GAZETA DE MATEMÁTICA

JORNAL DOS CONCORRENTES AO EXAME DE APTIDÃO E DOS ESTUDANTES DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS SUPERIORES

ANO VI **N.° 25** JULHO-1945

SUMÁRIO

NÚMERO AVULSO: ESC. 10$00

DEPOSITÁRIO: LIVRARIA SÁ DA COSTA / RUA GARRETT, 100-102 / LISBOA

GAZETA DE MATEMÁTICA

Editor e Proprietário
J. da Silva Paulo

Administrador
Orlando M. Rodrigues

Tesoureiro
J. de Oliveira Campos

Correspondência para Manuel Zaluar — Rua Serpa Pinto, 17, 4.º esq. — Lisboa

Composição e impressão: Sociedade Industrial de Tipografia, Limitada — Rua Almirante Pessanha, 3 e 5 (ao Carmo) - Lisboa

ANO VI-N.º 25 GAZETA DE MATEMÁTICA JULHO-1945

REDACTOR PRINCIPAL: *M. Zaluar* ■ EDITOR: *J. da Silva Paulo* ■ ADMINISTRADOR: *O. M. Rodrigues*

Composto e impresso na Sociedade Industrial de Tipografia, Rua Almirante Pessanha, 5 (ao Carmo), Lisboa

*El problema del número de isómeros en las séries homólogas de la Química Orgánica**

por Sixto Rios

1. Introducción. La cuestión objeto de este trabajo interesa tanto a matemáticos como a químicos, y unos y otros han contribuído a su desarrollo. No carece de interés observar que fué un matemático puro, el gran Cayley, quien en 1875 construyó las primeras tablas de isómeros de las parafinas $C_n H_{2n+2}$ y de los alcoholes $C_n H_{2n+1} OH$, y también un matemático puro, Pólya, ha sido quien, en 1937, ha dado un avance decisivo al problema, que había permanecido sensiblemente estacionado, a pesar de algunas apreciables contribuciones de los químicos americanos Henze, Blair, Lunn, Senior, Douglas Perry y otros.

Como otros muchos problemas de las aplicaciones, esta cuestión ha dado origen a la introducción de de algunos conceptos cuyo interés no se limita al problema de origen, sino que tiene un alcance muy superior. Así Cayley manejó la noción topológica de *árbol* (1) y llegó a la determinación del número de árboles de ciertos tipos, siendo este el punto de partida de una importante rama de la Matemática moderna, llamada teoría de *grafos* (2) o *complejos unidimensionales*.

El problema de la determinación, en cada serie homóloga de la Química orgánica, del número de isómeros en función del número de carbonos de las moléculas, se puede precisar en varias direcciones. Se puede buscar una fórmula recurrente, una fórmula directa exacta, o una fórmula límite que nos dé una visión del crecimiento del número de isómeros en la serie considerada al crecer el número de carbonos.

Puede decirse que después de los trabajos de Cayley no se encuentra ninguna contribución de interés en la literatura hasta los trabajos de los químicos americanos Henze y Blair (1), que en 1931 completaron las tablas de Cayley, teniendo en cuenta los estereoisómeros, utilizando para ello unas interesantes fórmulas recurrentes, y los de Lunn y Senior (1929), que establecieron algunas interesantes relaciones del problema de los isómeros con los grupos de permutaciones.

Pero son, sin duda, los trabajos de Pólya (1937) los que representan un progreso decisivo en la cuestión. En primer lugar, ha logrado Pólya fórmulas recurrentes generales para diversas series homólogas, sin tener que considerar casos particulares como en las fórmulas de Henze y Blair y, en segundo lugar, ha llegado Pólya, utilizando recursos de la teoría de funciones de variable compleja y de la teoría de ecuaciones funcionales, a una fórmula límite asintótica del número de isómeros, lo que tiene una importancia considerable.

En lo que sigue pretendemos hacer un resumen de los principales resultados de Pólya.

2. Grafos. Vamos a introducir el concepto abstracto de *grafo*, que es el substratum matemático de las fórmulas de estructura y estereofórmulas, y permite llegar con claridad a la distinción entre unas y otras, lo que no siempre logran los libros de Química.

Siguiendo a Pólya, llamaremos *grafo* (2) *a un sistema formado por dos clases de elementos: puntos y segmentos en número finito, entre los cuales se ha definido la relación fundamental «el punto P limita al segmento σ» o bien «σ termina en P», la cual verifica las siguientes condiciones:*

I. *Cada segmento está limitado por dos puntos.*

II. *Los elementos del grafo forman un sistema conexo, es decir, se puede llegar de un elemento cualquiera del*

(1) Anteriormente Kirchhoff (1874) y Staudt utilizaron esta misma noción en problemas de Electricidad y Geometría.

(2) *D. König: Theorie der endlichen und unendlichen Graphen.* (Leipzig, 1936).

(1) Véase la Bibliografía al final.

(2) En la nomenclatura de König, los grafos de Pólya se llaman grafos finitos conexos sin lazos.

* Publicado em «Investigación y Progreso» Ano xv, Madrid, 1945.

grafo a otro mediante pasos sucesivos por elementos del grafo ligados entre sí por la relación fundamental.

Como consecuencia resulta que cada segmento está limitado por dos puntos y cada punto puede ser extremo de uno o más segmentos.

Si es p el número de puntos de un grafo y s el número de segmentos, al número $\mu=s-p+1$ se le llama orden de conexión del grafo. Si $\mu=0$, el grafo se llama *árbol*. Um árbol contiene, pues, para el número p de puntos, el menor número posible de segmentos, a saber: $p-1$. La figura 1 representa un grafo de orden de conexión 1; la figura 2, un árbol.

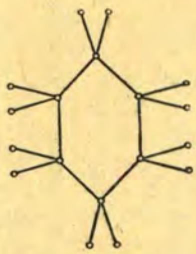


FIG. 1

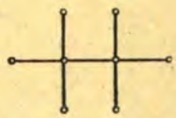


FIG. 2.

Un punto P en el que terminan k segmentos de un grafo forma, junto con dichos k segmentos, una *corona*, y P se llama *centro* de la corona.

En la figura 3 se representan dos grafos, en el primero de los cuales hay dos coronas de cuarto orden y en el segundo una corona de tercer orden.

Tiene una importancia fundamental para la aplicación a la Química, la numeración de los segmentos de cada corona de un grafo. Esto podemos hacerlo con alguno de los criterios siguientes:

a) Supondremos el grafo en un plano, y considerando una corona de orden k, numeraremos sus segmentos a partir de uno de ellos sucesivamente siguiendo el movimiento de la aguja de un reloj, colocado en el centro de la corona que consideramos. Evidentemente, con este convenio, hay k maneras distintas de numerar (según el segmento por que comencemos), que pueden representarse por las permutaciones del grupo cíclico C_k.

b) Podemos considerar el grafo en el espacio de tres dimensiones. Limitándonos al caso $k=4$, supondremos que el centro del grafo es el centro de un tetraedro regular, y los cuatro vértices son los extremos de los segmentos que parten de él. Asignaremos a los segmentos los mismos números que a los vértices del tetraedro, y éstos los numeraremos de modo que el tetraedro resulte dextrorso, es decir, de modo que un observador que tenga la cabeza en 1 y los pies en 2 y delante de él la arista 3, 4, tenga a la izquierda el 3 y a la derecha el 4.

Hay 12 maneras distintas de numerar los vértices del tetraedro que verifican aquella condición. Corresponden a los giros posibles que hacen coincidir el

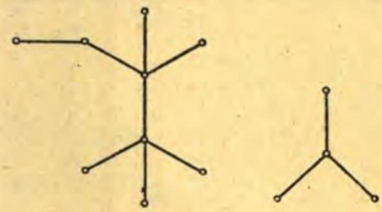


FIG 3

tetraedro consigo mismo y pueden representarse por las 12 permutaciones del grupo alternado A_4.

c) Consideramos la corona topológicamente, es decir, sin tener en cuenta su situación respecto al plano o al espacio que la rodea. En esto caso consideramos $k!$ numeraciones posibles en una corona de orden k, las cuales vendrán representadas por el grupo simétrico.

Vamos ahora a considerar el concepto de *congruencia* de dos grafos, que es fundamental desde el punto de vista teórico y en la aplicación a la Química.

Supondremos *clasificados* los puntos del grafo en *tipos*, con la condición de que cada punto pertenezca a un solo tipo. Un criterio puede ser el número de segmentos que terminen en cado punto: pero pueden darse otros criterios (por ejemplo, en Química, el elemento a que pertenece el átomo). Supondremos también numerados los segmentos de cada corona [1].

Diremos que los grafos G y G' son *congruentes* si existe una correspondencia biunívoca entre sus elementos, que verifica las siguientes condiciones:

α) A cada segmento de G corresponde un segmento de G'.

β) A cada punto de G corresponde un punto del mismo tipo en G'.

γ) Se conserva la relación fundamental entre los elementos transformados.

δ) A cada corona de G corresponde una corona de G', y las correspondientes permutaciones forman parte del grupo correspondiente.

Es fácil comprobar que la congruencia de grafos así definida posee las propriedades reflexiva, simétrica y transitiva.

