $K \subset I_j, j=1, \cdots, n$, sendo $\Phi[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]$ uma representação de C.

Para isto, consideremos um ponto $t_j \in I_j$ e de centro em $\Phi(t_j)$ construamos o paralelipípedo de arestas: 2ε, paralelamente aos eixos x e y; $2V(I_j)$, paralelamente ao eixo dos z, designando por $V(I_j)$ a variação absoluta de $\varphi_3(t)$ em I_j.

Como C está contido necessàriamente na reunião destes paralelipípedos, vem

$$J(C) \leqslant \sum_j 8\varepsilon^2 V(I_j) = 8\varepsilon^2 V(I),$$

donde $J(C)=0$. [1]

Quere dizer, se um gráfico é plano, a sua medida-J, como conjunto plano, é nula; se é *empenado*, a sua medida-J, como conjunto do espaço, é nula também.

Nos gráficos está assim realizada uma das propriedades que constitui elemento fundamental da *noção intuitiva de curva: a falta de espessura* [2].

Em conformidade com estes factos, chamaremos *curva rectificável ou simplesmente curva, C, a todo conjunto de E_3, que seja o gráfico de uma trajectória de comprimento finito.*

Teorema 12. *A condição necessária e suficiente para que um conjunto $C \subset E_3$ seja uma curva rectificável, é que admita uma representação $\Phi(t), t \in I$, contínua e de variação total limitada.*

Teorema 13. *Seja C um arco simples de E_3. O menor trajecto de gráfico C é o de qualquer das suas trajectórias geométricas.*

Na verdade, consideremos ao lado da trajectória $\Phi(t), t \in I$, de gráfico C, a transformação topológica $\Psi(v), v \in K$, com o mesmo gráfico.

(1) Basta até supôr, como se verifica pela demonstração, que uma, apenas, das funções φ_i, $i=1, 2, 3$ tem variação total limitada.

Osgood demonstrou, em 1903, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 4, pág. 107, com um exemplo conhecido desde então por *curva de Osgood*, que, se nenhuma das funções for de variação total limitada, o gráfico pode ter *medida exterior positiva*.

(2) T. Radó diz: «*Primarily, a curve is thought of as a point set with certain properties of slenderness*» [obra cit. II. 5.2].

Como Ψ é biunívoca existe uma transformação $H(t)$, tal que $\Phi(t) = \Psi[H(t)], t \in I$.

Ora, escolhendo uma cadeia $\{v_k\}$ de K, de diâmetro suficientemente pequeno, corresponder-lhe-á uma poligonal $\mathscr{P}_v$, tal que $p(\mathscr{P}_v) > L(\Psi) - \delta$.

Por outro lado, se dois dos v_k forem as imagens dos extremos a, b de I, como é legítimo supôr, e se para cada um dos restantes v_k escolhermos [1] um t'_k, tal que $t'_k = H^{-1}(v_k)$, os pontos $\{t'_n\}$, uma vez dispostos por ordem de grandeza crescente entre a e b, determinarão uma cadeia $\{t_k\}$ de $I = [a, b]$. Seja então $\mathscr{P}$ a poligonal correspondente inscrita em $\Phi(t)$ e consideremos ao mesmo tempo um lado $\Psi[v_k, v_{k+1}]$ de $\mathscr{P}_v$.

De duas uma: ou $\Psi(v_k), \Psi(v_{k+1})$ são também dois vértices consecutivos de $\mathscr{P}$ ou, por exemplo, $\Psi(v_k) = \Phi(t_j)$ e $\Psi(v_{k+1}) = \Phi(t_{j+p})$. Neste último caso, o comprimento do lado $\Psi[v_k, v_{k+1}]$ de $\mathscr{P}_v$ é menor ou igual à soma dos comprimentos dos lados

$$\Phi[t_j, t_{j+1}], \Phi[t_{j+1}, t_{j+2}], \cdots, \Phi[t_{j+p-1}, t_{j+p}]$$

de $\mathscr{P}$. Em qualquer hipótese se tem, pois, $p(\mathscr{P}) \geqslant p(\mathscr{P}_v) > L(\Psi) - \delta$, donde $L(\Phi) > L(\Psi) - \delta$ ou finalmente $L(\Phi) \geqslant L(\Psi)$.

Chamando a $L(\Psi)$ *comprimento do arco C*, como é natural e está de acordo com o procedimento da geometria elementar, o teorema anterior exprime o facto intuitivo: *o comprimento de um arco simples é o menor trajecto de quantos têm esse arco como gráfico.*

Em consequência, estabeleceremos a

Definição. *Comprimento de uma curva, C, é o ínfimo dos trajectos que a têm por gráfico.*

Teorema 14. *O comprimento é igual a zero quando, e só quando, C se reduz a um ponto.*

Teorema 15. *Se $x' = f_1(x, y, z), y' = f_2(x, y, z), z' = f_3(x, y, z)$ representam uma transformação isométrica de E_3 em E'_3,*

$$C, [x = \varphi_1(t), y_1 = \varphi_2(t), z_1 = \varphi_3(t)]$$

e

$$C', [x' = f_1[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], y' = f_2[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3], z' = f_3[\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3]],$$

têm o mesmo comprimento.

Podemos ainda verificar que o *comprimento* de uma circunferência é $2\pi r$.

Na verdade, pelo teorema anterior, podemos sempre supôr que a circunferência está no plano x, y e tem o centro na origem.

E sendo assim, admite a representação

$$\Psi[x = r\cos u, y = r \operatorname{sen} u; \quad 0 \leqslant u \leqslant 2\pi],$$

que conduz a $L(\Psi) = 2\pi r$.

(1) $H^{-1}(v_k)$ representa a imagem completa inversa de v_k.

E como a transformação Ψ é biuvívoca, à parte o ponto $x=r, y=0$, que é imagem de 0 e 2π, podemos aplicar o raciocínio de Teor. 13 e, portanto, $L(\Phi)\geqslant 2\pi r$.

Como consequência, o comprimento de um arco simples fechado, isto é, topològicamente equivalente a uma circunferência, pode calcular-se à maneira da geometria elementar: decompõe-se C num número n de arcos simples sem pontos interiores comuns, traçam-se as respectivas coidas e toma-se depois o supremo dos perímetros dos polígonos (inscritos) resultantes.

Os últimos resultados justificam inteiramente as definições de *curva rectificável* e de *comprimento.*

E acontece ainda que na *família dos sub-arcos de um arco simples ou simples fechado*, C, *o comprimento se comporta como numa medida (linear): não-negativa aditiva, nula apenas quando o arco se reduz a um ponto.* Trata-se de uma consquência imediata da aditividade da $L(\Psi; I)$ como função do sub-intervalo $I\subset I_0$, sendo $\Psi(u), u \in I_0$, uma trajectória geométrica sobre C.

E a definição de curva aqui adotada exclui o caso *patológico das curvas de Peano* (1), *Hilbert* ou de *Osgood*, cujo gráfico *enche um quadrado* ou *pelo menos não tem medida nula.*

(1) Dada por Peano em 1890 e que marcou um momento decisivo na separação dos dois conceitos, até então identificados, de *curva-trajectória* e *curva-conjunto do* E_2.

Um teorema sobre a estrutura dos divisores de um grupo

por **F. Dias Agudo**

Consideremos o grupo G_8 constituido pelas matrizes

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\ a=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\ b=\begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\ c=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$d=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\ e=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\ f=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\ g=\begin{pmatrix}0&-1\\-1&0\end{pmatrix}$$

e que, como fàcilmente se vai concluir, é isomorfo do grupo das rotações do quadrado.

Da transformação linear $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&b_1\\a_2&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ resulta que que às matrizes de G_8 corresponderão, respectivamente, as seguintes transformações de coordenadas no plano:

$$I\begin{pmatrix}x'=x\\y'=y\end{pmatrix}\ a\begin{pmatrix}x'=x\\y'=-y\end{pmatrix}\ b\begin{pmatrix}x'=-x\\y'=y\end{pmatrix}\ c\begin{pmatrix}x'=-x\\y'=-y\end{pmatrix}$$

$$d\begin{pmatrix}x'=y\\y'=x\end{pmatrix}\ e\begin{pmatrix}x'=y\\y'=-x\end{pmatrix}\ f\begin{pmatrix}x'=-y\\y'=x\end{pmatrix}\ g\begin{pmatrix}x'=-y\\y'=-x\end{pmatrix}$$

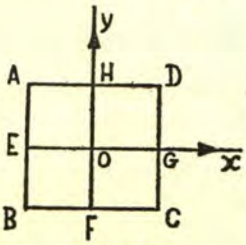


Fig. 1

de modo que (fig. 1): I será a «rotação» identidade; a a simetria em relação a EG; b a simetria em relação a HF; c a rotação de 180° em torno de O; d a simetria em relação a BD; e a rotação de 90° no sentido directo em torno de O; f a rotação de 270° no sentido directo em torno de O e g a simetria em relação a AC, resultados que fàcilmente nos permitiam construir a tábua de multiplicação do grupo G_8.

Posto isto, procuremos representar gràficamente a estrutura dos sub-grupos de G_8.

Designando por ε nm dos números ± 1, temos $\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\varepsilon^2&0\\0&\varepsilon^2\end{pmatrix}=I$ [é o caso da matriz I, com $\varepsilon=1$, e c, com $\varepsilon=-1$]; $\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&-\varepsilon\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\varepsilon^2&0\\0&\varepsilon^2\end{pmatrix}=I$ [caso das matrizes a e b]; $\begin{pmatrix}0&\varepsilon\\\varepsilon&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}\varepsilon^2&0\\0&\varepsilon^2\end{pmatrix}=I$ [matrizes d e g]; e $\begin{pmatrix}0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}-\varepsilon^2&0\\0&-\varepsilon^2\end{pmatrix}=$ $=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}0&-\varepsilon\\\varepsilon&0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}0&\varepsilon\\-\varepsilon&0\end{pmatrix}^4=I$ [matrizes e e f], o que nos permite concluir que

$$I;\ \{I,a\};\ \{I,b\};\ \{I,c\};\ \{I,d\};\ I,g\};$$

e

$$\{I,e,e^2,e^3\}\equiv\{I,e,c,f\}\equiv\{I,f,f^2,f^3\}$$

são sub-grupos de G_8.

As relações

$$\begin{pmatrix}\varepsilon_1&0\\0&\varepsilon_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta_1&0\\0&\delta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\delta_1&0\\0&\varepsilon_2\delta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&\delta\end{pmatrix}$$

onde $\varepsilon_i, \delta_i, \varepsilon, \delta$, representam também qualquer dos números ± 1, mostram, por outro lado, que as 4 matrizes I, a, b, c (em que os elementos nulos se encontram na 2.ª diagonal) constituem um outro sub-grupo (o grupo de Klein) de G_8.

Anàlogamente, mostram as igualdades

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\,\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \\ \varepsilon_1\,\varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_1 \\ \varepsilon_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 \\ \varepsilon_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1\,\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1\,\varepsilon_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

que as 4 matrizes I, c, d, g (que têm iguais os elementos não nulos) constituem novo sub-grupo de G_8.

Facilmente se veria que não há outros divisores próprios além dos que encontrámos:

$$I;\ \{I,a\};\ \{I,b\};\ \{I,c\};\ \{I,d\};\ \{I,g\};$$
$$\{I,e,e^2,e^3\} \equiv \{I,c,e,f\} \equiv \{I,f,f^2,f^3\};$$
$$\{I,a,b,c\};\ \{I,c,d,g\}.$$

Estes resultados estão de acordo com o facto de todo o grupo de ordem p^a (p primo) ter $p+1$ divisores de ordem p^{α}; e permitem-nos desenhar (fig. 2) o gráfico da estrutura dos sub-grupos de G_8 que, como mostra a sub-estrutura assinalada (e outras existem isomorfas a ela), é uma estrutura não modular.

Pode mesmo afirmar-se que 8 é a menor ordem de um grupo cujos divisores têm estrutura não modular, de acordo com o seguinte teorema que o exemplo apresentado nos sugeriu.

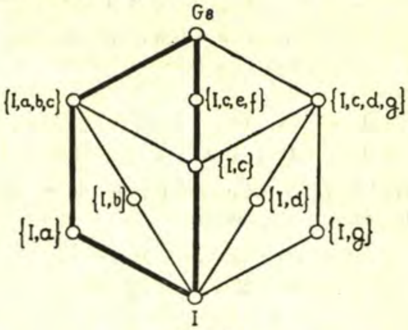
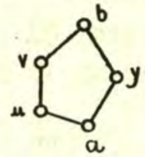


Fig. 2

TEOREMA: É modular a estrutura dos sub-grupos de qualquer grupo de ordem inferior a 8.

Com efeito, para que a estrutura não seja modular deve conter uma subestrutura isomorfa de



Ora o caso mais simples que se pode apresentar é aquele em que a é de ordem 1 (grupo unidade), u de ordem 2, v de ordem 4, b de ordem 8, q. e. d.

Uma desigualdade entre números positivos

por **Maurício Matos Peixoto** (Rio de Janeiro)

Sejam $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$, n números não-negativos e suponhamos que dois deles, pelo menos, sejam diferentes de zero, isto é

$$x_{n-1} > 0.$$

Ponhamos

$$S = x_1 + \cdots + x_n.$$

Vamos demonstrar a relação

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{S-x_i} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Com efeito, ponhamos

$$(2) \qquad P = (S-x_1)\cdots(S-x_n),\ P_i = \frac{P}{S-x_i} \qquad (i=1,\cdots,n).$$

É claro, então, que

$$(3) \qquad 0 < P_1 \leqslant P_2 \leqslant \cdots \leqslant P_n.$$

A relação (1) a demonstrar é equivalente a

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{n} P_i\,x_i \geqslant \frac{n}{n-1}\,P$$

que se obtém de (1) multiplicando ambos os membros por P. Mas (4) ficará demonstrada se mostrarmos que

$$(5) \qquad A = \sum_{i=1}^{n} [(n-1)\,P_i\,x_i - P] \geqslant 0.$$

Mas, em virtude de (2),

$$(n-1)\,x_i\,P_i - P = (n-1)\,x_i\,\frac{P}{S-x_i} - P = P_i\,(n\cdot x_i - S)$$

e, portanto,

$$A = \sum_{i=1}^{n} P_i\,[n\cdot x_i - S].$$

Ponhamos

$$A_k = \sum_{i=1}^{k} P_i\,(nx_i - S), \qquad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

Tem-se $A_n = A$ e portanto

$$A = A_{n-2} + P_{n-1}(nx_{n-1} - S) + P_n(nx_n - S).$$

Como $nx_n \geqslant S$ (só valendo a igualdade no caso em que todos os x_i são iguais), podemos escrever, em virtude de (3),

$$(6)\quad A \geqslant A_{n-2} + P_{n-1}(nx_{n-1} - S) + P_{n-1}(nx_n - S) = \\ = A_{n-2} + P_{n-1}[n(x_{n-1} + x_n) - 2S].$$

Majorando os $n-2$ primeiros termos de S, respectivamente por x_{n-1} e x_n tem-se

$$S \leqslant (n-2)\,x_{n-1} + x_{n-1} + x_n$$
$$S \leqslant (n-2)\,x_n \quad + x_{n-1} + x_n$$

donde

$$(7)\qquad 2S \leqslant n(x_{n-1} + x_n)$$

De (6) e (7) resulta então

$$(8)\quad A \geqslant A_{n-3} + P_{n-2}(n\,x_{n-2} - S) \\ + P_{n-2}[n(x_{n-1} + x_n) - 2S] = \\ = A_{n-3} + P_{n-2}[n(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) - 3S].$$

Observando que $n(x_{n-2} + x_{n-1} + x_n) \geqslant 3S$ e procedendo como anteriormente, obtém-se finalmente que

$$A \geqslant P_1[n(x_1 + \cdots + x_n) - nS] = 0.$$

Está, portanto, demonstrada a (5) e, consequentemente, a (1).

É imediata a verificação de que, se os x_i não forem todos iguais, vale a desigualdade em (1), no sentido estrito. No caso em que $n=3$ a desigualdade (1) encontra-se na Mathematicae Notae, vol. 3, 1943, p. 182.

PEDAGOGIA

PROGRAMA DA DISCIPLINA DE MATEMÁTICA DO ENSINO LICEAL, CONFORME O DECRETO N.º 37.112 DE 22 DE OUTUBRO DE 1948

1.º Ano

Conhecimento dos sólidos geométricos (paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro e cone de revolução, esfera) e das figuras planas (triângulo, quadrado, rectângulo, losango, paralelogramo, trapézio, polígono convexo e círculo). Elementos geométricos.

Sistema métrico decimal:

Medidas de comprimento; emprego dos instrumentos usuais (metro articulado, fita métrica, cadeia do agrimensor). Comprimento de um segmento; distância entre dois pontos; perímetro de uma linha poligonal; perímetro de um polígono regular; perímetro de uma linha curva.

Tomar as medidas feitas como centro dos seguintes estudos: *a*) Leitura e escrita dos números inteiros e decimais; estima das medidas; *b*) As quatro operações fundamentais sobre números inteiros; propriedades mais importantes; sua aplicação às provas das operações; *c*) As mesmas operações sobre números decimais; *d*) Cálculo do quociente de dois números inteiros ou decimais, com uma dada aproximação; *e*) Cálculo mental; *f*) Expressões númericas; uso do parentesis; cálculo de valor numérico de uma expressão.

Medidas de superfície; inconvenientes da medição directa de superfícies; áreas do rectângulo e do quadrado; emprego do papel milimétrico; áreas das superfícies do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

Tomar as medidas feitas no quadrado como ponto de partida para os seguintes estudos: *a*) Potenciação; multiplicação e divisão de potências de base igual ou de expoente igual; potência de uma potência; expressões numéricas. *b*) Raiz quadrada; regra prática; extracção da raiz quadrada de um número inteiro ou decimal com uma dada aproximação.

Medidas de volume e de capacidade; emprego de medidas graduadas e de provetas; volumes do paralelepípedo rectângulo e do cubo.

Medidas de massa; emprego da balança de Roberval.

Números fraccionários; representação gráfica; propriedades; comparação de frações.

