GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VII **N.º 30** NOVEMBRO-1946

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

EDITOR — *Gazeta de Matemática, Lda.* ADMINISTRADOR — *A. Sá da Costa*

Sede e Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa - N

TIPOGRAFIA MATEMÁTICA, LDA. — Rua Almirante Barroso, 20-r/c. — LISBOA - N

GAZETA DE MATEMÁTICA
PERMUTA COM AS SEGUINTES REVISTAS

AFINIDADES

Rua das Praças, 13-A, 1.º LISBOA

AGROS

Associação dos Estudantes
Instituto Superior de Agronomia
LISBOA

GAZETA DE FÍSICA

Laboratório de Física
Faculdade de Ciências
LISBOA

PORTUGALIAE MATHEMATICA

Rua de Serpa Pinto, 17, 4.º, Esq. LISBOA

PORTUGALIAE PHYSICA

Laboratório de Física
Faculdade de Ciências
LISBOA

PUBLICAÇÕES DO CENTRO
DE ESTUDOS DE ENGENHARIA CIVIL

Instituto Superior Técnico
LISBOA

PUBLICAÇÕES DO CENTRO
DE ESTUDOS MATEMÁTICOS

Faculdade de Ciências
PORTO

PUBLICAÇÕES DA JUNTA
DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Faculdade de Ciências
PORTO

PUBLICAÇÕES DO SINDICATO
DOS ENGENHEIROS GEÓGRAFOS

Tapada da Ajuda LISBOA

TÉCNICA

Instituto Superior Técnico
LISBOA

ARGENTINA

BOLETIN MATEMÁTICO

Av. de Mayo, 560
REP. ARGENTINA BUENOS AIRES

MATHEMATICAE NOTAE

Instituto de Matemática
Universidad Nac. del Litoral
Av. Pellegrini, 250
REP. ARGENTINA ROSÁRIO

REVISTA DE LA UNIÓN MATEMÁTICA
ARGENTINA

Gascón, 520
REP. ARGENTINA BUENOS AIRES

BRASIL

REVISTA POLITÉCNICA

Rua Affonso Pena, 14
BRASIL S. PAULO

CUBA

REVISTA DE LA SOCIEDAD CUBANA
DE CIENCIAS FÍSICAS
Y MATEMÁTICAS

Edificio Poey — Universidad
CUBA HABANA

ESPANHA

MATEMÁTICA ELEMENTAL

Instituto «Jorge Juan»

Duque de Medinaceli, 4

ESPAÑA MADRID

EUCLIDES

António Maura, 7

ESPAÑA MADRID

ESTADOS UNIDOS DA AMERICA DO NORTE

SCRIPTA MATHEMATICA

186 th. Street at Amsterdam Avenue

U. S. A. NEW YORK, 33, N. Y.

FRANÇA

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

Institut Fourier

Place du Doyen Gosse

FRANCE GRENOBLE (Isère)

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

Institut de Mathématiques

15, Quai Claude Bernard

FRANCE LYON (Rhône)

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Institut Henri Poincaré

11, Rue Pierre-Curie

FRANCE PARIS, 5e

INTERMÉDIAIRE DES RECHERCHES MATHÉMATIQUES

55, Rue de Varenne

FRANCE PARIS, 7e

INGLATERRA

BIOMETRIKA *

THE JOURNAL OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY

University College

Gower Street

GREAT BRITAIN LONDON, W. C. 1

THE MATHEMATICAL GAZETTE

Prof. T. A. A. Broadbent, Editor

Royal Naval College-Greenwich

GREAT BRITAIN LONDON, S. E. 10

THE QUARTERLY JOURNAL OF MATHEMATICS *

ROMENIA

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'UNIVERSITÉ DE JASSY

SUIÇA

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Prof. Dr. L. Locher

Prof. am Technikum

Nussbaumweg 4

SCHWEIZ WINTERTHUR

* Oferta do «British Council».

ANO VII-N.º 30 GAZETA DE MATEMÁTICA NOVEMBRO-1946

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *Gazeta de Matemática, L.da* ■ ADMINISTRADOR: *A. Sá da Costa*

Composto na Tipografia Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c. — LISBOA-N

Que é ensinar? É dar sistemàticamente ao aluno oportunidade à descoberta própria.

Herbert Spencer

I. ÉLÉMENTS IMAGINAIRES. REPRÉSENTATIONS RÉELLES

par **Paul Belgodère**

Imaginaires:

Il n'est pas nécessaire d'insister sur l'importance de l'extension aux éléments complexes des propriétés géométriques: sans cette extension, la géométrie *algébrique* perdrait une grande partie de sa simplicité, et se réduirait à une géométrie *finie*, beaucoup moins riche. D'ailleurs les éléments imaginaires sont utiles même pour l'étude des figures *réelles*, car leur adjonction permet de passer par continuité de figures réelles à d'autres figures dont la structure réelle est différente (à cause de relations d'inégalité), mais qui supportent des théorèmes analogues: c'est le «*principe de continuité*». Par contre, les imaginaires ne présentent en général pas assez de souplesse et de généralité — sauf peut-être au voisinage d'un point singulier — pour être utilisés avec profit en *Géométrie infinitésimale directe,* et dans l'étude des fonctions sous des conditions peu restrictives de dérivabilité: dans le domaine complexe l'existence de dérivées premières entraine l'analyticité; cette analyticité presque obligatoire n'existe d'ailleurs pas avec certains nombres hypercomplexes, construits avec une clef ε ou k telle que $\varepsilon^2=0$ ou $k^2=+1$.

La géométrie analytique complexe est dominée par le *principe de permanence:* toute propositon de géométrie réelle susceptible d'un énoncé analytique (c'est-à-dire par l'intermédiaire d'*égalités* entre fonctions analytiques des coordonnées), admet une démonstration par le calcul seul, et ce calcul *garde un sens* pour des éléments complexes, ce qui permet de leur étendre, par définition et sans risque de contradiction, les propriétés des éléments réels. En général, et en particulier chaque fois que l'on se borne à des propriétés algébriques, les éléments singuliers pour lesquels le calcul pourrait accidentellement perdre sa signification ne peuvent constituer une coupure empêchant le passage continu entre éléments réguliers correspondant à des valeurs différentes des paramètres (chaque paramètre complexe peut varier arbitrairement, en contournant les valeurs singulières, qui sont isolées): il n'y a pas à se préoccuper des *cas de figure,* et les théorèmes de géométrie complexe sont plus simples qu'en géométrie réelle.

Isotropes:

En géométrie algébrique complexe, n'importe quel invariant attaché à une figure peut prendre la valeur zéro pour des valeurs convenables des paramètres initiaux. On obtient ainsi des éléments singuliers, dont l'importance est fondamentale dans la plupart des problèmes pratiques.

En particulier, toutes les propriétés métriques (angles et distances) de la géométrie euclidienne sont dominées par l'existence de droites isotropes (de longueur nulle), qui conservent leur importance en géométrie anallagmatique. Leurs propriétés sont paradoxales: Une isotrope fait un angle infini avec toute droite, un angle indéterminé avec elle même,... Dans un plan isotrope, la distance de deux points ne dépend que des isotropes qui les portent, et est donc fonction linéaire d'une abscisse convenable: la relation de Chasles et d'autres relations analogues restent donc valables pour des points non alignés d'un plan isotrope. La géométrie dans un plan isotrope est un cas limite de la géométrie plane euclidienne, la notion d'angle peut y être remplacée par l'existence d'un écart angulaire, qui joue le rôle d'un angle infinement petit, et dont les propriétés sont corrélatives de celles de la distance euclidienne. Dans les déplacements, les isotropes s'échangent entre elles, et il en est de même dans l'espace pour les cercles-paraboles, tangents à l'ombilicale. Dans le plan, les paraboles équilatères (dont le point à l'infini est un point cyclique) admettent, contrairement aux coniques réelles, une rotation d'ordre 3 autour de l'un de leurs points... Mais, malgré ces apparences singulières, les isotropes sont indispensables à l'étude de la géométrie euclidienne, déduite de la géométrie projective par fixation d'une conique ombilicale, et *la géométrie réelle s'explique par des imaginaires sous-jacents.*

Représentations réelles:

Lorsque, par un artifice quelconque, et de préférence à l'intérieur d'un groupe déterminé, on réussit à associer à tout élément complexe un élément réel (dépendant de deux fois plus de paramètres réels qu'il n'existait de paramètres complexes pour l'élément initial), on peut énoncer sur cette représentation les propositions géométriques transposées de la géométrie complexe initiale. Cela permet en particulier de matérialiser sur des éléments réels des constructions isomorphes de celles que l'on peut imaginer pour des éléments complexes, et qui n'étaient réalisables que par le calcul.

Il existe évidemment une infinité de représentations réelles possibles, deux d'entre elles n'étant liées que par une isomorphie de structure, et pouvant même être bâties à l'aide d'éléments de nature différente. Il n'existe donc pas de loi générale, mais on peut indiquer, sur l'exemple des représentations couramment utilisées, les caractères généraux d'une bonne figuration, apte à faciliter les raisonnements. Il y a intérêt, lorsque l'on figure les éléments complexes par des éléments réels du même espace, à ce que tout élément réel soit figuré par lui même, et à ce que l'élément réel attaché à un élément complexe lui soit lié de manière covariante par le groupe principal de la géométrie complexe initiale — ou par un sous-groupe. Un procédé commode pour obtenir une telle figuration consiste à attacher à l'élément complexe initial (auquel on peut adjoindre si nécessire l'élément complexe conjugué, en lui faisant jouer de préférence un rôle antisymétrique plutôt que symétrique) une figure algébrique, covariante par le groupe principal, et dont on n'envisagera ultérieurement que la partie réelle.

Les conditions d'analyticité en éléments complexes font apparaître, dans la représentation réelle, des conditions plus cachées de géométrie différentielle, qui sont la traduction des «Conditions de Cauchy», et qui expriment la différence entre une quantité dépendant d'*un* paramètre complexe et une qnantité plus générale dépendant de *deux* paramètres réels. Par exemple, la partie réelle d'une fonction d'une variable complexe $x+iy$ est *fonction harmonique* de x et y.

Exemples dans le plan:

Citons quelques exemples, pour la représentation réelle des éléments imaginaires du *plan:*

Dans le groupe métrique, anallagmatique ou conforme, on peut attacher à chaque point complexe A les deux isotropes qui en sont issues, d'où le segment de leurs points réels qui sont les *foyers* du point A et du point conjugué. Toute transformation métrique, anallagmatique ou conforme *directe* complexe induit sur la première et sur la deuxième images rèelles des transformations métriques, anallagmatiques ou conformes directes réelles, indépendantes l'une de l'autre, et qui viennent se confondre si la transformation initiale est réelle. Ces propriétés restent valables sur la sphère, et il y a intérêt à considérer les points réels images comme appartenant à deux *feuillets* différents superposés mais indépendants. Chacune des images réelles associée aux points d'une droite du plan permet ainsi d'associer à toute affixe complexe un point réel (représentation de Cauchy). Plus généralement, les points d'une *courbe* complexe ont des images qui se correspondent par une transformation conforme inverse (symétrie de Schwarz). Pour la sphère, les deux images réelles d'un point complexe peuvent être jointes par une droite orientée, réelle, rayon de la géométrie hyperbolique de Cayley associée, qui devient indéterminé lorsque le point initial est réel.

Dans le groupe linéaire, on peut attacher à chaque point imaginaire et à son conjugué le segment réel orienté, concentrique et homothétique du précédent dans le rapport i.

Dans le groupe projectif d'une conique idéale (d'équation réelle, sans point réel), on peut attacher à chaque point les deux tangentes à la conique qui en sont issues, puis les deux points réels d'une sphère de Riemann qui y ont pour affixe les deux paramètres complexes de ces tangentes, et enfin le rayon réel, non orienté, qui les joint. Si l'on associe au point complexe initial les deux points réels de la sphère de Riemann qui ont pour affixes le paramètre d'une tangente et le conjugué de l'autre, on trouve une représentation peu différente de la représentation donnée comme premier exemple, par l'intermédiaire des isotropes et dont la validité s'étend maintenant à la géométrie métrique, anallagmatique ou conforme *non euclidienne.*

Dans le groupe métrique, on peut remarquer que si deux points A, A' se correspondent par rotation, leurs *foyers* B, B' se correspondent par une homothétie de même centre: ceci explique la *représentation cinématique* de Blaschke, qui associe à tout point complexe B du plan $z=0$ la droite réelle de l'espace passant par le point de même abscisse du plan $z=i$: lorsque la droite image passe par un point fixe réel de l'espace les foyers réels A, A' du point B se correspondent par une rotation réelle. De même, lorsque la droite réelle de l'espace est située dans une plan fixe, les foyers réels A, A' du point B se correspondent par un retournement.

Exemples dans l'espace :

Citons maintenant quelques exemples de représentation réelle des éléments imaginaires de *l'espace :*

Dans le groupe anallagmatique, on peut considérer tout point complexe comme foyer d'un cercle réel, tracé sur le cône isotrope centré en ce point. La distinction entre le point initial et le point complexe conjugué permet d'orienter le cercle et d'en faire un *cycle*. Les points d'une isotrope sans point réel ont pour image les cycles d'une *congruence paratactique*. Les points d'une sphère ont pour image les cycles orthogonaux à cette sphère.

Dans le groupe linéaire, on peut attacher à chaque point complexe et à son conjugué le segment concentrique, homothétique dans le rapport i. On peut aussi leur associer leur milieu et le vecteur libre quotient par $2i$ de leur vecteur de jonction, ce qui revient à étudier séparément la partie réelle et la partie imáginaire. Une *courbe* complexe est alors représentée par une surface réelle, armée d'un champ de vecteurs, et la condition d'analyticité impose à la surface réelle d'être *imaginairement de translation* : ses génératrices imaginaires sont homothétiques de la courbe initiale ; dans le cas général, les coordonnées x, y, z, des points réels de la surface représentative sont fonctions harmoniques de deux paramètres u, v; si la courbe initiale est de longueur nulle, on obtient ainsi la génération géométrique des *surfaces minima*.

Dans le groupe projectif, on obtient une représentation réelle des points d'une courbe complexe par les droites réelles qui rencontrent la courbe, ou par les droites réelles des plans osculateurs de cette courbe. Si, dans ce dernier cas, la courbe est de longueur nulle, on obtient une *congruence isotrope* de droites.

(Continua)

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

GODOFREDO GUILLERMO LEIBNIZ (1646-1716)

por ***J. Gallego-Diaz***

Lo que hoy se llama Análisis lnfinitesimal tuvo su cuna en la mente genial de Leibniz. Él fué quien, por vez primera, pronunció la palabra función y es justo proclamar — apagados ya los ecos de la enconada controversia entre newtonianos y leibnizianos — que su maravillosa invención del cálculo infinitesimal fué enteramente independiente de la realizada por Newton cási simultáneamente.

La evolución iniciada por Descartes en la Matemática creando lo que Ampère bautizó mas tarde con el nombre de geometria analitica, fué seguida de otra no menos importante: el problema directo o de las tangentes y el inverso (cuadraturas y rectificaciones) eran resueltos con la máxima generalidad.

Si tuviéramos que reflejar en una fórmula la relación entre los griegos y los artifices del universo matemático diriamos que Descartes es a Apolonio lo que Leibniz es a Arquimedes.

Sin embargo, la trascendencia de los descubrimientos leibnizianos era tal que no debe sorprendernos el irónico comentario de Leibniz en carta dirigida a uno de sus amigos: «No he podido por menos de reir cuando he visto que ellos — el cartesiano Malebranche — consideran el álgebra (el álgebra de las cantidades finitas, se entiende) como la más grande y sublíme de todas las ciencias».

Pero la insaciable curiosidad espiritual de Leibniz no se dirigía solo al estudio de la matemática pura. La filosofía, la jurisprudencia, la história, la química, la física y la teologia recibieron el soplo impetuoso de su genio universal.

Su mas honda ambición se centraba en aquella «Vera Cabbala» «ars inveniendo y ars combinatoria» gracias a la cual ha sido posible desarrollar toda la labor crítica que sobre los fundamentos de la matemática se ha realizado en nuestro siglo.

Un español egregio, Raimundo Lubio, habia tenido el mismo sueño. El «arte lullica» fué quizà, para Leibniz, un valioso estímulo, no por superado menos digno de reconocimiento.

A pesar de su clara visión dialéctica necesitó varios años para pasar de la idea a los hechos y tal vez no se hubiera decidido a publicar sus descubrimientos en 1684, en la revista *Acta Eruditorum* por él fundada, si no hubiera sido porque uno de sus mejores y mas inteligentes amigos, Walter Ehrenfried, conde de Tschirnhaus, habia ya comenzado a publicar como propios los teoremas que confidencialmente le habia comunicado Leibniz.

La influencia que la obra de Leibniz tuvo en la posterior generación matemática ha ido creciendo hasta nuestros dias. Él fué el primero que empeló los determinantes, demostró el teorema que lleva el nombre de Wilson, resolvió el famoso problema de la *braquistocrona* y otros de cálculo de variaciones; dió la fórmula de la potencia de los polinómios, generalizando la del binómio de Newton, y sembró en multitud de campos con tal profusión, que los frutos aún no acabaron de recojerse.

Los filósofos no matemáticos han deformado su obra hasta la caricatura; fenómeno éste, por lo demás tan frecuente como lamentable. En el siglo pasado, por ejemplo, Dühring, en su célebre «Curso de Filosofía» demostró hasta la saciedad que era totalmente impermeable su espiritu para la filosofía matemática leibniziana. Otro filósofo (?) Julian Manes dice, a propósito de Leibniz en su libro: «La filosofia del P. Gratry» — «En el infinitamente pequeño no hay cantidad. El infinito no es una cantidad muy grande ni el elemento infinitesimal es una cantidad muy pequeña; no es *pequeño,* sino *nulo*».

Quis neget, naturam instinctu solo, sine etiam ratiocinatione, docere geometriam?

La biografía de Leibniz es demasiado rica para que pueda resumirse en unas pocas lineas. Nació en Leipzig el 1.º de Julio de 1646 y murió em Hannover el 14 de Noviembre de 1716. Desde su infancia demostró sus extraordinarias dotes intelectuales que no fueron apreciadas en su ciudad natal. Se doctoró en Leyes, en Nuremberg. Escribió poesías de escaso valor y siguió los cursos de Matemática de Erhard Weigel, en la Universidad de Iena. Weigel era un tipo mediocre que no supo ver en Leibniz aptitud alguna para la Matemática. Luego, como diplomático, estuvo en Paris y Londres. Conoció a Huyghens, a quien reveló sus primeras emociones cuando consiguió demostrar, con estremecimientos de inefable embriaguez, totalmente incomprensible para el profano, que la suma de las raices cuadradas de dos complejas conjugadas era una cantidad real. Leibniz tuvo la suerte de no tener que dar clases de Matemática en Universidad o Instituto alguno. Mas tarde pasó al servicio de los Duques de Brunswick que le dejaron morir oscuramente, obligándole a la ímproba tarea de desentrañar su aristocrática selva genealógica.