3. FÓRMULAS QUÍMICAS. Si los puntos del grafo los consideramos como átomos y los segmentos como valencias, un grafo no es otra cosa que una fórmula química teóricamente posible. La condición I de la

[1] Un segmento puede pertenecer a dos coronas, pero los dos números que le corresponden, entonces son completamente independientes.

definición de grafo, significa ahora que no hay valencias libres, y la condición II de conexión significa que el conjunto de átomos considerado forma una sola molécula.

Las condiciones α), β) y γ) de la definición de congruencia tienen un significado perfectamente claro, pues no hacen más que precisar que se trata de una congruencia topológica en que no se tiene en cuenta longitud de segmentos, etc.

Limitándonos, por ejemplo, a grupos formados por átomos de cuatro valencias y una valencia, los llamados CH-grafos, entre los que se encuentran las parafinas, podemos aclarar la significación de la condición δ de la congruencia: Si asignamos a cada corona el grupo simétrico S_4, diremos que dos grafos congruentes son *topológicamente* iguales, si le asignamos el grupo cíclico C_4 diremos que son *planimétricamente* iguales, y si le asignamos el grupo alternado A_4 diremos que son *estereométricamente* iguales. La introducción de la noción de grupo ligado a cada corona, permite así una distinción rigurosa entre fórmulas de estructura y estereofórmulas.

Dos grafos topológicamente iguales corresponden a la misma *fórmula de estructura* (y con esto quedan implícitamente definidos los *isómeros de estructura*), y dos grafos estereométricamente iguales corresponden la a misma *estereofórmula* (así quedan definidos los *estereoisómeros*). La noción de carbono asimétrico es perfectamente clara: centro de una corona con cuatro ramas topológicamente distintas.

4. Las fórmulas recurrentes de Pólya. Vamos a indicar brevemente cómo se obtiene una fórmula recurrente que nos dé el número R_n de radicales alkílicos $-C_n H_{2n+1}$ estructuralmente distintos. Evidentemente, $R_0=1$. Si suponemos $n \geq 1$, resulta que R_n da el número de alcoholes $C_n H_{2n+1} OH$ estructuralmente distintos, y tales alcoholes pueden obtenerse del metílico $CH_3 OH$, sustituyendo los tres átomos de hidrógeno por tres radicales alkílicos:

$$(1) \qquad -C_j H_{2j+1}, \quad -C_k H_{2k+1} \quad -C_l H_{2l+1}$$

con la condición

$$(2) \qquad j+k+l=n-1, \quad j \geq 0, \quad k \geq 0, \quad l \geq 0.$$

Distinguiremos tres casos:

a) Los números j, k, l, son distintos (podemos suponer, por ejemplo, $j<k<l$).

La condición de los tres radicales da lugar a $R_j \cdot R_k \cdot R_l$, compuestos distintos.

b) Si hay dos números iguales (por ejemplo, $j \neq k=l$), el número de compuestos es:

$$R_j \frac{R_k (R_k+1)}{2!}.$$

c) Si es $j=k=l$, el número de compuestos es:

$$\frac{R_j (R_j+1)(R_j+2)}{3!}.$$

Sumando para todos los casos posibles, tendremos la fórmula de Pólya

$$(3) \qquad R_n = \frac{R_j (R_j+1)(R_j+2)}{3!} + \sum_{j \neq k} R_j \frac{R_k (R_k+1)}{2!} + \sum_{j<k<l} R_j R_k R_l$$

Cómo se ha de verificar la condición (2), resulta que el primer término sólo se refiere a índices j tales que $3j=n-1$; la primera sumatoria supone, además de $j \neq k$, que $j+2k=n-1$, y la tercera supone que sea $j<k<l$ y $j+k+l=n-1$.

Con lo anterior no hemos hecho más que dar una idea del tipo de razonamientos que han permitido a Pólya deducir multitud de fórmulas recurrentes para los números de isómeros en series homólogas.

5. Las fórmulas asintóticas de Pólya. Estas fórmulas constituyen, sin duda, la contribución más personal e interesante de Pólya al problema de los isómeros. Fórmulas recurrentes como las que hemos visto en el § 4, permiten determinar sucesivamente el número de isómeros conociendo el número de átomos de carbono; y construir de este modo una tabla de la que es posible deducir algunas indicaciones sobre el crecimiento del número de isómeros en relación con n.

Así puede llegarse a fórmulas aproximadas empíricas; pero una fórmula *asintótica* permite precisar más, como vamos ver.

Pólya ha demostrado que si designamos por R_n el número de isómeros de estructura de los alcoholes de fórmula $C_n H_{2n+1} OH$, se verifica:

$$(1) \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{R_n}{A \rho^{-n} n^{-\frac{3}{2}}} = 1$$

en que A y ρ son dos constantes características. (Su cálculo numérico es difícil, y hasta ahora sólo se ha visto que $0,35 < \rho < 0,36$).

La expresión (1) nos dice que el número R_n viene dado por la función $A \rho^{-n} n^{-\frac{3}{2}}$, en el sentido de que el error tiende a cero cuando $n \to \infty$. Observemos que una fórmula límite no puede ser comprobada con ninguna tabla por extensa que sea, pues (1) quiere decir que dado $\varepsilon > 0$, se verifica que $\left| \frac{R_n}{A \rho^{-n} n^{-\frac{3}{2}}} - 1 \right| < \varepsilon$, para $n > N$, pero nada sabemos respeto de N.

Tomando logaritmos podemos poner la fórmula (1) en la siguiente forma:

$$(3) \qquad \lim_{n \to \infty} \left[\log g (n^{\frac{3}{2}} R_n) - \left(n \log \frac{1}{\rho} + \log A \right) \right] = 0$$

que tiene la ventaja de que puede comprobarse sin tener en cuenta los valores de A y ρ. En efecto: si tomamos como abscisas los valores n y como ordenadas $\log (n^{\frac{3}{2}} R_n)$, los puntos obtenidos, cuando $n \to \infty$, se aproximan a la recta $y = x \log \frac{1}{\rho} + \log A$. Ello da, además, el medio de obtener valores aproximados de ρ y A.

Leyes del tipo de la (1), ha obtenido Pólya para diversas series homólogas, que pueden estudiarse en sus memorias (véase la bibliografía, al final).

Aquí vamos a limitarnos para terminar a hacer algunas indicaciones relativas al método para obtenerlas.

Consideremos la serie de potencias:

$$(4) \qquad r(x) = R_0 + R_1 x + R_2 x^2 + \cdots + R_n x^n + \cdots$$

Se comprueba fácilmente que $r(x)$ verifica la siguiente ecuación funcional:

$$(5) \qquad r(x) = 1 + x \frac{r(x)^3 + 3\, r(x)\, r(x^2) + 2\, r(x^3)}{6}.$$

En efecto, de (4) se deduce:

$$r(x)^3 = \sum_j R_j^3 x^{3j} + 3 \sum_{j \neq k} R_j R_k^2 x^{j+2k} + 6 \sum_{j<k<l} R_j R_k R_l x^{j+k+l}$$

$$3\, r(x)\, r(x^2) = 3 \sum_j R_j\, x^{3j} + 3 \sum_{j \neq k} R_j R_k x^{j+2k}$$

$$2\, r(x^3) = 2 \sum_j R_j x^{3j}$$ de donde, multiplicando por $\frac{x}{6}$ y sumando, resulta $x \frac{r(x)^3 + 3 r(x)\, r(x^2) + 2 r(x^3)}{6} =$

$$= \sum_j \frac{R_j^3 + 3 R_j^2 + 2 R_j}{6} x^{3j+1} + \sum_{j \neq k} R_j \frac{R_k^2 + R_k}{2} x^{j+2k+1} + \sum_{j<k<l} R_j R_k R_l x^{j+k+l+1}.$$

Comparando ésta con la fórmula recurrente (2) del § 4 y como $R_0 = 1$, se obtiene la ecuación funcional (5). Ella permite la determinación del radio de convergencia de la serie de potencias, utilizando un teorema de Jungen relativo a las singularidades de las funciones definidas por tales series. De este modo se obtiene la fórmula: $R_n \sim A \rho^{-n} n^{-\frac{3}{2}}$.

Sería salirse de los límites que nos hemos impuesto, dar mayor desarrollo a esta exposición, cuyo objeto no es otro que suscitar el interés por los trabajos de Pólya, los cuales sugieren multitud de cuestiones pendientes de solución, la más importante de las cuales es, sin duda, la obtención de una fórmula exacta para R_n y para los números análogos en otras series homólogas.

Cabría también estudiar con estos métodos los tipos especiales de isomería que suelen consignarse en los tratados de Química orgánica.

BIBLIOGRAFIA

[1]. *Blair (C. M.)* y *Henze (H. R.)*: Journal of the American Chemical Society 53 (1931), págs. 3042-3046; 53 (1931), págs. 3077-3085; 54 (1932), págs. 1098-1106; 54 (1932), págs, 1538-1545; 55 (1933), págs. 680-686; 56 (1934), pág. 157.

[2]. *Cayley (A.)*: Collected mathematical papers. (Cambridge, 1889-1898).

[3]. *Delannoy*: Bull. de la Soc. Chim. 1894.

[4]. *Gordan* y *Alexejfe*: Sitz. de Erlangen, 1900.

[5]. *Jordan (C.)*: J. f. die reine une angewandte Math. 70 (1869), págs. 185-190.

[6]. *König (D.)*: *Theorie der endlichen und unendlichen Graphen* (Leipzig, 1936).