Noção de ângulo e de arco de circunferência; igualdade e desigualdade de ângulos; ângulos adjacentes; operações sobre ângulos; unidades de ângulo; emprego do transferidor; ângulos complementares, suplementares e verticalmente opostos. Propriedades mais elementares destes ângulos.

Posição relativa de duas rectas no plano; ângulos formados por um sistema de duas rectas cortadas por uma terceira; relações entre estes ângulos quando as duas primeiras forem paralelas: ângulos de lados respectivamente paralelos e perpendiculares.

Ângulo interno e ângulo externo de um triângulo e de um polígono convexo qualquer: soma dos ângulos externos; soma dos ângulos internos.

Redução de número complexo a incomplexo e vice-versa; operações sobre números complexos.

Gráficos: gráficos de barras; gráficos cartesianos.

Notas ao programa. Os números começam por ser considerados concretamente, como resultado de medidas, e só depois como números abstractos.

As propriedades das operações limitam-se às duas ou três mais importantes de cada operação e devem ser concretizadas por meio de pequenos problemas.

No cálculo das expressões numéricas devem evitar-se dados que conduzam a resultados com mais de três algarismos.

O estudo dos números fraccionários deve iniciar-se por problemas concretos.

Os números complexos a considerar representam, de preferência, medidas de ângulo e de tempo.

2.º Ano

Geometria

Triângulos; relações entre os seus elementos; altura de um triângulo; igualdade de triângulos; casos de igualdade de triângulos.

Comparação dos segmentos da perpendicular e da oblíqua tirados do mesmo ponto para a mesma recta: distância de um ponto a uma recta; distância de duas rectas paralelas.

Quadriláteros: paralelogramo, losango, rectângulo, quadrado e trapézio; propriedades mais importantes.

Circunferência; arco de circunferência; raio, corda, diâmetro, secante e tangente; circunferência inscrita e circunscrita a um triângulo; círculo; segmento de círculo; sector circular; coroa circular. Posição relativa de duas circunferências.

Perímetro de uma circunferência; determinação experimental do valor de π.

Figuras equivalentes; equivalência do paralelogramo e do trapézio ao rectângulo e do triângulo ao paralelogramo. Áreas destas figuras, do polígono irregular, do polígono regular e do círculo.

Áreas das superfícies do prisma recto, da pirâmide regular, do cilindro e do cone de revolução.

Volumes dos sólidos indicados.

Aritmética

Noções de múltiplo e submúltiplo de um número; restos da divisão de um número inteiro por 10 e potências de 10, por 2 e 5, por 9 e 3; critérios de divisibilidade por estes números. Prova dos nove das operações.

Divisores comuns de dois ou mais números; máximo divisor comum de dois ou mais números: determinação do máximo divisor comum de dois números pelas divisões sucessivas. Múltiplos comuns de dois ou mais números; menor múltiplo comum de dois ou mais números: determinação do menor múltiplo comum de dois números partindo do máximo divisor comum.

Noção de número primo; decomposição de um número num produto de factores primos; cálculo do máximo divisor comum e do menor múltiplo comum de vários números utilizando a decomposição em factores primos.

Fracções; simplificação e redução ao menor denominador comum; dízimas; redução de uma fracção a dízima; operações sobre fracções. Fracções generalizadas; valores numéricos de expressões de termos fraccionários.

Proporcionalidade directa e inversa; proporções geométricas; propriedades fundamentais. Aplicações da proporcionalidade a regras de três simples e composta, percentagens, regras de companhia e juros simples.

Representação gráfica da proporcionalidade directa; aplicação à resolução de problemas simples.

Notas ao programa. Nos «casos de igualdade de triângulos» não se devem destacar os «casos de igualdade de triângulos rectângulos».

No cálculo das fracções deve evitar-se a multiplicidade das regras. Se algum número dado for inteiro, escrever-se-á sob a forma de fracção com o denominador mais conveniente.

As operações sobre fracções incluem a raíz quadrada, calculada com uma dada aproximação.

Os problemas de regra de três composta devem restringir-se ao caso em que figuram apenas três grandezas; os problemas de juros serão ùnicamente tratados como problemas de regra de três composta, sem lhes dar relevo que os destaque dos outros problemas do mesmo género.

Ao tratar de percentagens e juros o professor mostrará algumas facturas, cadernetas de depósito, letras e cheques.

No 2.º ano o programa inicia-se pela geometria.

3.º Ano

Álgebra

Exemplos de grandezas que podem variar em dois sentidos opostos; números positivos e negativos; posição de um ponto sobre um eixo; operações sobre números qualificados.

Expressões algébricas; monómios e polinómios; valores numéricos de expressões algébricas de uma ou duas variáveis.

Representação de um ponto num plano (em coordenadas cartesianas rectangulares). Noção elementar de variável e de função, dada a partir de grandezas de uso corrente; a representação gráfica de $y=ax$ e $y=ax+b$, em que a e b são valores numéricos.

Monómios inteiros de uma e duas variáveis: adição algébrica, multiplicação, divisão e potenciação.

Polinómios inteiros de uma variável e homogéneos de duas variáveis: adição algébrica; multiplicação; casos notáveis da multiplicação; divisão.

Fracções algébricas; simplificação e operações, apenas no caso de termos monómios.

Equações numéricas do 1.° grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica.

Sistemas de duas equações numéricas do 1.° grau a duas incógnitas: resolução algébrica e gráfica.

Problemas muito simples que se resolvam por meio de uma equação numérica do 1.° grau a uma incógnita ou por um sistema de duas equações numéricas do 1.° grau a duas incógnitas.

Desigualdades inteiras do 1.° grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica.

Geometria plana

Recta, semi-recta e segmento de recta.

Ângulos; ângulos adjacentes; ângulos complementares e suplementares; ângulos verticalmente opostos.

Triângulos; os três primeiros casos de igualdade de triângulos; relações entre os elementos de um triângulo.

Perpendicular ao meio de um segmento de recta; bissectriz de um ângulo. Linhas e pontos notáveis no plano do triângulo.

Rectas paralelas; propriedades angulares; ângulos de lados respectivamente paralelos e perpendiculares. Soma dos ângulos do triângulo; ângulo externo.

Construções gráficas.

Quadriláteros: propriedades características do paralelogramo, losango, rectângulo, quadrado e trapézio.

Círculo: arcos, cordas e apótemas; arcos e ângulos ao centro; medidas de arcos e de ângulos; unidades respectivas.

Ângulo inscrito; ângulo de um segmento; ângulo ex-inscrito; ângulo formado por duas cordas; ângulo formado por duas secantes; relações entre as medidas destes ângulos e as dos arcos correspondentes.

Notas ao programa. A representação gráfica das funções indicadas deve ser precedida da revisão dos gráficos do 1.° ciclo que possam servir de base a este estudo.

Os casos notáveis da multiplicação referem-se apenas ao quadrado de binómios e à diferença de quadrados.

Os princípios de equivalência das equações, sistemas de equações e inequações são apenas enunciados e verificados em face de exemplos numéricos.

Na resolução algébrica dos sistemas devem empregar-se apenas os métodos de substituição e redução ao mesmo coeficiente.

O estudo das equações será iniciado pela representação e consequente resolução de problemas muito simples.

A resolução das desigualdades fraccionárias não está incluída neste programa.

O estudo do triângulo e do círculo dará oportunidade ao conhecimento de proposições recíprocas.

O estudo da circunferência, da perpendicular ao meio de um segmento e da bissectriz de um ângulo introduzirá o conceito de «lugar geométrico».

Ao estudar os «três primeiros casos de igualdade de triângulos» o professor referir-se-á à existência do quarto caso.

4.° ano

Álgebra

Expressões algébricas; decomposição de polinómios em factores, pondo em evidência factores comuns ou aplicando os casos notáveis da multiplicação.

Fracções algébricas; simplificação e operações nos casos em que é possível a factorização indicada.

Equações numéricas e literais do 1.° grau a uma incógnita. Sistemas de duas equações numéricas e literais do 1.° grau a duas incógnitas; sistemas de três equações numéricas do 1.° grau e três incógnitas.

Problemas do 1.° grau a uma, duas e três incógnitas.

Generalização da noção de potência; potências de expoente nulo e de expoente negativo; operações.

Noção de número irracional; radicais; cálculo de radicais. Potências de expoente fraccionário; operações.

Sucessões numéricas. Noção de infinitamente grande e de infinitamente pequeno; noção de limite de uma sucessão.

Geometria plana

Lugares geométricos: pontos equidistantes de um ponto dado; de dois pontos dados; de uma recta dada: de duas rectas dadas. Aplicação a problemas de construção.

Razão de dois segmentos; relações entre segmentos de concorrentes intersectadas por paralelas; teorema de Thales e suas consequências. Homotetia; simetria em relação a um ponto. Semelhança; triângulos semelhantes e casos de semelhança dos triângulos. Consequências numéricas da semelhança dos triângulos: teoremas relativos a meias proporcionais no triângulo rectângulo, teoremas de Pitágoras, teoremas relativos ao quadrado do lado oposto a um ângulo agudo e a um ângulo obtuso, relações determinadas pelas bissectrizes; segmentos proporcionais no círculo.

Polígonos; semelhança de polígonos. Polígonos regulares: propriedades elementares.

Expressões que dão os valores dos lados e dos apótemas do quadrado, do hexágono regular e do triângulo equilátero em função do raio da circunferência circunscrita.

Perímetro da circunferência; comprimento de um arco.

Áreas; unidade de área. Figuras equivalentes. Áreas do rectângulo, do quadrado, do paralelogramo, do triângulo, do losango, do trapézio e do polígono; áreas do círculo e do sector circular.

Notas ao programa. No estudo dos radicais consideram-se índices apenas inteiros e superiores à unidade.

O estudo dos limites resume-se às noções indicadas, dadas por intermédio de exemplos da aritmética e da geometria.

5.° Ano

Álgebra

Logarítmos; teoremas relativos ao cálculo logarítmico; logarítmos decimais; uso de tábuas (de cinco decimais).

Equações do 2.° grau a uma incógnita; resolução algébrica. Problemas do 2.° grau.

Progressões aritméticas e geométricas; termo geral e soma de n termos.

Geometria no espaço

Noção de plano; modos de definir o plano.

Posição relativa de duas rectas no espaço. Posição relativa da recta e do plano; paralelismo da recta ao plano. Posição relativa de dois planos; paralelismo de dois planos. Ângulo de duas rectas no espaço; perpendicularidade da recta ao plano.

Diedros; perpendicularidade de dois planos. Ângulo de uma recta com um plano.

Distâncias.

Ângulos sólidos; seus elementos. Triedros: relações entre as faces.

Poliedros; poliedros regulares. Superfícies prismática e piramidal; superfícies cilíndrica e cónica. Prisma, pirâmide e troncos respectivos; cilíndro, cone e troncos respectivos. Superfíçies e sólidos de revolução (cilindro, cone, tronco de cone e esfera).

Esfera; zona, calote e segmentos esféricos; lúnula e cunha esféricas; camada esférica.

Áreas das superfícies do paralelepípedo, prisma, pirâmide. tronco de pirâmide regular, cilíndro, cone e tronco de cone de revolução. Áreas da zona esférica e da superfície da esfera.

Volumes do paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera.

Notas ao programa. No estudo das progressões não se deve tratar do problema da inserção de meios.

Os logarítmos, que são considerados como expoentes, têm neste programa uma feição nìtidamente prática; por vezes deve pedir-se uma dada aproximação no resultado. Equações envolvendo logarítmos, ou qualquer outro tipo de problemas teóricos, são inteiramente banidas.

O estudo das equações do 2.° grau deve ser iniciado de modo análogo ao das equações do 1.° grau, isto é, a partir de problemas simples. Os exemplos devem limitar-se ao caso de raízes reais.

6.° Ano

Álgebra

Noção elementar de variável e de função; expressão analítica de uma função; classificação das funções; funções inversas; representação geométrica de algumas funções.

Infinitamente grandes; infinitésimos; infinitésimos simultâneos; teoremas relativos ao produto e à soma de infinitésimos. Limite de uma variável; limite de uma função; operações sobre limites.

Noção elementar de continuidade de uma função.

Propriedades dos polinómios inteiros.

Adição algébrica, multiplicação e divisão de polinómios.

Divisão por $(x-a)$; polinómio idênticamente nulo; polinómios idênticos; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; regra de Ruffini.

Fracções algébricas. Símbolos de impossibilidade; símbolos de indeterminação da forma $0/0$, ∞/∞ e $0\times\infty$; verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta sob a forma indeterminada.

Equações: noções gerais e princípios de equivalência. Equação do 1.° grau a uma incógnita: resolução algébrica e gráfica; discussão.

Equação do 1.º grau a duas incógnitas: soluções inteiras, soluções inteiras e positivas; resolução numérica e gráfica.

Sistema de duas equações do 1.º grau a duas incógnitas: resolução algébrica e gráfica; discussão.

Trigonometria

Generalização da noção de ângulo e de arco; medidas.

Funções circulares directas: definição, variação e representação gráfica; funções circulares correspondentes a ângulos complementares, suplementares, que diferem de π radianos, simétricos, e cuja soma é igual a 2π radianos. Redução de um ângulo ao 1.º quadrante.

Relações entre as funções circulares do mesmo ângulo; valores destas funções para alguns casos particulares.

Funções circulares inversas.

Aritmética racional

Teoria dos números inteiros e das operações fundamentais.

Potenciação; sistemas de numeração.

Divisibilidade.

Números primos.

Máximo divisor comum e menor múltiplo comum.

Notas ao programa. No estudo das funções consideram-se apenas funções de uma variável real, mas inclui-se o caso em que há uma variável intermediária e uma final (função de função).

Para a determinação do verdadeiro valor, as expressões a considerar são apenas funções racionais fraccionárias ou expressões redutíveis a estas funções.

No estudo dos números inteiros ter-se-à em atenção que a teoria da adição e da multiplicação são apresentadas pelo método de indução; as anologias entre estas duas operações serão realçadas de modo a permitir abreviar o seu estudo e torná-lo simultâneamente mais profícuo.

7.º Ano

Álgebra

Análise combinatória — elementos distintos e sem repetição. Binómio de Newton.

Números complexos a duas unidades; forma algébrica: igualdade, desigualdade e operações.

Equação do 2.º grau a uma incógnita; resolução algébrica e gráfica; discussão.

Equação biquadrada; resolução algébrica; discussão. Transformação de um radical duplo na soma algébrica de dois radicais simples.

Equações irracionais redutíveis ao 2.º grau.

Trinómio do 2.º grau; representação gráfica; propriedades. Inequações: noções gerais e princípios de equivalência. Inequações do 2.º grau a uma incógnita; inequações fraccionárias que se resolvam por meio de inequações do 1.º ou 2.º grau a uma incógnita.

Problemas do 1.º e 2.º grau; discussão.

O problema das tangentes e o das velocidades: noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.

Trigonometria

Fórmulas da soma e da diferença de dois ângulos.

Fórmulas da duplicação e bissecção do ângulo.

Fórmulas de transformação logarítmica.

Tábuas trigonométricas: uso das tábuas naturais e logarítmicas.

Resolução de algumas equações trigonométricas simples.

Resolução de triângulos rectângulos e obliquângulos (casos clássicos); cálculo de áreas.

Aplicações a problemas simples de topografia.

Geometria

Introdução à geometria analítica plana:

- Coordenadas cartesianas e polares; suas relações.
- Distância de dois pontos; coordenadas do ponto médio de dois pontos dados.
- Noção de lugar geométrico definido por uma equação e de equação de uma linha; determinação das equações correspondentes a alguns lugares geométricos muito simples.
- Equações cartesianas da recta: problemas sobre a recta: equações da recta que passa por um e dois pontos; ponto de intersecção de duas rectas; ângulo de duas rectas; condições de paralelismo e perpendicularidade de duas rectas; distância de um ponto a uma recta.
- Estudo elementar dos lugares geométricos definidos por equações numéricas da forma: $x^2+y^2=r^2$; $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$; $b^2x^2\pm a^2y^2=a^2b^2$; $xy=k$; $y^2=2px$; $x^2=2qy$.
- Equações cartesianas: *a*) Da circunferência; *b*) Da elipse e da hipérbole, referidas aos eixos; *c*) Da parábola, referida ao eixo e à tangente no vértice.

Notas ao programa. As equações a que o programa se refere limitam-se a «equações de coeficientes reais».

As equações trigonométricas a considerar são as que se podem reduzir a equações algébricas dos programas do 6.º e 7.º anos, quando se toma para incógnita $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ ou $\operatorname{tg} x/2$.

Não se incluem no programa as demonstrações de equivalência das fórmulas relativas aos três teoremas fundamentais da resolução de triângulos.

As coordenadas cartesianas referem-se apenas a eixos rectangulares.

Observações

1.º ciclo

Com o ensino da matemática neste ciclo pretende-se que o aluno adquira o hábito de observar factos e generalizar os resultados; de sistematizar e classificar as propriedades estabelecidas experimentalmente; e, sem deixar de estimular a curiosidade e o interesse, pretende-se ainda habituar a criança a concentrar-se sobre a matéria em estudo, a executar com ordem e cuidado as experiências que constituem o fundo deste ensino e a registar no seu livro ou no seu caderno, com método e asseio e em linguagem adequada ao seu desenvolvimento mental, não apenas as experiências em que tomou parte ou viu fazer no curso, mas também o que se pode inferir delas e esteja no âmbito deste programa.

No 1.º ano não se separa o ensino da aritmética do da geometria; constituem um todo, o que permite acentuar a correlação existente entre estes dois ramos da matemática, como convém a estudos que devem manter um tão nítido carácter elementar.

No 2.º ano já se faz essa separação, mas o ensino tem ainda o mesmo sentido intuitivo e experimental intimamente coordenado com os interesses do aluno. Os conhecimentos de geometria continuam a adquirir-se por intuição sensível baseada na observação e na experiência, sendo as demonstrações lógicas totalmente banidas e substituídas por verificações experimentais.

Recomenda-se particularmente todo o cuidado com o rigor das definições e com o modo de sistematizar e coordenar os conhecimentos que os alunos vão adquirindo por via experimental.