Su glória, osculatriz a la de Newton, es mas universal que la de éste. Su espiritu fáustico era de naturaleza compleja e irracional; sólo asi era posible abarcar la estructura del universo; sólo asi era posible que su obra goce de esa actualidad que le está siempre reservada a quien realiza alguna revolución verdadera.

APLICAÇÕES DA MATEMÁTICA

FÍSICA TEÓRICA

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS D'ONDE COSMOLOGIQUES DES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

par ***António Gião***

Dans deux mémoires récents [1] sur la synthèse de la Relativité générale et de la mécanique ondulatoire j'ai montré que les équations $\Delta\Psi_{mn}=\alpha_n\Psi_{mn}$ et $\Delta_{\omega}\Phi_{mn}=\beta_n\Phi_{mn}$ (où Δ est le laplacien de la métrique interne $ds^2=g_{ik}\,dx^i dx^k$ de l'espace-temps et Δ_{ω} le laplacien de la métrique externe $d\Omega^2=\omega_{ik}\,dx^i dx^k$) ont un ensemble dénombrable de valeurs propres α_n, β_n et qu'à chaque α_n (ou β_n) correspondent *quatre* fonctions propres invariantes et non-arbitraires Ψ_{mn} et Φ_{mn} $(m=1,2,3,4)$, qui sont les *fonctions d'onde cosmologiques* des particules élémentaires de l'Univers. Les α_n et les β_n sont reliés comme suit aux masses propres m_n et aux charges électriques e_n des particules élémentaires:

$$m_n=\frac{2\pi c}{h}m_e^2\frac{1}{n^4\sqrt{\alpha_n}}\,; \quad e_n=\frac{e^2}{h}\sqrt{\frac{m_e}{\mathcal{Q}}}\frac{1}{n^4\sqrt{\beta_n}}\,,$$

m_e et e désignant la masse au repos et la charge de l'électron, et $\mathcal{Q}$ une constante numérique qui ne dépend que du nombre de nucléons (protons et neutrons) de l'Univers au début de sa phase en expansion. (Les électrons habituels correspondent à $n=1$ et pour $n>1$ on a une série de «*microélectrons*» qui n'ont pas encore été observés, mais qui pourront peut-être être isolés expérimentalement, au moins pour $n=2$, dans des phénomènes comme l'émission β continue des substances radioactives). Les Ψ_{mn} et les Φ_{mn} satisfont aussi aux équations suivantes du premier ordre:

$$\varepsilon_n^i\frac{\partial\Psi_{mn}}{\partial\rho}=-\sqrt{\alpha_n}\,\Psi_{mn}\,; \quad \varepsilon_{nq}^i\frac{\partial\Phi_{mn}}{\partial q^i}=-\sqrt{\beta_n}\,\Phi_{mn}\,,$$

dans lesquelles ρ et q sont des coordonnées géodésiques *locales* orthogonales en un point quelconque

[1] I) — «*Le problème cosmologique généralisé et la mécanique ondulatoire relativiste*» (Portugaliae Physica, vol. 2, fasc. I, pag. 1-98, 1946).

II — «*Forces nucléaires, gravitation et électromagnétisme*» (Portugaliae Mathematica, vol. 5, fasc. 3, pag. 145-194, 1946).

Tableau des principales propriétés physiques des contenus de l'Univers déduites des fonctions d'onde cosmologiques

η	Fonctions d'onde	Tenseurs symétriques conservatifs du 2nd ordre	Tenseurs antisymétriques du 2nd ordre: sans dérivées des fonctions d'onde	Tenseurs antisymétriques du 2nd ordre: avec dérivées des fonctions d'onde	Vecteurs conservatifs d'espace-temps: sans dérivées des fonctions d'onde	Vecteurs conservatifs d'espace-temps: avec dérivées des fonctions d'onde	Tenseurs compl.t antisymétriques du 3ième ordre (vecteurs axiaux): conservatifs	Tenseurs compl.t antisymétriques du 3ième ordre (vecteurs axiaux): non-conservatifs	Pseudo-scalaires	Scalaires
$-i\varepsilon^4_0$	Ψ_{mn}	énergie-quantité de mouvement de la matière (tenseur d'Einstein)	moments gravifique et mésonique	partie non-lorentzienne des moments gravifique et mésonique	quantité de mouvement matérielle	0	source de la partie non-lorentzienne des moments gravifique	Spin matériel	Intensité des sources de spin matériel	Intensité de présence des corpuscules élémentaires de matière
	Φ_{mn}	énergie-quantité de mouvement de l'électricité	moments électrique et magnétique	partie non-lorentzienne des moments électrique et magnétique	quantité de mouvement électrique	0	source de la partie non-lorentzienne des moments électrique et magnétique	Spin électrique	Intensité des sources de spin électrique	Intensité de présence des corpuscules élémentaires d'électricité
I	Ψ_{mn}	énergie-quantité de mouvement matérielle de rayonnement	champ gravifique-mésonique	partie non-lorentzienne du champ gravifique-mésonique	quantité de mouvement matérielle de rayonnement	polarisation matérielle	«mésonisation»	0	0	0
	Φ_{mn}	énergie-quantité de mouvement électromagnétique de rayonnement (tenseur de Maxwell)	champ électromagnétique	partie non-lorentzienne du champ électromagnétique	quantité de mouvement électrique de rayonnement	polarisation électrique	aimantation	0	0	0

$(ds^2=\Sigma(d\varrho^i)^2;\ d\Omega^2=\Sigma(dq^i)^2)$. Les ε^i_n sont des matrices vecteurs définies par: $\varepsilon^i_n=\varepsilon^k_0\,\partial\varrho^i/\partial\xi^k_n$; $\varepsilon^i_{nq}=\varepsilon^k_0\,\partial q^i/\partial q^k_n$, les ε^i_0 étant quatre matrices de base à quatre lignes et quatre colonnes satisfaisant à $\varepsilon^i_0\varepsilon^k_0+\varepsilon^k_0\varepsilon^i_0=2\delta^{ik}$. En désignant par η une matrice constante et en posant: $\tilde{\Psi}^+_{mn}\equiv i\Psi_{mn}\,\eta\,\varepsilon^4_0$; $\tilde{\Phi}^+_{mn}\equiv i\Phi_{mn}\,\eta\,\varepsilon^4_0$, on a aussi:

$$\frac{\partial\tilde{\Psi}^+_{mn}}{\partial\varrho^i}\,\varepsilon^i_n=\sqrt{\alpha_n}\,\tilde{\Psi}^+_{mn}\,;\quad \frac{\partial\tilde{\Phi}^+_{mn}}{\partial q^i}\,\varepsilon^i_{nq}=\sqrt{\beta_n}\,\tilde{\Phi}^+_{mn}.$$

Il faut considérer les deux spécifications non-arbitraires de η, à savoir: $\eta=-i\varepsilon^4_0$ et $\eta=I$. Toutes les quantités tensorielles, vectorielles et scalaires formées avec les Ψ_{mn} (ou les Φ_{mn}) quand $\eta=-i\varepsilon^4_0$ sont des propriétés des *fluides cosmologiques* de matière (et d'électricité), dont les «gouttes» sont les globules qui accompagnent les masses et charges ponctuelles de l'Univers; pour $\eta=I$ on a, par contre, les propriétés du *rayonnement* (gravifique-mésonique et électromagnétique). D'après les résultats des mémoires I et II, les propriétés de la matière ne dépendent que des Ψ_{mn} (et des g_{ik}) tandis que les propriétés de l'électricité ne dépendent que des Φ_{mn} (et des ω_{ik}). Le tableau ci-joint résume donc beaucoup de résultats.

Nous ne donnerons pas ici les expressions mathématiques et les relations mutuelles de ces quantités, et mentionnerons seulement les points suivants: 1.° — Le rayonnement est caractérisé par deux propriétés: *a)* les vecteurs de quantité de mouvement correspondants ont une longueur nulle; *b)* Les «traces» des tenseurs d'énergie-quantité de mouvement sont nulles aussi. 2.° — Les tenseurs symétriques conservatifs pour $\eta=-i\varepsilon^4_0$ sont égaux aux tenseurs T_{ik} et U_{ik} des équations $R_{ik}-\frac{1}{2}g_{ik}(R+\lambda_g)=\varkappa_g T_{ik}$ et $S_{ik}-\frac{1}{2}\omega_{ik}(S+\lambda_\omega)=$ $=\varkappa_\omega U_{ik}$ (cf. I et II) qui, complétées par les conditions de compatibilité de Gauss et de Codazzi pour une hypersurface d'un espace à $N+1$ dimensions, expriment la définition fondamentale d'«*être mathématique non-arbitraire*». D'après le principe de base de notre théorie cosmologique, *cet être est identique à l'Univers physique;* en d'autres termes: il y a correspondance biunivoque entre les propriétés révélées par l'analyse purement mathématique de l'être mathématique non-arbitraire et les propriétés physiques de l'Univers. Dans cette note nous avons précisément mis en évidence quelques uns des éléments de cette correspondance[1].

Novembre 1946.

[1] Les résultats exposés ici brièvement seront traités en détail dans un travail ultérieur.

ANTOLOGIA

MATHÉMATIQUES ET BIOLOGIE *

par G. Teissier

L'organisation actuelle des études secondaires et supérieures en France est telle qu'un futur médecin ou un futur naturaliste fait son dernier problème le jour de son baccalauréat et que c'est à cette même date que le futur ingénieur, le futur physicien, le futur chimiste, prennent définitivemente congé des sciences biologiques.

Je ne suis pas sûr que cette situation soit absolument sans inconvénient pour ceux qui cultivent les sciences exactes ou les sciences appliquées. Je suis certain, en revanche, qu'elle interdit à de jeunes biologistes l'accès de disciplines modernes et vivantes, qu'ils sont condamnés à ignorer leur vie durant, et qu'elle est responsable, pour une large part, de la décadence des recherches médicales dont s'alarment actuellement les meilleurs de nos collègues des facultés de médecine.

Le titre donné à cette conférence couvre un si large sujet qu'il ne me sera pas possible de faire mieux que d'en donner une esquisse et de faire entrevoir à ceux qui voudront bien me suivre, l'existence de domaines de la biologie dont l'entrée n'est permise qu'à ceux que ne rebute pas la rigueur des mathématiques. Puisse-t-elle éveiller, chez quelques jeunes biologistes, la nostalgie de ces terres interdites et apprendre à quelques jeunes mathématiciens qu'ils peuvent trouver dans la Biologie mathématique un champ de recherches comparable à celui qu'ont trouvé leurs devanciers dans la Physique mathématique.

La mesure en Biologie

Il n'est guère de chapitre de la Biologie où n'interviennent aujourd'hui *mesures* ou *dénombrements*. S'il entrait dans un laboratoire moderne, un biologiste du siècle dernier serait, sans doute surpris d'y trouver un outillage qui, de son temps, était réservé au physicien ou au chimiste. Nous avons en effet emprunté à nos collègues leurs procédés de mesure pour les appliquer à l'étude des êtres vivants : le physiologiste définit l'état du système nerveux par la vitesse de réaction à l'excitation électrique, le médecin vérifie l'état de la thyroïde en mesurant la consommation d'oxygène, le zoologiste définit races, variétés, parfois même espèces, par les dimensions de tel ou tel de leurs organes ; le phychologue cherche à définir les aptitudes intellectuelles par des tests quantatifs variés.

La vie courante même nous montre cette utilité de la mesure. Chacun de nous s'est alarmé ou rassuré suivant l'indication lue sur un thermomètre médical. Nous avons tous eu, dans notre premier âge, une feuille de pesée où une ligne sinueuse a fait, tantôt la fierté, tantôt le désespoir de notre mère. En quoi l'allure de cette ligne peut-elle expliquer, sinon justifier, cette joie ou cette alarme ? Pourquoi l'écart plus ou moins marqué, dans un sens ou dans l'autre, de la ligne joignant les points figuratifs des pesées journalières et d'une courbe ascendante merveilleusement régulière, que d'avisés commerçants impriment sur les feuilles de pesées, intéresse-t-il parents et médecins ? Que signifie au juste cette courbe que l'on prétend définir la croissance normale d'un enfant ; que signifient de même ces tailles et ces poids correspondant aux divers âges qu'indiquent les bascules des gares ?

Questions auxquelles bien peu de gens, à commencer par les médecins, seraient capables de répondre ; questions d'ailleurs qu'ils ne se sont jamais posées, tant l'esprit scientifique fait défaut à l'immense majorité de nos concitoyens.

Quoi qu'il en soit de ce dernier point, sur lequel il y aurait, hélas ! beaucoup à dire, nous sommes précisément ici pour nous poser des questions de ce genre. Le fait qui importe est que, dans un nombre toujours plus grand de recherches, le biologiste est appelé par le jeu même de son travail, à recueillir des séries de chiffres qui lui permettent, soit de suivre pas à pas un phénomène, soit de caractériser une population. Il se trouve fréquemment qu'une fois ses mesures faites et bien faites, le biologiste se trouve embarrassé pour intrepréter correctement et qu'il doive recourir à l'aide d'un spécialiste.

Essayons de comprendre comment il se peut faire qu'il ait été nécessaire d'élaborer tout un corps de techniques mathématiques, la *Biométrie,* pour interpréter les plus simples des mesures biologiques.

* Conferência da série «Enseignement et Culture» promovida pela «Union Française Universitaire» e realizada em Paris em 13 de Abril de 1945. O Prof. Georgis Teessier, da Faculdade de Ciências da Universidade de Paris, seu Autor, procura elevar em França o ensino da Biologia e sobretudo o da Genética ao nível que lhe compete. Lamentamos também, com o seu Autor, a necessidade de realizar uma conferência dêste tipo na época actual e transcrevemo-la na nossa revista por julgarmos infelizmente que a situação entre nós é ainda mais grave. *A Redacção*

L'analyse de la variabilité et la loi normale

Le Biologiste se heurte à chaque instant dans ses recherches à une difficulté qu'ignorent presque complètement ceux qui ne s'attachent pas à l'étude des êtres vivants. Lorsqu'un chimiste, isolant un corps nouveau, en détermine la densité, la température d'ébullition ou l'indice de réfraction, il ne doute pas que les chiffres obtenus soient des *constantes* caractéristiques du corps étudié. Si celui-ci a été obtenu à un état de pureté convenable, si le chimiste est suffisamment habile et s'il dispose d'instruments suffisamment précis, les résultats de ces mesures pourron têtre retrouvés, en tout temps et en tout lieu, par tout autre chimiste qui voudra s'en donner la peine. La température de fusion de la glace et la température d'ébullition de l'eau sous pression donnée sont partout les mêmes et peuvent être déterminées à partir d'un échantillon d'eau pure tont à fait quelconque. Il en est de même dans tous les chapitres de la physique ou de la chimie. Les conditions d'une expérience peuvent être reproduites assez exactement pour qu'on puisse être assuré d'observer chaque fois qu'on le voudra le même phénomène. La précision des résultats n'est limitée que par le degré de perfection des appareils dont on fait usage et il est toujours possible d'étudier deux objets pratiquement identiques.

Rien de tel lorsque l'objet d'étude est un être vivant. Il n'est rien de plus difficile que de reproduire exactement un phénomène biologique que l'on a observé une fois ; il est impossible de trouver deux organismes qui soient vraiment identiques.

A cette *variabilité,* aucune espèce animale ou végétale n'échappe. Dans une collection d'animaux ou de végétaux de même espéce, de même race, de même sexe, de même âge, choisis aussi semblables que possible, il n'en est pas deux qui puissent être considérés comme réellement identiques, dès que l'on cesse de se contenter d'une approximation grossière. Les moutons d'un troupeau indiscernables l'un de l'autre à l'oeil d'un citadin ont chacun une physionomie propre pour le berger qui vit avec eux. Quelle que soit l'espèce étudiée, quel que soit l'organe ou la fonction sur lesquels on fait porter les mesures, il existe des différences individuelles non négligeables. Une étude comparative de deux individus montrera toujours des différences entre les dimensions de chacune des parties de leur corps, des différences dans la composition chimique ou dans les caractéristiques physiques de chacun de leurs tissus.

Ainsi, au seuil même de la Biométrie, la variabilité des êtres vivants apparaît comme un grave obstacle, qu'aucun artifice expérimental ne pourra jamais tourner, qu'aucun progrès technique ultérieur ne permettra de franchir puisqu'il appartient à la nature même de l'objet d'étude. En faut-il conclure qu'il est vain d'espérer faire de la Biologie une science quantitative et qu'elle est condamnée éternellement à l'imprécision et au vague ? Beaucoup de biologistes l'ont cru, beaucoup le croient encore. Mais d'autres n'acceptent pas de s'arrêter à cette solution paresseuse. Ils pensèrent puisqu'il n'était pas possible d'ignorer la variabilité, ni légitime d'en faire abstraction, qu'il fallait étudier le phénomène en lui-même. En abordant de front la difficulté, ils trouvèrent dans l'obstacle prétendu insurmontable, l'occasion des plus précieuses découvertes.

De cette étude de la variabilité, Darwin avait d'ailleurs montré la nécessité. Lorsque son «Origine des Espèces» eut fait du problème de l'Evolution la question centrale de la Biologie, il devint indispensable d'analyser de plus près que n'avait pu le faire Darwin lui-même, les phénomènes qu'invoquaient ses théories. Au premier rang de ceux-ci est la variabilité qui différencie les individus d'une même espèce et leur donne des chances inégales de survivre à la Sélection naturelle. Aussi, dans l'étude de la variabilité, partisans et adversaires de l'Evolution s'affrontèrent-ils bientôt. Mais tous rivalisèrent dans la découverte de nouveaux faits.

Dans cet ensemble de travaux, deux courants se dessinent bientôt. Certains chercheurs, s'intéressant surtout à l'Homme, ne pouvaient pas disposer des ressources qu'offre la méthode expérimentale aux autres biologistes. Ils étudièrent la variabilité en elle-même, sans prétendre en analyser la signification biologique. Ils durent, pour interpréter les innombrables mesures qu'ils avaient faites, élaborer des techniques mathématiques nouvelles et créèrent ainsi les méthodes de la Statistique moderne, dont la Biométrie constitue la première codification.