[7]. *Lunn (A. C.)* y *Senior (J. K.)*: Journal of Physica Chemistry 33 (1929), págs. 1027-1079.

[8]. *Pólya (G.)*: Helvetica Chimica Acta 19 (1936), pags. 22-24 Comptes Rendus, Académie des Sciences 201 (1935), págs. 1167-1169. Ibidem 202 (1936), págs. 415-443; Vierteljahrsschrift d. Naturf. Ges. Zürich 81 (1936), págs. 243-258; Acta Mathematica, t. 68.

[9]. *Sylvester*: Am. Journ. of Math. 1878.

Sôbre a existência não contraditória

por **J. Albuquerque** (bolseiro em Roma do I. A. C.)

No complexo confuso de determinantes da atitude científica perante a realidade, aparecem talvez como resultantes, as aspirações de conhecer e de prevenir. Do mesmo modo as duas características mais impressionantes do trabalho científico são conseqüentemente o carácter descritivo e o carácter preventivo.

Numa teoria científica imaginam-se situações especiais, circunstâncias determinadas com maior ou menor generalidade e possibilidade de verificação, e elaboram-se outras situações que se sucedem a essas.

Para criar uma situação inicial, pensam-se determinados objectos relacionados por certas proposições: os objectos são referidos pelos seus nomes,

[1] Nota final do capítulo I do original português do livro intitulado «Teoria generale degli insiemi», que possìvelmente será publicado em Roma.

termos primitivos da teoria, e as proposições que os relacionam são as proposições primitivas ou *axiomas.*

Elaboram-se em seguida novas situações que se sucedem às situações iniciais; as novas situações adquirem o carácter de conseqüência lógica das primeiras, porque são elaboradas ou deduzidas com as *regras da dedução,* porque são pensadas com as regras da Lógica.

Nesta elaboração de situações novas há a necessidade de criar termos novos ou *termos derivados* obtidos dos termos primitivos de certo modo seguro que permitirá usá-los sem enganos e sem estabelecer confusão.

Criar um termo novo é definir, e a segurança com que se define é dada pelas *regras da definição.*

Cada situação nova elaborada a partir da situação inicial é uma nova disposição dos objectos da teoria, relacionados de um modo novo ou submetidos a proposições novas, os *teoremas.*

Os teoremas tão portanto obtidos com as regras da dedução a partir dos axiomas.

Os objectos da teoria *são pensados,* tanto na situação inicial como nas situações novas transitórias ou finais. Pensar êsses objectos é destacá-los ou diferenciá-los de um amálgama de tantíssimos outros objectos pensáveis; é fixá-los no meio da mobilidade das coisas pensáveis, fixá-los não só isolando-os como também determinando-lhes, a cada um, uma forma rígida que os torne como que «visíveis e manipuláveis».

A atribuïção do nome, termo primitivo ou termo derivado, dá-lhes, e resulta de lhes termos dado, a forma rígida; os objectos são isolados do seio das coisas pensáveis por meio das proposições iniciais ou derivadas.

A nosso ver as coisas pensáveis são o reflexo em nós da realidade e é neste facto de enunciado tão simples que se baseiam as relações entre a teoria e a realidade ou a prática.

A teoria criando situações novas para os objectos pensados, satisfaz-nos o desejo de prevenir e fornece-nos a *previsão.* O contrôle destas previsões afina a teoria e corrige em nós próprios as regras da dedução, aperfeiçoando-nos e formando em nós próprios a *Lógica,* num trabalho minucioso e interminável.

O cunho principal das proposições científicas é certamente o de serem condicionais. [2]

De facto na teoria científica ou num sistema axiomático, as proposições tomam inúmeras formas que dependem inclusivamente do gôsto de quem as formula, mas parece podermos incluí-las num pelo menos dos seguintes tipos:

1. Dados... nas condições... então...
2. Quaisquer que sejam... nas condições... então...
3. Suponhamos... nas condições... então...
4. Consideremos... nas condições... então...
5. Se EXISTEM... nas condições... então...
6. EXISTEM... nas condições...
7. Não EXISTEM... nas condições...

Os cinco primeiros tipos de proposições apresentam *explìcitamente* o cunho condicional. São cinco tipos dos mais freqüentes e parece que todos êles se reduzem ao quinto tipo:

Se EXISTEM... nas condições... então...

Neste último tipo, colocando no primeiro intervalo os termos iniciais ou derivados e no segundo intervalo as proposições primitivas ou derivadas, convenientemente combinados, deverá pôr-se no terceiro intervalo de acôrdo com as regras da dedução o enunciado da situação nova que envolve em si a previsão.

Os dois tipos, tipo 6 e 7, não apresentam explìcitamente o carácter condicional. Mas nem por isso as proposições de qualquer dêstes tipos são menos condicionais que as do tipo precedente.

Com efeito, uma proposição do tipo 6 ou do tipo 7 não pode ser uma proposição primitiva ou axioma; é portanto uma proposição derivada ou teorema e deverá ser demonstrada a partir de outras proposições e em última análise a partir dos axiomas. Resulta portanto que as proposições dos tipos 6 e 7 são *implìcitamente condicionais.*

Reduzimos assim as proposições de uma teoria axiomática a três tipos em cada um dos quais figura a palavra EXISTE.

Qual o sentido atribüido geralmente a essa palavra em cada um dos tipos a que fomos conduzidos?

Aparentemente, o sentido da palavra EXISTE que figura numa proposição explìcitamente condicional, parece diferente do sentido da mesma palavra quando se trate de uma proposição implìcitamente condicional; mas de facto êsses sentidos não são tão diferentes como à primeira vista parece.

5. Se EXISTEM... nas condições... então... pretende-se dizer:

5'. Se são pensáveis sem contradição... nas condições... então...

Para garantir a não contradição deverá verificar-se neste caso:

a) o conjunto dos objectos a pensar definido pelas condições indicadas na proposição deve verificar a propriedade PV (sôbre tudo que tal conjunto seja

[2] **Salvo o das proposições categóricas que se limitam ao enunciado do facto.**

$\equiv|\equiv 0$, porque em geral satisfaz o resto da propriedade PV). [3] Isto assegura a não contradição interna à proposição.

b) a proposição não deve estar em contradição com as outras proposições já deduzidas no desenvolvimento da teoria até ao momento presente. Isto assegura a não contradição interna à teoria.

c) o conjunto dos objectos pensáveis indicado pela proposição deverá reproduzir uma situação da realidade. Isto garante a não contradição externa à teoria.

Em geral na proposição explicitamente condicional evita-se a palavra EXISTE, enunciando a proposição com uma das formas 1, 2, 3 ou 4 ou outra qualquer forma equivalente de enunciado.

Nas proposições implicitamente condicionais

6. EXISTEM... nas condições...

7. Não EXISTEM... nas condições...

pretende-se dizer respectivamente:

6'. São pensáveis necessàriamente... nas condições...

7'. Não se podem pensar... nas condições...

Na proposição 6 o conjunto dos objectos pensáveis definido pelas condições é necessàriamente $\equiv|\equiv 0$, sendo contraditório, de uma contradição interna à teoria, supô-lo $\equiv 0$.

Na proposição 7 as condições indicadas são lògicamente incompatíveis ou, no caso mais correcto, o conjunto por elas definido é $\equiv 0$, sendo contraditório, de uma contradição interna à teoria supô-lo $\equiv|\equiv 0$.

Uma proposição implicitamente condicional isto é, uma proposição dos tipos 6 ou 7, enuncia uma *situação nova* que é uma *previsão* e que necessita de ser controlada.

Concluimos por conseqüência que a palavra EXISTE é mais freqüente do que geralmente se supõe; encontra-se muitas vezes escondida nos enunciados das proposições de uma teoria axiomática e só raras vezes ela figura claramente na proposição.

Em qualquer dos casos a palavra EXISTE tem um sentido que se procurará fixar com as seguintes três proposições:

1. Um objecto ou um conjunto de objectos EXISTE ou não EXISTE.

2. A existência ou não existência deve ser *não contraditória;* de uma contradição cuja natureza diga respeito ao desenvolvimento formal interno da teoria (não contradição interna).

3. A existência ou não existência afirmada, deverá ser tomada com o valor de uma *previsão* fornecida pela teoria e deverá ser submetida à prova da experiência. Deverá ser *não contraditória;* de uma contradição cuja natureza diga respeito ao comportamento da teoria perante a realidade (não contradição externa).

O desenvolvimento ulterior de uma teoria axiomática que repouse sôbre uma existência ou não existência, *não contraditória,* dependerá da prova experimental e será sempre contingente. Não nos parece contudo que seja mais contingente que qualquer outra parte do desenvolvimento da mesma teoria. No entanto empregaremos sempre a palavra existe escrevendo-a em letras maiúsculas desejando com isso indicar os passos da teoria que impõem uma avaliação cuidada dos resultados.

A palavra EXISTE usando uma imagem forte, é o cordão umbilical que liga a teoria à realidade material que lhe deu origem e que a alimenta e vivifica, condicionando-lhe todo o seu valor prático e utilitário.

Roma, 1945, Abril 30.

(3) A propriedade PV é assim enunciada:
PV. Sempre que se considere um conjunto C deverão considerar-se outros dois conjuntos A e B tais que para todo o $X \in C$ se tem: $X \in A$, $X \notin B$, $B \in A$.
EXISTE pelo menos um X naquelas condições.