É também indispensável obrigá-los a fixar determinadas propriedades e conceitos; sem o uso, embora parcimonioso, da memória, os resultados, por mais brilhantes que pareçam, são apenas passageiros e ilusórios.

De tudo o que fica dito se depreende que a «matemática» terá a cooperação íntima do «desenho» e dos «trabalhos manuais» e que o professor usará, tanto quanto possível, o método do laboratório.

Cada aluno deve ter uma colecção das figuras planas que constam deste programa e alguns sólidos geométricos, em cartão ou em madeira.

O liceu deve dispor de caixas de pesos e medidas, balanças de Roberval, provetas graduadas, tesouras e qualquer outro material que o professor ache conveniente para bem cumprir este programa.

Livros para o ensino

O livro para o primeiro ano terá o aspecto de um caderno de observações e registo de resultados; será gràficamente atraente e conterá gravuras, desenhos, gráficos, tabelas, questões propostas e resolvidas a par de outras não resolvidas e com os espaços necessários para a resolução. Estas questões tomam a forma de exercícios de aplicação; exercícios para esclarecimento de noções e regras ou para as formular e redigir em termos correctos; exercícios de revisão e coordenação de ideias.

Algumas gravuras são desenhos de modelos a executar pelos alunos.

O livro para o 2.º ano é um compêndio de geometria e aritmética. De aspecto gráfico cuidado, terá fundamentalmente em atenção a idade dos alunos a que se destina; em cada capítulo deverá conter exercícios no género dos indicados para o 1.º ano, com as respectivas respostas.

2.º ciclo

Na organização deste programa teve-se em vista que o papel formativo da geometria supera, e muito, o da álgebra.

O rigor e o sentido lógico das demonstrações de geometria elementar dão aos alunos hábitos de precisão de ideias e de linguagem, permitindo-lhes aplicar com êxito o raciocínio lógico-dedutivo não só a outras ciências como a questões da vida real.

O professor deve acautelar os alunos, por meio de exemplos adequados, contra os perigos da intuição sensível e da verificação experimental usadas no 1.º ciclo, levando-os deste modo a criar no espírito a necessidade da demonstração lógica.

Retoma-se neste ciclo o estudo da geometria plana desde o início, para construir, a partir dos alicerces, o edifício lógico-dedutivo da geometria. Deve-se, porém, ter em atenção as reduzidas possibilidades mentais dos alunos deste ciclo, e em especial do 3.º ano, pelo que são de aceitar sem demonstração as proposições que aos alunos pareçam evidentes, considerando-se, tanto na geometria plana como na geometria no espaço, uma axiomática muito generalizada.

Recomenda-se o uso de modelos, principalmente em geometria no espaço, não com a finalidade do 1.º ciclo, mas porque a observação e a experiência devem preceder as demonstrações; estas serão feitas por vezes sem recurso a figuras na pedra, servindo o modelo de base ao encadeamento lógico dos raciocínios.

Dentro de cada assunto, e em especial no programa do 5.° ano, o professor deve expôr apenas os teoremas mais simples e os mais importantes com as respectivas demonstrações. É preferível o entendimento perfeito da demonstração de poucos teoremas à retenção na memória de muitos teoremas, com ou sem demonstração; apenas nestas condições é possível o aluno fazer por si próprio, embora com o estímulo e auxílio do professor, as demonstrações de outros teoremas não apresentados na aula. Considera-se este trabalho pessoal do aluno um dos principais meios de alcançar os objectivos do ensino da geometria neste ciclo.

A resolução numérica e gráfica de numerosos problemas é o complemento indispensável deste programa de geometria.

O estudo da álgebra será orientado de modo a levar o aluno à compreensão de que este ramo da matemática é uma generalização da aritmética.

A distribuição dos assuntos pelos diferentes anos do ciclo foi feita de molde a introduzir em cada um deles novos centros de interesse que em parte contivessem os dos anos anteriores, o que obriga a repetir e a ampliar os fundamentos mais importantes da técnica do cálculo. A aquisição desta técnica e a resolução de problemas constituem a base do ensino da álgebra elementar; se a técnica de cálculo é indispensável para prosseguimento de estudos e como estímulo da atenção, a resolução de problemas é fundamental, não apenas como aplicação dessa técnica, mas porque satisfaz à preocupação formativa que orienta este programa. As noções de limite e infinitamente pequeno visam apenas à resolução de certos problemas geométricos — determinação de alguns perímetros, áreas e volumes — e o professor deve limitar-se ao desenvolvimento indispensável para atingir esta finalidade.

No cumprimento deste programa devem os métodos gráficos continuar a merecer especial atenção; de facto, estes métodos têm um valor educativo considerável e uma importância crescente, tanto nas aplicações práticas como na investigação científica.

Em todos os anos do ciclo o programa inicia-se pela álgebra; no 5.° ano esta parte do programa deve estar concluída no fim primeiro período.

Livros para o ensino. Compêndio de álgebra, em um volume, para os 3.°, 4.° e 5.° anos;

Compêndio de geometria, em um volume, para os 3.°, 4.° e 5.° anos.

Em cada capítulo os compêndios deverão apresentar exercícios de aplicação, dispostos segundo ordem crescente de dificuldade, com as respectivas respostas.

No compêndio de geometria, e sempre que tal seja possível, os teoremas deverão ser imediatamente seguidos de questões propostas aos alunos, quer sob a forma de pequenos problemas, de natureza gráfica ou numérica, quer sob a forma de questões teóricas de fácil dedução.

O aspecto gráfico dos compêndios, principalmente de geometria, deve merecer especial atenção.

3.° ciclo

O estudo da matemática no 3.° ciclo deve constituir para o aluno uma ginástica intelectual que lhe permita raciocinar com precisão e clareza, tanto no campo científico como no da vida prática.

Pretende-se que o aluno não só fique de posse de um certo número de princípios e teorias, em que será geralmente exigido o rigor próprio desta disciplina, mas que tenha desenvolvido a iniciativa pessoal e a faculdade de raciocínio, de modo a poder iniciar com confiança os estudos superiores.

Mantém-se neste programa o estudo da «aritmética racional», embora reduzido à teoria dos números inteiros, porque os seus métodos de estudo são os que mais se prestam a criar no aluno hábitos de rigor científico e ainda porque esta teoria vem esclarecer alguns conhecimentos adquiridos no 1.° ciclo, dando-lhes o encadeamento lógico indispensável à precisão matemática.

O programa de «geometria analítica», embora limitado a uma ligeira introdução a estudos que o aluno fará desenvolvidamente em cursos superioros, permite-lhe não concluir o curso liceal sem fazer ideia do maravilhoso instrumento de trabalho e de descoberta que é este ramo de matemática. A propósito deste estudo, e sempre que haja oportunidade, o professor fará pequenas revisões de geometria sintética.

Em todos os assuntos do programa, e em especial no de geometria analítica, o professor deve abster-se de um desenvolvimento incompatível com a índole do ensino liceal, com a capacidade mental dos alunos que frequentam estes cursos e com o tempo que lhes é destinado.

No estudo dos diferentes ramos da matemática, e em particular no da aritmética racional, o professor deve chamar a atenção dos alunos para os métodos de demonstração usados na matemática, servindo-se dos teoremas que reputar mais convenientes e indicando, no decorrer das demonstrações, as características de cada um deles.

Como a assimilação de uma ciência só é perfeita se a teoria e a prática se auxiliarem e completarem mùtuamente, um dos tempos semanais será destinado a aula prática.

Os factos da história da matemática relacionados com os assuntos a estudar, quando adaptados à mentalidade dos alunos, constituem um poderoso auxiliar para a boa compreensão de certas questões e, por vezes, também um incitamento ao trabalho.

Livros para o ensino. Compêndio de álgebra, em um volume; Compêndio de aritmética racional; Compêndio de trigonometria, em um volume; Compêndio de geometria analítica.

Os compêndios devem inserir notas biográficas dos matemáticos a que, segundo o desenvolvimento dos programas, haja de fazer-se referência. Devem também indicar uma pequena bibliografia de autores nacionais ou estrangeiros que os alunos possam consultar com gosto e relativa facilidade.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

COLÓQUIO INTERNACIONAL DE CÁLCULO DAS PROBABILIDADES E DE ESTATÍSTICA MATEMÁTICA

O Centro Nacional de Investigação Científica (C. N. R. S.) e a Fundação Rockfeller tornaram possível a realização deste colóquio internacional de grande interesse tanto sob o ponto de vista teórico como o das numerosas aplicacões da Estatística Matemática (agricultura, biometria, econometria, engenharia, etc.)· Presidiu ao colóquio o Prof. M. Fréchet, Presidente da Sociedade Estatística de França, sendo os trabalhos de secretaria assegurados pelo concurso das Srs. P. Belgodère (Paris) e Eyraud (Lyon).

Transcrevemos os nomes dos conferentes e respectivos temas versados:

A. BLANC-LAPIERRE, Ingénieur, PARIS: Considérations sur l'analyse harmonique des fonctions aléatoires.

G. DARMOIS, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris: Sur certaines formes de liaisons de probabilité.

P. DELAPORTE, Actuaire, PARIS: Sur une utilisation systématique de la Statístique mathématique en Analyse factorielle.

J. DOOB, Professeur à l'Univeriité, URBANA, Illinois (U. S. A.): Applications of the theory of martingales.

H. EYRAUD, Professeur à la Faculté des Sciences de LYON: Crédit et Spéculation.

R. FORTET, Professeur à la Faculté des Sciences de CAEN: Probabilité de perte d'un appel téléphonique: régime non-stationnaire, influence du temps d'orientation et du groupement des lignes.

E. HALPHEN, Ingénieur à l'Electricité de France, PARIS: Quelques remarques sur le problème de l'estimation.

J. KAMPÉ DE FÉRIET, Professeur à la Faculté des Sciense de LILE: Fonctions aléatoires et groupes de transformations dans un espace abstrait.

P. LÉVY, Professeur à l'Ecole Polytechnique, PARIS: Processus de Markoff dans le cas des fonctions à plusieurs variables.

G. MALÉCOT, Professeur à la Faculté des Sciences de LYON: Les processus stochastiques en génétique.

G. OTTAVIANI, Professeur à l'Université de ROME (ITALIE): Sur les concepts fondamentaux de la theorie des probabilités.

D. VAN DANTZIG, Professeur à l'Université d'AMSTERDAM (PAYS-BAS): Sur la méthode des fonctions génératrices.

J. VILLE, Professeur à la Faculté des Sciences de LYON: Étude des fonctions aléatoires du point de vue de la quantité d'information qu'elles contiennent.

J. WISHART, Professeur à l'École d'Agriculture de CAMBRIDGE (ANGLETERRE): Test of homogeneity of regression coefficients, and its application in the analysis of covariance.

H. WOLD, Professeur à l'Université d'UPSALA (SUÈDE): Sur l'analyse des séries stationnaires ponctuelles.

As conferências tiveram lugar no Instituto de Matemáticas da Universidade de Lyon, tendo-se celebrado a sessão de encerramento em Paris, na Sorbone, no dia 5 de Julho.

CONGRESSO INTERNACIONAL DE MATEMÁTICA

Em 1950, sob o patrocínio da Sociedade Matemática Americana realizar-se-á, em Massachusetts, um Congresso Internacional de Matemáticos. A Sociedade tinha já planeado promover um Congresso em Setembro de 1940 que teria lugar em Cambridge.

No Congresso de Oslo, em 1936, a Delegação americana tinha, em nome da Sociedade Matemática Americana, feito o convite para a reunião de 1940. Estavam pràticamente concluidos os planos para o Congresso de 1940 quando o eclodir da 2.ª Guerra Mundial, em Setembro de 1939, obrigou a Sociedade a adiá-lo para data mais favorável. Formou-se então um «Comité de Emergência» para actuar no intervalo e por recomendação deste organismo a Direcção da Sociedade votou a realização do Congresso para 1950.

Este Congresso de 1950 será o terceiro Congresso Internacional de Matemáticos que se realizará na América do Norte. O primeiro teve lugar na Universidade do Noroeste, em 1893, e o segundo na Universidade de Toronto, em 1924. Os Congressos Internacionais reuniram-se de quatro em quatro anos até 1936, excepto durante a guerra. Não tem havido reuniões algumas de matemáticos desde então e a Comissão Organizadora fez votos sinceros para que a de 1950 seja uma reunião verdadeiramente internacional onde os matemáticos americanos e os dos outros países compareçam em grande número.

A Direcção da Sociedade Matemática Americana votou unânimemente a realização dum Congresso de todos os matemáticos quaisquer que sejam as suas nacionalidades.

Data e local. O Congresso foi fixado de 30 de Agosto a 6 de Setembro de 1950. Cabe principalmente à Universidade de Harvard a honra de albergar os congressistas ainda que outras instituições da cidade de Boston colaborarão na recepção aos visitantes do Congresso.

Tipo do Congresso. Nos últimos tempos os matemáticos têm apoiado o processo da conferência na apresentação das investigações recentes nos campos onde se têm conseguido importantes avanços ou que estão em progresso.

Dado o êxito das conferências matemáticas sobre assuntos especiais realizadas na Rússia, França e Suíssa e, mais recentemente, durante a celebração do bicentenário de Princeton o Congresso de 1950 incluirá conferências em vários campos. Para a reunião de 1940 tinham sido planeadas 4 secções. O número de conferências foi restringido retirando-se a introdução afim de evitar a perda de interesse e de energias. Uma subcomissão da Comissão Organizadora, sob a presidência do Prof. A. A. Albert, está estudando actualmente a questão do número e dos campos de conferência que devem ser incluidos no Congresso de 1950 e os resultados das decisões da Comissão serão referidos posteriormente.

Seguindo o costume estabelecido, a Comissão Organizadora planeia um certo número de discursos limitados no tempo, por matemáticos de categoria.

Conjuntamente, realizar-se-ão reuniões para apresentação de notas com contribuições originais não incluidas nos progressos das conferências sobre os assuntos seguintes: I — Álgebra e Teoria dos Números; II — Análise; III — Geometria e Topologia; IV — Publicidade e Estatística, Cálculo Actuarial, Economia; V — Física Matemática e Matemáticas Aplicadas; VI — Lógica e Filosofia, História e Educação.

As línguas oficiais do Congresso de 1950 serão: inglês, francês, alemão, italiano e russo.

Organização. Os planos para o Congresso estão sob a supervisão de uma Comissão Organizadora eleita pela Assembleia da Sociedade Matemática Americana em Fevereiro de 1947.

O presidente é o Professor Garrett Birkhoff da Universidade de Harvard e o vice-presidente é o Professor W. T. Martin do Instituto de Tecnologia de Massachusetts. Os outros membros da comissão são: Professores J. L. Doob, G. C. Evans, J. R. Klive, Solomon Lefschetz, Saunders Mac Lane, Deão R. G. D. Richardson, J. L. Synge, Oswald Veblen, J. L. Walsh, D. V. Widder, Norbert Wiener e R. L. Wilder.

Muitas das subvenções prometidas para o Congresso de 1940 estão ainda disponíveis. Uma comissão financeira sob a presidência do Professor John von Neumann tenta adquirir fundos adicionais. Além do auxílio da Universidade de Harvard e do Instituto de Tecnologia de Massachusetts, a «Carnegie Corporation», o «Institute for Advanced Study» e o «National Research Council» contribuiram com generosas subvenções para o Congresso.

Uma «Comissão Editorial» sob a presidência do Professor Salomon Bochner tomou a responsabilidade da publicação das actas do Congresso.

O Professor J. R. Kline, da Universidade de Pennsylvania, foi nomeado Secretário do Congresso e o Dr. R. P. Poos, edinor da *Mathematical Reviews*, foi nomeado Secretário Associado.

Estadia. A Universidade de Harvard pôs os seus dormitórios e refeitórios à disposição dos matemáticos e seus hóspedes enquanto durar o Congresso.

A Comissão Organizadora espera poder oferecer quarto e gabinete de trabalho, sem encargos, a todos os matemáticos membros do Congresso que não habitem a América do Norte. A inscrição de membro do Congresso e o custo do alojamento serão anunciados antes da abertura do Congresso.

A Comissão de Recepção, de que é presidente o Professor L. H. Loomis, da Universidade de Harvard, planeia variado programa, que incluirá recepção, «garden-party», concerto sinfónico e banquete. Espera-se que os matemáticos americanos possam prestar variado auxílio e ponham os seus automóveis à disposição da Comissão de Recepção para excursões fora de Cambridge.

Fazem-se todos os esforços para reduzir o custo das viagens dos congressistas estrangeiros durante a sua permanência nos Estados Unidos. Antes da abertura do Congresso proporcionar-se-á a visita à cidade de New York servindo alguns matemáticos de guias.

Informações. Informações pormenorizadas serão, na devida altura, enviadas aos sócios da Sociedade Matemática Americana e às sociedades de Matemática e academias estrangeiras.

Quem se interessar em obter informações pode fazê-lo inscrevendo-se na sede da Sociedade e receberá na devida altura, informações sobre o programa e outras disposições.

As comunicações devem ser dirigidas a: «American Mathematical Society, 531 West 116th. Street, New York City 27, U. S. A.».

A Comissão Organizadora
(Tradução de M. Zaluar)

PROF. DR. MANUEL ZALUAR

Partiu para Paris em 31 de Outubro o prof. Dr. Manuel Zaluar na qualidade de bolseiro do Governo Francês atravez do Centre National de la Recherche Scientifique.

Não é a primeira vez que a «Gazeta de Matemática» regista a partida para o estrangeiro de membros da sua Redacção que assumiram funções em quadros universitários ou de institutos de investigação. Todavia, a partida do prof. Dr. Manuel Zaluar constitui um caso especial relativamente à «Gazeta de Matemática» da qual, além de ser um dos fundadores, era o redactor principal. Nesta qualidade arcou com a parte principal das responsabilidades e das tarefas preparatórias e conducentes à publicação da revista. Ao seu trabalho persistente não é demais atribuir a sobrevivência da «Gazeta de Matemática» durante nove anos de dificuldades e vicissitudes e o reconhecimento deste facto não é incompatível com a consideração devida às contribuições de todos os colaboradores, redactores e cooperadores da revista.