D'autres chercheurs firent porter leurs études sur des animaux ou des végétaux élevés au laboratoire ou dans des champs d'expérience. Moins portés aux études mathématiques et plus «naturalistes» que leurs émules, ils s'attachèrent surtout à élucider le déterminisme de la variation. Après une longue période de travail confus et passablement désordonné, ils créèrent un des chapitres les plus éclatants de la Biologie moderne, la Génétique.

Nous verrons plus tard que la Génétique, science expérimentale, ne peut pas plus se passer de l'aide des mathématiques que la Biométrie, science d'observation, mais dès maintenant nous devons utiliser un de ses résultats.

L'étude expérimentale de l'hérédité a montré que les caractères individuels distinguant les divers représentants d'une même espèce, n'ont pas tous la même signification. Il en est qui sont inhérents à la nature même de chacun des êtres comparés, tandis que d'autres, beaucoup plus contingents, sont imputables aux circonstances dans lesquelles chaque individu s'est trouvé placé au cours de son existence. Les premiers, qui sont héréditaires, peuvent porter sur les traits d'organisation les plus dissemblables, affecter la couleur aussi bien que la forme et porter sur d'infimes détails aussi bien que sur les dimensions globales de l'organisme. Les seconds, strictement individuels et non transmissibles des parents aux enfants, portent le plus souvent sur les dimensions du corps tout entier ou sur telle ou telle de ses parties.

Un exemple bien connu de tous permettra d'illustrer cette notion capitale. Une collection de chiens rassemblés au hasard, telle que celle que l'on peut observer dans une fourrière, présente dans la taille, la forme ou la couleur, beaucoup plus de diversité que n'en montreraient tous les fox-terriers du monde si l'on pouvait les réunir. Il s'agit là évidemment d'un cas extrême, mais l'on retrouverait partout, à un moindre degré, le phénomène qu'il met en évidence; la variabilité est moins forte dans une race que dans un mélange de races; elle est d'autant plus réduite que la pureté de la race est plus grande ou, pour employer le langage des généticiens, que le patrimoine héréditaire est plus homogène. A la limite, lorsque le patrimoine héréditaire est exactement le même pour deux individus, la ressemblance peut parfois presque atteindre l'identité. Cela ne se produit que dans un cas et un seul, celui des jumeaux vr is, qui, à la vérité, sont beaucoup moins deux êtres distincts qu'un seul être en deux personnes.

Hors ce cas très exceptionnel, il subsiste entre les divers représentants d'une même race des différences très appréciables. Elles s'expliquent pour une part, par de légères différences dans les patrimoines héréditaires des différents individus, mais surtout par la diversité des circonstances qu'ont traversées, au cours de leur existence, les individus que l'on compare. Ceux qui se sont trouvés dans les circonstances les plus favorables, ceux qui ont bénéficié de la nourriture la plus abondante et la meilleure, deviendront plus grands, plus forts et plus beaux que les autres. Quelque soin que prenne un expérimentateur pour rendre comparables les conditions d'existence des animaux qu'il élève, il ne réussira pas à faire disparaitre ces différences individuelles, et on en retrouvera d'au moins aussi grandes dans les représentants de toutes les espèces sauvages. Ainsi, dans le cas le plus simple où puisse être tentée une étude biométrique, il subsiste toujours entre les divers individus utilisés dans une même série de mesures des différences morphologiques ou physiologiques très notables. Mais il se trouve, et c'est là le premier et l'un des plus importants résultats de la Biométrie, que cette variabilité des races pures obéit à des règles précises et simples, règles qui permettent de comprendre et d'interpréter les faits que l'on observe lorsqu'on fait porter les mesures sur des populations renfermant un mélange de plusieurs races.

La découverte fondamentale en la matière date de près d'un siècle et est due au savant belge Quetelet, qui s'occupa avec un égal succès d'astronomie, de météorologie et de statistique. Etudiant sur une population très étendue les variations de la taille de l'homme adulte, il précisa par des mesures une constatation banale: les variations individuelles autour de la taille moyenne, qui est en même temps la plus fréquente, sont d'autant moins nombreuses, qu'elles sont plus amples. Les individus très grands ou très petits sont d'autant plus exceptionnels qu'ils sont plus grands ou plus petits. Familiarisé avec le calcul des probabilités et entraîné par ses recherches antérieures à l'élimination des erreurs expérimentales, il n'eut pas de peine à constater que la distribution des tailles suivait une loi exactement de même forme que celle qui régit la distribution des erreurs commises dans la mesure d'une grandeur. Il vérifie qu'il ne s'agissait pas là d'une simple analogie, mais que les mêmes formules s'appliquaient aussi correctement à l'un qu'à l'autre phénomène. Ainsi se trouvait introduite en Biométrie la loi qui devait jouer dans cette science un rôle si fondamental, qu'elle fut bientôt considérée comme «loi normale» de la variabilité.

Tout se passe, en somme, comme si tous les individus obéissaient en principe à la même loi de croissance qui, si elle agissait seule. aurait pour effet de donner à tous la même taille finale, et comme si, en même temps, les circonstances venaient troubler inégalement, dans uns sens ou dans l'autre, et plus ou moins selon les individus, la marche régulière du phénomène. La taille finale serait la résultante de la superposition de plusieurs phénomènes : un principal, qui nous intéresse particulièrement, et d'autres très nombreux et très divers, que nous ne pouvons pas prétendre connaître tous. Les calculs statistiques faits sur l'ensemble des mesures ont pour but de dégager le phénomène principal des phénomènes parasites et d'évaluer en même temps l'importance de ces derniers.

Cette interprétation de la variabilité coïncide très exactement avec celle que donne la Génétique, dont nous avons parlé tout à l'heure. Elle permet en outre de comprendre le rôle de la loi normale en Biologie et donne ainsi une base solide à la Biométrie.

Grâce à la Biométrie, il est possible d'atteindre des grandeurs objectives et de les déterminer, avec une précision d'autant plus grande que le nombre des mesures a été plus grand. L'incertitude qui subsiste est toujours chiffrable. Mais ces grandeurs, qui ont une signification aussi claire que celles que l'on rencontre en physique, ne concernent que des collectivités et, transportées à l'échelle individuelle, ne s'appliquent qu'à un être idéal, l'individu moyen, que nul n'a jamais rencontré. En ce qui concerne les individus réels, la Biométrie ne nous indique que des *valeurs probables*. Un biométricien ne peut pas deviner, plus que n'importe qui, que Monsieur X, qu'il n'a jamais vu, mesure 1 m. 74 et pèse 64 kg. Mais, si la fantaisie l'en prenait, il pourrait faire, à bon escient, certains paris. Il pouvait par exemple, très raisonnablement, parier en 1939, à trois contre un, que Pierre, petit Parisien de 12 ans, dont il ne savait rien, sinon qu'il était élève d'une école primaire du XV^e arrondissement, ne dépassait pas la taille de 1 m. 44 et le poids de 37 kg. 500; et, à dix contre un, qu'il n'atteignait pas la taille de 1 m. 49 et le poids de 45 kg.

Tout ce qui précède permet de comprendre que la réponse de la Biométrie à la plus simple des questions soit nécessairement assez compliquée. Elle comporte, au moins, l'indication de la *moyenne*, celle de l'*écart-type*, qui est une mesure de la variabilité, celle des *erreurs probables* de l'une ou de l'autre de ces grandeurs, erreurs qui dépendent à la fois de l'écart-type et du nombre des individus mesurés. Pour interpréter ces chiffres, il pourra être nécessaire de consulter des tables numériques, notamment celles de la fonction de Gauss, qui permettent seules de faire avec chance de succès certaines prédictions.

Ces constantes biométriques une fois connues, il devient possible de pratiquer de fort instructives comparaisons. On peut, par exemple, décider si deux séries d'individus peuvent légitimement être considérés comme appartenant à une seule et même population ou si, au contraire, on doit admettre qu'ils proviennent de deux populations distinctes. Des questions de ce genre se posent constamment dans l'étude des problèmes biologiques les plus divers, distinction des races au sein d'une même espèce, analyse de l'action du milieu sur les représentants d'une même race, détermination de l'importance des caractères sexuels secondaires lorsque ceux-ci sont peu marqués, orientation scolaire ou professionnelle... Et cette liste n'a rien de limitatif.

La correlation

D'autres problèmes sont plus difficiles. Ce sont ceux qui exigent l'étude simultanée de deux ou de plusieurs grandeurs biologiques mesurées sur le même être. Dans une population d'enfants du même âge, le poids et la taille sont deux grandeurs variables, et tous les individus de même taille ne pèseront pas le même poids. On peut faire correspondre à chaque taille un poids, à chaque poids une taille qui représenteront des valeurs moyennes, caractérisant dans une certaine mesure la population étudiée. Mais ces renseignements sont insuffisants. Ils ne nous diront pas si les enfants de même taile ont une corpulence moyenne et des poids très voisins l'un de l'autre ou si, au contraire, à taille égale, le poids est très variable, les individus très maigres ou très gras étant très nombreux. Ils ne nous diront pas, en somme, jusqu'à quel point les deux grandeurs étudiées dépendent l'une de l'autre, jusqu'à quel point pour un individu donné la connaissance de l'une peut servir à prévoir l'autre.

Ces renseignements complémentaires sont apportés par le calcul, à partir des résultats de l'ensemble des mesures, d'un paramètre spécial, le *coefficient de corrélation*, dont la valeur exprime le degré plus ou moins étroit de dépendance des deux grandeurs que l'on compare. La notion de corrélation, dont l'idée première est due au biologiste anglais Galton, est beaucoup plus facile à expliquer en langage mathématique qu'en langage usuel. Essayons cependant de donner une idée de son contenu.

La taille et le poids d'un enfant ne sont évidemment pas indépendants. Parmi les phénomènes qui déterminent la taille, il en est, notamment les dimensions du squelette, qui interviennent aussi dans la fixation du poids. Si ces phénomènes existaient seuls, le poids serait connu lorsqu'on connaîtrait la taille, exactement comme le poids d'une boule de fer est déterminé lorsqu'on connaît son diamètre. La variabilité d'une des grandeurs serait déterminée par les mêmes causes que la variabilité de l'autre. Mais nous savons bien que quantité de circonstances qui n'affectent pas une des grandeurs affectent l'autre, et qu'un enfant peut grandir sans augmenter de poids, maigrir ou engraisser sans que sa taille varie. Ces circonstances, qui troublent en quelque sorte le jeu des phénomènes communs à la croissance en taille et à la croissance en poids, nous empêchent de calculer avec certitude l'une des grandeurs lorsque l'on connaît l'autre. Elles ajoutent à la variabilité commune à la taille et au poids, une variabilité propre à chacune des grandeurs. Elles transforment la relation rigoureuse qui existerait sans elle en une relation moins stricte, une relation de corrélation. Le coefficient de corrélation donne une mesure de la part de la variabilité commune aux deux grandeurs dans la variabilité totale de l'une et de l'autre.

Nous pourrions redire, à propos de relations de corrélation, ce que nous avons dit en étudiant la mesure d'une grandeur isolée. Elles peuvent fournir des descriptions précises, exprimables par des formules aussi strictes que celles que l'on rencontre en physique, du comportement moyen d'une grande population. Mais elles ne donnent pour un individu particulier que des prévisions plus ou moins probables, dont le degré de précision dépend étroitement de la grandeur du coefficient de corrélation.

Lorsque ce coefficient est nul, les deux grandeurs sont indépendantes, et la connaissance de l'une n'apprend rien sur l'autre. Lorsqu'il est égal à 1, les deux grandeurs varient proportionnellement l'une à l'autre. Toutes les valeurs comprises entre 0 et 1 peuvent se rencontrer; elles expriment tous les degrés de liaison, du plus lâche au plus étroit, entre les grandeurs que l'on compare. Et, de même qu'il est possible de comparer deux populations du point de vue des moyennes et des écarts-types de leurs caractères mesurables, il est possible de les comparer du point de vue de la valeur des coefficients de corrélation unissant ces caractères. Nous verrons tout à l'heure un exemple où cette comparaison a apporté des résultats extrêmement importants pour la Biologie générale.

Biometrie et statistique

Il ne nous est, malheureusement, pas possible d'aller plus loin dans l'exposé des procédés de travail en usage dans la Biométrie et nous ne pouvons pas davantage songer à examiner les problèmes biologiques que l'utilisation méthodique de ces procédés a permis ou permettra de résoudre. Ce que nous avons dit doit cependant suffire à montrer qu'un des problèmes les plus fondamentaux de la Biologie, problème qui touche à l'une des caractéristiques les plus essentielles des êtres vivants, celui de la variation, est tout entier tributaire de méthodes mathématiques. Nous avons appris, à cette occasion, que l'on ne peut jamais connaître d'une grandeur caractéristique d'un être vivant que des valeurs probables et que, dans aucun cas, un seul nombre n'est capable de résumer complètement une enquête biométrique, différence d'avec les grandeurs physiques qui suffit à donner aux mathématiques du biologiste une allure toute particulière.

Il arrive, cependant, et il arrivera de plus en plus fréquemment dans l'avenir, qu'un biologiste ait à faire usage de techniques expérimentales et de modes de raisonnement analogues à ceux du physicien ou du chimiste et qu'il cherche à établir des relations quantitatives entre deux grandeurs biologiques, ou entre une grandeur biologique et une grandeur physique. Les lois qu'il obtiendra ne seront pas, en général, d'un type très différent de celui des lois que manient ses collègues des sciences exactes; mais leur signification concrète sera bien différente. Alors que, pour ceux qui étudient la matière inanimée, les lois obtenues peuvent permettre la prévision rigoureuse des phénomènes, pour celui qui étudie la matière vivante, la loi la plus rigoureusement établie ne sera jamais qu'une loi *moyenne*, capable de décrire le comportement *moyen* d'une population infiniment nombreuse, mais incapable par essence de traduire avec rigueur aucune loi individuelle. Nous savons bien qu'aucun bébé n'a jamais été assez idéalement moyen pour se conformer à la loi de croissance exprimée par la courbe admirablement régulière tracée par avance sur les feuilles de pesée, courbe qui ne peut traduire que le comportement d'un être parfaitement abstrait, le Bébé Normal. Mais nous savons aussi que la connaissance de cette courbe moyenne n'est pas inutile et que, si notre enfant s'en écarte trop, il nous faut appeler le médecin. Aujourd'hui chacun de nous s'alarme plus ou moins vite suivant son degré propre de calme ou de nervosité, mais il est fort probable qu'un jour prochain, la courbe théorique, qui existe seule aujourd'hui, sera encadrée de deux autres courbes qui représenteront des sortes de marges de sécurité qu'un enfant bien portant ne doit pas franchir en principe. Ces marges de sécurité seront définies par la biométrie, à partir de cet écart-type du poids moyen dont il a été fait mention tout à l'heure. L'ensemble des trois courbes, la courbe moyenne et ses deux satellites, représentera l'équivalent de la courbe unique correspondant au phénomène physique. Différence qui s'explique par le fait que la matière vivante est toujours variable et, par là même, indéfinissable, tandis que la matière inerte est définissable et constante — au moins en principe.

Mais il peut évidemment arriver que certains phénomènes physiques complexes, ou certaines substances chimiques instables, présentent une moindre constance que d'autres phénomènes plus simples, que d'autres substances plus stables. Das des cas de ce genre, il faudra faire usage de la Biométrie, bien qu'il ne s'agisse plus d'êtres vivants, mais alors on ne parlera plus de Biométrie, mais bien de Statistique.

Au sens le plus large du terme, la Statistique peut être conçue comme l'ensemble des méthodes mathématiques qui peuvent être utilisées pour décrire ou pour interpréter les résultats quantitatifs des expériences ou des observations. Elle a son fondement dans le calcul des probabilités, branche des mathématiques pures, nées au XVIII^e siècle, de l'étude des jeux de hasard. Mais elle ne s'est réellement développée qu'au XIX^e siècle et, fait bien digne de remarque, c'est en essayant de résoudre des problèmes biologiques qu'elle s'est constituée.

Il y a cent ans juste, avec QUETELET, se fondait la Biométrie, origine des notions d'écart-type de l'erreur probable. Il y a trois quarts de siècle qu'avec GALTON, qui étudiait les lois de l'Hérédité, apparaissait la notion de corrélation, fondement de la Statistique moderne. Aujourd'hui encore, devenue discipline autonome, elle trouve dans des problèmes biologiques les plus précieux des stimulants; c'est ainsi que depuis vingt ans s'est édifié tout un corps de doctrine destiné à préparer, de façon rationnelle, des plans d'expérimentation en agriculture et à interpréter au mieux les résultats des expériences.

De cette branche moderne de la Statistique, il ne saurait être question ici et nous ne parlerons pas davantage, faute de temps, d'une application plus ancienne, la démographie. Je voudrais utiliser le temps qui me reste à indiquer très rapidement que les mathématiques ont joué un grand rôle dans le développement d'une des disciplines biologiques les plus essentielles: la Science de l'Hérédité.

Hérédité et Statistique

L'histoire de cette science est curieuse. C'est en 1865 que MENDEL découvrit les lois qui ont immortalisé son nom, mais cette découverte, la plus importante qui ait été faite en Biologie au cours du XIX^e siècle, passa tout d'abord inaperçue et ne sortit de l'oubli que trente-cinq ans plus tard. De sorte que, lorsque, vers 1870, Francis GALTON aborda l'étude de l'hérédité, tout paraissait encore à découvrir sur le sujet. GALTON, étudiant l'homme, sur lequel on n'expérimente pas, et s'intéressant à des caractères comme la taille, dont la transmission obéit, on l'a su plus tard, à des règles particulièrement complexes, ne pouvait redécouvrir les lois de Mendel. Ce qu'il cherchait, c'était un moyen d'exprimer par un nombre, le degré de ressemblance moyen existant entre parents et enfants, frères et soeurs, etc... Et c'est au cours de cette recherche qu'il élabora, au prix de longs efforts, la notion de corrélation, qui, nous le savons déjà, est devenue essentielle à la Biométrie tout entière. Appliquée aux pedigrees qu'il rassembla patiemment, la méthode lui permit d'établir un résultat fondamental, la *loi de corrélation ancestrale* qui dit que le coefficient de corrélation entre individus apparentés en ligne directe ou en ligne collatérale, diminue de moitié à chaque génération nouvelle qui les sépare; la corrélation père-fils est égale à la corrélation frère-soeur et deux fois plus forte que la corrélation grand-père--petit-fils, etc... Les méthodes de calcul, assez rudimentaires à l'origine, se perfectionnèrent bientôt, de sorte que, vers la fin du siècle dernier, l'étude quantitative de l'hérédité semblait avoir reçu son orientation définitive. Mais en 1900, les lois de Mendel furent redécouvertes et prirent dans la Biologie une place prépondérante, d'ailleurs bien justifiée. Les biologistes, peu amis des mathématiques en général, furent trop heureux d'avoir ce prétexte pour rejeter dans l'ombre l'oeuvre monumentale de GALTON. Certains prétendirent même que les résultats de l'école biométrique étaient faux, parce que soidisant incompatibles avec les résultats mendéliens. Des travaux ultérieurs devaient montrer qu'il n'en était rien et que, bien au contraire, la seule justification de la loi de l'hérédité ancestrale repose sur les lois de Mendel. Le hasard a voulu que les conséquences complexes de principes très simples aient été découvertes avant que ceux-ci aient été compris. Il en eût été évidemment autrement si les biologistes contemporains de Mendel n'avaient pas été dépourvus de compréhension mathématiques au point de méconnaître totalement la grandeur du don que le génie du moine tchèque venait de faire à la science.