Sôbre a unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias no caso clássico (e no campo real)

por *Vergílio Simões Barroso* (bolseiro em Roma do I. A. C.)

De um meu trabalho [1] recentemente enviado ao I. A. C. extraio, para o leitor da Gazeta, uma breve demonstração da unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias, de forma normal, no caso clássico familiar a todos. Dou-a ao conhecimento do leitor da Gazeta porque esta demonstração, que julgo original, tem, sôbre as que geralmente se têm feito até agora, a vantagem de ser independente da formação prévia das sucessões de funções que convergem para as componentes da solução, cuja existência se prova habitualmente em primeiro lugar. Expliquemo-nos:

(1) «O teorema de existência e unicidade da solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias num caso mais geral do que o clássico (no campo real)», V. S. Barroso.

O leitor sabe que, dado um sistema de equações diferenciais ordinárias, de forma normal,

$$(1) \quad y_i'=f_i(x;y_1;y_2,\cdots,y_m) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

onde as f_i são m funções reais das $m+1$ variáveis reais $x, y_1, y_2, \cdots, y_m$ definidas no domínio rectangular fechado R dado pelas limitações

$$(2) \quad |x-\alpha| \leq a \quad ; \quad |y_i-\beta_i| \leq b \quad (i=1,\cdots,m)$$

onde $\alpha, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ são conhecidos, se forem verificadas as condições:

I — As funções f_i são contínuas em R;

II — x_0 é um ponto arbitrário do intervalo fechado $(\alpha-d, \alpha+d)$, onde d é o menor dos dois números a e $b/4M$, sendo M o maior dos máximos em R dos valores absolutos das funçõos f_i [2];

III — $c_1, c_2, \cdots, c_m$ são m números escolhidos arbitràriamente de modo que $|c_i-\beta_i| \leq b/2$;

IV — As funções $f_i(x;y_1,y_2,\cdots,y_m)$ são lipschitzianas de 1.ª ordem em relação às variáveis $y_1, y_2, \cdots, y_m$, isto é, existe um número $L>0$ tal que, quaisquer que sejam os dois pontos $(x;\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_m) \in R$ e $(x;y_1,\cdots,y_m) \in R$, se tenha

$$|f_i(x;\bar{y}_1,\cdots,\bar{y}_m)-f_i(x;y_1,\cdots,y_m)| \leq L\sum_{k=1}^{m}|\bar{y}_k-y_k| \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

então existe uma, e uma só, soluçâo $\{\varphi_i(x)\}, i=1,2,\cdots,m$, do sistema (1), cujas componentes sejam m funções $\varphi_i(x)$, definidas e contínuas em $(\alpha-d;\alpha+d)$, admitindo aí derivadas primeiras contínuas, tais que $|\varphi_i(x)-\beta_i| \leq b$ e satisfazendo às condições $\varphi_i(x_0)=c_i$ $(i=1,2,\cdots,m)$.

O leitor recorda-se ainda de que se demonstra (pelo processo de Picard-Peano) a existência da solução definindo cada uma das suas componentes $\varphi_i(x)$ como limite de uma sucessão de funções

$$(3) \quad {}^1\varphi_i(x) \equiv c_i; {}^2\varphi_i(x); {}^3\varphi_i(x); \cdots; {}^k\varphi_i(x); \cdots \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

cujos termos são obtidos por meio das fórmulas recorrentes

$$(4) \quad \begin{cases} {}^1\varphi_i(x) \equiv c_i \\ {}^{k+1}\varphi_i(x) \equiv c_i + \int_{x_0}^{x} f_i(t; {}^k\varphi_1(t), \cdots, {}^k\varphi_m(t))\,dt \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

Interessa-nos particularmente aqui a demonstração da unicidade da solução. A demonstração geralmente conhecida é a de Goursat, que consiste no seguinte, resumidamente:

Seja $\{\Psi_i(x)\}$ $(i=1,2,\cdots,m)$, um outro sistema de m funções que satisfaçam em $(\alpha-d, \alpha+d)$ ao sistema (1) e às condições iniciais $\Psi_i(x_0)=c_i$. Então ter-se-à, em todo o intervalo $(\alpha-d, \alpha+d)$, $\Psi_i(x) \equiv \varphi_i(x)$ porque se prova que cada uma de tais funções $\Psi_i(x)$ é também função-limite da sucessão (3) que tende para a função $\varphi_i(x)$ da mesma ordem. Ora para a demonstração desta última afirmação tem de efectuar-se pràticamente o mesmo fatigante trabalho que já antes se tivera de fazer para provar a convergência das sucessões (3).

Em vez disso, o processo que a seguir indico, não exigindo a prévia formação das sucessões (3) nem a prova da sua convergência, pode servir para demonstrar independentemente o seguinte teorema:

«Se existe uma solução do sistema (1) satisfazendo às condições iniciais $\varphi_i(x_0)=c_i$, *esta solução será unica*, se admitirmos que são verificadas *tôdas* [3] as condições I, II, III e IV.»

Demonstração:

Do facto que tanto $\{\varphi_i(x)\}$ como $\{\Psi_i(x)\}$ são ambas soluções, no intervalo $(\alpha-d, \alpha+d)$ do sistema (1) e satisfazem ambas às mesmas condições iniciais em x_0, isto é, $\varphi_i(x_0)=c_i$ e $\Psi_i(x_0)=c_i$ (para $i=1,2,\cdots,m$), resultam as identidades:

$$\varphi_i(x) \equiv c_i + \int_{x_0}^{x} f_i(t;\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t))\,dt$$

$$\Psi_i(x) \equiv c_i + \int_{x_0}^{x} f_i(t;\Psi_1(t);\cdots,\Psi_m,(t))\,dt$$

de onde, por subtracções ordenadas,

$$\varphi_i(x)-\Psi_i(x) \equiv \int_{x_0}^{x} [f_i(t;\varphi_1(t),\cdots,\varphi_m(t))-f_i(t;\Psi_1(t),\cdots,\Psi_m(t))]\,dt \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

e, pela condição IV,

$$(5) \quad |\varphi_i(x)-\Psi_i(x)| \leq L\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{m}|\varphi_k(t)-\Psi_k(t)|\,dt \quad i=1,\cdots,m)$$

Adicionando ordenadamente as m desigualdades (5), vem $\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(x)-\Psi_i(x)| \leq mL\left|\int_{x_0}^{x}\sum_{k=1}^{m}|\varphi_k(t)-\Psi_k(t)|\,dt\right|$

a qual, pondo $\sum_{i=1}^{m}|\varphi_i(x)-\Psi_i(x)| \equiv u(x) \geq 0$ (portanto $u(x_0)=0$) toma o aspecto $u(x) \leq mL\left|\int_{x_0}^{x}u(t)\,dt\right|$, ou ainda

$$(6) \quad u(x)-mL\left|\int_{x_0}^{x}u(t)\,dt\right| = g(x) \quad \text{com} \quad g(x) \leq 0.$$

---

[2] **A limitação das f_i em R resulta do facto que elas são contínuas no domínio *fechado* R.**

[3] **De facto, sabemos que, se retirarmos sòmente a condição IV, existe *pelo menos uma* solução nas condições requeridas.**

Ora $\frac{d}{dx}\left|\int_{x_0}^{x} u(t)\,dt\right| = \pm u(x)$, conforme respectivamente $x \gtrless x_0$ e, além disso, no ponto $x=x_0$, a função $\theta(x) = \left|\int_{x_0}^{x} u(t)\,dt\right|$ tem, como semi-derivada à direita, $u(x_0)=0$ e, como semi-derivada à esquerda, $-u(x_0)=0$ e, portanto, tem aí uma derivada nula. Consideremos pois, em primeiro lugar, o intervalo fechado, $(x_0, \alpha+d)$, onde a função $\theta(x)$ tem $u(x)$ como derivada primeira. Derivando então em ordem a x ambos os membros da (6), resulta

(7) $$u'(x) - mL\,u(x) = g'(x)$$

e portanto, atendendo a que $u(x_0)=0$,

(8) $$u(x) = e^{mLx}\int_{x_0}^{x} g'(t)\,e^{-mLt}\,dt$$

de onde se deve concluir que, em todo o intervalo, $(x_0, \alpha+d)$, será $g'(t) \geq 0$ porque $u(x) \geq 0$ e, por conseguinte, que a função $g(x) \leq 0$ é *não decrescente* no intervalo $(x_0, \alpha+d)$. Mas para $x=x_0$ é $g(x_0)=0$ (vide expr. 6), de modo que em todo o $(x_0, \alpha+d)$, é $g(x) \equiv 0$ donde $g'(x) \equiv 0$ donde ainda $u(x) \equiv 0$ de onde resulta, *em todo o intervalo fechado* $(x_0, \alpha+d)$

(9) $$\varphi_i(x) - \Psi_i(x) \equiv 0 \quad (i=1,2,\cdots,m).$$

Um raciocínio completamente análogo, feito para o intervalo $(\alpha-d, x_0)$ (de facto basta trocar nas (7) e (8) mL por $-mL$ e substituir a conclusão «$g(x)$ é não decrescente em $(x_0, \alpha+d)$» por esta outra: «$g(x)$ é não crescente em $(\alpha-d, x_0)$» porque será agora neste intervalo $g'(x) \leq 0$) permite demonstrar que *também no intervalo fechado* $(\alpha-d, x_0)$ é $u(x) \equiv 0$ e que, por conseguinte, as (9) são válidas em todo o intervalo $(\alpha-d, \alpha+d)$.