A ausência do prof. Dr. Manuel Zaluar não representa quebra na sua colaboração, pois está assegurada a sua contribuição mínima, como responsável da parte referente ao estrangeiro da nossa secção «Movimento Científico».

Assumiu as funções de redactor principal da «Gazeta de Matemática» o colaborador José Morgado.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

PONTOS DE EXAME DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES — 1948

Exames de aptidão para frequência das licenciaturas em ciências matemáticas, ciências físico-químicas e ciências geofísicas, preparatórios para as escolas militares e curso de engenheiros geógrafos — Ponto n.º 1 — Julho de 1948

Aritmética

2711 — Demonstrar que, se a e b são primos entre si, $(a+b)^n$ e $(a-b)^n$ ou são primos entre si ou têm o máximo divisor comum 2^n. R: *Se* $(a+b)^n$ *e* $(a-b)^n$ *admitem um* m. d. c., $a+b$ *e* $a-b$ *admitem também um* m. d. c. *que é precisamente* p *se* p^n *for o* m. d. c. *de* $(a+b)^n$ *e* $(a-b)^n$. *Então* p *divide a soma* $(a+b)+(a-b)=2a$ *e a diferença* $(a+b)-(a-b)=2b$ *e portanto, como não pode dividir simultâneamente* a e b *(hipótese)*, p *só pode ser igual ou a* 2 *ou a* 1. *Finalmente o* m. d. c. *de* $(a+b)^n$ *e* $(a-b)^n$ *só pode ser ou* 2^n *ou* 1.

Álgebra

2712 — Demonstrar a identidade

$$(2n+1)(2n+3)(2n+5)\cdots(4n-3)(4n-1)=\frac{n!}{2^n}\binom{4n}{2n},$$

onde n é qualquer inteiro positivo e o parêntesis do segundo membro significa um coeficiente binomial. R: *Basta notar que*

$$\binom{4n}{2n}=\frac{4n\,(4n-1)\,(4n-2)\,(4n-3)\cdots(2n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n\,(n+1)\cdots2n}=$$

$$=\frac{2^n\,2n\,(4n-1)\,(2n-1)\,(4n-3)\,(2n-2)\cdots(2n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots n\,(n+1)\cdots(2n-2)\,(2n-1)\,2n}=$$

$$=\frac{2^n\,(4n-1)\,(4n-3)\cdots(2n+3)\,(2n+1)}{n\,!}$$

e por isso

$$\frac{n!}{2^n}\cdot\binom{4n}{2n}=(4n-1)\,(4n-3)\cdots(2n+3)\,(2n+1)\,.$$

Cálculo Numérico

2713 — Calcular até às décimas de minuto o ângulo que a diagonal duma face dum cubo forma com uma diagonal do cubo que a intersecte. R: *A diagonal duma face mede* $a\sqrt{2}$ *se for* a *a aresta do cubo. Vê-se fàcilmente que, se for* α *o ângulo pedido, é* $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}/2$ *e* $\log\operatorname{tg}\alpha=1/2\log2+\operatorname{colg}2=0,15052+\bar{1},69897=\bar{1},84949$ *donde* $\alpha=35°\,15'\,53''$ *ou, aproximadamente,* $\alpha=35°\,15',9$.

Geometria Plana

2714 — Considere-se um quadrado $ABCD$, a diagonal AC, o semicírculo circunscrito ADC e o quarto de círculo AC de centro B. Demonstrar que a área da lúnula limitada por estes dois arcos é igual à do triângulo ABC. R: *Se for* l *o lado* $\overline{AB}$ *será:* $l^2/2$ *a área do triângulo* ABC; $l\sqrt{2}$ *o diâmetro da circunferência circunscrita e* l *o raio da circunferência de centro* B. *A área da lúnula é então*

$$(\pi\cdot2\cdot l^2):8-(\pi l^2/4-l^2/2)=l^2/2\,.$$

Geometria no Espaço

2715 — Considerando um tronco de cone de revolução de bases paralelas circunscritível a uma esfera, mostrar que a geratriz do tronco é igual à soma dos raios das bases e em seguida provar que a altura do tronco é igual ao dobro da média geométrica dos referidos raios. R: *Se cortarmos o tronco e a esfera inscrita por um plano diametral da esfera que contenha uma geratriz do tronco, vê-se imediatamente da figura, intersecção desse plano com o tronco e a esfera, (um trapésio isósceles tendo inscrita uma circunferência) que* $g=r_1+r_2$ *(propriedade das tangentes tiradas de um ponto para a circunferência), se for* g *a geratriz do tronco e* r_1 *e* r_2 *os raios das bases do mesmo. Da figura tira-se também que* $(r_1+r_2)^2=h^2+(r_2-r_1)^2$ *e portanto* $h^2=4r_1r_2$ *e* $h=2\sqrt{r_1r_2}$ c. q. d.

Trigonometria

2716 — Demonstrar a identidade

$$2\operatorname{sen}\left(45°+\frac{A-B}{2}\right)\cos\left(45°-\frac{A+B}{2}\right)=\cos B+\operatorname{sen}A\,.$$

R: *Como se sabe é:*

$$\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}\beta=2\operatorname{sen}(\alpha+\beta)/2\cdot\cos(\alpha+\beta)/2\,.$$

Ora a expressão dada pode escrever-se:

$$2\operatorname{sen}\frac{(90°-B)+A}{2}\cos\frac{(90°-B)-A}{2}$$

e, portanto é igual a

$$\operatorname{sen}(90°-B)+\operatorname{sen}A=\cos B+\operatorname{sen}A\,.$$

Soluções dos n.os 2711 a 2716 de J. da Silva Paulo

Exames de aptidão para frequência dos preparatórios para a Faculdade de Engenharia — Ponto n.º 1 — Julho de 1948.

2717 — Dê a forma de um polinómio ordenado, de coeficientes inteiros, igualado a zero, à equação:

$$\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{1}{5}\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}x\,(x^2-1)$$

R: $\frac{1}{3}\left(x^4-4\frac{x^3}{2}+6\frac{x^2}{4}-4\frac{x}{8}+\frac{1}{16}\right)-\frac{1}{5}\left(x^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}(x^3-x)$, *donde:* $80x^4-190x^3+72x^2-10x+17=0$.

2718 — Classifique as funções: *a)* $z=\frac{x^2-1}{\sqrt{3}}+x\sqrt{2}$; *b)* $z=x^2+2\sqrt{y}+1$; *c)* $z=\frac{\sqrt{3}}{1+x}+\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}$; *d)* $z=\operatorname{sen}2\alpha$ e construa o gráfico da última. R: *Respectivamente* a) *racional inteira,* b) *algébrica irracional,* c) *algébrica racional fraccionária,* d) *transcendente goniométrica, se considerarmos* α *variável.*

2719 — Defina superfície prismática, e a partir desta noção defina prisma oblíquo.

2720 — Dispondo de umas tábuas que lhe dêem os logaritmos com o mínimo de cinco decimais dos números e das funções goniométricas, determine, com a aproximação que aquelas lhe permitirem, os valores de α que satisfazem à equação:

$$\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1-\sqrt[3]{0,32541}}{\cos 327°\,15'\,10''}\,.$$

2721 — Representando por a e por b respectivamente, os comprimentos das arestas laterais e da base duma pirâmide regular, triangular, determine a fórmula que dá o volume da mesma pirâmide. R: $V=Ah/3$, *sendo* A *a área da base e* h *a altura da pirâmide. Ora* $A=\sqrt{3}\,b^2/4$ *e* $h=\sqrt{a^2-b^2/3}$ *em virtude do raio da circunferência circunscrita ao triângulo equilátero de lado* b *ser* $r=b/\sqrt{3}$. *Então* $V=\sqrt{3}\,b^2\sqrt{a^2-b^2/3}\,/\,12$.

2722 — A que chama combinações de 4 objectos 3 a 3? Forme estas combinações com as 4 primeiras letras do alfabeto e verifique o seu número pela fórmula respectiva R: abc, abd, acd, bcd; $\binom{4}{3}=\binom{4}{1}=4$.

2723 — São dados sobre o plano um ponto, uma recta e uma circunferência. Pelo método dos lugares geométricos determinar o segmento que passa por aquele ponto e com os extremos naquelas linhas, que seja dividido pelo mesmo ponto em duas partes numa razão dada.

Soluções dos n.os 2717, 2718 e 2721 de A. Andrade Guimarães

I. S. C. E. F. — Matemáticas Elementares — Exames de aptidão para frequência — Prova escrita de Matemática — 1948.

Aritmética

2724 — Demonstre que a expressão $a(a^2+2)$ é sempre divisível por 3, qualquer que seja a. R: *Se* $a=\dot{3}$ *está o caso demonstrado. Supomos então* $a=\dot{3}+r$ *donde* $a^2+2=(\dot{3})^2+2(\dot{3})r+r^2+2=\dot{3}+r^2+2$.

Tanto para $r=1$ *como para* $r=2$ *se tem sempre* $a^2+2=\dot{3}$.

Cálculo Numérico

2725 — Simplifique $\left(\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^{-1/3}:\left(\dfrac{1}{x+y}\right)^{1/3}$ e calcule o seu valor para $x=\operatorname{cotg} 1014^\circ 12'$ e $y=\operatorname{sen} 208^\circ 17'$ (utilize logaritmos). R:

$$\left(\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}-y^{-1}}\right)^{-1/3}:(x+y)^{-1/3}=\left(\frac{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}}{\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)(y+x)}\right)^{-1/3}=$$

$$=\left(\frac{(y^2-x^2)}{(y-x)\,(y+x)\,xy}\right)^{-1/3}=(xy)^{-1/3}$$

$$x=\operatorname{cotg} 1014^\circ 12'=\operatorname{cotg} 294^\circ 12'=-\operatorname{cotg} 65^\circ 48'$$

$$y=\operatorname{sen} 208^\circ 17'=-\operatorname{sen} 28^\circ 17'$$

$$\log \operatorname{cotg} 65^\circ 48'=\bar{1},65265$$

$$\log \operatorname{sen} 28' 17'=\bar{1},67562$$

$$\log (xy)=\bar{1},32827$$

$$\log z=\bar{1},77609 \rightarrow z=0,59716.$$

Álgebra

2726 — Determine m de modo que o trinómio $f(x)=(m-1)x^2-2mx-3$ admita uma raiz negativa e outra positiva e inferior a 4. R: $f(x)=(m-1)x^2-2mx-3$; $x^2-\dfrac{2m}{m-1}x-\dfrac{3}{m-5}=0$.

Se $-\alpha$ *é a raiz negativa e* β *é a raiz positiva, será:* $\alpha\cdot\beta=\dfrac{3}{m-1}$ *e como* $\beta>4$ *vem* $4\alpha>\dfrac{3}{m+1}$ *ou* $\alpha>\dfrac{3}{4(m-1)}$. *Mas* $\beta-\alpha=\dfrac{2m}{m-1}$ *ou* $\beta>\dfrac{2m}{m-1}+\dfrac{3}{4(m-1)}$ *e portanto* $\dfrac{2m}{m-1}+\dfrac{3}{4(m-1)}<4$ *ou* $8m+3<16(m-1)$ *donde* $m>\dfrac{19}{8}$.

Geometria Plana

2727 — É dado um triângulo equilátero de lado a e um ponto M, qualquer, situado no interior do triângulo. Demonstre que a soma das distâncias do ponto M aos três lados do triângulo é independente da posição do ponto M. R: *Unindo* M *com* A *e com* B *desenha-se um triângulo com base num lado do triângulo equilátero e com altura* h_{AB}, *distância de* M *a* $\overline{AB}$; *a área desse triângulo é* $1/2\, l\cdot h_{AB}$. *Unindo* M *com* B *e* C *obtém-se outro triângulo de área* $1/2\, l\cdot h_{BC}$. *Unindo* M *com* C *e* A *obtém outro triângulo de área* $1/2\, l\cdot h_{CA}$. *A soma das três áreas é igual à do triângulo equilátero de lado* l *e altura* h. *Temos então*

$$1/2\, l\cdot h_{AB}+1/2\, l\cdot h_{BC}+1/2\, l\cdot h_{CA}=1/2\, l\cdot h$$

donde

$$h_{AB}+h_{BC}+h_{CA}=h=\text{constante}.$$

Geometria no Espaço

2728 — Um cubo está inscrito numa esfera de raio R. Calcule a área lateral do cone recto de revolução cuja base é circunscrita a uma das faces do cubo e cujo vértice é o centro da esfera. R: *A diagonal do cubo* 2R *é a hipotenusa de um triângulo rectângulo de que um cateto é a aresta* x *do cubo e o outro cateto é a diagonal* $x\sqrt{2}$ *de uma face do cubo.*

Vem portanto $2x^2+x^2=4R^2$ *ou* $x=2R/\sqrt{3}$.

O raio da base do cone é então $x\sqrt{2}/2=R\sqrt{2/3}$.

O semi-perímetro da base do cone é $\pi R\sqrt{2/3}$ *e como a geratriz é* R *teremos: área lateral* $=\pi R^2\sqrt{2/3}$.

Trigonometria

2729 — Determine os ângulos x que satisfazem à relação $\operatorname{tg}(x+\pi/3)=\operatorname{cotg}(\pi/2-3x)$. R: $\operatorname{tg}(x+\pi/3)=\operatorname{cotg}(\pi/2-2x)=\operatorname{tg} 3x$. *Arcos com a mesma tangente diferem de* $n\pi$, *logo* $3x-x-\pi/3=n\pi$ *donde* $x=(3n+1)\pi/6$.

Soluções dos n.os 2724 a 2729 de José R. de Albuquerque

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

Baccalauréat de Mathématiques élémentaires — Paris — Session de juin, 1948.

(Durée de l'épreuve: 3 heures)

I

2730 — Établir les formules de transformation d'une somme ou d'une différence de 2 sinus ou de 2 cosinus. Problème inverse — Application: résoudre l'équation:

$$\cos 2x + \cos 6x = \sin 3x - \sin 5x .$$

2731 — Étudier les variations et representation graphique de $y = -x^2 - x + 2$, en prenant pour unité le double centimètre. On considère la droite qui passe par les points $A(0,2)$ et $B(1,0)$. Evaleur l'aire géométrique comprise entre cette droite et la courbe représentative de y.

2732 — Epure de l'intersection d'un plan et d'une droite en géométrie descriptive et en géométrie côtée, lorsque le plan est défini par deux droites parallèles.

II

2733 — D'un point O fixe, pris à l'intérieur d'une parabole donnée, de foyer F et de directrice Δ, on mène la parallèle D à son axe: Soit P le point où elle coupe Δ.

a) Construire le point d'intersection I de la droite D avec la parabole, ainsi que la tangente (T) en I à cette dernière.

b) On considère un cercle variable (c) passant constamment par les points O et P; soient S_1 et S_2 les points où il coupe (T); soient T_1 et T_2 les tangentes autres que (T), menées des points S_1 et S_2 à la parabole donnée; M_1 et M_2 leurs points de contact et P_1 et P_2 leurs projections sur Δ.

Démontrer que T_1 est parallèle à OS_2 et que T_2 est parallèle à OS_1.

c) Soit Q l'intersection des droites T_1 et T_2. Quel est, quand le cercle (c) varie, le lieu géométrique de ce point Q?

d) Montrer que, parmi les cercles (c), il y en a généralement un qui est tel que les droites OS_1 et OS_2 soient perpendiculaires.

Que peut-on dire de la position correspondant de Q? Cas d'exception.

e) Démontrer que l'on a toujours $\dfrac{\overline{QM_1}}{\overline{S_2 O}} = \dfrac{\overline{M_2 Q}}{\overline{M_2 S_2}}$

Qu'en conclut-on pour les points $M_1 M_2$ et O?

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQUÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS COMPLEMENTOS DE ÁLGEBRA

F. C. L. — Álgebra Superior — 2.° exame de frequência — 1947-48.

2734 — Certa função diferenciável, $f(x,y)$, verifica a relação $x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y) = m \cdot f(x,y)$ com m constante.

Que se pode afirmar da função f?

Prove a proposição que serve de base à afirmação.

2735 — Exponha sumàriamente o método de Newton para o cálculo aproximado de uma raiz de $f(x)$, localizada em certo intervalo (a,b).

2736 — Justifique o préstimo das condições de Fourier como condições de exclusão, e refira-se à forma de levantar a dúvida que, porventura, ocorra no problema da contagem das raízes de $f(x)$ em (a,b), quando as condições de Fourier se revelam insuficientes.

2737 — Desenvolva a função $f(x) = \dfrac{2x}{(x-2)^2}$ em série de potências inteiras de $1/x$, e indique, justificando a região de convergência da série obtida.

2738 — Separe as raízes da equação $2y^3-3y-10=0$. Quantas raízes $y=\varphi(x)$ define, implìcitamente, a equação $2xy^3-3x^2y-10=0$ nas vizinhanças do ponto $x=1$?

Calcule, para alguma delas, o coeficiente angular da tangente, no ponto de abcissa 1, à respectiva imagem. Calcule, também, $\lim_{x=\infty} y/x$ e $\lim_{x=\infty}(y-xy')$ e figure geomètricamente os resultados.

Enunciados dos n.os 2734 a 2738 de Humberto de Menezes

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — 1947-48.

2739 — Determinar os parâmetros m e n de modo que o polinómio $f(z)=z^4-6z^2+(m-1)z+2-n$ se possa pôr sob a forma $(z-\alpha)^3(z-\beta)$.

Número de soluções do problema. Se mais do que uma, fixe-se numa delas e determine α e β.

2740 — Quantas raízes $y=\varphi(x)$ define implìcitamente a equação $f(x,y)=x^2(1-x)-y^2(1+y)=0$ nas vizinhanças do valor $x=1$? Determine, para alguma delas, a direcção com que a respectiva imagem passa no ponto de abcissa 1, e o sentido da concavidade dessa imagem no referido ponto.

2741 — Como se apresentam, quando existem, as raízes imaginárias em polinómio real? Justifique a resposta.