Ce qu'eut, en son temps, de profondément original la pensée de Mendel, c'est l'idée que l'hérédité était régie par les lois du hasard et qu'elle ne pouvait être étudiée utilement que par des méthodes statistiques. Une telle hypothèse ne pouvait que heurter profondément la pensée biologique traditionnelle, mais toute la science moderne en montre l'admirable fécondité.

Une des espèces les plus propres à faire comprendre la découverte de Mendel est la Belle-de-Nuit que l'on cultive assez souvent dans nos jardins, et qui présente plusieurs variétés parfaitemente stables. Deux d'entre elles ne diffèrent que par la couleur de la fleur, toujours blanche dans l'une, toujours rouge dans l'autre. Lorsque le pistil d'une fleur rouge reçoit du pollen provenant d'une fleur de la variété blanche, les graines qui résultent de cette fécondation produisent des plantes dont les fleurs sont roses. Le croisement inverse donne les mêmes resultats: pollinisation d'une fleur blanche par du pollen de la variété rouge donne des produits dont les fleurs sont roses. Tous les hybrides de première génération sont donc identiques.

En deuxième génération, tout change. Les plantes issues des fleurs roses fécondées par leur propre pollen sont de trois sortes: les unes ont des fleurs blanches, les autres des fleurs rouges, d'autres encore, les plus nombreuses, des fleurs roses. Les deux premières catégories de plantes ont tous les caractères des plantes parentes, la troisième tous les caractères des hybrides de première génération. Le croisement de ces hybrides à fleurs roses, et des plantes à fleurs blanches donne un mélange de plantes à fleurs roses et de plantes à fleurs blanches; celui d'une plante à fleurs roses et d'une plante à fleurs rouges un mélange de plantes à fleures roses et de plantes à fleurs rouges: de tels hybrides ressemblent donc à l'un et l'autre de leurs parents.

Cette diversité d'apparence des hybrides de deuxième génération était connue avant Mendel et avait fait le désespoir de théoriciens de l'hérédité. Mendel, le premier, eut l'idée de dénombrer les différentes catégories d'individus et constata que, dès que la descendance d'un hybride était assez nombreuse pour qu'une statistique ait un sens, il apparaissait toujours en deuxième génération un quart de plantes semblables à celle qui avait fourni le pollen et un quart de plantes semblables à celle qui avait apporté les ovules ; et le reste, c'est-à-dire la moitié du nombre total, était composé de plantes identiques aux hybrides de première génération. Dans le croisement d'un hybride de première génération avec une des plantes de race pure, on trouvait toujours un nombre égal de plantes semblables à chacun des deux parents.

Comment expliquer cette proportion remarquablement simple que l'on retrouve, avec la même constance dans les croisements les plus divers, non seulement chez le végétaux, mais chez les animaux ?

Remarquons tout d'abord que l'élément mâle et l'élément femelle, le grain de pollen et l'ovule, jouent le même rôle dans les phénomènes d'hérédité puisque les croisements symétriques donnent le même résultat et que l'un comme l'autre peuvent porter les caractères de couleur qui nous intéressent.

La constance des races parentes signifie évidemment que tous les grains de pollen d'un côté, et tous les ovules de l'autre, ne sont semblables entre eux — qu'ils sont tous «blancs» dans un cas, tous «rouges» dans l'autre. Il est difficile de comprendre l'existence des différentes catégories de la deuxième génération d'hybrides autrement qu'en admettant que les hybrides de première génération produisent, non pas comme on pourrait le croire, des éléments sexuels d'un type particulier que nous pourrions appeler «roses» mais bien un mélange de pollen et d'ovules «blancs» et «rouges». Il est facile de montrer que les proportions observées sont exactement celles que l'on doit attendre si les éléments «blancs» et «rouges» sont en nombre égal.

Une certaine graine résulte de la fécondation d'un certain ovule par un certain grain de pollen et c'est le hasard seul qui a décidé que ce grain de pollen atteindrait cet ovule plutôt qu'un autre, le hasard seul qui fait qu'un pollen «rouge» féconde un ovule «blanc» ou «rouge». Dès lors on peut prévoir aisément les résultats d'un croisement.

Représentons le grain de pollen et l'ovule par deux pièces de monnaie, de 1 franc et 2 francs par exemple. Convenons que le côté face représentera le facteur «rouge», le côté pile le facteur «blanc» et lançons nos deux pièces. Quatre combinaisons sont possibles qui sont, en citant dans l'ordre la pièce de 1 franc et celle de 2 francs, face-face, face-pile, pile-face, pile-pile ; autrement dit dans l'ordre pollen-ovule : rouge-rouge, rouge-blanc, blanc-rouge, blanc-blanc. Mais nous savons que rouge-blanc et blanc-rouge sont identiques et donnent l'un et l'autre des plantes à fleurs roses. Il ne reste donc que trois cas possibles : deux combinaisons représentées chacune une fois et correspondant aux deux races pures, une combinaison représentée deux fois et correspondant à l'hybride. Le calcul des probabilités nous apprend que si nous lancions nos deux pièces un assez grand nombre de fois, les proportions des différentes combinaisons seraient sensiblement égales aux probabilités que nous venons de déterminer, c'est-à-dire à 1/4, 1/2 et 1/4, proportions observées par Mendel. Les proportions 1/2 et 1/2 observées dans le croisement d'un hybride avec l'une ou l'autre des souches parentes s'expliquent plus simplement encore.

La précision que l'on peut atteindre dans la détermination de ces proportions mendéliennes, puisque c'est ainsi que l'on nomme ces rapports, est d'autant plus grande que la population étudiée est plus nombreuse, et les règles du calcul des probabilités permettent d'estimer la grandeur des écarts que l'on peut attendre dans des dénombrements portant sur un nombre déterminé de plantes. Les vérifications faites se sont toujours montrées assez satisfaisantes pour que l'interprétation de Mendel puisse être considérée comme entièrement justifiée.

Tous les croisements faisant intervenir un seul couple de caractères ne sont pas aussi faciles à interpréter que celui que nous venons d'étudier. Très souvent, le plus souvent même, l'hybride n'a pas une apparence intermédiaire entre les parents mais paraît identique à l'un d'eux, qui est alors dit *dominant* par rapport à l'autre que l'on dit *récessif*. Dans ces conditions, on doit s'attendre à observer en deuxième génération un quart d'individus récessifs et trois quarts d'individus à forme dominante, les hybrides se confondant avec les dominants purs, deux fois plus nombreux qu'eux. Ce sont ces proportions 1/4 et 3/4 que Mendel lui-même observa dans ses croisements entre variétés de poids.

Ainsi, la loi fondamentale de l'hérédité est une loi statistique, la plus simple des lois statiques, celle-là qui est à la base du calcul des probabilités ; la loi de pile ou face. La connaissance de cette loi suffit à faire des prévisions dans des cas beaucoup plus compliqués que celui que nous venons d'envisager. Elle permet, entre autres choses, de prévoir l'évolution d'une population qui, à un moment donné, contiendrait en proportions quelconques les trois catégories d'individus que nous avons distinguées, lorsque l'on fait sur le mode de pollinisation, sur la fertilité et sur la vigueur des trois catégories de plantes, diverses hypothèses.

Si l'on suppose que toutes les plantes sont également fécondes et vigoureuses, quelle que soit la couleur de leur fleur, on peut montrer que s'il y a autofécondation, le nombre des plantes à fleurs roses ira constamment en décroissant. Si la pollinisation est croisée et se fait complètement au hasard (pollinisation par le vent, par exemple), on obtiendra, en une génération, une population telle que le nombre des plantes à fleurs roses soit le double de la moyenne géométrique du nombre des plantes à fleurs blanches ou à fleurs rouges, ces proportions restant ensuite stables de génération en génération. Dans une hypothèse intermédiaire, une fraction définie du nombre total de plantes étant soumis à l'autofécondation et le reste livré à la fécondation croisée, la population tendra graduellemment vers un état d'équilibre stable, comportant toujours moins de plantes à fleurs roses que dans le cas de la fécondation entièrement croisée.

Lorsque l'on suppose que les plantes à fleurs rouges, roses ou blanches, n'ont pas la même fécondité, ni la même vigueur, hypothèses plus conformes à la réalité, les calculs deviennent beaucoup plus compliqués, mais aussi beaucoup plus intéressants. Ils permettent en effet d'aborder un problème capital, d'où dépend toute la philosophie de la Biologie et toute la philosophie de la Science — le problème de l'évolution. Etudier en effet le problème de la persistance ou de l'extinction, au sein d'une population, d'un facteur conditionnant un caractère qui donne à son porteur une fécondité on une vitalité, accrue ou diminuée, c'est en effet ébaucher la théorie de la Sélection naturelle, clef de voûte du Darwinisme, seule explication rationnelle de l'Evolution.

•

C'est sur cette indication — qu'il est naturellement impossible de développer ici — que je voudrais conclure. J'ai essayé de montrer l'intérêt que présentent les mathématiques pour la Biologie, mais on me permettra de regretter qu'il soit périodiquement jugé utile de faire cette démonstration. Il ne viendrait à l'idée de personne de demander une conférence de même niveau intitulée «Mathématiques et Physique». Ce n'est peut-être pas un très bon symptôme pour la qualité de la culture scientifique donnée par notre enseignement secondaire, qu'aux approches du milieu du XXᵉ siécle, une conférence sur «Mathématiques et Biologie» ait encore sa raison d'être. Ce stade est dépassé depuis vingt ans, trente ou plus aux U.S.A., en U.R.S.S. et ailleurs. Il n'est que temps de rattraper un retard inexcusable, et toute réforme de l'enseignement serait incomplète si elle ne posait pas en principe que tous ceux que leur métier mettra en contact avec la matière ou qui auront à travailler, d'une façon ou d'une autre, sur les êtres vivants, c'est-à-dire les ingénieurs, les architectes... d'une part; les médecins, les agronomes et aussi, il faut le dire, les professeurs et les juristes d'autre part, devront recevoir un minimum de culture scientifique. Ce minimum, qui devra être impitoyablement exigé, comportera obligatoirement *toutes* les disciplines scientifiques, inégalement dosées selon les carrières préparées. La culture générale du biologiste, dont l'objet d'étude, quel qu'il soit, est toujours complexe, devra être particulièrement poussée et comportera, avec des éléments suffisants d'analyse, une large part de statistique.

PEDAGOGIA

RESULTADOS DE UM EXAME DE MATEMÁTICA - 1.º CICLO

por ***Maria Teodora Alves***

No n.º 29 da «Gazeta de Matemática» foi prometido que seria feito o estudo dos pontos para as provas escritas de Matemática do exame do 1.º ciclo no Liceu de Passos Manuel no ano lectivo 1945-46.

Os elementos estatísticos, relativos a êsse exame, que determinámos, constam do quadro seguinte:

	Aritmética e Álgebra	*Geometria*
Nota mínima	0	0
Nota máxima	18	19
média	9.9	11.2
σ	4.08	3.99
coeficiente de variação	0.41	0.35
Q_3	12.3	13.8
mediana	9.1	10.9
Q_1	6.7	8.0
Q	2.8	2.9
r	0.53	
$N=236$		

Em $N=236$ estão incluídos 42 alunos internos do Liceu de Passos Manuel e 194 externos e dêstes, uns, do ensino particular em estabelecimento, outros do ensino particular individual e, ainda, maiores e emancipaveis.

Em Aritmética e Algebra a distribuição das notas fez-se de 0 a 18 e em Geometria de 0 a 19. Isto é, os pontos que serviram às duas provas e os critérios de classificação adoptados pelos respectivos professores, distribuiram os alunos por quási tôda a escala oficial de classificação (0 a 20).

A média 9.9 na prova de Aritmética e Algebra difere sensivelmente da média 11.2 na de Geometria, o que mostra que o grupo de alunos que se apresentou a exame tinha melhor preparação em geometria do que em Aritmética e Álgebra, ou que o ponto de Aritmética e Álgebra foi sensivelmente mais difícil do que o de Geometria.

É ocasião de lembrar que o número de lições de

Aritmética e Algebra que os alunos recebem durante o 1.º ciclo é muito superior ao número de lições de Geometria, pelo menos quanto aos alunos internos, o que torna a diferença das médias obtidas mais significativa ainda e mais inesperada. Como as médias da distribuição das notas são influênciadas pelos valores extremos precisamos agora de procurar, para uma e outra prova, medidas que se encontrem à volta das respectivas médias. Consideremos então a mediana e os quartis de cada uma das provas:

Aritmética e Álgebra	*Geometria*
$Q_3 = 12.3$	$Q_3 = 13.8$
$M_d = 9.1$	$M_d = 10.9$
$Q_1 = 6.7$	$Q_1 = 8.0$

Nesta região, chamada de normalidade, a distribuição das notas de Geometria é mais regular do que a correspondente em Aritmética e Álgebra. Assim Q_3 que marca o limite inferior dos alunos bem dotados parece excessivamente baixo em Aritmética e Álgebra, não acontecendo o mesmo em Geometria, onde $Q_3 = 13.8$, está muito próximo da nota de 14 que é o limite inferior, na escala de 0 a 20, dos bons alunos.

A mediana que diz o que se passa na zona do meio da distribuição, encontra-se equidistante de Q_3 e Q_1, na prova de Geometria, não acontecendo o mesmo em Aritmética e Álgebra. Conclue-se então que, os alunos medianos vão nesta prova atraz da dificuldade, visto que $Q_1 = 6.7$ é valor muito abaixo.

Os gráficos seguintes indicam as diferentes zonas de distribuição e esclarecem bem as respectivas posições relativas.

enquanto que na prova de Geometria, essa mesma categoria de alunos se distribue entre os limites 10.9 e 13.8, zona de distribuição, sem dúvida, muito mais regular. A observação deste gráfico permite tirar conclusões idênticas em tôda a sua extensão.

O intervalo semi-quartil Q, não só marca para um e outro lado da mediana, a região normal, como dá a amplitude das notas de que há a probabilidade 1/2 de serem atribuidas a qualquer aluno. O valor $Q = 2.9$, na Geometria, correspondente à mediana 10.9, ainda vem indicar uma maior amplitude e melhor variação na região normal das notas de Geometria, do que na Aritmética e Álgebra onde é $Q = 2.8$, para a mediana 9.1. Os coeficientes de variação da média de cada prova foram 0.41 e 0,35 e indicam que as dificuldades em *cada um dos pontos* foram satisfatòriamente graduadas; mas, mais uma vez se verifica, a melhor graduação do ponto de Geometria. Daqueles mesmos valores, por serem próximos um do outro e pequenos, ainda se conclue que, o grupo de alunos se comportou com aceitável regularidade, em cada prova, dando uma percentagem de admissões à prova oral de 59.3 %.

O valor $r = 0.53$ do coeficiente de correlação é pouco superior ao limite inferior da correlação, considerada média, o que permite supor, em geral, para *cada aluno*, desigual preparação em Aritmética e Álgebra, e em Geometria.

Todas estas razões conduzem a considerar o ponto de Aritmética e Álgebra sensivelmente mais difícil do que o ponto de Geometria.

As posições dos quartis e da mediana, quanto ao ponto de Geometria, parecem aconselhar que seja mantida a sua estrutura e graduação.

Inferiores	Q_1	Médios inferiores	M_d	Médios superiores	Q_3	Superiores	
	↓		↓		↓		Aritm. e Algebra
	6.7	8.0	9.1	10.9	12.3	13.8	
		↑		↑		↑	Geometria
Inferiores		Q_1	Médios inferiores	M_d	Médios superiores	Q_3	Superiores

Como 7.5 é a nota de admissão ao exame oral, verifica-se que, alguns alunos médios inferiores na prova de Aritmética e Álgebra não seriam admitidos à oral e que, pelo contrário, todos os alunos médios inferiores na prova de Geometria seriam admitidos à prova oral. Os alunos médios superiores, distribuem-se na prova de Aritmética e Álgebra, entre 9.1 e 12.3

Seria vantajoso estudar o comportamento de cada aluno perante cada questão do ponto de Geometria de modo que pudesse servir de padrão ao ponto do próximo exame, o que iria comprovar ou negar a satisfatória eficiência que agora lhe encontrámos.

Quanto ao ponto de Aritmética e Álgebra seria conveniente que sofresse também idêntico tratamento afim de que o ponto do próximo exame fôsse mais acertamente compensado.

A ocasião oportuna para serem colhidos todos êsses dados estatísticos seria a época de exames, e quando da classificação das provas dos alunos. Mas, nessa ocasião o professor tem de classificar, em 8 dias, 236 provas, por exemplo, e às vezes bastantes mais, fiscalizar as provas da 2.ª chamada e classificá-las também, e tudo isso é incomportável com a preocupação de estatísticas de pontos exame.

MOVIMENTO CIENTÍFICO

SOCIEDADE PORTUGUESA DE MATEMÁTICA

Em fins de Junho de 1946 tiveram logar no Liceu de Pedro Nunes de Lisboa, 3 conferências promovidas pela S. P. M. e que versaram os temas «A noção de número real» e «A estrutura de divisibilidade dos inteiros». Os conferentes foram Luís Neves Real, investigador do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, Andrade Guimarães, aluno do 2.º ano da Licenciatura em Ciências Matemáticas da Faculdade de Ciências do Porto, e José D. da Silva Paulo, professor do Liceu de Gil Vicente de Lisboa. A «Gazeta de Matemática» atendendo à importância dos assuntos e à maneira por que foram tratados e expostos, pediu aos conferentes que redigissem as notas que se seguem. Assistiram às conferências o Reitor do Liceu e vários professores do ensino secundário e superior sendo porém pouco numerosa a assistência.

A NOÇÃO DE NÚMERO REAL

*por **Andrade Guimarães** e **L. Neves Real***

O Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto fixou-nos, como tema das lições a realizar em Lisboa, a convite da Sociedade Portuguesa de Matemática, a teoria aritmética do contínuo tal qual a conceberam, no último quartel do século passado, Cantor, Méray e Dedekind, com tôda a precisão que os métodos da álgebra moderna permitem imprimir-lhe.