Nota. No meu trabalho, citado a págs. 6, considera-se o caso mais geral em que às m componentes $\varphi_i(x)$ da solução a determinar se atribuem «a priori» os m valores iniciais $c_1, c_2, \cdots, c_m$ em m pontos $x_1, x_2, \cdots, x_m$, *todos distintos ou não.* Demonstrei que uma condição suficiente para que a solução procurada exista e seja única é que às condições atrás citadas I, II, (convenientemente modificada), III e IV se junte a condição: V — O número d satisfaz ainda à limitação $2\,Lm\,d<1$.

Com esta nova condição, a demonstração da unicidade da solução $\{\varphi_i(x)\}$ correspondente simplifica-se extraordinàriamente. Com efeito, se fizermos $M_k = \max|\varphi_k(x) - \Psi_k(x)|$ em $(\alpha-d, \alpha+d)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ poderemos escrever, a partir das (5) $\left[\text{onde em vez de } \int_{x_0}^{x} \text{ deve então pôr-se } \int_{x_i}^{x}\right]$,

$$|\varphi_i(x) - \Psi_i(x)| \leq L\left(\sum_{k=1}^{m} M_k\right)|x - x_i| \leq 2\,L\,d\left(\sum_{k=1}^{m} M_k\right)$$

e portanto também

(10) $$M_i \leq 2\,L\,d\left(\sum_{k=1}^{m} M_k\right) \quad (i=1,2,\cdots,m)$$

Adicionando membro a membro as m desigualdades (10), resulta $\sum_{i=1}^{m} M_i \leq 2\,L\,m\,d\left(\sum_{k=1}^{m} M_k\right)$ e portanto, quando se tenha $2\,L\,m\,d<1$, $\sum_{i=1}^{m} M_i = 0$ isto é $M_i = 0$ $(i=1,2,\cdots,m)$ e isto significa que se terão as (9).

Roma, Novembro de 1944.

PEDAGOGIA

A GEOMETRIA DEMONSTRATIVA NO ENSINO LICEAL

por ***António Nicodemos Pereira***

Na leitura de livros modernos sôbre a pedagogia da Matemática, é freqüente encontrarmos referências à geometria intuïtiva e experimental e à geometria demonstrativa.

Segundo creio, foi na reforma de programas do ensino secundário, em 1918, que entre nós, pela primeira vez, em linguagem oficial, houve referências à geometria intuïtiva e experimental e ao método de laboratório.

Na reforma de 1918, houve uma inovação brilhante e notável no estudo da geometria que foi dividido em dois ciclos.

No 1.º ciclo, constituído pela 1.ª e 2.ª classes, a geometria plana e no espaço devia ser «estudada intuïtiva e experimentalmente e introduzido o método de laboratório», conforme aconselhavam as instruções pedagógicas que acompanhavam o programa.

No 2.º ciclo, constituído pela 3.ª, 4.ª e 5.ª classes, era retomado o estudo da geometria, começando a 3.ª classe por uma «revisão, sob um ponto de vista mais ordenado das propriedades estudadas na 1.ª classe» (Geometria plana). A 4.ª classe começava também por revisões da 2.ª classe (Geometria no espaço), segundo o mesmo critério.

Ainda, quanto ao 2.º ciclo, as instruções pedagógicas aconselhavam: «o professor recorrerá judiciosamente, à intuïção e à experiência sempre que o julgue necessário».

As alterações a êste programa, nas muitas reformas que tem sofrido o ensino liceal, desde então, ou foram incaracterísticas ou más.

Os pedagogísticos da Matemática, quando se referem à geometria intuïtiva e experimental, não excluem a dedução, reduzida a inferências estabelecidas a partir de propriedades verificadas intuïtiva ou experimentalmente e, quando se referem à geometria demonstrativa, não excluem o apêlo à intuïção e à experiência. Querem apenas significar que o carácter intuïtivo e experimental ou dedutivo do estudo da geometria deverá ser mais ou menos acentuado.

Assim o entendeu Westuway e Breslich entre tantos outros notáveis pedagogistas da Matemática. Assim o entendeu, em 1918, a comissão de professores que organizou os programas de geometria, mostrando que conhecia up-to-date a moderna didáctica da Matemática.

Interessa-nos agora, em especial, o estudo da geometria demonstrativa. O objectivo da geometria demonstrativa no ensino liceal é principalmente dar ao aluno a prática do raciocínio lógico e não convencê-lo de que determinadas propriedades das figuras geométricas são verdadeiras.

Não tem pequeno trabalho nem revela pouca habilidade, o professor que faz criar no espírito dos seus alunos do 2.º ciclo, a necessidade de demonstração da maioria dos teoremas da geometria no espaço, sobretudo aquêles que se referem a posições de rectas e de planos entre si, por quanto os alunos têem a tendência de os considerar quási todos como evidentes.

Como orientar o estudo da geometria demonstrativa?

Segundo a orientação indicada em muitos compêndios destinados às escolas de ensino médio de vários países (Itália, França, Inglaterra, América do Norte, etc.), isto é, mais ou menos rigorosamente dedutivo, com mais ou menos apelo à intuïção e à experiência?

É esta a orientação clássica do ensino da geometria. É a orientação mais próxima da de Euclides e que tem a tradição de muitos séculos.

Grandes nomes nas ciências matemáticas, alguns actuais, tem escrito compêndios destinados ao ensino assim orientado.

O aluno assiste dêste modo «à construção, pedra por pedra, do mais belo edifício erguido pelo espírito humano e, embora não atinja andares elevados toma conhecimento do modo como o edifício foi construído e da unidade que possue».

Apesar destas e de outras razões que possam ser invocadas a favor da orientação clássica do estudo da geometria demonstrativa, nas escolas de ensino médio, há pedagogistas da Matemática que a rejeitam.

Breslich nos seus dois notáveis livros *The technique of teaching secondary school mathematics* e *Problems in teachnig secondary school mathematics*, critica a orientação clássica no ensino da geometria demonstrativa (logical organization) porque, nessa orientação, muitas vezes, a psicologia do adolescente é sacrificada. Em muito pouco contam as dificuldades que êle encontrará no decurso do estudo.

Pouco importa que o aluno passe abruptamente de um assunto mais fácil ao mais difícil ou vice-versa.

Além disso, o estudo dispersa-se por minúcias isoladas e os assuntos são estudados sem que importe a sua conexão com outros assuntos e sem que se atenda à contribuïção de cada um dêles para um todo.

Breslich, nos seus livros já citados, indica outros modos de orientar o estudo da Geometria demonstrativa (topical organization, unitary organization, etc.).

Uma vez que rejeitamos a orientação clássica no estudo da geometria demonstrativa, surgem múltiplas possibilidades de novas orientações nesse estudo.

Vamos esboçar, como exemplificação, um plano de estudo da geometria demonstrativa.

Neste plano de estudo, o curso da geometria demonstrativa seria iniciado por uma revisão das idéias adquiridas pelo aluno no seu estudo da geometria intuïtiva e experimental.

Essa revisão pode ser feita de vários modos e tendente a vários objectivos.

Suponhamos que fixavamos os seguintes objectivos:

a) Enunciar, sob forma sintética e condicional, as propriedades das figuras geométricas, já conhecidas do aluno.

Por exemplo, o aluno já sabe, por intuïção ou por ter verificado experimentalmente, que os ângulos verticalmente opostos são iguais. Quando o aluno se refere a esta propriedade, geralmente, dirá: os ângulos verticalmente opostos são iguais.

Pretende-se habituar o aluno a referir-se a esta propriedade enunciada sob forma condicional:

Se dois ângulos são verticalmente opostos, êsses ângulos são iguais.

b) Discriminar a hipótese e a tese de um teorema.

Aproveitando a forma condicional dos teoremas e dividindo-a em orações (orações condicional e principal, com as suas subordinadas) será fácil a decomposição do teorema em hipótese e tese e a sua correspondência com a figura que ao teorema diz respeito.

c) Entendimento da locução, condição necessária e condição suficiente, em substituïção da hipótese e da tese de um teorema.

d) Enunciado de teoremas recíprocos, devendo utilizar-se sòmente aquêles que o aluno já verificou serem verdadeiros.

Cumprida esta primeira parte do plano que estamos a estabelecer, no que ocupariamos cinco ou seis lições, tinhamos procedido ao renovamento das idéias adquiridas pelos alunos na geometria intuïtiva e experimental e preparado os alunos para a leitura do seu compêndio.

É oportuno dizer que há pedagogistas da Matemática que rejeitam o uso de compêndios pelo aluno na escola secundária, mesmo no estudo da geometria demonstrativa e preconizam o emprêgo do syllabus method (ver Breslich nos livros já citados). Adoptar-se o syllabus method outra terá que ser a orientação no estudo da geometria demonstrativa.

A revisão da geometria intuïtiva e experimental podia ainda ser aproveitada para constituir grupos de propriedades das figuras geométricas com o fim de as utilizar na justificação das fases da demonstração dos teoremas, isto é, listas das propriedades que se referem às condições de igualdade de segmentos da recta, igualdade de ângulos, paralelismo de duas rectas, etc.