2742 — Defina equação recíproca; indique, justificando, como se pode reconhecer se dada equação

$$f(z)=p_0z^n+p_1z^{n-1}+\cdots+p_{n-1}z+p_n=0$$

é recíproca, e exponha a técnica de resolução na hipótese $p_0\cdot p_n<0$.

2743 — Estabeleça a fórmula fundamental do Cálculo Integral e descreva, com justificação, a sua aplicação ao cálculo do volume gerado pela rotação, em torno de $0x$, do arco $\widehat{AB}$ de equação $y=f(x)$. Tome α e β como abscissas de A e B.

2744 — Definida uma homologia pelo seu centro S, pelo eixo e e pela recta de fuga i, desenhe uma circunferência $[c]$ cuja figura homológica seja uma parábola com um dado ponto impróprio E_∞. Determine: 1.º o eixo e o vértice da parábola; 2.º uma tangente à parábola, com uma direcção dada (diferente da do ponto impróprio da parábola).

Enunciados dos n.os 2739 a 2744 de Humberto de Menezes

F. C. L. — Matemáticas Gerais — Exame final — 20 de Julho de 1948.

2745 — Dada a função $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^3-y^3}$ indique o lugar dos seus pontos de descontinuidade. Assinale as regiões do plano em que: 1) a função tem derivadas parciais iguais; 2) tem derivada parcial em ordem a x superior em módulo à derivada parcial em ordem a y; 3) não tem derivadas parciais finitas.

2746 — *a*) Mostre que a equação $x^3+x^2y+xy^2+y^3=0$ define y como função implícita de x na vizinhança de qualquer ponto P, distinto da origem e tal que as suas coordenadas satisfazem à equação; *b*) quantas variáveis tem uma função que possui 21 derivadas parciais contínuas de 2.ª ordem distintas?

2747 — Um jogador faz um lançamento imparcial dum dado perfeito; tem o capital de 200 escudos e ganha 100 escudos se sair um número par de pontos e perde 100 escudos se sair um número ímpar de pontos. 1) Indique a esperança matemática do jogador; 2) Calcule a esperança moral do jogador; 3) Calcule a esperança moral se o capital for 100 escudos, mantendo-se as condições restantes do problema.

2748 — *a*) Fazem-se mil lançamentos imparciais duma moeda perfeita; saem cruzes 499 vezes. Com que proposição está de harmonia este resultado? Justifique a resposta. *b*) Uma turma tem 10 alunos do sexo masculino 5 dos quais bons e 15 alunos do sexo feminino 7 dos quais bons. Um aluno ou é do sexo masculino ou do feminino (modos de realização incompatíveis do acontecimento de ser aluno), consequentemente a probabilidade de um aluuo ser bom é $5/10+7/15=29/30$ (teorema das probabilidades totais). Faça a crítica deste raciocínio.

2749 — *a*) Uma variável casual assume os valores $1,8,7,2,7$. Calcule a medida de assimetria β_1. *b*) A distribuição de *a*) é positivamente ou negativamente assiméirica? Justifique a resposta.

Enunciados dos n.os 2745 a 2749 de Peter T. Braumann

I. S. A. — Matemáticas Gerais — 2.º exame de frequência ordinário — 22-5-48.

2750 — Dada a série

$$\frac{x}{1\cdot3}-\frac{x^2}{3\cdot5}+\frac{x^3}{5\cdot7}-\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$$

a) Determine os valores de x para os quais ela é convergente. *b*) Calcule a sua soma quando $x=-1$.

R: a) $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

b) $S(-1) = -\frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) = -\frac{1}{2}$.

2751 — Dadas as funções $u = \log(\operatorname{arctg} e^z)$ e $z = 1 + \operatorname{tg}^2(x^2-1)$, calcule a derivada, para $x=1$, de u em ordem a x. R: $\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = \left(\frac{du}{dz}\right)_{z=1}\left(\frac{dz}{dx}\right)_{x=1} = 0$.

2752 — Estude as variações da função $y = f(x)$ definida pela relação $x^2 y - 2x - 4y = 0$. R: *A função* $y = \frac{2x}{x^2-4}$ *é decrescente* $\left(y' = -\frac{2(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0\right)$ *não tem máximos nem mínimos e tem a origem como ponto de inflexão* $\left(y'' = 4x\frac{x^2+12}{(x^2-4)^3}\right)$. *As rectas* $y=0$ *e* $x = \pm 2$ *são assíntotas da curva por ela representada.*

2753 — Estude a continuidade e derivabilidade da função assim definida:

$$f(x) = \begin{cases} 1/2\, x^2 + 2 & \text{para } x \neq n \\ |1+x| + |1-x| & \text{para } y = n \end{cases}$$

(n inteiro, positivo, negativo ou nulo).

R: *Contínua e derivável para* $x \neq n$, $x=0$ *e* $x = \pm 2$,

2754 — É dado um triângulo isósceles de base 20 e altura 8. De todos os paralelogramos inscritos neste triângulo, com um dos lados assente na base do triângulo e a medida dos ângulos agudos dada por $\operatorname{arctg} 4/3$, quais as dimensões do de área máxima? R: *Designando a altura por* h *e a base por* b, *temos* $b = 5/2\,(8-h)$ *e a função* $S(h) = (20 - 5/2\,h)\,h$ *terá um máximo para* $h=4$.

Os lados do paralelogramo medem 10 *e* 5.

I. S. A. — Matemáticas Gerais — Exame final — 24 de Julho de 1948.

2755 — Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{e}{n}\sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}$. R: 4.

2756 — Determine a natureza e, em caso de convergência, a soma da série $\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2-1}$. R: $S = 3/4$.

2757 — Dada a função $y = \operatorname{sen}(\operatorname{arc}\cos x)$ determine y' e y'' e verifique que tem lugar a relação $(1+x^2)\,y'' - xy' + y = 0$.

2758 — Escreva a equação da tangente à curva $y = (x-1)^2$ que é paralela a Ox. R: $Y=0$.

2759 — Se dois números tem soma constante, pode ser mínimo o seu produto? E máximo?

R: Máximo quando os números forem iguais..

2760 — Estude o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + \lambda z = 2 \\ \lambda x + 2y + z = -1 \end{cases}$.

R: *Determinado se* $\lambda(\lambda-1) \neq 0$; *impossível se* $\lambda = 0$; *simplesmente indeterminado e equivalente a* $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$ *se* $\lambda = 1$.

Soluções dos n.os 2750 a 2760 de F. R. Dias Agudo.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de frequência ordinário — 21 de Junho de 1948.

I Parte

2761 — Determine o limite excedente das raizes do polinómio $f(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 6x - 3$ e calcule a maior delas em primeira aproximação. R: *Para* $x=0$ $f(x)$ *é negativo e as derivadas são positivas; para* $x=1$ $f(x)$ *é já positivo. Então o limite excedente das raizes é* $=1$. *A sucessão de Fourier perde uma variação de* $x=0$ *a* $x=1$; *no intervalo* (0,1) *há uma única raiz e essa é a maior. Como* $f''(x)$ *mantém o sinal no intervalo, e como* $f(1)\cdot f'(1) > 0$, $x=1$ *é o extremo favorável à correcção de Newton. Tem-se* $f(1)/f'(1) = 8/20$, *e a primeira aproximação é* $1 - 8/20 = 3/5$.

2762 — Ache o valor de α que torna compatível as equações

$$\begin{aligned} u + 2v \qquad & + 3y + 4z = 2 \\ 2u + 3v \qquad & + y + 2z = 3 \\ 3u \qquad + 5x & + 6y - 4z = 3 \\ 5v - 5x & - 2y + 10z = \alpha \end{aligned}$$

e determine a correspondente solução. R: *Condensando a matriz do sistema vem*

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & 5 & 6 & -4 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -2 & 10 & -\alpha \end{Vmatrix} \to \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -5 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 27 & 20 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-\alpha \end{Vmatrix}$$

As equações são compatíveis para $\alpha = 2$ *e então o sistema dado é equivalente uo seguinte*

$$\begin{aligned} u + 2v &= 2 - 3y - 4z \\ v &= 1 - 5y - 6z \\ 5x &= 15 - 27y - 20z \end{aligned}$$

satisfeito por

$$\begin{aligned} u &= 7y + 8z \\ v &= 1 - 5y - 6z \\ x &= 3 - 27/5y - 4z \end{aligned}$$

II Parte

2763 — Propostos os determinantes

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \qquad \nabla = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_1^2 & A_1^3 \\ A_2^1 & A_2^2 & A_2^3 \\ A_3^1 & A_3^2 & A_3^3 \end{vmatrix}$$

o último dos quais constituído pelos complementos algébricos dos elementos do primeiro, determine o ângulo dos planos

$$a_i^1\, x + a_i^2\, y + a_i^3\, z = 0$$
$$A_j^1\, x + A_j^2\, y + A_j^3\, z = 0$$

discutindo os casos $i=j$ e $i \neq j$.

2764 — Supondo $f(x,y)$ diferenciável em $P(a,b)$ — ponto interior ao campo de existência da função — calcule o acréscimo $\partial f = f(x,y) - f(a,b)$ na hipótese de $M(x,y)$ se achar sobre a semi-recta

$$r) \begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \end{cases} \quad (t > 0).$$

Defina derivada de $f(x,y)$ em $P(a,b)$ segundo a direcção $r)$ e ache o seu valor na hipótese de $f(a,b)$ ser um máximo ou mínimo.

2765 — Seja $\widehat{AB}$ a imagem da função $y = f(x)$, regular em (a,b), e seja $Y = \varphi(x)$ a equação da corda $\overline{AB}$. Prove que $f(x) - \varphi(x)$ tem um extremo em certo ponto c interior a (a,b), e deduza dêsse facto que *todo o arco AB fica para um memo lado de uma tangente paralela à corda AB*.

Entendendo-se por *tangente ordinária* a tangente que não é de inflexão nem tem A ou B por ponto de contacto, prove que *sobre o arco $\widehat{AB}$, toda a tangente ordinária é paralela a alguma corda*. É exacta a recíproca? Porquê?

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — 2.º exame de frequência traordinário — 28 de Junho de 1948.

I Parte

2766 — Calcule os três primeiros termos do desenvolvimento de $y = \sqrt[3]{1+x}$ em série inteira em $x-1$. Qual o intervalo de convergência? R: *Temos*

$$y = \sqrt[3]{1+x} = [2 + (x-1)]^{1/3} = 2^{1/3} \cdot \left[1 + \frac{x-1}{2}\right]^{1/3} =$$
$$= 2^{1/3}\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{x-1}{2} + \frac{1/3\,(1/3-1)}{2!} \cdot \frac{(x-1)^2}{4} + \cdots\right)$$

para $\left|\dfrac{x-1}{2}\right| < 1$, *isto é, para* $-1 < x < 3$.

2767 — Verifique que pode aplicar-se à equação $f(x,y) = xy^3 + x^3 y - 2 = 0$, em torno do ponto $P(1,1)$ o teorema de existência das funções implícitas. Designando a função implícita por $y = \varphi(x)$ calcule $\varphi'(1)$.

Exprima em função de x e de y a derivada de $F(x) = f'_y(x,y)$ quando $y = \varphi(x)$ e verifique que é sempre $F'(x) \geq 0$. Daí e da relação $xf'_x + yf'_y \equiv 8$ conclua que $y - xy'$ tem derivada negativa. De onde vem a relação $xf'_x + yf'_y \equiv 8$? R: *O teorema pode aplicar-se porque* $f(1,1) = 0$ *e as derivadas parciais* $f'_x = y^3 + 3x^2 y$ *e* $f'_y = 3xy^2 + x^3$ *são finitas e contínuas e nunca conjuntamente nulas na vizinhança de* P. *Por ser* $f'_y \neq 0$ *na vizinhança de* P, *tem-se:*

$$\varphi'(1) = -\frac{f'_x(1,1)}{f'_y(1,1)} = -1.$$

De $F(x) = 3xy^2 + x^3$ *vem* $F'(x) = (3y^2 + 3x^2) + + 6xy \cdot \left(-\dfrac{y^3 + 3x^2 y}{3xy^2 + x^3}\right)$ *e efectuando os cálculos vem:*

$$F'(x) = \frac{3\,(x^2+y^2)}{3y^2+x^2} \geqslant 0.$$

De $\dfrac{x \cdot f'_x + y \cdot f'_y}{f'_y} = \dfrac{8}{f'_y}$ *temos* $y - xy' = 8/f'_y$ *e portanto* $(y - xy')' = \left(\dfrac{8}{F}\right)' = 8\left(-\dfrac{F'}{F^2}\right) < 0$. *Pondo* $\Psi(x,y) = = xy^3 + x^3 y$ *temos:* $x\Psi'_x + y\Psi'_y = 4\Psi$, *visto que* Ψ *é função homogénea de grau* 4. *Mas* $\Psi'_x = f'_x$ *e* $\Psi'_y = f'_y$ *e* $\Psi = 2$ *donde resulta:* $x \cdot f'_x + y \cdot f'_y = 8$.

II Parte

2768 — Defina função crescente em um ponto e em um intervalo, e prove que $f(x)$: $a)$ é contínua se for crescente e tomar todos os valores desde $f(a)$ até $f(b)$; $b)$ é limitada se for crescente (no intervalo (a,b)); $c)$ é incessantemente crescente se tiver derivada positiva ou nula (não identicamente nula em parte alguma).

Mostre ainda que toda a derivada é contínua no interior de um intervalo de monotonia.

2769 — Defina sucessão de Fourier de $f(x)$ em (a,b) e mostre como tal sucessão reflecte a passagem de x por um zero de $f(x)$ ou de alguma das funções seguintes.

Deduza daí a regra dos sinais de Descartes.

2770 — Exponha as regras de exclusão que se usam na pesquisa das raízes racionais em polinómios reais de coeficientes inteiros.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Prova escrita do exame final — 1948.

2771 — Represente geomètricamente a função

$$y = 2/(x-1)(x^2+1).$$

R: *Domínio: intervalos abertos* $(-\infty, 1)$ *e* $(1, +\infty)$. *À esquerda de* $x=1$ *vem* $\frac{2}{(1-h-1)((1-h)^2+1)} = \frac{2}{-h(h^2-2h+2)}$ *e a função é negativa. Do mesmo modo à direita de* $x=1$ *a função é positiva.*

Traços nos eixos: $(0, -2)$; *não corta o eixo* $\overline{OX}$.

Ramos infinitos: à esquerda e à direita de $x=1$ *vem respectivamente* $y=\mp\infty$ *para* $x=\pm\infty$ *vem respectivamente* $y=\pm\infty$.

Assíntotas: há apenas paralelas aos eixos; $x=1$ *e* $y=0$.

Variação: $y'=-\frac{6x^2-4x+2}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$ *não se anula para valores reais e é sempre negativa. Não há máximos nem mínimos e a função* y *é sempre decrescente.*

2772 — Pesquise as raizes de $f(x)=x^5-4x^4+4x^3-2x^2-5x-4$ no intervalo $(0, 1)$. R: *Tomando* $2{,}4<\sqrt{6}<9/25$ *em que r é a raiz de* $f'''(x)$ *situada no intervalo* $(0,1)$. *Formemos o seguinte quadro*

	0	3/10	9/25	1
$f(x) = x^5-4x^4+4x^3-2x^2-5x-4$	-4	$-5{,}60197$	$-$	-10
$f^{I}(x) = 5x^4-16x^3+12x^2-4x-5$	-5	$-5{,}5915$	$-$	-8
$f^{II}(x) = 20x^3-48x^2+24x-4$	-4	$-0{,}580$	$-\frac{9220}{15.625}$	-8
$f^{III}(x) = 60x^2-96x+24$	$+24$	$+60$	$-\frac{348}{105}$	-12
$f^{IV}(x) = 120x-96$	-96	-60	$-\frac{264}{5}$	$+24$
$f^{V}(x) = 120$	$+120$	$+120$	-120	$+120$
Variações	3	3	1	1

Tanto $f''(x)$ *como* $f'(x)$ *como* $f(x)$ *têm zero ou duas raizes no intervalo* $(3/10, 9/25)$ *visto que há aí a perda de duas variações.*

A equação da tangente ao diagrama de $f''(x)$ *no ponto* $P(3/10, -0{,}580)$ *é* $Y+0{,}580=60(X-3/10)$ *e o ponto em que essa tangente corta* $\overline{OX}$ *tem abscissa* $X_P=1858/6000$. *A equação da tangente ao diagrama de* $f''(x)$ *no ponto* $Q(9/25, -9220/15.625)$ *é*

$$Y+9220/15.625=-348/105\,(X-9/25)$$

e o ponto em que essa tangente corta $\overline{OX}$ *tem abscissa* $X_Q=9894/35475$.

Como é $X_P>X_Q$ *as duas tangentes cruzam-se abaixo de* $\overline{OX}$ *e com maioria de razões* $f''(x)$ *está toda abaixo de* $\overline{OX}$ *no intervalo* $(3/10, 9/25)$; $f''(x)$ *não tem raizes naquele intervalo. Se* $f'(x)$ *tivesse duas raizes naquele intervalo então* $f''(x)$ *teria uma;* $f'(x)$ *não tem raizes no intervalo* $(3/10, 9/25)$. *Do mesmo modo se conclui que* $f(x)$ *não tem raizes no intervalo* $(3/10, 9/25)$ *e portanto não tem raizes em* $(0, 1)$.

2773 — Desenvolva em série de Mac Laurin a função do problema 1 e calcule o respectivo termo geral. R: *Pondo de parte a aplicação directa e sem dificuldades da fórmula de Mac Laurin, temos*

$$y=2/(x-1)(x^2+1)=A/(x-1)+(Bx+C)/(x^2+1)$$

e, com $A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)=2$ *ou* $(A+B)x^2+(C-B)x+(A-C)=2$, *vem* $A=1$, $B=C=-1$. *Donde* $y=1/(x-1)-(x+1)/(x^2+1)=-[1/1-x+x\cdot1/(1+x^2)+1/(1+x^2)]=-(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^n+\cdots)-x(1+x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots)-(1-x^2+x^4-x^6+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots)$. *O termo geral é* $u_n=-x^n-(-1)^n x^{2n+1}-(-1)^n x^{2n}\equiv -x^{2n_1}-x^{2n_1+1}-(-1)^{n_1}x^{2n_1}-(-1)^{n_1}x^{2n_1+1}\equiv[(-1)^{n_1+1}-1](x^{2n_1}+x^{2n_1+1})$ *e como para os valores impares de* n_1 *se anula o respectivo coeficiente, separando impares dos pares e ficando com estes últimos, temos* $u_n=[(-1)^{2n+2}-1](x^{4n+2}+x^{4n+5})$ *e finalmente* $y=\sum_{0}^{\infty}(-2(x^{4n+2}+x^{4n+5}))$, $(|x|<1)$.