Ao artigo de Bachman, na Enciclopédia alemã, fomos buscar a orientação do nosso trabalho.

Evitando a definição dos números naturais

$$1\ 2\ 3 \cdots$$

introduzidos axiomàticamente, começamos por indicar como dos postulados de Peano se pode derivar tôda a aritmética. Em seguida, considerando o conjunto de todos os números naturais, algebrizado em relação à operação — soma — e definida nêle uma relação de ordem, menor do que, $<$, o espaço algébrico dos números naturais $\{a, b, c \cdots\}$ apresenta-se como um semi-grupo comutativo e ordenado. Nêsse semi-grupo, a operação $a+x=b$ não tem solução se $a \geq b$. A álgebra moderna, através do processo de formação de classes de equivalentes, fornece o método para construir a partir dêsse semi-grupo um novo espaço algébrico — agora grupo ordenado $\{\alpha, \beta, \gamma \cdots\}$ — que num certo sentido se pode considerar como uma sua ampliação: o novo espaço contém um semi-grupo isómorfo e semelhante ao de partida. No nosso caso o semi-grupo dos números naturais amplia-se até ao grupo ordenado dos inteiros (positivos, zero e negativos); para isso consideram-se todos os pares (b, a) de números naturais, chamam-se equivalentes dois pares (b, a) e (b', a') se $b+a'=b'+a$:

$$(b, a) \equiv (b', a') \longleftrightarrow b+a'=b'+a,$$

e, por definição, toda a classe (conjunto) de pares equivalentes é um número inteiro; pode representar-se por $b-a$ a classe α de todos os pares equivalentes a (b, a). As conhecidas definições de soma, produto e ordenação de inteiros, dão ao espaço algébrico dêstes números o carácter de domínio de integridade ordenado. Neste domínio e em relação à sua operação de soma e ao critério de ordenação nele adoptado, o sub-conjunto dos números inteiros da forma $(a+b)-a$ é um semi-grupo ordenado e a correspondência $(a+b)-a \longleftrightarrow b$ com os números naturais um isomorfismo algébrico e de ordem. Só neste sentido *— a menos dum isomorfismo —* é que podemos dizer que os inteiros contêm os números naturais. Por comodidade usam-se os símbolos $1, 2, 3, \cdots$ para representar os números inteiros isómorfos dos naturais: 1 para o inteiro $(a+1)-a$, 2 para $(a+2)-a$, etc. Mas êles representam seres matemáticos inteiramente diferentes: o número natural 1 é uma noção primitiva da axiomática de Peano, assim como o número natural 2 é o «sucessor» de 1, etc. — mas o número inteiro 1 é o conjunto (ou classe) de todos os pares de naturais da forma $(a+1, a)$, isto é, de todos aqueles cuja *diferença* é o número natural 1: o número inteiro 2 o conjunto de todos os pares de naturais cuja *diferença* é o número natural 2, etc.

Os novos números serão simbolizados por $0, -1, -2, -3, \cdots$

Em relação à operação produto, o espaço algébrico dos números inteiros não zero, em que não é sempre solúvel a equação $\alpha \cdot x = \beta$, com $\alpha \neq 0$, comporta-se como um semi-grupo que pelo processo anterior é anàlogamente susceptível de ampliação. Formem-se todos os pares de números inteiros $(\beta, \alpha), \alpha \neq 0$, defina-se entre êles a seguinte relação de equivalência:

$$(\beta, \alpha) \equiv (\beta', \alpha') \longleftrightarrow \beta \cdot \alpha' = \beta' \cdot \alpha$$

e agrupem-se numa mesma classe todos os pares entre si equivalentes; a cada uma destas classes chama-se número racional; e representar-se-á por β/α, por exemplo, o número racional que é a classe de todos os pares equivalentes ao par (β, α).

As definições habituais de soma, produto e ordenação de números racionais organizam o conjunto como corpo comutativo arquimèdicamente ordenado, contendo um domínio de integridade isómorfo e semelhante ao domínio dos inteiros: é o sub-conjunto dos números racionais da forma $\beta\alpha/\alpha$ e o isomorfismo é definido pela correspondência $\beta\alpha/\alpha \longleftrightarrow \beta$.

De novo se pode agora dizer que, a menos dum isomorfismo, os números racionais compreendem os inteiros e adoptar os mesmos símbolos, $\cdots -2, -1, 0, 1, 2 \cdots$, para os racionais isomorfos desses inteiros — não esquecendo que, por exemplo, o número racional 1 é agora o conjunto de todos os pares (β, α) de inteiros cujo *cociente* é o número inteiro 1. Números racionais como $2/3, -5/7, \cdots$ são números sem correspondência nos inteiros.

Se quizermos caracterizar axiomàticamente os números racionais fazêmo-lo com base no teorema: «todo o corpo ordenado que, a menos dum isomorfismo, contém os números inteiros, contém — no mesmo sentido — os números racionais»; e podemos definir o corpo dos números racionais; *a)* ou como sendo o *menor* corpo que contém o semi-grupo dos números naturais; *b)* ou como sendo o *menor* dos corpos ordenados e arquimedeanos.

Introduzindo agora a noção de valor absoluto $|r|$ dum racional r:

$$|r| = r, \quad \text{se} \quad r \geq 0 \quad \text{e} \quad |r| = -r \quad \text{se} \quad -r > 0$$

e definindo como distância $\rho(r_1, r_2)$ de dois números racionais r_1 e r_2, precisamente o valor absoluto da sua diferença $|r_2 - r_1|$, o espaço algébrico dos números racionais aparece-nos como espaço métrico que não é *completo*, isto é, para o qual a condição de Cauchy não é condição suficiente de convergência — ou, por outras palavras, as sucessões de Cauchy não são necessàriamente convergentes. A construção dos números reais (Cantor) vai efectuar-se com vista precisamente a que a condição de Cauchy seja necessária e suficiente de convergência: como espaço métrico o dos números reais deve ser um espaço completo. Para isso, no conjunto de tôdas as sucessões de Cauchy tomam-se como equivalentes aquelas cuja diferença converge para o número racional 0 e chama-se número real a tôda a classe de sucessões de Cauchy entre si equivalentes, podendo representar-se o número real ξ por uma qualquer das suas sucessões $\{\xi_n\}$.

A algebrização e a ordenação fazem-se pela definição:

$\bar{\xi} + \bar{\eta} =$ classe das sucessões equivalentes a $\{\xi_n + \eta_n\}$

$\bar{\xi} \cdot \bar{\eta} =$ classe das sucessões equivalentes a $\{\xi_n \cdot \eta_n\}$

$\bar{\xi} < \bar{\eta}$ se a partir de certa ordem $\eta_n - \xi_n > \alpha$, com $\alpha > 0$.

Como há números reais cujas sucessões convergem para números racionais êsses números reais constituem um sub-corpo isómorfo e semelhante ao corpo dos números racionais, de modo a poder dizer-se que os números reais contêm, a menos dum isomorfismo, os números racionais. Assim, é justificável o uso dos mesmos símbolos de números racionais, $-3/4, -2, 0, 1, \cdots$ para representar os números reais seus isomorfos. Simplesmente, não se esqueça que, assim como, por exemplo, o número racional 1, não é o mesmo que o número inteiro 1, nem êste o mesmo que o número natural 1, o número real 1 é agora a classe de tôdas as sucessões de números racionais que convergem para o número racional 1.

Uma vez algebrizado e ordenado, o conjunto dos números reais, como espaço algébrico apresenta o carácter de corpo comutativo, arquimèdicamente ordenado e como espaço métrico o de espaço completo. Mas como inversamente se pode afirmar ser todo o corpo arquimèdicamente ordenado isomorfo e semelhante a um sub-corpo do corpo dos números reais, a caracterização dos números reais pode fazer-se pelos dois seguintes quadros, equivalentes:

A.1 — I Corpo ordenado,
A.1 — II arquimedeano,
A.1 — III completo («abgeschlossen»-Cantor)

e

A.2 — I Corpo ordenado,
A.2 — II arquimedeano,
A.2 — III perfeito («vollständig»-Hilbert).

Como da continuidade à Dedekind («Stetigkeit») se deduzem as propriedades de ser arquimedeano e de ser completo, é ainda equivalente às anteriores a caracterização

A.3 — I Corpo ordenado,
A.3 — II contínuo («stetig»-Dedekind)

Estas propriedades não são porém tôdas indispensáveis — pode reduzir-se o seu número graças a um resultado de Reidemeister: todo o grupo aditivo, ordenado arquimèdicamente, contínuo à Dedekind e cujos elementos são divisíveis ao meio (para cada seu elemento x, existe um outro, representado por $x/2$, tal que $x/2+x/2=x$) é isomorfo e semelhante ao grupo dos números reais. E é possível definir uma operação de produto de modo que em relação a ela e à operação do grupo, o espaço seja um corpo comutativo: produto $b \cdot a$ de b por a é o elemento do grupo que corresponde a b no automorfismo do grupo que conservando a ordem se $a>0$, ou invertendo-a se $a<0$, faz corresponder a um mesmo elemento unidade i, o elemento a. Assim nos aparece a conhecida regra de multiplicação: o produto $b \cdot a$ obtém-se do multiplicando b, como o multiplicador a se obteve da unidade i: pelo mesmo automorfismo.

Assim se podem tomar como quadros axiomáticos dos números reais ou

A.4 — I Grupo ordenado
A.4 — II com ordenação densa (entre dois dos seus elementos existe sempre um terceiro)
A.4 — III arquimedeano
A.4 — IV completo (Cantor)

ou

A.5 — I Grupo ordenado
A.5 — II arquimedeano
A.5 — III perfeito (Hilbert)

ou, finalmente:

A.6 — I Grupo ordenado
A.6 — II com ordenação densa
A.6 — III contínuo (Dedekind).

ESTRUTURA DA DIVISIBILIDADE DOS INTEIROS

por ***J. D. DA SILVA PAULO***

Na última das palestras da série que a S. P. M. promoveu e se realizaram no Liceu Pedro Nunes de Lisboa, foi estudada a noção de estrutura dando-se como exemplo a *estrutura da divisibilidade dos inteiros*.

Apresentou-se a seguinte definição:

A — Chama-se estrutura todo o conjunto S de elementos $a, b, c \dots$ para os quais se define:

1.º uma relação de ordem parcial ($\prec$) (que pode ser uma ordem) que liga alguns pares de elementos de S, gozando das propriedades:

$$O1 - a \prec a$$
$$O2 - \text{Se } a \prec b \text{ e } b \prec a \rightarrow a=b$$
$$O3 - \text{Se } a \prec b \text{ e } b \prec c \rightarrow a \prec c$$

2.º) Uma operação $\frown$ que a cada par de elementos a e b de S faz corresponder um terceiro elemento $a \frown b$ também de S e tal que

$$D1 - a \frown b \prec a \text{ e } a \frown b \prec b$$
$$D2 - \text{Se } c \prec a \text{ e } c \prec b \rightarrow c \prec a \frown b$$

3.º) Uma operação $\smile$ que a cada par de elementos a e b de S faz corresponder um terceiro elemento $a \smile b$ também de S e tal que

$$M1 - a \prec a \smile b \text{ e } b \prec a \smile b$$
$$M2 - \text{Se } a \prec c \text{ e } b \prec c \rightarrow a \smile b \prec c$$

Em seguida estudou-se como exemplo duma estrutura a da *divisibilidade dos inteiros* onde a relação $\prec$ é a relação «*divide*» e as operações $\frown$ e $\smile$ são respectivamente o máximo divisor comum e o menor múltiplo comum, mostrando-se aí a existência e unicidade das operações, e a partir das propriedades O, D e M demonstrou-se que as operações $\frown$ e $\smile$ gozam das seguintes propriedades

$$B - \quad \begin{array}{c|c} a \frown b = b \frown a & a \smile b = b \smile a \\ a \frown (b \frown c) = (a \frown b) \frown c & a \smile (b \smile c) = (a \smile b) \smile c \\ a \frown a = a & a \smile a = a \end{array}$$

Aqui fez-se notar o princípio da dualidade e poz-se em evidência que o conjunto das propriedades B definindo as operações $\frown$ e $\smile$ e a propriedade

C — *a igualdade* $a \frown b = a$ *implica* $a \smile b = b$, (tomando como definição da relação $\prec$ a seguinte: «Diz-se que $a \prec b$ se se verificar C») pode ser tomado como definição de estrutura, dada a sua equivalência com a definição A.

Como noutras estruturas a da *divisibilidade* contém um primeiro e um último elemento, porque se verifica a dupla relação

$$1 \prec a \prec O$$

qualquer que seja o inteiro a, e daqui se tiraram as propriedades duais

$$\begin{array}{c|c} O \frown a = a & 1 \smile a = a \\ 1 \frown a = 1 & O \smile a = O \end{array}$$

demonstrou-se finalmente que a estrutura da divisibilidade é distributiva pois se verificam as propriedades:

$$a \frown (b \smile c) = (a \frown b) \smile (a \frown c)$$

e

$$a \smile (b \frown c) = (a \smile b) \frown (a \smile c)$$

e para isso já houve que fazer apêlo a propriedades particulares do máximo divisor comum, do menor múltiplo comum e da divisibilidade, não dedutíveis exclusivamente das propriedades O, D e M.

DOUTORAMENTOS

Em 29 e 31 de Julho de 1946 realizaram-se na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto as provas de doutoramento em Ciências Matemáticas de Alfredo Pereira Gomes. A tese *Introdução ao estudo duma noção de funcional em espaços sem pontos* foi discutida pelos Profs. A. H. Peixoto de Queiroz e Ruy L. Gomes. «Equações de Clairaut; generalizações e Secantes comuns a duas cónicas; condições de tangência. Problemas correlativos» foram os temas sôbre que foi feito interrogatório pelos Profs. A. Scipião G. de Carvalho e A. Madureira e Sousa.

A tese foi publicada no Vol. 5, fasc. 1 de «Portugaliae Mathematica» e pode ler-se no presente número de «Gazeta de Matemática» uma apreciação do Prof. Ruy L. Gomes, incluída no Boletim Bibliográfico.

Em 7 de Outubro de 1946 o bolseiro do Instituto para a Alta Cultura em Zürich, Hugo Baptista Ribeiro, doutorou-se em Ciências Matemáticas na Escola Politécnica Federal. Da tese *«Lattices» des groupes abéliens finis* foram referentes os Professores P. Bernays e H. Hopf. Este trabalho será publicado brevemente em «Commentarici Mathematii Helvetici» e um resumo em «Portugaliae Mathematica» Vol. 5.

Na mesma escola suiça Armando Carlos Gibert defendeu em 20 de Maio de 1946 a tese *Effect de la température sur la diffusion neutron-proton*, obtendo o grau de doutor em Ciências Naturais.

Foram referentes os Profs. P. Scherrer e F. Tank e presidente do juri o Prof. H. Hopf. A tese foi publicada em «Helvetica Physica Acta».

A. F. A. S. — CONGRESSO DE NICE — SETEMBRO DE 1946

Communications faites au 65ᵉ Congrès, tenu à Nice du 9 au 14 septembre 1946.

Section 1: Mathématiques:

Président: Mr. E. Gau, Recteur de l' Académie d'Aix-Marseille.

Vice-Présidents: MM. E. Blanc, Professeur à la Faculté des Sciences de Clermont-Ferrand; C. Lurquin, Professeur à l'Université libre de Bruxelles; F. Roger, Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux.

Secrétaire: P. Belgodère, Attaché de Recherches au C. N. R. S.

Liste des communications (L'astérisque * indique une communication écrite):

Lundi 9 septembre (14 h. à 16 h.): Prise de contact des membres de la section.

Mardi 10 septembre (9h. à 12h. et 14h. à 16h.):

(1) P. Belgodère: Quelques enquêtes publiques intéressant les mathématiciens. Informations.

(2) A. Gloden: Un nouveau théorème sur les multigrades.

(3) A. Gloden: Un problème d'analyse diophantienne multigrade.

(4) A. Gloden: Quelques égalités multigrades.

(5) *A. Gérardin: Solution d'une équation multigrade.

(6) *G. Palamà: Multigradi a catena parametriche con infiniti elementi.

(7) M. Krasner: Fonctions analytiques dans les corps valués complets.

(8) E. Blanc: Activité du Seminaire mathématique de Marseille (fonctions abstraites multiformes).

(9) *M. Brelot: Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point irregulier.

(10) *P. Lelong: Problèmes relatifs aux fonctions pluriharmoniques et aux fonctions plurisous-harmoniques.

(11) *N. Saltykov: Note sur la méthode de D'Alembert pour intégrer les équations différentielles linéaires à coefficients constants par rapport aux variables paramétriques.

(13) *A. Bloch: Sur une classe de fonctions entières engendrées par un corps quadratique réel.

Mercredi 11 septembre (9h. à 12h. et 14h. à 16h.):

(14) E. Blanc: Conférence sur le parallélisme entre courbes et ses applications à la convexité.

(15) P. Montel: Sur certaines équations fonctionnelles liées au théorème de Jacobi.

(16) P. Belgodère: Calcul des variations des intégrales de surface; interprétation géométrique.

(17) *T. Lemoyne: Sur le lieu des foyers d'une famille de coniques.

(18) *T. Lemoyne: Construction, par la règle seule, d'une infinité de points et de tangentes de la cubique plane la plus générale.

(19) *V. Thébault: Transmutations d'un tetraèdre.

Vendredi 13 septembre (9h. à 12h.):

(20) R. Wavre: L'itération des opérateurs hermitiens.

(21) P. Humbert: Formules trigonométriques dans le plan et dans l'espace attachées à l'opérateur Δ.

(22) *B. Combes: Le principe de Bayes et le problème de l'ajustement.

(23) *D. Wolkovitch: Ajustement des formules aux

résultats d'expériences selon la loi des moindres carrés.

(24) *R. Lacape : Les problèmes mathématiques de l'influx nerveux.

(25) Mariani : Les espaces généralisés et l'électromagnétisme.

Samedi 14 septembre (10h.30 à 12h.) :

(26) E. Merwart: Chronologie mathématique: Deux numérotations inverses : période julienne et millésimes préchrétiens.

(27) E. Kraft : Critériuns de divisibité, critérium des nombres premiers.

(28) J. Malburet : Une démonstration du théorème de Saccheri (5e postulat).

(29) J. Malburet : Le sixième postulat d'Euclide.

(30) *E. Barbette : Le dernier théorème de Fermat et sa généralisation.