É certo que essas listas poderiam ser constituïdas à medida que se encontrasse necessidade da propriedade considerada na demonstração do teorema, mas julgo que nada impediria que começassem a ser organizadas quando da revisão da geòmetria intuïtiva e experimental, embora fôssem depois sucessivamente acrescentadas.

Exemplificaremos a organização de uma dessas listas com propriedades utilizadas para justificar a igualdade de dois ângulos porque a ela nos referiremos mais adiante.

Dois ângulos podem ser iguais por serem:

Complementos de ângulos iguais

Suplementos de ângulos iguais

Verticalmente opostos.

Opostos a lados iguais de triângulos iguais correspondentes, alternos-internos ou alternos-externos, formados por duas paralelas interceptadas por uma secante, de lados perpendiculares e da mesma espécie.

Preparado o aluno dêste modo para entrar no estudo da geometria demonstrativa, os assuntos seriam agrupados, não relativamente às figuras a estudar, mas tendo em vista conceitos ou métodos gerais: igualdade geométrica, proporcionalidade, lugar geométrico, semelhança, método de redução ao absurdo, translação, etc.

É evidente que a mesma figura geométrica poderá pertencer a vários agrupamentos e subordinados ao mesmo conceito poderemos constituir mais de um agrupamento.

Uma vez escolhido o conceito que servirá de directriz no estudo a prosseguir, há que constituir a lista das propriedades da geometria intuïtiva e experimental que serão tomadas por iniciais e a partir das quais outras propriedades serão estabelecidas por processos de demonstração.

Para melhor esclarecimento do que acabamos de dizer, vamos considerar um dos conceitos atraz indicados, por exemplo, o de proporcionalidade.

Suponhamos que o aluno está de posse das idéias seguintes, adquiridas no seu estudo da geometria intuïtiva e experimental:

Conceito de proporcionalidade de duas grandezas.

Na mesma circunferência a ângulos ao centro iguais, correspondem arcos iguais. Dois triângulos que têem dois ângulos iguais têm os lados homólogos proporcionais.

Área do círculo.

Lista das condições em que dois ângulos podem ser iguais e a que já nos referimos anteriormente.

A partir dêste conjunto de idéias, tomado como inicial, podiamos estudar em geometria demonstrativa, isto é, por processos dedutivos, o seguinte agrupamento de teoremas:

Na mesma circunferência, os ângulos ao centro são proporcionais aos arcos correspondentes.

Num triângulo rectângulo a altura relativa a hipotenusa é meia proporcional aos dois segmentos que ela determina na hipotenusa.

A bissectriz do ângulo interno de um triângulo divide o lado oposto em dois segmentos aditivos directamente proporcionais aos lados adjacentes.

As áreas de dois circulos são proporcionais aos quadrados dos raios.

Muitos outros teoremas poderiam fazer parte dêste agrupamento, dependendo apenas das propriedades estudadas na geometria intuïtiva e experimental, tomadas como iniciais.

Se quisermos estudar simultâneamente a geometria plana e a geometria no espaço, (fusionismo) alargar-se-ia consideràvelmente o agrupamento de teoremas a constituir.

Quando um agrupamento, como êste, relativo ao conceito de proporcionalidade, se pode tornar muito grande, é conveniente cindi-lo em outros menores e estudá-los depois de os interpolar com o estudo de outros agrupamentos com os quais esteja em conexão.

Como vemos, na exemplificação que acabamos de fazer, no estudo de um agrupamento de teoremas, o aluno pode ser informado, no comêço do estudo, do caminho e do objectivo que nêle vai prosseguir. Os teoremas não lhe aparecem como se saltassem de uma boceta mágica.

Além disso a geometria intuïtiva e experimental e a geometria demonstrativa coordenam-se mais perfeitamente e torna-se muito fácil aumentar o programa de estudo, havendo até possibilidade de iniciar os alunos, embora cautelosamente, nos primeiros princípios da chamada «geometria pura».

É certo que o estudo da geometria demonstrativa, como acabamos de esboçar, apresenta graves dificuldades, quer no bom condicionamento dos assuntos ou figuras, quer na organização da lista das propriedades já estudadas na geometria intuïtiva e experimental e que deverão ser tomadas como iniciais no estudo de cada agrupamento de teoremas.

Acresce ainda que algumas das propriedades das figuras geométricas que foram estabelecidas por métodos experimentais convém que sejam estabelecidas por métodos demonstrativos para que se aproveite o interêsse que o mesmo assunto desperta no aluno quando tratado por modos diferentes.

Muitos outros planos de estudo da geometria demonstrativa poderiam ser estabelecidos, uma vez abandonada a orientação clássica da geometria.

Mas, porque o aluno não é uma cobaia de experiência há que ser prudente e cauteloso.

Há que dirigir inquéritos à experiência dos professores e também à experiência dos alunos; há que convidar os professores a estabelecer planos de estudos e a debatê-los largamente.

Há professores — eu conheço uma boa meia dúzia dêles — que muito poderiam contribuir com a sua experiência e o seu saber para elucidar os problemas da pedagogia da Matemática.

À sua crítica submeto o plano que esbocei neste artigo.

A Comissão Pedagogica da Sociedade Portuguesa de Matemática no projecto de programa de Matemática para o ensino secundário, apresentado à Assembleia Geral da Sociedade sugeria que «alguns liceus, por exemplo, os liceus onde se realizam os estágios ou outros que as estâncias superiores determinassem, deveriam ter autorização para ensaiar novos métodos e alterar os programas, segundo plano prèviamente estabelecido. Êsses liceus deveriam depois publicar um relatório das experiências que tivessem realizado e sôbre o qual incidiria a livre discussão de tôdas as pessoas a quem o assunto interessasse».

Se o homem ocupa o mais alto lugar na escala zoológica é porque tem sabido recorrer à experiência alheia. Há, com efeito, que ensaiar e experimentar em Pedagogia. Há que submeter as idéias à crítica de todos. Só assim é que pode haver progresso. As grandes certezas actualmente estão a passar de moda.

SOBRE O TREINO DE ESTUDO DOS NOSSOS PROFESSORES

(Resumo do artigo com êste título, «Gazeta de Matemática» n.º 19 *)

por **Hugo Ribeiro** (bolseiro em Zürich do I. A. C.)

As causas de «certos hábitos e vícios de raciocínio», «nas provas de muitos candidatos» (a exames de aptidão ao I. S. C. E. F.) «que, no entanto, mostram não ser totalmente desprovidos de aptidões» residem num meio social propício e parece actuarem neste momento com maior agudeza. A *diversidade* e a *interdependência* de tais causas não devem entravar o *estudo* de *cada uma* delas nem *a acção* progressiva sôbre cada uma delas: pelo contrário é por êste *estudo* e *esta acção* que poderemos *desde já começar*. É *isolada* uma *especial* causa *próxima*, *provàvelmente* decisiva: a normal, oficial, insuficiência no treino de estudo dos nossos professores de Matemática; e são dadas algumas primeiras indicações sôbre esta insuficiência. Pregunta-se se esta situação não assenta no florescimento, entre nós, dum *êrro de princípio* sôbre a idéia do que sejam os estudos matemáticos — uma idéia degenerada num horizonte limitado (*incompatível com o ensino a futuros professores*) pelos objectivos das aplicações a certas técnicas. A *freqüência de seminários* dos mais diversos níveis, junta a *uma preparação complementar* para os actuais professores constituíria o remédio para *êsse especial motivo.*

Zürich 1945, Maio, 27

* Julgo que seria útil explicar o estado actual («Gazeta de Matemática», n.º 23) do «debate» no qual, com êste artigo, pensei dever intervir. Por outro lado afigura-se-me que, *neste início* da discussão, já se acumularam, a par de observações de interêsse, simples opiniões insuficientemente explicadas, confusões de problemas, contradições, incompreensões e preocupações distintas em número bastante para que não me seja aconselhável a trabalhosa tarefa de escrever, agora, uma análise detalhada, análise que um leitor *atento* poderá fazer (ler seguidamente «Gazeta de Matemática», n.os 17, 18, 19, 21, 23). Aliás a publicação de uma tal análise traria o risco de provocar, neste momento, novas incompreensões. Creio, por isto, preferível limitar-me a explicar, a algum leitor menos avisado, *o que de mais urgente* se relaciona com o meu artigo: Em primeiro lugar publicando um resumo autêntico dêle. Em segundo lugar declarando expressamente: 1.º que *nesse artigo* tive já o cuidado *expresso* de *não* pôr em dúvida a «dedicação» como norma na classe dos nossos professores (dos esclarecidos observadores do desenvolvimento da nossa Cultura, em especial da nossa cultura matemática, são bem conhecidas numerosas razões que puderam mover-me a recordar a existência dum *exemplo* de desinterêsse, dedicação e entusiasmo *excepcionais*); 2.º que não me aproximei de algum conceito de «competência profissional» mais do que aquilo a que as interrogações e o próprio título do meu artigo necessàriamente me levavam: os problemas enunciados conduziam precisamente a *pôr o problema do estudo desta noção* no caso especial dos professores de Matemática (a qual noção não é, sem mais, axiomatisável — seja ou não favoràvelmente à norma na classe dos nossos professores).