O mesmo resultado se achava facilmente pondo $y=x=-2\cdot1/(1-x+x^2-x^3)$ *e efectuando a divisão indicada.*

2774 — Ache a hipérbole que passa pelos pontos $(1,2), (1,-2), (-1,3)$ e é tangente na origem à recta $y=x$. Determine as respectivas assíntotas. R: *Como a cónica passa pela origem, tomamos para sua eqnação* $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2y=0$ *e portanto temos o sistema*

$$A+4B+4C+2D+4=0;\quad A-4B+4C+2D-4=0;$$

$$A-6B+9C-2D+6=0;\quad \left[-\frac{2Ax+2By+2D}{2Bx+2Cy+2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=1$$

ou

$$A+4B+4C+2D=-4;\quad A-4B+4C+2D=4;$$
$$A-6B+9C-2D=-6;\quad D=-1$$

ou ainda

$$A+4B+4C=-2;\quad A-4B+4C=6;$$
$$A-6B+9C=-8;\quad D=-1;$$

condensando a matriz

$$\left\|\begin{matrix}1&4&4&-2\\1&-4&4&6\\1&-6&9&-8\end{matrix}\right\| \rightarrow \left\|\begin{matrix}1&4&4&-2\\0&-8&0&8\\0&-10&5&-6\end{matrix}\right\| \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\|\begin{matrix}1&4&4&-2\\0&-8&0&8\\0&0&5&-16\end{matrix}\right\| \rightarrow \begin{matrix}A+4B+4C=-2\\-8B=8\\5C=-16\end{matrix}$$

$$A=74/5,\quad B=-1,\quad C=-16/5,\quad D=-1$$

e a equação da cónica é: $37x^2-5xy-8y^2-5x+5y=0$.

As assíntotas são as rectas que têm coeficientes angulares dados por $-37+5m+8m^2=0$ *e que passam pelo centro da cónica cujas coordenadas são dadas pelo sistema:* $74x-5y-5=0$, $5x+16y-5=0$.

Soluções dos n.[os] 2761 a 2774 de J. Ribeiro de Albuquerque

F. C. L. — Complementos de Álgebra — exame de frequência — 1948.

2775 — Representando por $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ as raízes da equação $z^3-3z+1=0$, indique as funções conjugadas de $\alpha_1^3\alpha_2^2$ e calcule a soma dessas funções. Pode o valor de $\alpha_1^3\alpha_2^2$ ser racional? Justifique a resposta.

2776 — Considere as funções $u=(z_1-z_1)(z_3-z_4)$, $v=(z_1+z_2)(z_3+z_4)$. Que relação se verifica entre os grupos dessas funções? Que conclui desse facto?

Mostre como seria possível exprimir v em função racional de u e das funções simétricas elementares de z_1, z_2, z_3, z_4.

2777 — O que entende por período duma substituição? Se for G um grupo de ordem m e θ um leemento de G de período μ, que relação se deve verificar entre m e μ? Justifique a resposta.

2778 — Quando se diz que dois elementos dum conjunto A são equivalentes a respeito dum dado grupo de transformações biunívocas de A sobre si mesmo? Exponha o que sabe sobre o assunto.

Determine o grupo G dos deslocamentos que transformam em si mesma uma sinusoide S e mostre que o conjunto S não é homogéneo a respeito do grupo G.

2779 — Sendo M uma família de transformações biunívocas dum conjunto A sobre si mesmo, que significado se deve atribuir à expressão «grupo gerado por M»?

Seja ρ a rotação de 120° em torno dum dado eixo E e θ uma translação distinta de I, paralela a E. Qual a ordem do grupo G gerado por ρ e por θ? É G um grupo comutativo? Designando por H o grupo gerado por ρ, indique as classes laterais de H em G. Mostre que G não é cíclico.

F. C. L. — Complementos de Álgebra — exame final — 1948.

2780 — O que entende por corpo de números? Mostre que o mínimo corpo numérico que contém as raízes da equação $2x^2-2x-1=0$ é o corpo $Ra(\sqrt{3})$.

2781 — Defina «grupo admissível duma equação algébrica a respeito dum dado corpo». Prove que a intersecção de dois grupos admissíveis é ainda um grupo admissível e defina a partir daí o conceito de grupo de Galois.

2782 — Quando se diz que um polinómio é irredutível num dado corpo? Indique como, dado um polinómio $f(z)$ com os coeficientes num corpo Δ, se reconhecem os factores de $f(z)$ irredutíveis em Δ, através do grupo de Galois da equação $f(z)=0$ a respeito de Δ.

2783 — Determine os automorfismos do corpo de Galois da equação $f(z)\equiv(z^2+1)(z^2-3)(3z-1)=0$ e deduza daí o grupo G de Galois desta equação a respeito de Ra, relacionando os sistemas de transitividade de G com os factores irredutíveis de $f(z)$.

2784 — Defina o conceito geral de grupo. Verifique se o conjunto $U=\{a,b,c,d\}$ forma ou não um grupo a respeito da operação θ definida por meio da tabela junta.

$x\,\theta\,y$

$x \backslash y$	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	c
d	a	b	c	d

É a operação θ comutativa? É associativa?

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. C. — Cálculo Infinitesimal — **1.º Exame de frequência — 1947-1948.**

1.º Ponto

2785 — Primitivar a função $f(x) = e^{+2x}(2-e^x)^{-1/3}$. R: $\text{Pf}(x) = -3\left[(2-e^x)^{2/3} - 1/5\,(2-e^x)^{5/3}\right] + C$.

2786 — Primitivar a funcão $f(x) = x^{-1/2} \operatorname{arc\,sen}^2 x$. R: $\text{Pf}(x) = 2\sqrt{x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$.

2787 — Em que direcções emergentes do ponto $(0, \pi/2)$ se anula a segunda derivada direccional da função $f(x, y) = \operatorname{sen} y - \cos x$? R: $y = x$ e $y = -x$.

2.º Ponto

2788 — Primitivar a função

$$f(x) = \frac{\log x}{x} \cdot \operatorname{arc\,tg}(\log x).$$

R: $\text{Pf}(x) = \dfrac{1}{2}(\log^2 x + 1) \operatorname{arc\,tg}(\log x) - \log\sqrt{x} + C$.

2789 — Primitivar a função

$$f(x) = e^{\operatorname{tg} x - 2} \sec^2 x\,(\operatorname{tg}^2 x + 2).$$

R: $\text{Pf}(x) = e^{\operatorname{tg} x - 2}(\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 4) + C$.

2790 — A função $z = e^{-x}\operatorname{sen} y + e^{x-y}$ satisfaz à equação $p + q = -(s+z)$? R: *Não satisfaz.*

Soluções dos n.os 2785 a 2790 de Luís Albuquerque

F. C. L. — Análise Superior — **Exame de frequência — 1947-48.**

2791 — Calcule o integral $\displaystyle\int_{-2i}^{+2i} \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z^2+4}}$ ao longo do eixo imaginário, adoptando para o radical a determinação que se reduz a $+2$ para $z = 0$.

2792 — Ao longo das superfícies de certa família (S), os planos tangentes têm coeficientes p, q e -1, com $p = -c(cx+y)/z(1+c^2)$ $\Sigma = -cx + y/z(1+c^2)$ onde c designa um parâmetro arbitrário. Determine: *a*) a equação às derivadas parciais de 1.ª ordem à qual se sujeitam as superfícies (S); *b*) um seu integral completo; *c*) a solução de Cauchy relativa à linha $x = y^2 + z^2 - 2 = 0$. Que relação exprime a equação, obtida em *a*), entre o plano tangente genérico a uma superfície S qualquer e a recta r, do plano $x0y$, corrente pela origem e apoiada na normal relativa àquele plano tangente? Equações diferenciais das linhas trajectoriais ortogonais de (S).

Enunciados dos n.os 2791 e 2792 de Humberto de Menezes

F. C. P. — Cálculo — **Outubro de 1948**

I

2793 — Determine a equação da tangente à linha $x^{\operatorname{sen} y} + \cos(y^x) = 1$ no ponto $(1, \pi/2)$. R: $Y - \pi/2 = (1 - \pi/2 \log \pi/2)(X - 1)$.

2794 — $\displaystyle\int \frac{2\,dx}{\cot x - \operatorname{tg} x}$. R: $\displaystyle I = \int \frac{2\,dx}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} = \int \frac{\operatorname{sen} 2x\,dx}{\cos 2x} = -\frac{1}{2}\log\cos 2x + C$.

II

2795 — $\displaystyle\iint_D dx\,dy$, no domínio limitado por

$$\begin{cases} y^2 = 20(x-3) \\ x^2 = 16(y-6). \end{cases}$$

R: $\displaystyle I = \int_0^3 dx \int_0^{x^2/16+6} dy + \int_6^8 dx \int_{\sqrt{20(x-3)}}^{x^2/16+6} dy = 76/3$.

2796 — Mostrar que a equação de Ricatti $y' - By = Ay^2 + C$ em que A, B, C são funções de x, pode ingrar-se pelo método de variações das constantes se $AC' - A'C = 2ABC$. R: *Temos:* $d\dfrac{C}{A} = 2B\dfrac{C}{A}$, $\dfrac{d(C/A)}{C/A} = 2B$, *logo* $C/A = ke^{2\int B\,dx}$. $y' - By = 0$ *integrada dá* $y = He^{\int B\,dx}$. *Variando a constante vem:*

$$H' e^{\int B\,dx} = AH^2 e^{2\int B\,dx} + C \quad \textit{ou} \quad H'\sqrt{\frac{C}{AK}} = C\left(\frac{H^2}{K} + 1\right), \quad \frac{\frac{1}{\sqrt{K}}\,dH}{H^2/K} = \sqrt{AC}\,dx, \quad \operatorname{arc\,tg}\frac{H}{\sqrt{H}} = \int\sqrt{AC}\,dx + H_1, \quad H = \sqrt{K}\operatorname{tg}\left\{\int\sqrt{AC}\,dx + H_1\right\},$$

e portanto: $\displaystyle y = \sqrt{K}\,e^{\int B\,dx}\operatorname{tg}\left\{\int\sqrt{AC}\,dx + H_1\right\} = \sqrt{\frac{C}{A}}\operatorname{tg}\left\{\int\sqrt{AC}\,dx + H_1\right\}$.

Soluções dos n.os 2793 a 2796 de J. Ríos de Souza

I. S. A. — Cálculo Infinitesimal — **2.º Exame de frequência extraordinário — 1947-48 — Ponto n.º 1.**

2797 — Um triângulo isósceles variável de altura igual a 10 cujo plano é perpendicular ao plano xoy, tem os extremos da base assentes nas curvas deste plano de equações $y = x^3$ e $y = -x$. Supondo o triângulo animado de um movimento de translação de tal modo que a sua base se mantém sempre paralela a oy, calcule: *a*) O volume por ele gerado quando a base se desloca desde a recta de equação $x=0$ até à recta de equação $x=1$. *b*) Usando coordenadas polares, a área do domínio do quarto quadrante limitado pelo eixo dos xx e pela curva descrita pelo ponto médio da base do triângulo. R: a) *Comprimento da base* x^3+x; *área do triângulo* $5(x^3+x)$; logo $V=\int_0^1 5(x^3+x)\,dx=15/4$. b) *Curva descrita pelo ponto médio* $y=1/2\,(x^3-x)$ *ou em coordenadas polares* $\rho^2=(2\,\text{sen}\,\theta+\cos\theta)/\cos^2\theta$, *logo* $A=\frac{1}{2}\int_0^{\text{arctg}-1/2}\rho^2\,d\theta=-\frac{1}{8}$.

2798 — Considere a função $z=f(x,y)$ assim definida: $f(x,y)=x\dfrac{x^2+y^2}{x-y}$ para pontos (x,y) tais que $x\neq y$, $f(x,y)=0$ para pontos (x,y) tais que $x=y$. Calcule $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$, $f_{xy}(0,0)$, $f_{yx}(0,0)$ e verifique se o teorema da inversão da ordem de derivação é aplicável a esta função no ponto $(0,0)$. R: *Tem-se* $f(0+h,0)=h^2$, $f(0,0+k)=0$, $f_x(0,0+k)=-k$, $f_y(0+h,0)=h$, *logo* $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ $f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=0$ *e portanto o teorema não é aplicável.*

2799 — Calcule a mais curta distância entre as curvas de equação $y=x^2$ e $y=x-1$. R: *Escrevendo* $Y=X-1$ *e tomando para variáveis independentes* y *e* Y, *visto* $\partial(f_2,f_3)/\partial(y,Y)=-1\neq0$, *o sistema de estacionaridade é formado pelas equações* $Y-X+1=0$, $y-x^2=0$, $2xY-2xy+X-x=0$ *e* $xY-xy+xX-x^2=0$ *a que correspondem as duas soluções reais* $x=0, y=0, X=0, Y=-1$ *e* $x=1/2, y=1/4, X=7/8, Y=-1/8$. *Interessa apenas a segunda, que dá para a distância mais curta* $3\sqrt{2}/8$.

2800 — Considere o integral $\int_0^1 (x-x^2)\,dx$. *a*) Mostre que este integral existe. *b*) Calcule-o a partir da definição de integral como um limite. *c*) Calcule-o usando a substituição $t=(x-1/2)^{2/3}$. Que precauções deve tomar e porquê? R: a) *A função integranda é contínua, logo o integral existe.* b) *Dividindo o intervalo* $[0,1]$ *em* n *sub-intervalos de comprimento* $\Delta x=1/n$ *é* $\sum_1^n f(x)\,\Delta x=\Delta x^2(1+2+\cdots+n)-\Delta x^3(1+2^2+\cdots+n^2)=\frac{n(n+1)}{2n^2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ *e tomando limites*

$$\lim\sum_1^n (x-x^2)\,\Delta x=\int_0^1 (x-x^2)\,dx=1/6\,.$$

c) *A transformação não é reversível. É necessário fazer uma partição adequada do intervalo de integração.*

2801 — Calcule $I=\int_0^1 dx\int_0^{2-2x} dy\int_{y+2x-1}^{1} dz$, defina o domínio de integração e escreva os cinco integrais repetidos equivalentes ao integral dado. R: *O cálculo não apresenta qualquer dificuldade; o domínio é o tetraedro definido pelos planos* $2x+y-z-1=0$, $z=1$, $x=0$ *e* $y=0$ *e os cinco integrais pedidos são*

$$\int_0^1 dx\int_{2x-1}^1 dz\int_0^{z-2x+1} dy,\quad \int_0^2 dy\int_0^{1-y/2} dx\int_{y+2x-1}^1 dz,\quad \int_0^2 dy\int_{y-1}^1 dz\int_0^{(z-y+1)/2} dx$$

$$\int_{-1}^1 dz\int_0^{(z+1)/2} dx\int_0^{z-2x+1} dy \quad e \quad \int_{-1}^1 dz\int_0^{z+1} dy\int_0^{(z-y+1)/2} dx\,.$$

Soluções dos n.os 2738 a 2802 de F. Carvalho Araújo

GEOMETRIA PROJECTIVA

F. C. L. — Geometria Projectiva — **Exame Final — 1947-48.**

2802 — De uma hipérbole equilátera, conhecem-se os seguintes elementos: *a*) uma assíntota m; *b*) a polar p (a respeito da hipérbole) de um ponto dado P exterior a m ($\widehat{pm}=45°$). Determine: 1.° o centro e os eixos; 2.° dois diâmetros conjugados (a,a') tais que $\widehat{aa'}=K^0$. Discussão. 3.° os vértices reais da hipérbole.

Enunciado de Humberto de Menezes

F. C. P. — Geometria Projectiva — **Ponto n.° 2 — 1947.**

1.ª Parte

2803 — Considere 4 pontos A, B, C, C' duma mesma recta. Seja C' o conjugado harmónico de C relativamente a A e B. Determine a abscissa do ponto C', quando se tomam para pontos fundamentais origem, unidade e neutral respectivamente C, A e B.

2804 — Conside um triângulo ABC. Designe por C' um ponto do lado AB; por A' um ponto do lado BC; por C'' o conjugado harmónico de C' relativamente aos vértices A e B; por A'' o conjugado harmónico de A' relativamente aos vértices B e C. Demonstre que a recta que une A'' e C'' intersecta o lado AC no ponto B', onde este lado intersecta a recta que une A' com C'.

2805 — Esquematizar o caminho a seguir para determinar pontos de uma cónica definida por 3 pontos reais A, B, C e por 2 pontos imaginários.

2806 — Demonstre o teorema de Descartes relativamente às cónicas.

2807 — Como classifica e distingue as quádricas duplamente regradas?

Enuncie algumas propriedades características de cada uma.

2808 — *a*) Defina rectas paralelas em geometria de Lobatchevsky.

b) Exemplifique com uma figura esta definição utilizando o esquema de Cayley com absoluto real.

2.ª Parte

2809 — Desenhar um triângulo equilátero ABC de 5 cm de lado e um círculo inscrito. Traçar a altura relativamente a BC e marcar para o lado de BC um ponto T, sendo AT igual a 7 cm. Considere uma homologia de eixo t passando por T paralelo a BC que transforme o círculo desenhado numa parábola tangente às rectas AB e AC, não sendo estas rectas duplas e não sendo BC recta limite. Determinar a recta limite e o centro da homologia considerada e o vértice da parábola.