Le 66e Congrès aura lieu à Biarritz en Septembre 1947. Le 67e Congrès aura lieu à Genève en 1948.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

PONTOS DE EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES

F. C. L. — Exame de Aptidão — Julho de 1946.

I

2273 — Determine o parâmetro m de modo que as raizes da equação $x(1-x)=m/(m+1)$ difiram de duas unidades. R: *A equação proposta pode escrever-se sob a forma equivalente* $x^2-x+m:(m+1)=0$ *e se forem* x_1 *e* x_2 *as suas raízes teremos o sistema*: $x_1+x_2=-1$, $x_1-x_2=2$ *e* $x_1 x_2=m:(m+1)$, *cuja resolução conduz à solução procurada* $m=-3/7$.

2274 — Diga o que se lhe oferecer sôbre a possível existência de soluções inteiras e positivas da equação $10x-6y=8$. Justifique a resposta. R: *A equação* $10x-6y=8$ *é equivalente a* $5x-3y=4$, *equação que tem uma infinidade de soluções inteiras e positivas pois estas são dadas pelas expressões* $x=2+3m$ *e* $y=2+5m$, *onde* m *representa um inteiro positivo ou nulo qualquer, em vista de o par* $x_1=2, y_1=2$ *constituir uma solução inteira da equação proposta.*

2275 — Diga qual dos números $\sqrt[3]{3}$ e $\sqrt{2}$ é maior. Justifique a resposta. R: *Como* $\sqrt[3]{3}$ *e* $\sqrt{2}$ *se podem escrever sob as formas* $\sqrt[6]{3^2}$ *e* $\sqrt[6]{2^3}$ *resulta imediatamente da comparação destes radicais que é* $\sqrt[3]{3}>\sqrt{2}$.

II

2276 — Dado um cateto dum triângulo rectângulo, e a diferença entre a sua hipotenusa e o outro cateto, deduza em função dos dados as fórmulas que exprimem os comprimentos dos lados desconhecidos do triângulo, os seus ângulos agudos e a sua área. R: *Seja* b *o cateto dado e* $a-c=d$ *a diferença entre a hipotenusa e o outro cateto. Como o triângulo é rectângulo será* $b^2+c^2=a^2$ *ou* $a^2-c^2=b^2$ *ou ainda* $(a+c)(a-c)=b^2$, *donde se deduz* $a+c=b^2:d$ *e portanto* $a=(b^2+d^2):2d$ *e* $c=(b^2-d^2):2d$. *Daqui se deduz que* $\operatorname{tg} B=2db:(b^2-d^2)$ *e* $\operatorname{tg} C=(b^2-d^2):2db$.

2277 — Verifique a identidade

$$\sec^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{2}{1-\operatorname{sen}(2\alpha)}.$$

R: *O primeiro membro da igualdade pode escrever-se sucessivamente sob as formas:*

$$\begin{aligned}\sec^2(\pi/4+\alpha)&=1:\cos^2(\pi/4+\alpha)=1:[\cos\pi/4\cos\alpha-\\&-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\pi/4]^2=1:[(\sqrt{2}/2)^2.(\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha)^2]=\\&=1:[1/2\times(\cos^2\alpha+\operatorname{sen}^2\alpha-2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha)]=\\&=2:[1-\operatorname{sen}(2\alpha)],\end{aligned}$$

o que prova a identidade.

2278 — Deduza a expressão geral dos ângulos que têm a mesma cosecante que o ângulo que mede θ radianos. R: *Como se sabe os ângulos* θ *e* $\pi-\theta$ *têm a mesma cosecante, e como* θ *e* $\theta+2k\pi$ (k *inteiro*), *e* $\pi-\theta$ *e* $\pi-\theta+2k'\pi$ (k' *inteiro*) *têm a mesma cosecante, poderemos escrever as expressões* $2k\pi+\theta$ *e* $(2k'+1)\pi-\theta$, *que se podem condensar sob a forma* $n\pi+(-1)^n\cdot\theta$ (n *inteiro*), *como sendo as expressões gerais dos arcos que têm a mesma cosecante que o ângulo* θ.

III

2279 — Deduza o valor da razão entre o volume de uma esfera e o de um cubo nêle inscrito. R: *O volume da esfera é dado pela expressão* $4\pi R^3:3$, *e a aresta do cubo inscrito na esfera de raio* R *é dada por* $l=2R\sqrt{3}:3$, *donde o volume* $l^3=8R^3\sqrt{3}:3^2$. *A razão dos volumes é então* $\pi\sqrt{3}:2$.

2280 — Considere duas circunferências de raios diferentes, tangentes exteriormente num ponto T.

Demonstre que tendo P e P' os pontos de contacto duma tangente comum às duas circunferências, o ângulo $P\widehat{T}P'$ é um ângulo recto. R: *Tracemos a tangente comum às duas circunferências no ponto* T *a qual encontrará a tangente* PP' *num ponto* Q. *Em vista da propriedade bem conhecida de os segmentos das tangen-*

tes tiradas de um ponto para a circunferência e compreendidas entre o ponto e a circunferência serem iguais tem-se $\overline{QP} = \overline{QT} = \overline{QP'}$ *o que mostra ser* Q *o centro duma circunferência que passa por* P , P' *e* T *e da qual* $\overline{PP'}$ *é um diâmetro, logo o ângulo* $\widehat{PTP'}$, *inscrito na meia circunferência* [PTP'] , *é recto.*

2281 — Determine, sem efectuar as operações indicadas, o resto da divisão por 11 do número $N = 5293^2 + 381 \times 192$. Justifique o cálculo feito. R: *Como* $5293 \equiv 2 \pmod{11}$, $381 \equiv 7 \pmod{11}$ *e* $192 \equiv \equiv 5 \pmod{11}$ *é* $N \equiv 2^2 + 7 \times 5 \equiv 39 \equiv 6 \pmod{11}$ *e portanto o resto é* 6.

Soluções dos n.os 2273 a 2281 de J. da Silva Paulo.

F. C. P. — Julho de 1946

I Parte — Aritmética

2282 — Escrever em numeração decimal o maior número que se escreve com 3 algarismos no sistema de base 13. R: 2196.

2283 — Como acha o m. d. c. de dois números empregando o método das divisões sucessivas?

2284 — Demonstrar que o máximo divisor comum de dois números m e n é igual ao máximo divisor comum entre o menor e o resto da divisão de um pelo outro.

2285 — Demonstrar que a condição necessária e suficiente para que um número seja divisível por 15 é que seja divisível por 3 e por 5. R: *A demonstração, que é imediata, baseia-se no facto de* 3 *e* 5 *serem primos entre si*.

2286 — Como se reduz uma fracção à sua expressão mais simples? Justificar a regra enunciada.

2287 — Justificar a prova dos noves-fóra na operação da divisão.

2288 — Provar que o resto da divisão do quadrado dum número ímpar por 8 é sempre igual á unidade. R: *Sendo* $2n+1$ *um número ímpar qualquer*, $(2n+1)^2 = = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1 = \dot{8} + 1$.

2289 — Achar os números que admitem para m. m. c. e m. d. c., respectivamente, 240 e 60. R: 240 e 60.

II Parte — Álgebra

2290 — Sabendo que o número de permutações de m objectos distintos é 6 vezes superior ao número das suas combinações, tomados 3 a 3, calcular o valor de m. R: $m = 3$.

2291 — Escrever a equação do 2.º grau cujas raízes possam representar os comprimentos dos lados dos rectângulos que têm perímetro constante e igual a 20 metros. Determinar, em seguida, o valor que devem tomar as raízes para que o rectângulo respectivo tenha a maior área possível. R: *As raízes deverão ser reais e a sua soma será igual a* 10. *A equação será portanto* $x^2 - 10x + c = 0$. *Para que o rectângulo tenha área máxima deverá procurar-se o valor de* c *que torne nulo o descriminante. Encontra-se* $c = 25$.

2292 — Sendo $a > 0$, determinar os valores de a e k de modo que o trinómio $ax^2 + x + k$ tome valores negativos quando fizermos variar x entre -1 e $1/2$. R: *O trinómio terá valores negativos no intervalo* $[-1, 1/2]$ (e só nêste) *quando fôr* $k = -1$ *e* $a = 2$.

2293 — Escrever a expressão geral dos números inteiros positivos, que divididos por 15 e 18 dêm restos iguais a 12. Calcular o menor dêstes números. R: $102 - 90t$, $t \leq 1$. *O menor número é* 12.

2294 — Demonstrar que a soma dos coeficientes do desenvolvimento do binómio $(a+x)^p$ é igual a 2^p. R: *Se, depois de efectuarmos o desenvolvimento, fizermos* $x = 1$ *e* $a = 1$, *encontramos imediatamente para soma dos coeficientes* 2^p.

2295 — Formar a equação biquadrada que admite as raízes $2i$ e 3. Achar as restantes raízes da mesma equação. R: $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$. *As restantes raízes são:* $-2i$ *e* -3.

2296 — Resolver a inequação $\dfrac{x^2 - 4x + 8}{x^2 - 1} > 0$. R: $x > 1$ *ou* $x < -1$.

2297 — Deduzir as condições a que devem satisfazer os coeficientes da equação de Diofanto $ax + by = c$, para que admita soluções inteiras e positivas.

III

2298 — Em que consiste o método de redução ao absurdo?

2299 — Conhecidas as proposições: *a*) A todo o triângulo pode circunscrever-se uma circunferência, *b*) Qualquer ângulo inscrito numa circunferência tem por medida metade do arco compreendido entre os lados, e *c*) A medida de qualquer circunferência é 360°, demonstrar, por redução ao absurdo, que a soma dos ângulos internos de um triângulo vale 180°. R: *Seja* ABC *um triângulo e* $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ *os seus ângulos. Suponhamos, por absurdo, que* $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \alpha$, *onde* $\alpha \neq 180°$. *Em virtude de* a) *existe uma circunferência circunscrita ao triângulo. Em virtude de* b) *resulta que* $\widehat{A} = \overset{\frown}{BC}/2$, $\widehat{B} = \overset{\frown}{AC}/2$ *e* $\widehat{C} = \overset{\frown}{AB}/2$. *Logo* $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = (\overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB})/2 = \alpha$. *Logo* $\overset{\frown}{BC} + + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{AB} = 2\alpha \neq 360°$ *o que é absurdo*.

Soluções dos n.os 2282 a 2299 de Laureano Barros

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

I — ESCOLAS PORTUGUESAS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — **Exame final — Outubro de 1945.**

2300 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=e^{+\sqrt{\operatorname{sen} x}}$. R: *Função periódica de período* 2π, *definida apenas para valores de* x *tais que* $\operatorname{sen} x \geq 0$; *basta, portanto, estudá-la no intervalo* $(0,\pi)$. *Por ser* $y'=e^{+\sqrt{\operatorname{sen} x}} \cdot \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$, *a função é crescente em* $(0,\pi/2)$ *e decrescente no intervalo* $(\pi/2,\pi)$. *O ponto* $(\pi/2,e)$ *e de máximo. O estudo de* y'', *no domínio considerado, mostra que a curva tem a concavidade voltada no sentido negativo do eixo das ordenadas.*

2301 — Determinar as raízes reais da equação $\operatorname{sen}^4 x - 5\operatorname{sen}^3 x - 4 = 0$. R: *Fazendo* $\operatorname{sen} x = y$ *tem-se* $y^4-5y^3-4=0$, *equação algébrica de coeficientes inteiros, de que nos interessam apenas as raízes* $y=\operatorname{sen} x$, *reais compreendidas no intervalo* $(-1,+1)$. *A equação não tem raízes racionais. A representação geométrica das funções* $z=y^4-4$ *e* $z=5y^3$, *por exemplo, mostra a existência duma raiz irracional da equação no intervalo* $(-1,0)$ *e outra à direita do ponto* $y=1$ *que portanto não têm interêsse. Essa raiz é, a menos de uma décima,* $y=-0,8$ *donde* $x=\operatorname{arcsen}(-0,8)$.

Soluções dos n.os 2300 e 2301 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — **Exame final — Outubro de 1945.**

2302 — Quando o ponto $z=x+iy$ descreve no plano de Cauchy a recta $ax+by+1=0$, que curva $F(X,Y)=0$ descreve o ponto Z, tal que $z=1/Z$, no mesmo plano? R: $z=\dfrac{1}{X+iY}=\dfrac{X-iY}{X^2+Y^2}=x+iy$

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2} \quad e \quad y=-\frac{Y}{X^2+Y^2}.$$

Substituindo x e y *na equação da recta* $ax+by+1=0$, *vem a equação da curva pedida* $\dfrac{aX}{X^2+Y^2}-\dfrac{bY}{X^2+Y^2}+1=0$

$X^2+Y^2+aX-bY=0$ *que representa uma circunferência.*

2303 — Sendo P e Q os pontos de intersecção da tangente a uma elipse com os eixos de simetria, mostrar que o comprimento $\overline{PQ}$ é mínimo quando fôr igual à soma dos comprimentos dos semi-eixos. R: *Dada a elipse* $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ *a equação* $xx'/a^2+yy'/b^2=1$ *representa a tangente à elipse no ponto* (x',y').

Pontos de encontro da tangente com os eixos: $P(a^2/x',0)$ $Q(0,b^2/y')$.

Comprimento do segmento $\overline{PQ}$: $\overline{PQ}^2=a^4/x'^2+b^4/y'^2$.

Como $\overline{PQ}$ *é positivo consideraremos* $\overline{PQ}^2$ *em vez de* $\overline{PQ}$.

Da equação da elipse deduz-se $y'^2=b^2/a^2 \cdot (a^2-x'^2)$, *e substituindo:* $\overline{PQ}^2=\dfrac{a^4}{x'^2}+\dfrac{a^2 \cdot b^2}{a^2-x'^2}$.

Consideremos $F(x)=\dfrac{a^2}{x'^2}+\dfrac{b^2}{a^2-x'^2}$. *Tem-se:*

$$F'(x)=2\,\frac{(b^2-a^2)\,x'^4+2a^4\,x'^2-a^6}{x'^3\,(a^2-x'^2)^2}.$$

Das raízes de $F'=0$ *só convem ao problema* $\pm a\sqrt{\dfrac{a}{a+b}}$, *que correspondem de facto a um mínimo da função. O valor correspondente de* $\overline{PQ}$ *é* $a+b$.

2304 — Sendo $A(-2,0)$, $B(0,6)$, $C(6,0)$ os vértices de um triângulo, mostrar que os pés das perpendiculares baixadas de um ponto qualquer da circunferência circunscrita sôbre os lados do triângulo estão sempre em linha recta.

2305 — Dadas as semi-rectas OA, OB, OC de parâmetros directores respectivamente $(1,2,3)$ $(2,3,1)$ e $(3,1,2)$, escrever as equações dos planos que passam por cada uma delas e são perpendiculares aos planos formados pelas outras duas. Mostrar que êsses planos passam por uma mesma recta e achar as equações dessa recta. R: *Equações normais das rectas:* $OA \equiv x/1=y/2=z/3$, $OB \equiv x/2=y/3=z/1$, $OC \equiv x/3=y/1=z/2$. *Equação do plano* OAB: $7x-5y+z=0$. *Equação do plano* OAC: $x+7y-5z=0$. *Equação do plano* OBC: $5x-y-7z=0$. *Equação do plano que passa por* OA *e é perpendicular a* OBC: $x-2y+z=0$. *Equação do plano que passa por* OB *e é perpendicular a* OAC: $2x-y-z=0$. *Equação do plano que passa por* OC *e é perpendicular a* OAB: $x+y-2z=0$.

Tem-se: $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$

e 2 *a característica do sistema das 3 equações. Equações da recta charneira:* $\begin{cases} 2x-y-z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$ *ou* $x=y=z$.

Soluções dos n.os 2302 a 2305 de Jorge Cândido da Silva.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência — 8-3-1946.

2306 — Dadas as três funções: $y_1 = x^2 + \alpha x + \alpha$, $y_2 = x^2 - 3\alpha x + 1$ e $y_3 = x - \alpha + 2$, será possível determinar α de modo tal que elas sejam linearmente dependentes? R: *Pelo teorema de Peano, o wronskiano do sistema é* $W(y_1, y_2, y_3) \equiv 0$ *e pelo menos um dos complementos algébricos dos elementas da 3.ª linha de* W, *diferente de zero.* $W(y_1, y_2, y_3) = -8\alpha^2 + 14\alpha + 2$, $W \equiv \equiv 0 \rightarrow \alpha = (7 \pm \sqrt{65})/8$. *Verifica-se, fàcilmente, que o complemento algébrico do elemento da 3.ª linha, 1.ª coluna de* W, *é* $\neq 0$ *qualquer que sej. α.*

2307 — Calcular as derivadas $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ das funções implícitas u e v de x e y definidas pelo sistema

$$\begin{cases} x + y + u + v = 0 \\ xyuv = e^2 \end{cases} \qquad (e \text{ base neperiana}).$$

2308 — Determinar a, b e c de maneira tal que o integral $I = \displaystyle\int \frac{ax^2 + bx + c}{(x-1)^2 (x+2)}\, dx$ seja algébrico. R: *Como se sabe e*

$$I = \frac{A}{x-1} + B \log (x-1) + C \log (x+2) + D\,.$$

Como se pretende que I *seja algébrico, terá que ser* B=C=0, logo $I = \dfrac{A}{(x-1)} + D$. *Utilizando a regra de Fubini obter-se-ia* $a = 0$, $2b = c$.

I. S. C. E. F. — 2.ª Cadeira — 1.º exame de frequência extraordinàrio — 15-3-1946.

2309 — As equações $xy + zu = 1$ e $-\dfrac{x+y}{z+1} = 1$ definem x e u como funções de y e z. Calcular $\dfrac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ e $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

2310 — Calcular o integral

$$I = \int 2^{1/3} (1 - \cos x)^{5/3} \cdot (\operatorname{sen} x)^{-3}\, dx\,.$$

R: *Fazendo* $1 - \cos x = t^3$ *obem-se* $I = 3\sqrt[3]{2} \displaystyle\int \frac{t\,dt}{(2-t^3)^2}$ *que é um integral duma função racional.*

2311 — Calcular a derivada da função $F(y)$ definida pelo integral $F(y) = \displaystyle\int_y^{\cos y} [x^2 y + \cos (y^2)]\, dx$.

Soluções dos n.os 2306 a 2311 de O. Morbey Rodrigues.