PONTOS DOS EXAMES DE ADMISSÃO AO ESTÁGIO DO 8.º GRUPO NO LICEU DE PEDRO NUNES DE LISBOA

Ano lectivo de 1938-1939

História das matemáticas: — História e importância das aplicações da álgebra à geometria. Viète e Descartes.

Física e Química: — Efeitos da corrente eléctrica.

Álgebra e Geometria Analítica: — *a)* Determine as condições a que devem satisfazer os valores de x para que verifiquem a desigualdade

$$\frac{x^4+x^3-24\,x^2+7\,x+55}{x^3-8\,x^2+7\,x}>1\,.$$

b) Fixando sôbre o eixo das ordenadas um ponto A à distância a da origem O marque-se arbitràriamente sôbre o eixo das abscissas um ponto M e tire-se por êste, uma perpendicular à recta AM que cortará o eixo das ordenadas num ponto N. Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo vértice P' do rectângulo construído sôbre os segmentos $\overline{OM}$ e $\overline{ON}$ quando o ponto M se desloca sôbre o eixo das abscissas.

Trigonometria e Geometria Sintética: — *a)* Resolva o triângulo de que se conhece um lado, o ângulo oposto e a soma dos outros dois lados. Condição de possibilidade. *b)* Seccione uma esfera de raio r e diâmetro $\overline{SS'}$ por um plano perpendicular a êsse diâmetro e situado à distância x do ponto S. Seja $[c]$ a secção obtida e V e V' os volumes dos cones de base $[c]$ e vértices S e S'. Calcule a razão y entre $(V+V')$ e o volume da esfera e estude a variação de y em função de x.

Ano lectivo de 1943-1944

História das matemáticas: — História e importância da lei da atracção universal.

Física e Química: — Movimento curvilíneo. Fôrça centrífuga.

Álgebra e Geometria Analítica: — *a)* Determine em função de m os coeficientes do trinómio do 2.º grau que toma os valores: -1 para $x=-1$; α para $x=\beta$ e β para $x=\alpha$, sendo -1, α, β as raízes da equação: $x^3+(m-1)\,x+m=0$. *b)* Determine o lugar geométrico dos pontos M que dividem cada um dos segmentos $\overline{PQ}$ traçados do ponto $P(0,2)$ para a curva $x^2-2y^2=10$ em dois segmentos $\overline{PM}$ e $\overline{MQ}$ tais que $\overline{PM}/\overline{MQ}=1/2$.

Trigonometria e Geometria Sintética: — *a)* Considere o paralelipípedo rectângulo de bases $[ABCD]$ e $[EFGH]$ e centro 0. Sejam M, N, P os centros das 3 faces concorrentes no mesmo vértice.

1) Indique as medidas das faces e dos diedros do triedro $OMPQ$. Justifique. 2) Conhecida a aresta $\overline{AE}=a$ e a diagonal $\overline{BD}=d$: determine o seno do ângulo α das diagonais $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ de modo que a pirâmide $[EABD]$ tenha um volume dado V.

b) São dados dois eixos rectangulares OX e OY e o ponto A sôbre OX de abscissa a. Por A trace duas rectas AM e AP que cortem o semi-eixo positivo OY em dois pontos M e P tais que $O\widehat{A}M=O\widehat{P}A$. Determine a medida dêste ângulo de modo que $\overline{AM}+\overline{AP}=c$. Condições de possibilidade do problema. Caso particular de $c=2\,a\,\sqrt{6}$.

ANTOLOGIA

ASPECTS ACTUELS DE LA PENSÉE MATHÉMATIQUE *

par **A. Denjoy**

....

La science est un phénomène social qu'il n'est pas possible d'isoler et dont les caractères, à chaque époque déterminée, reflètent les conditions générales de la civilisation où elle se développe: conditions de la vie spirituelle et imaginative s'exprimant dans les arts et les lettres, et même conditions économiques, et politiques, influençant toutes les autres.

Depuis la guerre mondiale de 1914-1918, la production mathématique a cru en intensité dans de très fortes proportions. Le fait a été moins sensible dans les régions appartenant à des pays constitués avant 1914 que dans celles dont les nouveaux États ont été formés. Dans ces derniers, un nationalisme très vif, mais de la nature la plus louable, a poussé les gouvernements et les peuples à la fondation de nombreuses universités dont le personnel professoral s'est pris d'une très noble émulation pour rivaliser avec les représentants des écoles mathématiques étrangères les plus réputées, et pour tenter, souvent avec succès, de les surpasser.

* Conferência inaugural da Reünião Internacional das Matemáticas em Paris promovida pela Sociedade Matemática de França em Julho de 1937.

La science a vu son prestige sortir grandi de la guerre. C'est une amère constatation à faire. Mais les splendides bienfaits qu'auparavant elle avait généreusement dispensés aux hommes les avaient beaucoup moins touchés et émus que n'ont fait les ruines et les désastres répandus à profusion entre les peuples de l'Europe par la technique issue des sciences. L'humanité, indifférente et dédaigneuse à l'égard de la science utile et secourable, a été saisie de considération et de respect devant la science génératrice d'effets terribles et néfastes.

Indépendamment de toute attente de satisfactions à l'amour-propre national dans la compétition perpétuellement ouverte entre les savants des divers pays, les peuples ou leurs chefs qualifiés ont compris que, non seulement dans la guerre industrielle constamment déclarée sur le terrain économique, mais aussi dans la guerre des armes dont l'éventualité ne cesse d'être une menace suspendue sur tout l'univers, l'existence d'un haut potentiel scientifique intérieur est indispensable à la sécurité d'un État.

L'organisation de la recherche scientifique a été développée ou créée dans de nombreux pays. En mathématiques elle s'est accomplie par la simple augmentation numérique du personnel occupé à cet objet. La multiplication des emplois universitaires, principalement des postes subalternes ou auxiliaires, a permis de donner des moyens d'existence à des hommes particulièrement bien doués et avides de consacrer leurs loisirs à la découverte. Mais il s'agit ici d'émoluments accordés en balance avec l'accomplissement réciproque d'une prestation matérialisée sous forme concrète. Ce qui au contraire a innové, c'est la conception de la recherche scientifique regardée comme un service public indépendant, justifiant par son seul objet et sans avoir besoin de se compléter par l'exercice d'un emploi défini, le concours financier de l'État.

De son côté l'initiative privée a multiplié les bourses et subventions.

Quels que soient les moyens mis en œuvre, on peut voir dans ces diverses mesures l'aplication à la recherche scientifique des méthodes intensives utilisées depuis la guerre dans tout le domaine économique. Pour la science aussi, le résultat des larges octrois de crédit a été une sorte d'inflation des produits mis en circulation. Mais comme ceux-ci ne font l'objet d'aucun marché, aucune dépréciation des quantités offertes n'a provoqué aucune crise.

. . . .

Des esprits naturellement fertiles sont artificiellement maintenus dans un état de stérilité par l'astreinte à des besognes serves, sous l'empire des nécessités alimentaires. Qu'une occasion fortuite, ou résultant d'une décision délibérée, les allège de cette chaîne, et ces intelligences, se fécondant par l'exercice de la méditation poursuivie à loisir, conçoivent et enfantent des idées nouvelles.

*

Par quels effets s'est manifesté cet accroissement considérable du personel consacré à la recherche scientifique dans le monde?

Dans maint domaine des mathématiques, le sol a été fouillé, tourné, retourné, avec une minutie, une pénétration dont il n'existait, je crois, guère d'exemples avant la guerre. Autrefois, des chercheurs isolés s'attachaient à découvrir dans les ordres de questions choisis par eux, quelques faits capitaux éclairant la nature des phénomènes et dévoilant les notions fondamentales dans la catégorie étudiée. Leur investigation s'arrêtait à la détermination de ces points culminants, de ces carrefours, fixant la topographie et la circulation des idées dans cette région du nombre. Le plus souvent la carte de celle-ci était tenue dès lors pour suffisamment établie. Les voies permettant d'approcher utilement tout lieu de ce territoire étaient regardées comme assez nettement définies par cette information élective. La connaissance détaillée du domaine n'éveillait pas de curiosité plus exigeante.

C'est une sorte d'organisation du travail par équipe avec la division correspondante de la tâche, que l'on croit observer dans maint pays, même dans ceux dont l'esprit obstinément individualiste semblait le plus réfractaire à cette méthode. Ici la science paraît encore modeler les procédés de son activité sur ceux de l'industrie, où progressivement l'entreprise conçue et menée par un seul disparaît devant la grande concentration, anonyme et collective, des ressources, de l'outillage et des initiatives. L'art et la littérature, où non seulement l'inspiration, mais aussi la réalisation formelle de l'œuvre, gardent irréductiblement un caractère personnel, subjectif, indivisible, s'adaptent moins aisément aux nouvelles conditions de la vie sociale de l'humanité. Le parallélisme si souvent observé jusqu'ici entre les attitudes et les dispositions des esprits à l'égard de l'invention créatrice dans les divers ordres ne manquerait pas de s'arrêter si l'individualisme venait à ne pas recouvrer des droits suffisants.

Quels sont les chapitres des Mathématiques où les efforts de la recherche se sont portés avec le plus d'intensité depuis vingt ans? Quelle est l'étendue des découvertes et quel degré d'intérêt présentent-elles? Essayons de répondre très succinctement à ces questions.