2810 — Desenhar um triângulo rectângulo OMN sendo OM igual a 3 cm e ON igual a 2 cm, O vértice do ângulo recto. Marcar entre M e N, MP igual a 1 cm. Determinar o diâmetro conjugado da direcção OP e os focos de uma hipérbole que tem por assíntotas OM e ON e passa por P.

2811 — Dada uma parábola e duas tangentes a e a' fixas e uma tangente t móvel; mostrar que t encontra a e a' em pontos que definem pontuais semelhantes.

Enunciados de J. Rios de Sousa

F. C. P. — Geometria Projectiva — **Ponto n.º 1 — 1947.**

1.ª Parte

2812 — Sejam A, B, C, A', B', C', 6 pontos duma mesma recta. Determinar as abscissas dos pontos A', B' e C' num sistema de pontos fundamentais A, B e C respectivamente neutral, origem e unidade, sabendo que

$$(A\,B\,C\,A')=3, \quad (A\,B'\,C\,B)=2, \quad (A\,A'\,B'\,C')=-1.$$

2813 — Enuncie e demonstre o teorema de Desargues para o caso de dois triângulos não complanos e para o caso de dois triângulos complanos.

2814 — Esquematizar o caminho a seguir para determinar pontos de uma cónica definida por um ponto real M e por 4 pontos imaginários.

2815 — Demonstre o teorema de Pascal.

2816 — Defina plano tangente a uma quádrica e diga o que entende por pontos hiperbólicos, elíticos e parabólicos.

2817 — *a*) Como passa do esquema euclideano clássico para o esquema euclideano hiperbólico?

b) Em geometria euclideana hiperbólica como define ângulo de duas rectas e distância de dois pontos?

2.ª Parte

2818 — Desenhar um triângulo equilátero $F_1\,F_2\,P$ sendo $F_1\,F_2$ igual a 8 cm, $F_1\,P$ igual a 5 cm e F_2P igual a 6 cm.

Marcar sobre $F_1\,F_2$ um ponto A entre F_1 e F_2 sendo $F_1\,A$ igual a 3 cm e traçar a recta t que une B a A.

Considerar uma cónica que tem por focos F_1 e F_2 e é tangente a t. Determinar a outra tangente à cónica t' tirada por P e os pontos de contacto das duas com a cónica.

2819 — Determinar o eixo e o vértice duma parábola dadas duas tangentes t_1 e t_2, o ponto de contacto M de t_1 e a direcção d dos diâmetros.

Ângulo de t_1 com t_2, 60°, ângulo de d com t_2, 45°, verificando-se a sequência $t_1\,d\,t_2$. Sendo O o ponto de encontro de t_1 com t_2, OM igual a 6 cm.

2820 — Mostrar que as involuções determinadas por dois círculos distintos de um plano sobre a recta do infinito do plano, são idênticas.

Enunciados de J. Rios de Sousa

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — **3.º exame de frequência ordinário — 1948.**

2821 — Condições de equilíbrio dum sólido que tem um ponto $(a, b, 0)$ obrigado a permanecer no plano $(x; y)$, e um ponto $(0, 0, c)$ obrigado a permanecer no eixo dos zz. Determinar as reacções.

2822 — Mecânica dum meio contínuo. Isotropia. Fluidez perfeita.

2823 — Equilíbrio duma funicular submetida à acção de forças centrais. Equações cartesianas e intrínseca.

I. S. T. — Mecânica Racional — 3.º exame de frequência extraordinário — 1948.

2824 — Determinar as condições de equilíbrio dum sólido que tem o ponto $A(a,0,0)$ obrigado a permanecer no eixo dos xx (sem atrito); e o ponto $B(0,b,0)$ obrigado a permanecer no eixo dos yy (também sem atrito). As forças activas reduzem-se a uma força única (x,y,z), aplicada no ponto $(0,0,0)$.

2825 — Equilíbrio das funiculares submetidas a uma lei de forças paralelas a uma direcção dada. Equações cartesiana e intrínseca.

2826 — Movimentos rotacionais dos fluidos perfeitos.

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

University of California — Mathematics 110B Section 7 (Advanced Engineering Mathematics) — **Final Examination — June 14, 1948.**

2827 — Suppose a radioactive substance is changing into a second which, in turn, is changing into a third product which is stable. Given that the rate at which the mass of each substance is being changed into the next is proportional to its mass,

1) derive the following system of equations governing the phenomenon

$$\frac{dx}{dt}=-ax,\quad \frac{dy}{dt}=ax-by,\quad \frac{dz}{dt}=by,$$

where x,y,z are the respective masses and t is the time;

2) indicate x,y,z as functions of t supposing that, initially, only the first substance is present.

2828 — Integrate:

$$(xy'-y)^2=(x^2-y^2)\left(\operatorname{arc\,sin}\frac{y}{x}\right)^2$$

Give also the singular solutions.

2829 — Indicate the frequency of the motion of a particle of mass 2 gr. starting with an initial velocity of 1 cm/sec from a center which attracts the particle proportionally to its distance and acted also by a damping force which is proportional to its velocity. The coefficients of proportionality are respectively 50 and 12 and no other force is supposed.

What is the position of the particle at time 3 sec.?

2830 — Show that $y''-\frac{3}{x}y'-\frac{5}{x^2}y=0$ has two solutions of the form x^α and find the general solution of $y''-\frac{3}{x}y'-\frac{5}{x^2}y=\log x$.

2831 — Indicate the solutions which are common to the two differential equations: *a)* $y'=y^2+2x-x^4$; *b)* $y'=-y^2-y+2x+x^2+x^4$.

2832 — Find the orthogonal trajectories of the family of all circles tangent at the origin to the line $x=y$.

2833 — Indicate two solutions of $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$.

University of California — Mathematics 110-Section 3 (Advanced Engineering Mathematics) — **Final Examination — June 17, 1948.**

2834 — The following conditions are verified by a source free fluid flow of an incompressible fluid of constant density ρ and variable pressure p, moving steadily parallel to the x,y plane

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,\quad u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

I) Show that these conditions are verified by the components of any analytic function $w=u-iv$, if $p=p_0-\rho(u^2+v^2)/2$, p_0 being a constant. II) Supposing that $u=2x$ and using the conclusion of I, indicate v such that $w=u-iv$ will satisfy the equalities above if $p=p_0-\rho(u^2+v^2)/2$, p_0 being a constant.

2835 — *a)* Using two different methods, evaluate the area of the image by the function $w=2e^z$, of the region bounded by the unit square (vertices $z=0,1,i,1+i$).

b) Prove that: $\sin z=\sin x\cos h\,y+i\sin h\,y\cos x$, $(z=x+iy)$.

2836 — Show that $x^2y''-3xy'-5y=0$ has two solutions of the form x^α and find the general integral of $x^2y''-3xy'-5y=\log x$.

2837 — Indicate the frequency of the motion of a particle of mass 1 gr. starting with the initial velocity of 1/2 cm/sec from a center attracting the particle proportionally to its distance from this center, the particle being also acted on by a damping force proportional to its velocity. No other forces are supposed and the proportionality coefficients are respectively 25 and 6.

What is the position of the particle after 3 seconds?

2838 — Find the orthogonal trajectories of the family of circles tangent to the line $x=-y$ at the origin.

2839 — Find the integrals which are common to the differential equations $y'=y^2+2x-x^4$ $y'=-y^2-y+2x+x^2+x^4$.

2840 — Show *a*) that a linear homogeneous equation $y^{(n)}+p(x)\,y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0$ with *real* coefficients has a complex solution $u(x)+iv(x)$ if and only if $u(x)$ and $v(x)$ are solutions. *b*) that for a linear homogeneous equation

$$y^{(n)}+py^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}\,y'+p_n\,y=0$$

with *constant* coefficients it is true that the derivative of a solution is also a solution.

Enunciados dos n.os 2827 a 2840 de Hugo Ribeiro

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção.

73 — W. V. D. HODGE and D. PEDOE. **Methods of Algebraic Geometry.** Cambridge University Press, 1947. VIII+440 pp. 30 s.

El volumen que comentamos constituye la primera parte de una obra destinada a exponer los fundamentos y los métodos de la Geometria algebraica moderna, gracias a los cuales esta disciplina puede alcanzar un rigor absoluto, virtud que no siempre acompañó a la Geometria algebraica clásica. La obra va a ser desarrollada en forma autónoma y, en tal sentido, contendrá todos los elementos de Algebra y de Geometria projectiva que se utilizan en Geometria algebraica. Precisamente el presente volumen está dedicado al estudio detallado de dichos elementos.

El tomo está dividido en dos libros dedicados, el primero, a los preliminares algebraicos y, el segundo, al estudio del espacio proyectivo.

El libro I consta de cuatro capítulos. El primer capítulo contiene las nociones fundamentales del Algebra moderna: grupos, anillos, isomorfismos, dominios de integridad, cuerpos, anillos de polinomios, dominios con descomposición factorial única, etc.... En el capítulo segundo se estudian, en forma original muy interesante, la dependencia lineal y los elementos de la teoria de matrices sobre cuerpos no conmutativos; considerando luego cuerpos conmutativos, se expone la teoria clásica de determinantes y la de matrices cuyos elementos son polinomios en una indeterminada.

Las extensiones de un cuerpo conmutativo y la diferenciación de funciones algebraicas, constituyen el objeto del capítulo tercero. Se consideran principalmente extensiones de grado finito y se establecen, entre otros, el teorema fundamental — de Kronecker — del algebra abstracta y el teorema de Abel del elemento primitivo, éste unicamente en el caso de característica nula. La diferenciación aparece tratada con detenimiento y es de señalar la aplcación, pudlicada por vez primera aqui, de la teoria de los Jacobianos al estudio de la dependencia agebraica, siempre en el caso de característica nula. (La teoria de los jacobianos ha sido ya utilizada en cuestiones de geometria algebraica abstracta: caracterización de puntos simples de variedades algebraicas, por Weil y, sobre todo, por Zariski quien ha llegado a extenderla al caso de cuerpos de característica prima. Posiblemente, siguiendo el orden de ideas de Zariski pueda hacerse análoga extensión en el problema de dependencia algebraica. Pensando en esto, echamos de menos en el volumen que comentamos unas líneas dedicadas a la diferenciación abstracta).

El último capítulo del libro I está dedicado a la teoria de la eliminación, se llega a establecer las formas de inercia de Hurwitz y se da la teoria de la u-resultante de importantes aplicaciones en Geometria algebraica; se dan también los teoremas de la base y de los ceros de Hilbert.

El libro II lo forman cinco capítulos. Los capítulos quinto y sexto se refieren a la definición del espacio proyectivo de n dimensiones en forma «algebraica» y «sintética» respectivamente. Por la primera el espacio aparece como conjunto de $(n+1)$—plas ordenadas de elementos, no todos nulos, de un cuerpo arbitrario K.

La dependencia lineal, cuya teoria algebraica fue desarrollada detalladamente en el capítulo segundo, permite definir los espacios lineales de dimensión menor que n y establecer los llamados principios de incidencia asi como el de dualidad. El teorema de Desargues (para $n>2$) y la construcción de la suma y el producto de dos puntos de una recta, en la que se han fijado tres puntos de referencia, se obtienen de un modo inmediato. Se dan tambien, en el capítnlo quinto, ejemplos de geometrias no-arguesianas y de geometrias proyectivas finitas. En el capítulo sexto se sigue el camino inverso del precedente: se parte de los principios de incidencia, tomados como axiomas, y se llega a ligar al espacio un cuerpo abstracto K cuya geometria proyectiva es isomorfa con la obtenida sintéticamente a par de dichos axiomas. La exposición de estos dos capítulos se inspira en la obra clásica de Veblen y Young, distinguiéndose de ésta en que la restricción que impone la validez del teorema de Pappus, es decir la conmutatividad de K, se establece aqui mas tarde con lo que se obtiene mas generalidad para varios resutados. En la obtención de las coordenadas relativas a un sistema de referencia, se utiliza solamente una parte del teorema fundamental de la Geometria proyectiva, aquella que afirma la existencia de al menos una proyectividad entre dos series rectilineas en las que se coresponden tres pares determinados de puntos. Hubiera sido de desear, a nuestro juicio, haber establecido el teorema completo para el caso no conmutativo, cosa realizable en pocas lineas apoyándose en los teoremas del § 3 de éste capítulo (ver p. ej.: nuestro trabajo publicado en la Rev. Mat. Hisp-Amer. (4) 1 (1941)) y asi, aparte del interés propio del teorema, resultaria mas intuitiva la demostración del teorema I del § 6 del mismo capítulo.

En el capítulo octavo se introduced las coordenadas grassmannianas para los espacios lineales, espacios que dan lugar a variedades de gran interés en Geometria algebraica. Se establecen las condiciones necessarias y suficientes que han de satisfacer dichas coordenadas, condiciones que dan las ecuaciones algebraicas que sirven para definir, en espacios proyectivos de conveniente número de dimensiones, las variedades a que antes nos referimos. En los últimos capitulos, noveno y décimo, se consideran respectivamente las colineaciones y las correlaciones del espacio proyectivo de n dimensiones. El estudio es puramente algebraico y para él se utilizan los materiales del libro I. En los tres capítulos finales se supone siempre que el cuerpo fundamental es conmutativo y de característica nula (cuerpo sin característica, en la terminologia de los autores) y en la mayor parte de los casos algebricamente cerrados.

El volumen, que está escrito con rigor completo y en estilo muy agradable, cumple magnificamente los objetivos que los autores señalan en el prólogo. El estudioso, al que no se le supongan conocimientos previos, encontrará en el una exposición perfecta de una introducción a la Geometria algebraica moderna; mientras que el especialista sabrá encontrar multitud de detalles de perfección en las demostraciones y de acierto en la elección y ordenación de materias que harán que espere con impaciencia la publicación de la segunda parte de la obra, publicación que los autores prometen para fecha próxima.

G. Ancochea (Madrid)

74 — FINNEY, D. J. — **Probit Analysis — A Statistical Treatment of The Signoid Response Curve.** Cambridge University Press. 1947. Pp. XIII+256. Price 18s.

Embora, por razões fàcilmente compreensíveis, não tenha ainda sido escrito, pese às magníficas tentativas de Fisher, Wilks, Kendall, Ceamér e Jeffreys, o tratado de Estatística Pura e Aplicada que todos desejaríamos, a verdade é que actualmente é manifesta a tendência para a publicação de livros texto com caracter especializado versando questões, problemas ou técnicas particulares que interessam apenas a determinados sectores da actividade científica.

Pode criticar-se esta orientacão. perfilhando uma atitude académica e dando relêvo às insuficiências lógicas ou ao carácter controverso dos fundamentos da Estatística, mas não resta dúvida alguma de que os livros do tipo referido prestam ao estudioso um serviço inapreciável, pois estabelecem uma ligação fecunda e utilíssima entre os princípios de ordem geral tratados no livro texto ordinário e as técnicas especializadas expostas nos artigos de revista.

Pertence a esta classe o livro de Finney actualmente professor em Oxford da Cadeira de Análise e Planificação Experimental e antigo investigador da Estação de Rothamsted e do Laboratório Galton. O título e sub-título da obra não terão porventura a virtude de chamar a atenção do toxicologista, do entomólogo, do farmacologista ou do patologista; no entanto, após a sua leitura, não nos restam dúvidas algumas de que o conhecimento da técnica a que Bliss deu o nome de «probit analysis» [1] é hoje, não só na planificação experimental, mas também na interpretação dos resultados, indispensável aos referidos técnicos.

Segundo o autor afirma no prefácio e na introdução, o livro destina-se aos químicos, biólogos e outros que possuam um conhecimento elementar dos métodos es-

(1) Contracção de «probability unit».

tatísticos e ainda aos que, familiarizados já com o método dos «probits», desejem tomar conhecimento dos desenvolvimentos mais recentes do citado método.

Dentro desta orientação o trabalho de Finney é indiscutìvelmente uma obra de categoria excepcional; todavia, sem nos afastarmos das directrizes impostas pelo autor julgamo-nos na obrigação de chamar a atenção do leitor para dois pontos importantes.

Em primeiro lugar assinalar que para o autor «um conhecimento elementar dos métodos estatísticos» significa um domínio perfeito da matéria versada no livro de K. Mather, Statistical Analysis in Biology e de grande parte da que está contida no clássico Statistical Methods for Research Workers, de Fisher. Para o nosso meio, pelo menos, parece-me exigência demasiada.

Em segundo, fazer notar que a evidente preocupação do autor, em tornar compreensivos os métodos estatísticos adequados à interpretação dos resultados do «ensaio biológico» e respeitar as dificuldades a que o prático tem de dar remédio, o obrigam a uma pormenorização excessiva, de tal maneira que algumas vezes a ideia directriz se dilui na massa dos detalhes. M. Merrel [1] que chama também a atenção para este facto, lembra que na sua essência o método dos «probits» se reduz a:

a) Verificar se os dados seguem uma lei de distribuição normal. Caso assim não aconteça, usar uma transformação adequada que conduza à sua normalização.

b) Substituir as proporções acumuladas por «probits» que ficarão relacionados linearmente com a nova variável.

c) Estimar os parâmetros desta recta.

d) Efectuar provas de ajustamento e determinar limites fiduciários para os parametros e para a recta.

Dentre as questões tratadas neste livro destacamos para elucidação do leitor as seguintes: história do método dos «probits», planificação das experiências, precisão dos ensaios, determinação da potência relativa, estudo das misturas de venenos, combinação e comparação de potências relativas, etc, etc.

Dois apêndices completam a exposição da matéria. No primeiro dá-se uma descricão detalhada e sistemática, através dum exemplo, dos métodos de cálculo a usar quando um único calculador é responsável por toda a análise e no segundo expõem-se as bases matemáticas do método dos «probits».

Nas últimas páginas figuram, além duma ampla lista bibliográfica, um certo número de tabelas, algumas delas abreviadas, indispensáveis a quem pretender aplicar o método. A propósito, lembramos ao leitor que foi publicada recentemente [1] uma extensa tabela destinada ao cálculo de «probits».

Àqueles que se interessam pelo assunto recomendamos ainda com particular interesse a leitura [2] duma exposição feita por Finney na Royal Statistical Society e da respectiva discussão, posteriores à data de publicação do livro.