F. C. L. — Análise Superior — 1.º exame de frequência — 1945-1946.

2312 — Determine a constante k por forma tal que as linhas trajectórias ortogonais das curvas integrais da equação $2kx^2 y'^2 + kx^3 y' - 1 = 0$ tenham por envolvente (não lugar de pontos singulares) a curva $2y = x^4$. Equação finita dessas trajectórias. (Sugestão: na integração, tome x^2 para nova variável independente). Curvas integrais contendo o ponto $M(1, 1/2)$. Relação entre a e b para que nenhuma curva trajectória passe por $P(a, b)$. R: *Eq. dif. das trajectórias:* $F(x, y, y') \equiv kx^3 y' + y'^2 - 2kx^2 y = 0$. *Ela deve ter por solução singular* $2y = x^4$. $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = kx^3 + 2y' = 0 \rightarrow y' = -\dfrac{k}{2} x^3$. *Com esta expressão de* y', *a equação* F = 0 *dá* $y = -kx^4/8$, *o que exige que seja* $k = -4$. *Para este valor de* k, *a eq. dif. das trajectórias é* $y'^2 - 4x^3 y' + 8x^2 y = 0$. *Pondo* $x^2 = t$: $\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 - 2t \dfrac{dy}{dt} + 2y = 0$ *ou* $y = t\dfrac{dy}{dt} - \dfrac{1}{2} \cdot \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2$ (Clairaut), *donde o integral geral* $y = ct - c^2/2$, *ou* $y = cx^2 - c^2/2$. *Em* M (1, 1/2) $\rightarrow c_1 = c_2 = 1 \rightarrow y = x^2 - 1/2$. *A igualdade dos dois valores de* c *é sinal de que* M *pertence à curva singular. São, pois, curvas trajectórias passando em* M: $y = x^2 - 1/2$, $y = x^4/2$. *Em* P (a, b): $c^2 - 2a^2 c + 2b = 0$ *e esta eq. deve ter raízes imaginárias:* $a^4 - 2b < 0$. *Tal é a condição pedida.*

2313 — Considere duas variáveis complexas, $z = x + iy$ e $z' = x' + iy'$, ligadas pela relação $z' = z + 1/z$; e designe por A e B as imagens dos afixos de z e z' respectivamente, num mesmo diagrama de Argand. Como deve mover-se A para que se mantenha constante, e igual a $1/2$, o comprimento $\overline{AB}$? Equação do lugar que, em tal hipótese, é descrito por B. É conforme a representação, feita por z', da região limitada pelo lugar descrito por A? R: *De* $z' = z + 1/z$ *vem* $|z' - z| = \dfrac{1}{|z|}$, *devendo, pois, ter-se* $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{2}$ *ou* $|z| = 2$. *O ponto* A *move-se, portanto, sobre a circunferência de centro na origem e raio* 2. *Quanto ao ponto* B, *feita a transformação desta circunferência, logo se acha* $\dfrac{4}{25} x'^2 + \dfrac{4}{9} y'^2 = 1$. *A função transformadora* $z' = f(z) = z + 1/z$ *tem o polo* $z = 0$; *a sua derivada* $f'(z) = 1 - 1/z^2$ *anula-se para* $z = \pm 1$. *São os pontos* 0, +1 *e* −1 *que impedem a representação de ser conforme.*

Soluções dos n.os 2312 e 2313 de H. de Menezes.

F. C. P. — Análise Superior — 1.º Exercício de revisão — 1945-1946.

2314 — Determinar a solução da equação $\log x \cdot p = y^2 z/x$ que se reduz a $x=e$, quando $z=1$. R: *Formando o sistema:* $\frac{dx}{\log x} = \frac{dz}{y^2 z/x}$, $dy=0$ *encontram-se imediatamente os integrais primeiros* $y=c_1$, $y^{-2} \cdot \log z - \log\log x = c_2$. *A solução mais geral e portanto* $y^{-2} \log z - \log\log x = \varphi(y)$. *A solução que se reduz a* $x=e$, *quando* $z=1$, *é a superfície integral que passa pela linha de equações:* $x=e$, $z=1$. *Encontra-se* $x^{-y^2} = \log x$.

2315 — Determinar a solução da equação $xp + yq = x^2 + y^2$, que satisfaz à equação $yp - xq = 0$. R: *Integrando a 2.ª equação, encontra-se para solução geral* $z = \varphi(x^2+y^2)$. *Seguidamente, determina-se* φ *de modo que a 1.ª equação seja satisfeita. Encontra-se* $z = (x^2+y^2)/2$.

2316 — Integrar a equação $(z - 1/x)\,dx + 2y\,dy + x\,dz = 0$ e determinar a superfície integral que passa pelo ponto $(1,1,1)$. R: *Encontra-se fàcilmente (sendo conveniente notar-se que a expressão dada é uma diferencial exacta)* $xz - \log x + y^2 = k$. *A superfície integral que passa pelo ponto* $(1,1,1)$ *é* $xz - \log x + y^2 = 2$.

2317 — Determinar a equação geral das superfícies tais que a distância de qualquer dos seus pontos M ao eixo OZ é igual à distância da origem O ao ponto P em que a normal corta o plano xoy. R: *A equação de derivadas parciais que traduz o problema é* $p^2 z + q^2 z + 2xp + 2yq = 0$. *O método de Charpit conduz fàcilmente ao integral completo* $\frac{z^2}{2} + \frac{(xc_1+y)^2}{c_1^2+1} = c_2$.

[*Acidentalmente, encontra-se a solução* $p=0$ *e* $q=0$, *à qual correspondem os planos* $z=c$, *onde a propriedade anunciada é evidente*].

Soluções dos n.os 2314 a 2317 de Laureano Barros.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de freqüência, 1945.

2318 — É dado um sistema qualquer de vectores axiais. Determiner o lugar geométrico dos pontos do espaço, em relação aos quais o momento resultante do sistema existe sôbre uma recta que passa pela origem dos eixos coordenados.

2319 — Achar as curvas de estacionaridade do integral $I = \int_0^1 y\sqrt{1+y'^2}\,dx$ que satisfazem à condição $\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}\,dx = 3$, sendo $y(0)=1$, $y(1)=1$.

2320 — Num cone de revolução, a densidade, em cada ponto P, é proporcional a e^x, sendo x a distância do vértice ao plano da secção recta que passa por P. Achar o centro de gravidade do cone.

2321 — Resolver a equação integral

$$x = \varphi(x) - \lambda \int_0^1 xy^2 \varphi(y)\,dy .$$

I. S. T. — Mecânica Racional — 1.º exame de frequência, 1945.

2322 — É dado um círculo de centro O, e um ponto P no interior do círculo. São dadas duas cordas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, perpendiculares entre si e passando pelo ponto P. Mostrar que o vector único, equivalente ao sistema $P-A$, $P-B$, $P-C$, $P-D$, passa pelo centro e é igual a $2(P-O)$.

2323 — Achar as curvas de estacionaridade do integral $I = \int_0^1 y'^2\,dx$ que satisfazem à condição $\int_0^1 (y-y'^2)\,dx = 1/6$, sendo $y(0)=0$, $y(1)=1/4$.

2324 — Achar o centro de gravidade dum hemisfério, sendo a densidade, em cada ponto, proporcional ao quadrado da distância dêsse ponto ao centro do hemisfério.

2325 — Achar o desenvolvimento de x^2 em série trigonométrica, no intervalo $(0, 2\pi)$.

II — ESCOLAS ESTRANGEIRAS

Univ. Manchester — Ordinary Degree of B. Sc. — Exame final — 15 Dez. 1944.

Matemáticas Puras

2326 — Determine $\frac{dy}{dx}$ sendo $y = x^{x+y}$.

2327 — Dado $y = \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$, prove que $\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x\sqrt{1-x^4}}$.

2328 — Estabeleça por uma forma clara, mas sem demonstração, um «test» suficiente para a convergência das séries alternas. Prove que a série seguinte é convergente $\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\cdots+\frac{(1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\cdots$.

2329 — Determine os valores de x para os quais é convergente a série:

$$\frac{x}{1.3}-\frac{x^2}{3.5}+\frac{x^3}{5.7}-\cdots+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots.$$

2330 — Em coordenadas cartesianas uma curva é representada paramètricamente pelas equações $x=x(t)$, $y=y(t)$. Se (α,β) é o centro de curvatura prove que

$$\alpha=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},\quad \beta=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},$$

onde as derivadas são tomadas em relação ao parâmetro t.

Mostre que o centro de curvatura no ponto θ da curva $x=a\cos^3\theta$, $y=a\,\text{sen}^3\theta$ tem por coordenadas: $a\cos\theta.(1+2\,\text{sen}^2\theta)$, $a\,\text{sen}\,\theta.(1+2\cos^2\theta)$. Deduza daqui que a equação da evoluta é

$$(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}=2a^{2/3}.$$

2331 — Sendo φ o ângulo do raio vector e da tangente à curva, mostre que $\text{tg}\,\varphi=r\frac{d\theta}{dr}$.

Seja P um ponto da parábola $2a/r=1+\cos\theta$ e S o foco. Seja Q um ponto sôbre SP, entre S e P e a uma distância a de P. Se designarmos por φ o ângulo de SQ com a tangente ao logar geométrico de Q, prove que $\text{tg}\,\varphi=1/2\,.\,\text{sen}\,\theta$.

2332 — *a)* Defina $\cosh x$ e mostre que nunca é inferior a 1; *b)* Mostre que $\text{arg}\cosh x=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$; *c)* Prove que $\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}=\log\frac{5+2\sqrt{6}}{3+2\sqrt{2}}$.

2333 — Calcule $\int(x-1)^{-3}(x+1)^{-1}dx$.

Mostre que $\int_0^{\pi/4}\sec^3x\,dx=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}+\log\left(\sqrt{2}+1\right)\right]$.

2334 — Integre as equações diferenciais seguintes:

1) $\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=xe^x$

2) $\frac{d^2y}{dx^2}-4\frac{dy}{dx}+4y=2\,\text{sen}\,x+3\cos x$.

2335 — Integre as seguintes equações diferenciais:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+xy+y^2}{xy}$ 2) $\frac{dy}{dx}=\frac{2x-3y+7}{4x-6y}$.

2336 — Represente gràficamente a curva $x=a\,\text{sen}^2\theta$, $y=a\,\text{sen}^2\theta\,\text{tg}\,\theta$. Mostre que a área compreendida entre a curva e a sua assíntota é $3\pi a^2/4$. Calcule as coordenadas do centro de gravidade desta área.

2337 — Mostre que é uma recta o logar dos centros da família de circunferências que cortam ortogonalmente duas circunferências dadas.

Sejam A e B dois pontos fixos. Mostre que o logar dos pontos de intersecção de duas circunferências de centros A e B e cortando-se ortogonalmente é a circunferência tendo $\overline{AB}$ por diâmetro.

O exame incluía outra prova de matemáticas puras e duas de matemáticas aplicadas. Duração desta prova 3 h.

PROBLEMAS

As resoluções de problemas propostos devem ser enviadas para a Redacção da «Gazeta de Matemetica». Para facilitar a organização da secção, pedimos que cada resolução seja transcrita numa fôlha de papel, utilizada só de um lado (onde outros assuntos não sejam tratados), com a indicação do nome e da morada do autor.

Das resoluções recebidas de cada problema proposto publica-se a melhor ou uma das melhores e mencionam-se os autores de todas as resoluções correctas e só destas.

PROBLEMAS PROPOSTOS

2338—Se os comprimentos dos lados a, b e c de um triângulo plano estão em progressão aritmética, os ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ (opostos respectivamente a a e b) satisfazem à relação $\cos\widehat{A}+\text{sen}\,\widehat{A}\cot g\,B/2=2$.

2339 — Dados quatro pontos, construir um tetraedro que admita êsses pontos para centros de gravidade das faces. Discussão.

2340 — Dadas duas circunferências C_1 e C_2 e uma recta r, determinar o ponto P da recta r, tal que as tangentes por êle tiradas a C_1 e C_2 tenham o mesmo comprimento. Discussão.

2341 — Circunscrever a uma circunferência dada um triângulo rectângulo cujos comprimentos dos lados estejam em progressão geométrica.

2342 — Determinar todos os pares de inteiros cujo produto é igual ao quádruplo da sua soma.

Problemas n.^{os} 2338 a 2342 propostos por José Morgado J.^{or}.

SOLUÇÕES RECEBIDAS

2266 — Dividem-se os lados de um triângulo equilátero T em n partes iguais e pelos pontos de divisão tiram-se paralelas aos lados, cobrindo-se assim T por meio de triângulos equiláteros iguais. T_i. Mostre que a área do círculo inscrito no triângulo T é igual á soma das áreas dos círculos inscritos nos triângulos T_i. R: *Dividindo os lados do triângulo equilátero em 4 partes iguais e procedendo de acôrdo com o enunciado, obter-se-ão* n^2 *triângulos iguais, designados por* T_i. *Por conseguinte basta demonstrar que a área* S *do círculo inscrito no triângulo* T *é igual a* n^2 *vezes a área* S' *de cada um dos círculos inscritos nos triângulos* T_i. *Tem-se* $S=\pi . h^2/9$ *e* $S'=\pi . h'^2/9$, *onde* h *é a altura correspondente a* T *e* h' *a altura correspondente a* T_i. *E como* $h=nh'$ *vem* $S=\pi . h'^2 . n^2/9 = n^2/S'$.

Solução de C. de Albuquerque Paixão (aluno do 2.º ano d I. S. A.).

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de Matemática de que os Autores ou editores enviarem dois exemplares à Redacção

55 — GOMES, A. Pereira — **Introdução ao Estudo duma Noção de Funcional em Espaços sem Pontos.** «Port. Math., Vol. 5, Fasc. 1, 1946.

Quando se lança uma visão de conjunto sôbre o desenvolvimento da matemática nos últimos quarenta anos, o que ressalta como característica mais saliente, que se acentua de dia para dia, é a importância dominante assumida pela Álgebra, enquanto estudo sistemático dos espaços algébricos, quere dizer, dos conjuntos cujos elementos podem ser associados por uma ou mais leis operatórias de carácter geral e abstrato.

Esta maneira de conceber a Álgebra, cujo início podemos filiar no estudo, em separado, das relações lógicas que condicionam as regras de cálculo e de ordenação dos próprios números reais, atingiu uma tal relevância e repercutiu por tal forma para além do seu âmbito primitivo, que é hoje um dos temas preferidos dos investigadores, na Europa como na América, precisamente o de levar às suas últimas conseqüências, quere dizer, ao máximo de generalidade das noções de base de cada domínio particular, a *algebrização* de toda a matemática.

Quando René Baire afirmava, em 1904, com uma visão surpreendente: — «il est alors légitime de rechercher s'il n'est pas possible, en remontant aux définitions premières, d'en tirer des conséquences intéressantes tout en leur conservant autant que possible leur généralité. On peut aussi se proposer de constituer, à côté de l'analyse courante, une autre branche de l'Analyse» — mal podia imaginar o ponto em que hoje nos encontramos. Na verdade, a Álgebra Moderna e a Análise Geral, demonstram pelos resultados que encerram a viabilidade do programa anunciado por Baire e a fecundidade, o alcance do processo de algebrização a que há pouco aludimos.

E o trabalho do Dr. A. Pereira Gomes, de que pretendemos dar uma notícia nesta revista, enquadra-se nessa linha geral e vem confirmar que os investigadores portugueses se encontram no bom caminho, como de resto foi acentuado recentemente pelo matemático francês A. Denjoy, a propósito do último fascículo da «Portugaliae Mathematica».

Por êste lado, há pois que insistir na orientação já traçada e nada mais.

Vejamos agora o trabalho do Dr. A. Pereira Gomes.

O autor, situando-se na corrente a que acabamos de fazer referência propôs-se estudar em que medida é possível generalizar a espaços muito mais gerais do que a recta euclideana, a noção de funcional.

Ora, uma vez que em capítulos importantes da teoria das funções da variável real, nomeadamente na mensurabilidade à Lebesgue se utiliza como noção fundamental o conjunto $M(\lambda)$ — parte do espaço — em que uma função $f(x)$ é maior ou igual a λ, noção em que o ponto x só aparece de uma maneira subsidiária, logo se compreende a idéia, que o autor teve, de partir precisamente de $M(\lambda)$ para fazer o estudo — algébrico e topológico — das funcionais em espaços sem pontos ou, de um modo mais preciso, *em estruturas.*

Assim, completando um resultado de Carathéodory (1) conseguiu caracterizar as funções reais da variável real em termos de $M(\lambda)$ — teorema 2, pág. 5.

Depois, a circunstância de esta caracterização se fazer exclusivamente com as noções de conjunto, e de intersecção e união de uma infinidade numerável de conjuntos, noções que conservam o seu significado em qualquer σ-estrutura, abre o caminho para o problema fundamental — noção de funcional em estruturas.

Há, porém, que fixar o tipo de estrutura e surge

(1) Nota bibliográfica do autor, pág. 371.

naturalmente esta pergunta: ¿onde ir buscar o critério da sua escôlha?

Em primeiro lugar, ao que já está condicionado pelo próprio teorema 2, isto é, a que se deve tratar de uma σ-estrutura; em segundo lugar, aos objectivos finais de todo o trabalho, isto é, aos de chegar a uma noção de funcional que não seja uma construção artificial, sem quaisquer ligações com o caso ordinário das funções *f (x)*, definidas na recta euclideana, mas sim um conjunto significativo de propriedades algébricas e topológicas, que lhe deem verdadeiro interêsse e utilidade.

Ora, foi exactamente com base nesse critério que o autor se fixou numa σ-Algebra de Boole topológica.

σ-Álgebra de Boole significa—consultar todo o § 2.° — uma σ-estrutura distributiva e complementada. Como exemplos podemos citar o próprio espaço de pontos, a álgebra dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue (ou à Borel), módulo conjuntos de medida nula (pags. 14).

Quanto às características topológicas, são analisadas com um cuidado especial no § 3, à base da noção geral de *estrutura topológica*.

O autor, que iniciou os seus estudos com o Prof. António Monteiro, actualmente na Universídade do Rio de Janeiro, foi particularmente feliz na redacção dêste parágrafo. A originalidade dos resultados ou da exposição dos assuntos, aparece valorizada pela maneira como estão ordenados.

Assim, partindo da noção de estrutura topológica, tomada como estrutura em que está definido um operador de *fecho* — $\overline{A}\supset A$, $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$ — ou de *interior* — $\underline{A}\subset A$, $\underline{A\cap B}=\underline{A}\cap\underline{A}$, $\underline{\underline{A}}=\underline{A}$, e estudando as suas propriedades consegue dar (pags. 24 e 25) as noções de compacidade, propriedade de Cantor, etc., generalizando a estruturas dêste tipo geral, algumas das mais importantes proposições do espaço ordinário.

Entrando depois no caso particular das Álgebras de Boole topológicas, as duas topologias — superior à base do *fecho* e inferior, à base do *interior* — fundem-se numa só por intermédio do *complemento* e o similé com o espaço ordinário é mais perfeito ainda.

Através do *axioma de semi-regularidade* — para cada elemento aberto $G\neq 0$ existe um elemento aberto $H\neq 0$ tal que $\overline{H}\subset G$ consegue dar nas estruturas o equivalente a um axioma de separação(1) dos espaços de pontos e termina êste capítulo com a demonstração do teorema de densidade de Baire: «numa Álgebra de Boole topológica, semi-regular e com a propriedade de Cantor, todo o residual(1) é denso».

Confrontando êste enunciado com o primitivo, do próprio Baire «Je dis que si K est un ensemble de première catégorie par rapport à l'ensemble parfait H, il y a, dans tout intervale contenant à son intérieur des points de H, des points que n'appartiennent pas à K», tem-se uma medida da fecundidade dos métodos da matemática moderna e do seu desenvolvimento nos últimos 40 anos.

Caracterizada no capítulo I, como acabamos de ver, a estrutura fundamental, é nos dois capítulos seguintes que o autor desenvolve pròpriamente o estudo das funcionais, tratando sucessivamente da *definição, propriedades algébricas* e *propriedades topológicas*.

Definição — é dada a partir da transposição completa para uma σ-Álgebra de Boole do teorema 2, já citado. Diz-se (2) *que se define uma funcional* f *baseada na estrutura* E (*ou, simplesmente, na estrutura* E) *quando a cada número* λ_n *se faz corresponder univocamente um elemento* $M(\lambda_n)\in E$ *de tal forma que seja verificada a condição* $M(\lambda_n)=\bigcap\limits_{\lambda_i<\lambda_n} M(\lambda_i)$, e ao número $-\infty$ *se faz corresponder o elemento* $M(-\infty)=I$.

Interpretando $M(\lambda_n)$ como o conjunto dos pontos da recta euclidiana em que uma dada função $f(x)$ *e maior* ou igual a λ_n, temos o teorema 2, válido para qualquer função $f(x)$. E sem ter presente êste facto a definição parece um tanto forçada.

De resto, o autor mais adiante — pags. 39-40 — acrescenta algumas considerações com o fim de dizer pròpriamente *o que é uma funcional*. Mas com os elementos aí fornecidos não nos parece que se avance efectivamente nesse esclarecimento. A essência do que seja uma funcional deve encontrar-se muito mais fàcilmente, como deduzo de uma sugestão do Dr. Hugo Ribeiro, na *análise da aplicação da recta euclidiana, onde varia* λ, *sôbre a estrutura* E, *por intermédio de* $M(\lambda)$.

Mas deixamos para outro lugar, a «Portugaliae Mathematica», o estudo dêsse problema e das suas relações com alguns outros sugeridos pelo trabalho de A. Pereira Gomes.

Muito curiosa é depois a definição de valor de uma funcional, e a distinção que é necessário fazer entre funcional com um número finito de valores e funcional em que $M(\lambda)$ é que tem um número finito de valores, distinção inoperante no espaço ordinário, o que torna

(1) Consultar: *Topologie* — Alexandroff und Hopf.

(1) Um elemento duma Álgebra de Boole topológica $[E,(-)]$ diz-se um *residual* se o seu complementar fôr de 1.ª categoria.

(2) — Pag. 33 § 4.

de facto interessante investigar qual a categoria mais geral de estrutura onde qualquer funcional toma pelo menos um valor e relacionar esta questão com a recíproca da propriedade (2. 4) (1).

No § 7, ainda do Cap. II, ocupa-se das operações algébricas entre funcionais: adição, subtracção, multiplicação, potenciação, dando o respectivo $M(\lambda)$ ou $N(\lambda)$.

Vai mesmo mais longe do que Olensted (2), pois procura sujeitar às regras do cálculo, não só as funcionais finitas, as únicas por aquêle consideradas, mas também as funcionais infinitas.

E embora o problema não fique completamente resolvido, a verdade é que o autor consegue esclarecer diferentes pontos através de uma análise muito cuidadosa de cada caso.

A dificuldade parece andar toda à volta da inclusão inversa de (1,13) (3), que o autor não conseguiu demonstrar, no caso geral, conforme esclarece na nota de páginas 53.

No § 8 define supremo e ínfimo de uma funcional, estuda as suas propriedades e, depois, por relativização, obtem as noções homólogas sôbre um elemento A e E.

Demonstra, também, a equivalência entre a sua noção de funcional e a de Ortsfunktion, dada por Carathéodory (4), em termos do supremo e ínfimo em cada elemento $A \neq 0$ de uma estrutura.

No § 9, finalmente, utiliza a noção de *reduzida* para obter alguns novos resultados sôbre sucessões convergentes de funcionais.

O capítulo III — o último — é dedicado às propriedades topológicas das funcionais: noção de limite superior (5) e limite inferior, semi-continuidade, continuidade, descontinuidade, classes de Borel, classes de Baire.

Aí encontramos os homólogos dos mais importantes teoremas das funções da variável real, como por exemplo o teorema de Weierstrass sôbre as funções contínuas, que o autor enuncia nestes termos. «Se a σ-álgebra de Boole topológica $[E, (^{-})]$ possui a propriedade de Cantor, tôda a funcional contínua baseada nessa estrutura atinge o sen supremo e o seu ínfimo» — pág. 99.

(1) Uma funcional simples toma um número finito de valores distintos.

(2) Lebesgue theory on a boolean algebra.

(3) $M(\lambda) \subset \bigcap_{\lambda_n} M_1(\lambda_n) \cup M_2(\lambda - \lambda_n)$.

(4) — [2] — Nota bibliográfica do autor.

(5) No espaço de pontos diríamos função limite superior de uma função dada $f(x)$ em cada ponto x. Consultar qualquer tratado de funções da variável real, por ex., o de Carathéodory.

Se acrescentarmos a definição de funcional-oscilação ω_f, a classificação das funcionais contínuas e descontínuas, quadro de páginas 107, as classes de Borel e de Baire, temos a prova real de que a estrutura fundamental e a definição de funcional foram bem escolhidas. Êste capítulo, só por si, honra o autor e demonstra as largas possibilidades que se abrem à nossa juventude, no campo da matemática moderna, se não lhe faltarem os meios de acesso aos bons Centros de Estudo e o convívio com verdadeiros Mestres. A «Gazeta de Matemática» aproveita esta oportunidade para mais uma vez proclamar a necessidade de subordinar inteiramente as nossas Escolas Superiores a êsse alto objectivo!

Ruy Luís Gomes

56 — BELL, A. H. — A Pratical course of Mathematics. Blachie & Son Limited — London and Glasgow, 1946 (oferta do British Council).

Êste livro, escrito de acôrdo com sugestões emanadas do Ministério da Educação Inglês, contém matéria de geometria, álgebra, os fundamentos da trigonometria plana e esférica, elementos de cálculo infinitesimal e uma pequena introdução ao estudo das cónicas, e pretende servir uma vasta camada de técnicos tais como engenheiros, navegadores, membros das fôrças armadas, etc. Os assuntos são tratados ordenadamente, formando um todo em que, de um modo geral, cada capítulo é uma introdução, uma preparação, dos seguintes. Assim, por exemplo, o estudo das razões e proporções antecede imediatamente o estudo da semelhança, na geometria, e o das razões trigonométricas, seguindo-se imediatamente a resolução dos triângulos rectângulos. A trigonometria é retomada mais tarde após o estudo dos logaritmos. Muitos outros exemplos desta natureza poderiam ser dados. As demonstrações não são esquecidas apesar da feição caracterizadamente prática que lhe imprimiu o autor, servindo-se de exemplos e de esquemas geométricos, onde os gráficos abundam, esclarecendo os diversos problemas estudados, para o que concorre também uma bôa recôlha de exercícios no final de cada capítulo.

Trata-se de um excelente livro para aquêles que necessitam de rapidamente e sem desvios, estudando simplesmente o essencial, se pôr a par da técnica de cálculo hoje indispensavel a tantas profissões.

Resumidamente poderemos dizer que é um bom compêndio de matemáticas gerais elementares.

J. da Silva Paulo

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

REVISTAS E PUBLICAÇÕES EXCLUSIVAMENTE DE MATEMÁTICA

NACIONAIS

Publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Porto — N.º 18 — *Introdução ao estudo duma noção de funcional em espaços sem pontos* — por A. Pereira Gomes — 1946.

Centro de Estudos de Matemáticas Aplicadas à Economia (I. S. C. E. F.) — 1945 — **Complementos de Análise**: *A função* Γ (x), por Bento Caraça; *A função* β (x, y), por Bento Caraça; *Funções ortogonais*, por Bento Caraça; *Polinómios de Legendre, de Hermite,* Q (x) *e* G (x), por Alfredo Miranda; *Fórmulas de Bessel*, por Orlando Rodrigues; *Método de interpolação de Prony,* por Orlando Rodrigues; *Derivação e integração numéricas; somação,* por Rémy Freire; *Resolução numérica de equações diferenciais,* por Rémy Freire.

Representação geométrica de sistemas complexos — (sep. dos Anais da Faculdade de Ciências do Porto, 1946), por Jayme Rios de Souza.

ESTRANGEIRAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Ano XIX, n.os 2, 4, 5-6 e 7 — 1946.

Mathematicae Notae — (Rosario) — Boletin del Instituto de Matemática — Facultad de Ciencias Matemáticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Ano V, Fasc. 4 — 1945.

Revista de la Unión Matemática Argentina — Buenos Aires — Vol. XI — n.os 4, 5 e 6 — 1946.

Espanha

Acta Salmanticensia — (Salamanca) — Seccion de Matemáticas — I — *Courbes algébriques sur corps fermés de caractéristique quelconque,* por Germán Ancochea — 1946.

Matemática Elemental — (Madrid) — Revista publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª serie — Tomo VI, n.os 1, 2 e 3 — 1946.

Problemas gráficos da Geometria Métrica y Projectiva — por José Ibarrola Solano — Bilbao, 1945.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Mathematica — (New-York) — A quarterly journal devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics — Vol. XII, n.º 1.

França

Intermédiaire des Recherches Mathématiques — (Paris) — Sugets de recherches réunis sous la direction de Paul Belgodère — Tomo 2, fasc. 7 — 1946.

Inglaterra

The Journal of the London Mathematical Society — Vol. 20, Part. 4 — 1945.

The Mathematical Gazette — (London) — edited by the Mathematical Association — Vol. 30, n.º 290 — 1946.

Da colecção *University Mathematical Texts* — ed. Oliver and Boyd (oferta do British Council):

Determinants and matrices — by A. C. Aitken.

Integration — by R. P. Gillespie.

Infinite series — by J. M. Hyslop.

Analytical geometry of three dimensions — by W. H. McCrea.

Theory of equations — by H. W. Turnbull.

A practical course of Mathematics — (Geometry, Algebra, Plane and Spherical Trigonometry, Calculus, Conics) — by A. H. Bell. — Blackie & Son, Ltd. London, 1946 (oferta do British Council).

Suiça

Elemente der Mathematik — (Basel) — Band 1 — n.os 1, 2, 3, 4, 5 — 1946.

OUTRAS PUBLICAÇÕES

Gazeta de Física — (Lisboa) — Revista dos Estudantes de Física e dos Físicos e Técnico-Físicos Portugueses — Vol. 1, fasc. 1 — Outubro, 1946.

Técnica — (Lisboa) — Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. — n.º 168 — 1946.

A Estatística na Experimentação Agrícola — por M. J. Rodrigues de Carvalho — n.º 8 da colecção «A Terra e o Homem» — Lisboa, 1946.

Annales de l'Université de Grenoble — (Nouvelle Série) — Section des Sciences Mathématiques et Physiques — Tome XXI, Année 1945.

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones — Tomo VI, n.º 64 — 1946.

L'hypothèse de l'Atome primitif — **Essai de cosmogonie** — par G. Lemaitre — Préface de G. Gonseth — Editions du Griffon — Neuchatel — 1946.

Revista Politécnica — (S. Paulo) — n.º 150 — 1946.

Revista de la Sociedad Cubana de Ciências Físicas y Matemáticas — (Habana-Cuba) — Vol. 1, n.º 5, — 1944.

CADERNOS DE ANÁLISE GERAL

CADERNOS DE INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS MODERNAS CORRENTES DO PENSAMENTO MATEMÁTICO, PUBLICADOS PELA JUNTA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

ÁLGEBRA MODERNA — sob a direcção de *A. Almeida Costa*, professor da Faculdade de Ciências do Pôrto:

1 — **Grupos (Definições, Regras de Cálculo)**, por *José Morgado*, 2.ª edição.
2 — **Grupos (Homomorfias)**, por *José Morgado* — (esgotado).
3 — **Anéis (Definições, Regras de Cálculo)**, por *J. Gaspar Teixeira*.
4 — **Grupos (Séries de composição)**, por *Ruy Verdial* — (esgotado).

TOPOLOGIA GERAL — Sob a direcção de *António Aniceto Monteiro*, professor da Universidade do Rio de Janeiro:

1 — **Espaços de Sierpinski**, por *A. Monteiro*, 2.ª edição.
2 — **Espaços acessíveis de Fréchet**, por *A. Monteiro*, 2.ª edição.
3 — **Funções contínuas**, por *A. Pereira Gomes*, 2.ª edição.
4 — **Relativização**, por *Maria Helena Ferreira*, 2.ª edição.
5 — **Bases e Vizinhanças**, por *A. Pereira Gomes*, 2.ª edição.
6 — **Conjuntos compactos**, por *A. Pereira Gomes*.

TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO — sob a direcção de *Ruy Luís Gomes*, professor da Faculdade de Ciências do Pôrto:

1-2 — **Medida à Jordan**, por *Ruy Luís Gomes* e *Laureano Barros*, 2.ª edição.
3 e 4 — **Medida à Borel**, por *L. Neves Real*.
5 — **Medida à Lebesgue e medida à Carathéodory**, por *L. Neves Real*.

GEOMETRIA DAS DISTÂNCIAS — sob a direcção de *Aureliano de Mira Fernandes*, professor da Universidade Técnica de Lisboa:

1 — **Espaços de distância (Generalidades, Álgebra Vectorial)**, por *A. de Mira Fernandes*.
2 — **Curvaturas**, por *A. de Mira Fernandes*.
3 — **Comprimentos de arco**, por *A. de Mira Fernandes*.

TEORIA DAS ESTRUTURAS E PROBLEMAS DOS FUNDAMENTOS — sob a direcção de *Hugo Ribeiro*.

1 — **Problemas introdutórios à Teoria das Estruturas**, organizado por *Hugo Ribeiro* e *Manuel Zaluar*.

CADERNOS EM PREPARAÇÃO

ÁLGEBRA MODERNA — 2 — **Grupos (Homomorfias)**, por *José Morgado*. 2.ª edição completamente remodelada.

TOPOLOGIA GERAL — 7 — **Axiomas de separação dos espaços topológicos**, por *A. Pereira Gomes*.

TEORIA DA MEDIDA E INTEGRAÇÃO — 6 — **Notas e complementos à medida J**, por *Ruy Luís Gomes*.

7 — **Notas e complementos à Medida L**, por *Ruy Luís Gomes* e *L. Neves Real*.
8 — **Integral de Riemann**, por *Ruy Luís Gomes*.

INTRODUÇÃO AOS FUNDAMENTOS DA ANÁLISE — 1 — **Noção de número real (Dos números naturais aos números racionais)**, por *A. Andrade Guimarães*.

2 — **Noção de número real (Dos números racionais aos números reais)**, por *L. Neves Real*.

PEDIDOS DE ASSINATURA A: **PUBLICAÇÕES DE ANÁLISE GERAL**
Centro de Estudos Matemáticos — Faculdade de Ciências — PÔRTO

EM 1947

GAZETA DE MATEMÁTICA

publicará quatro números no meado de cada um dos meses seguintes
FEVEREIRO, MAIO, AGOSTO E NOVEMBRO
Cada número terá, em geral, 32 páginas e o preço de 10 escudos

CONDIÇÕES DE ASSINATURA

A administração da *Gazeta de Matemática* aceita, quando pedidas directamente, assinaturas anuais de quatro números, ao preço de 30 escudos, para o que basta indicar o nome, a morada e o local da cobrança. As assinaturas são renovadas automàticamente no seu têrmo, salvo aviso prévio em contrário. Tôdas as assinaturas têm início com o primeiro número publicado em cada ano.

ASSINATURAS GRATUÍTAS

Todo o assinante que indique à administração da *Gazeta de Matemática* dez novos assinantes beneficiará de uma assinatura gratuita durante o ano seguinte ao da sua assinatura.

NÚMEROS ATRAZADOS

Encontram-se completamente esgotados os números 1, 2, 4 a 11 e 14. Os restantes números são vendidos aos preços seguintes: 3, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23 cada 6,50 escudos; 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29 cada 10 escudos.

COLECÇÕES COMPLETAS

O pequeno número de colecções completas ainda existentes destina-se a bibliotecas de escolas e estabelecimentos oficiais sendo a sua venda feita ao preço de 330 escudos (colecção dos 30 primeiros números).

PONTOS DE EXAME

Uma das secções permanentes da *Gazeta de Matemática* é constituida pelos pontos de exame de aptidão às universidades e pontos de exames de frequência e finais das cadeiras de matemática das escolas superiores. A distribuição dêstes pontos pelos diferentes números da *Gazeta de Matemática* é, em geral, a seguinte:

Exames de aptidão — números de Maio e Agosto.
1.º exame de frequência — números de Novembro e Fevereiro.
2.º exame de frequência — número de Maio.
Exames finais — números de Maio e Agosto.

Cada um dêstes números poderá publicar e publicará outros pontos além dos indicados na distribuição anterior.

NOVA EDIÇÃO DO PRIMEIRO ANO

Por motivos alheios à vontade da redacção e da administração da *Gazeta de Matemática* a anunciada reedição do ano I, que se encontra no prelo, não poude ser publicada na época prevista. Neste momento, parece ser possível prometer a sua publicação para Janeiro de 1947.

Esta nova edição oferece aos leitores da *Gazeta de Matemática* a possibilidade de completarem as suas colecções, no formato e características actuais e cóm textos cuidadosamente revistos. À nova edição do primeiro ano seguir-se-à a do segundo ano, também com o texto revisto e no formato actual.

A nova edição do primeiro ano da *Gazeta de Matemática*, número 1 a 4, será posta à venda ao preço de 40 escudos. Beneficiará do preço especial de 30 escudos quem se inscrever até 31 de Dezembro de 1946 e pagar esta quantia à administração da revista.

Assine a *Gazeta de Matemática* e concorrerá para o melhoramento de uma revista sem objectivos comerciais

Administração da *Gazeta de Matemática* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c — Lisboa-N