Antes de terminar não desejariamos deixar no leitor a impressão de que o trabalho de Finney é «único». Se de acordo com a orientação adoptada é incontestàvelmente uma realização excelente a verdade é que nem todos aceitam incondicionalmente os métodos e as ideias desenvolvidas pelo autor. Leia-se, por exemplo, a crítica de Joseph Berkson [3] da Divisão de Biometria e Estatística Médica da Clínica Mayo.

F. A. Carvalho Araújo

75 — TODD, J. A. — Projective and Analytical Geometry.

Exposição bem orientada e ordenada de um verdadeiro Curso de Geometria Projectiva para especialistas.

O autor pretende mostrar — e realiza-o — como podem os conceitos fundamentais da Geometria Projectiva ser aproveitados para tratar o assunto à luz das doutrinas da Análise pura, fazendo dele mais um capítulo, aliàs muiio especial, da Álgebra Moderna.

Em pleno acordo com este ponto de vista, começa por dar, através de uma *Introdução*, uma ideia exacta de aquilo que pretende com a obra, remetendo o leitor para uma pequena (mas bem escolhida) colecção de obras, todas elas fundamentais para bom entendimento do Curso.

Abre com um primeiro capítulo sobre «*Espaços de Vectores*» e «*Espaços Projectivos*». onde — sem a preocupação de discutir os *fundamentos* — lança um rápida vista pelos pontos essenciais da Álgebra linear que podem ser considerados necessários para o estudo que se propõe fazer.

Fugindo criteriosamente ao aspecto intuitivo da Geometria, trata do problema das coordenadas, define

(1) MERREL, M — Jour. Amer. Stat. Assoc., March 1948, vol. 43, N.° 241.

(1) FINNEY, D. J. and STEVENS, W. L. — Table for the calculation of working probits and weights in probit analysis — — Biom., vol. 35, pp. 191-201. — Cada separata 2s. 6d.

(2) FINNEY, D. J. — The Principles of Biological Assay — — Supp. to the Jour. Roy. Stat. Soc., vol. IX, n.os 1-2, 1947.

(3) BERKSON, J. — Jour. Amer. Stat. Assoc., March, 1948, vol. 43, N.° 241.

as formas geométricas fundamentais, e estabelece o conceito de projectividade entre espaços lineares a n dimensões.

Num segundo capítulo, vem a projectividade entre formas de 1.ª espécie — pontuais e feixes — ; e é importante salientar que são apenas visados os pontos essenciais da doutrina, escolhidos de modo a mostrar como, na realidade, as modernas concepções da Geometria colocam este ramo da Matemática na lista dos vários sectores da Análise.

Segue-se, depois, o estudo das cónicas, com base na teoria das formas algébricas, o das quádricas, da cúbica empenada e dos complexos lineares, sempre do ponto de vista analítico.

O 5.º capítulo é consagrado à teoria das colineações, com larga aplicação da Álgebra das Matrizes.

Num 6.º capítulo, estuda a teoria dos invariantes e covariantes, em aplicação às cónicas e às quádricas.

E a fechar a obra, uma bela colecção de problemas de revisão.

Salienta-se o facto — aliás uma característica dos tratadistas ingleses — de se exigir ao leitor consciente, e interessado num estudo completo, a tarefa de resolver os exercícios espalhados no próprio texto, como condição de bom entedimento da sequência dos assuntos, e de aquisição da ferramenta que terá de ser usada no curso da leitura do livro, o que faz deste uma obra, aconselhável (a todos os títulos) aos estudantes da especialidade, quer do ponto de vista informativo quer em matéria de formação.

Humberto de Menezes

76 — LICHNEROWICZ, A.: **Algèbre et Analyse linéaires** (Collection d'ouvrages de mathématiques à l'usage des physiciens publiée sous la direction de G. Darmois), 316 págs. — Masson et Cie, Editeurs, Paris, 1947.

Este livro é construido sobre as noções de espaço vectorial e de funções geralmente contínuas. Partindo da primeira noção e da sua noção dual de espaço das formas lineares o autor expõe na primeira parte (Álgebra linear), com grande preocupação de rigor, a teoria elementar das equações lineares, a álgebra das matrizes, o cálculo tensorial cartesiano e por fim a álgebra não comutativa de Grassmann ou álgebra exterior. Na segunda parte (Análise linear) aplica a noção de espaço vectorial às formas diferenciais lineares (formas de Pfaff) introduz então as formas diferenciais lineares exteriores (formas de Cartan), cujo cálculo é por assim dizer a parte central do livro. Finalmente, a noção de espaço de funções geralmente contínuas é aplicada ao problema do desenvolvimento em série de funções ortonormais (com os exemplos clássicos de Legendre e de Fourier), à teoria dos operadores lineares e às equações integrais lineares de Fredholm.

O livro destina-se a ser utilizado pelos físicos, mas parece-nos que só aqueles que já estão familiarizados com as diferentes teorias expostas poderão tirar proveito da sua leitura, para fins de iniciação à axiomática moderna e para a delimitação rigorosa da aplicabilidade de muitos teoremas e fórmulas clássicos.

Por outro lado, pode estranhar-se que num livro escrito «à l'usage des physiciens» se dê tanta importância ao cálculo exterior, e se apresentem mesmo as fórmulas vectoriais habituais e as transformações clássicas de integrais (Stokes, Gauss, etc.) apenas como casos particulares do cálculo das formas exteriores. Não é o cálculo exterior que aparece normalmente perante o físico, mas sim o cálculo tensorial de que o primeiro é um caso particular (e uma transposição com outro simbolismo para tensores antisimétricos. Enfim, o livro não trata algumas teorias mais úteis ao físico, mesmo ao físico teórico, do que algumas outras que o autor expõe, e não pode portanto ser considerado como uma verdadeira introdução à Física matemática. Esta introdução ainda está por escrever.

Abstraindo, no entanto, da intenção do autor de escrever uma obra de matemática para físicos, pode dizer-se que este livro é talvez a melhor publicação matemática francesa depois da libertação. Com excepção da capa (de gosto um pouco ... duvidoso) a apresentação material é boa, muito melhor que a da maioria das edições científicas francesas dos últimos anos.

O livro é dedicado à memória de Georges Bruhat, que devia ter dirigido esta colecção se não tivesse sido assassinado pelos alemães num campo de concentração, como tantos outros intelectuais.

A. Gião

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Ano XXI, — 1948.

Informações Argentinas — Ministério das Relações Exteriores e Culto — Departamento de cultura — Ano de 1946, n.º 19.

Revista de la Union Matemática Argentina — (Buenos Aires) — vol. XII, n.º 5, 1947 e vol. XIII, n.ºs 1 e 2, 1948.

Brasil

Boletim da Sociedade Matemática de S. Paulo — vol. 1, fasc. 2 — 1946.

Revista Politécnica — (S. Paulo) — n.ºs 152 e 153 — 1948.

Teoria dos corpos comutativos — Publicação da Sociedade Matemática de S. Paulo, por Prof. Jean Dieudonné (notas de aulas por L. H. Jacy Monteiro) — vol. I, II — 1946-47.

Espanha

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciências Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones Técnicas — n.ºs 78 a 82 — 1947 e n.ºs 83 a 88 — 1948.

Matemática elemental — (Madrid) — Revista publicada por el Instituto de «Jorge-Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª série — Tomo VIII — 1948, n.ºs 1 a 5; suplemento n.º 1.

Problemas de Cálculo das Probabilidades — por J. Gallego Diaz — Edições Hispano-Argentinas — Madrid, 1948.

Problemas gráficos de Geometria Métrica y Projectiva — por José Ibarrola Solano — Bilbao, 1945.

Revista Matemática Hispano-Americana — publicada por el Instituto «Jorge-Juan» de Matemática y la Real Sociedad Matematica Española — 4.ª série — Tomo VIII, n.ºs 1, 2, 3, 4 — 1948.

Estados Unidos da América do Norte

Mathematics as a culture clue and other essays — The collected works of Jackson Keyser — vol. I, published by *Scripta Mathematica* — New York, 1947.

Scripta Mathematica — (New York) — A quarterly journal devoted to the Philosophy, History and Expository Treatment of Mathematics — vol. XIII, n.ºs 1 a 4 — 1947.

França

Bulletin Astronomique — publié par l'Observatoire de Paris — Tome XIII, fasc. IV — 1948.

Bulletin de la Société Mathématique de France — publié par les Sécrétaires — Tome LXXV, fasc. I a IV, Paris, 1947.

Intermédiaire des Recherches Mathématiques — (Paris) — Sujets de recherches réunis sous la direction de Paul Belgodère — Tome 3, fasc. 12 e 13.

Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées — (Paris) — Tome LIV, n.ºs 5 à 12 — 1947; Tome LV n.ºs 1 à 8 — 1948.

Grã-Bretanha

Mechanical Instruments for solving linear simultaneous equations — by R. A. Fair Thorne, B. Sc. — Aeronautical Research Council — reports and memoranda — London. 1944.

Occasional papers — IX — Contributions to the study of oscillatory Time Series, by M. G. Kendall — Cambridge, 1946.

Portugal

Agros — (Lisboa) — Boletim dos estudantes de Agronomia — Ano XXX — n.º especial — 1947; Ano XXXI — n.ºs 1 a 4 — 1948.

Algebra Moderna — Por B. L. Van der Waerden — tradução da 2.ª edição alemã por Hugo Ribeiro — vol. I, fasc. I — Publicações da Sociedade Portuguesa de Matemática — Lisboa, 1948.

Boletim da Sociedade de Estudos da Colónia de Moçambique—Ano XVI—n.os 53 e 54—Lourenço Marques, 1947.

Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática—Série A—vol. I, n.º 2.

Conceitos sobre a régua de cálculo—Por E. Faria Ferreira—Lisboa 1946.

Gazeta de Física—(Lisboa)—Revista dos Estudantes de Física e dos Físicos e Técnico-Físicos Portugueses—vol. I, fasc. 7—1948.

Homenagem da Imprensa Portuguesa à «Revista Militar», comemoração do centenário 1848-1948—Suplemento ao fascículo de Julho, n.º 7.

Ler—(Lisboa)—Informação bibliográfica nacional e estrangeira de Publicações Europa-América. Julho-Agosto, 1948.

Portugaliae Physica—(Lisboa)—vol. 2, fasc. 3-4—*Le problème atmosphérique d'après la théorie des perturbations spontanées*, por António Gião; *Mesures sur les courbes de resonance altrasonores dans les liquides*, por A. Van Itterbeeck et A. de Boek; *Diffusion des neutrons thermiques par le méthane entre 20° e 200° k*, por A. Gibert.

Publicações do Centro de Estudos de Engenharia Civil do I. S. T.—(Lisboa)—n.os 4, 5 e 6.

Revista de Economia—(Lisboa)—vol. I, fascs. I, II e III—Lisboa, 1948.

Seguros—(Lisboa)—Revista cultural e técnica—Ano IX, n.os 40 e 41. Ano X, n.os 42 a 45.

Técnica—(Lisboa)—Revista de engenharia dos alunos do I. S. T.—n.os 178 a 186—1948.

Vértice—(Coimbra)—Revista de cultura e arte—vol. IV, n.º 52; vol. V, n.os 53 a 58; vol. VI, n.os 59 a 62.

Suiça

Elemente der Mathematik—(Basel)—Band III—n.os 1 a 5—1948.

Uruguai

Publicaciones del Instituto de Matemática e Estadística—(Montevideo)—vol. I, n.os 3 a 7.

SITUAÇÃO FINANCEIRA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

Nunca foi fácil a vida financeira da «Gazeta de Matemática». Têm disso pleno conhecimento os seus leitores a quem, quase sempre, tem sido exposta com minúcia a situação financeira da revista. Com excepção de um intervalo de certa grandeza, que termina hoje, puderam, assim, avaliar regularmente as dificuldades que surgiam e cooperar na sua eliminação.

É possível afirmar que, até 1945, essas dificuldades provinham quase exclusivamente do crescimento da própria revista. Com o apoio activo dos seus próprios leitores conseguiu a «Gazeta de Matemática» vencer esses obstáculos e logrou mesmo, naquele ano de 1945, constituir uma pequena reserva que permitiu novos empreendimentos, entre os quais deve ser destacada a reedição do primeiro ano da revista, há muito completamente esgotado como hoje sucede a muitos números posteriores.

A partir de 1945, porém, a situação modificou-se profundamente mercê dos seguintes factores: *a*) agravamento progressivo do custo do papel e do trabalho tipográfico, *b*) dois aumentos substanciais dos preços dos serviços dos correios a que a revista tem de recorrer para realizar as cobranças, *c*) não crescimento do número de assinaturas, *d*) decrescimento considerável da venda de números avulsos.

Resultou, portanto, uma situação deficitária que a começo se supoz enfrentável e transitória, mas cuja evolução posterior no sentido do agravamento originou deficit permanente, comprometeu inteiramente a fraca reserva outrora criada e impõe para já a adopção de medidas severas tendentes ao restabelecimento do equilíbrio necessário ao prosseguimento da tarefa que cabe à «Gazeta de Matemática».

A situação no final do ano corrente envolverá um deficit da ordem da dezena de contos a que se contrapõe a existência dos números atrazados não esgotados. Observe-se, desde já, que a venda futura dos números 1 a 38 da «Gazeta de Matemática» produzirá, a julgar prudentemente pela experiência passada, receitas capazes de amortizar aquele deficit em cerca de três anos.

A posição descrita não consente que da publicação corrente resulte um deficit suplementar que agrave o precedente, antes exigiria que da publicação corrente lhe viesse forte concurso para o seu completo e urgente saneamento. Ora a verdade é que, a manter-se em 1949 o actual trem de vida da «Gazeta de Matemática», cuja modéstia não vale a pena encarecer, no final do próximo ano resultaria da publicação de quatro números, nas condições actuais, um novo deficit da ordem da dezena de contos. É absolutamente indispensável tomar, desde já, todas as providências capazes de transformar o ano de 1949, ao menos, num ano financeiramente equilibrado. Só assim será possível sanear as finanças da «Gazeta de Matemática» e assegurar a sua continuidade, que novos deficits sobre o resultante do passado comprometeriam irremediàvelmente.

Para isso que há a fazer?

Visto que não é possível comprimir as reduzidíssimas despesas da «Gazeta de Matemática» — recorde-se que a colaboração, a redacção e administração sempre foram e são inteiramente gratuítas — torna-se indispensável actuar decisivamente no capítulo das receitas.

Infelizmente não será suficiente, embora seja fundamental, o recurso a uma nova campanha de angariação de assinaturas na qual será decisiva a cooperação de todos os actuais leitores da «Gazeta de Matemática». Com efeito, para que esta medida fôsse por si só suficiente, seria necessária, nas condições actuais, a angariação imediata de mais de 350 novos assinantes e a conservação sem desistências de todos os actuais assinantes. É forçoso encarar, portanto, a alteração dos preços actuais da assinatura e do número avulso. A revisão e a actualização parcial a que se procedeu destes preços, feita com a maior prudência, conduziram aos novos preços que se anunciam neste número para praticar em 1949. Só por si também estes novos preços seriam incapazes de resolver o problema financeiro de 1949. Espera-se que eles, ao menos, não motivem a perda de um só leitor e não tenham de ser completamente actualizados no fim de 1949, graças à admissão de novos assinantes até lá.

Sempre que nas colunas da «Gazeta de Matemática» foi posto o problema financeiro da revista, sempre ele foi resolvido graças à cooperação, nunca regateada, dos seus leitores. Espera-se que nesta emergência, que se afigura a mais grave, essa cooperação se afirmará atravéz da *angariação de novos assinantes* e da compreensão da inevitabilidade da revisão dos preços.

Por seu lado, a redacção e a administração da «Gazeta de Matemática» não se pouparão para atingir regularidade na publicação, manter ou melhorar onde for possível a colaboração e conseguir as maiores economias.

Angarie novos assinantes para a «Gazeta de Matemática»!

A Administração

AS CONDIÇÕES DE VIDA DA «GAZETA DE MATEMÁTICA» IMPÕEM A ANGARIAÇÃO DE 300 NOVOS ASSINANTES

COM 10 NOVOS ASSINANTES EM CADA LICEU FICA RESOLVIDO O PROBLEMA FINANCEIRO DA «GAZETA DE MATEMÁTICA»

DIVULGAR A «GAZETA DE MATEMÁTICA» É CONTRIBUIR PARA O FORTALECIMENTO DA CULTURA MATEMÁTICA PORTUGUESA

GAZETA DE MATEMÁTICA

Publicará quatro números por ano em Fevereiro, Maio, Agosto e Novembro

Número avulso: 12 escudos e 50 centavos
Assinatura anual (4 números): 40 escudos

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuição dêstes pontos pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é, em geral, a seguinte:

Exames de aptidão — números de Maio e Agosto.

1.º exame de frequência — números de Novembro e Fevereiro.

2.º exame de frequência — número de Maio.

Exames finais — números de Maio e Agosto.

Cada um dos quatro números anuais da *Gazeta de Matemática* poderá publicar e publicará outros pontos além dos indicados na distribuição anterior.

2.ª EDIÇÃO DO VOL. 2 (N.ºs 5 a 8)

Está desde já aberta a inscrição para a nova edição do ano II da *Gazeta de Matemática* (n.ºs 5 a 8) ao preço de escudos 30. Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções no formato e características actuais e com os textos cuidadosamente revistos. Logo que as inscrições atinjam o número de 300, proceder-se-à, se não antes, à composição, impressão e distribuição da nova edição do ano II. Depois de publicada, a segunda edição do volume II será vendida ao preço de escudos 40.

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de escudos 40, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Tôdas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUITAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Estão completamente esgotados os números 5 a 11, 13 e 14 da *Gazeta de Matemática*. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes:

N.ºs 1-4 (2.ª edição do ano I, no formato actual e com o texto cuidadosamente revisto)	40$00
N.º 3 (número especial dedicado aos exames de aptidão, últimos exemplares que restam da 1.ª edição, no antigo formato)	10$00
N.ºs 12 e 15 a 38, cada número	12$50

A administração da *Gazeta de Matemática* executa qualquer encomenda à cobrança pelo correio.

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N