La fonction harmonique, qui, à l'intérieur de toute région comprise dans son domaine de définition et limitée par une courbe plane ou par une variété homéomorphe à la surface d'une sphère, d'une hypersphère, réalise entre les valeurs prises par cette fonction sur la frontière de la région, une liaison étendant de la façon la plus simple la fonction linéaire d'une variable, la fonction harmonique joue dans l'Analyse un rôle capital que les applications à la Physique ne cessent pas de souligner.

Dans le plan, la théorie des fonctions harmoniques peut servir de base ou au contraire de complément, selon que l'on adopte la conception de Riemann ou celle de Cauchy, à la théorie des fonctions d'une variable complexe. De ce point de vue, aussi bien que pour répondre au besoin d'expliquer les propriétés des fonctions d'une variable réelle développable en série de Taylor, l'intérêt de la théorie des fonctions d'une variable complexe ne saurait être exagéré, ni pour le présent, ni pour l'avenir. Dans ce domaine, constamment cultivé depuis un siècle, mais avec des méthodes qui après Cauchy et Weierstrass n'avaient plus été sensiblement perfectionnées, la transformation et le progrès des connaissances ont été vraiment prodigieux depuis la guerre.

C'est principalement l'étude de la fonction uniforme autour d'un point singulier essentiel isolé, ou dans un cercle d'holomorphie, qui a été approfondie au point de fournir dans bien des cas la marge numérique exacte de variation possible d'une fonction analytique vérifiant des conditions données. Dans un domaine où beaucoup des meilleurs analystes du temps présent ont donné leur mesure, il serait téméraire de prétendre citer des noms sans s'exposer à de graves omissions. Il semble toutefois équitable d'énumérer, parmi les puissantes méthodes nouvelles auxquelles ont été dus les principaux progrès accomplis: l'introduction de la fonction caractéristique de R. Nevanlinna, l'emploi avec P. Montel des familles normales après un retour à la fonction modulaire d'où M. Picard avait jadis tiré le germe de toutes ces théories, enfin la représentation conforme si efficacement utilisée par Carleman et Ahlfors.

L'étude conjuguée des valeurs prises par les fonctions des sortes indiquées et de l'ensemble des points où ces fonctions prennent ces valeurs, est à proprement parler l'examen de la fonction inverse. On sait par un théorème célèbre de Poincaré, que la fonction analytique la plus générale est une fonction uniforme d'une fonction inverse de fonction uniforme.

Les recherches de Painlevé sur les équations différentielles à points critiques fixes se heurtaient à de grandes difficultés provenant de l'insuffisance, à leur époque, de la théorie générale des singularités des fonctions uniformes. Il serait intéressant que cette dernière théorie réalisât, dans le cas le plus étendu, des progrès comparables à ceux qu'elle a effectués dans les deux cas restreints principalement étudiés jusqu'ici. Le problème de Painlevé offre à la théorie des fonctions de variable complexe l'une des plus belles applications qu'elle puisse envisager. Il conviendrait à l'exemple de M. Garnier et plus lointainement de M. Chazy, de continuer dans cette direction l'œuvre du glorieux savant qui a si hautement honoré la Faculté des Sciences de Paris.

Les séries trigonométriques sont à l'origine des notions précises modernes sur la convergence des suites, la continuité des fonctions, leur dérivabilité distinguée de la continuité, l'intégration. L'analyse a dû changer de caractère, détacher sous le nom de Théorie des fonctions de variables réelles l'un de ses plus importants rameaux, pour pouvoir envelopper le plein épanouissement des phénomènes numériques présentés par les séries trigonométriques. Celles-ci offrent encore cet intérêt de définir une fonction harmonique à l'intérieur d'un cercle par ses valeurs limites aux extrémités des divers rayons, et les séries trigonométriques peuvent prétendre bénéficier à ce titre de l'importance attachée aux fonctions harmoniques dans l'Analyse.

Il serait toutefois permis de douter que l'immense production consacrée dans ces dernières années à cette forme de développement numérique ne dépassât pas nettement la portée des enseignements généraux que nous pouvons attendre des résultats obtenus, si les séries trigonométriques ne servaient pas d'introduction aux séries de fonctions orthogonales dont l'intérêt ne cesse aujourd'hui de croître.

L'étude des fonctions de Baire, des ensembles boréliens et analytiques, et même des fonctions et ensembles plus généraux, a été poussée par l'école polonaise et certains membres de l'école de Moscou, à un degré de profondeur et de généralité qui confond l'esprit d'admiration. On aime penser que si cette classe de travaux venait à être brusquement suspendue, les résultats déjà acquis permettaient pendant un siècle de répondre par oui ou par non à toutes les questions qui, dans les diverses branches des mathématiques, se poseront touchant la distinction du possible et de l'impossible dans la nature des fonctions introduites par les problèmes de l'Analyse.

Une autre section que son énorme développement depuis vingt ans range également parmi les sciences presque neuves, est la Topologie. Celle des espaces euclidiens existait déjà dans quelques-unes de ses idées fondamentales. Son intervention est indispensable, et elle le sera toujours davantage, dans l'étude qualitative des trajectoires réelles et des surfaces intégrales définies par les équations différentielles ou aux dérivées partielles. La mécanique analytique de Birkhoff qui, avec ses problèmes sur la transitivité, les caractères des systèmes ergodiques, attire tant de chercheurs, est évidemment tributaire de la topologie euclidienne dont les progrès ne sauraient être trop favorisés.

La topologie générale, de création plus récente que la première et où il est superflu de rappeler la part revenant à M. Fréchet, rend déjà des services à l'Analyse, ne serait-ce que dans les questions où interviennent une infinité de variables.

Enfin le calcul des probabilités a connu lui aussi un afflux de conceptions et de méthodes nouvelles qui ont grandement modifié et accru l'étendue de cette doctrine.

Les rubriques que j'ai citées, théorie des fonctions de variables complexes, séries trigonométriques, fonctions de Baire et ensembles cartésiens, topologie, calcul des probabilités, ne comprennent qu'une faible part des sujets abordés depuis vingt ans par les mathématiciens. Je les ai signalées parce qu'elles figurent néanmois, si je ne me trompe, les principales zones où les efforts concourants, sans être nécessairement concertés, de mathématiciens appartenant souvent à des pays très divers, se sont massivement portés.

Dans la plupart des autres domaines de notre science, la recherche a gardé son caractère individualiste, étant inspirée, à la façon romantique, par le besoin de trouver une explication et une cause à des faits observés par l'esprit, et non pas engagée pour obéir à l'émulation de l'exemple.

*

En mathématiques, et aussi pour l'ensemble des sciences dont la croissance depuis un siècle paraît s'amplifier à une allure de représentation exponentielle, l'esprit se sent menacé de submersion par cette marée montante de faits, de résultats et de notions. La somme des images qu'un cerveau humain peut conserver pour les utiliser éventuellement, les appeler à la lumière de la réflexion consciente, est évidemment limitée. La déperdition continuelle de celles qui s'effacent définitivement et disparaissent, finit par compenser et par dépasser l'apport des acquisitions nouvelles.

Le travail de réduction des connaissances de chaque ordre aux idées dominantes et à quelques idées satellites, à la stricte armature où s'attachent toutes les parties du corps d'une même doctrine, ce travail s'imposera si l'on veut pouvoir maintenir l'existence d'une culture générale, même limitée à la seule discipline mathématique. Le rôle de la critique assumant la charge de l'examen et de l'estimation des derniers travaux parus, ne cessera pas de grandir. Pour la synthèse organique des divers éléments de chaque théorie, c'est à l'épreuve de l'exposé didactique que les idées maîtresses s'ordonnent, se hiérarchisent et que la broussaille des faits secondaires, les branches mortes sont tranchées et élaguées, afin d'aérer et montrer à la vue les troncs vivaces qui forment la forêt nette et praticable.

Je suppose qu'à la fin de la Renaissance et au début du dix-septième siècle, les geomètres avaient la mémoire chargée des propriétés d'une foule de courbes remarquables, étudiées depuis l'antiquité, et pour chacune desquelles la construction des tangentes, les relations angulaires, segmentaires, les alignements rectilignes ou circulaires étaient révélés par des considérations et des règles propres à chaque cas. On devait pareillement savoir résoudre de nombreux types d'équations algébriques, chacun suivant un procédé adapté à l'espèce étudiée. La géométrie analytique, le calcul différentiel, ramenant cette vaste diversité à un canon unique, ont fait progressivement tomber dans l'inattention et dans l'oubli cette riche collection de recettes et d'ingénieux artifices.

Il convient d'admettre que, parallèlement à cette prolifération redoutablement accélérée se manifestant sur les rameaux de l'arbre mathématique, de puissantes conceptions générales s'élaborent qui, fournissant des explications synthétiques immédiates, frappent d'une marque d'inutilité et vouent à un abandon inévitable, les causalités circonstancielles antérieurement invoquées.

On ne peut pas tous les jours découvrir une géométrie cartésienne, un calcul infinitésimal, une théorie des ensembles pour lancer la faux dans les herbages sans vitalité et féconder le sol qui les portait avec de vastes terrains alentour.

Mais l'inévitable semble bien être que, l'ensemble des points extrêmes de la connaissance s'éloignant toujours davantage, le champ accessible à une même intelligence humaine sera de plus en plus étroit, les connexions avec les champs voisins seront de plus en plus ignorées. Les raisons des techniques les plus perfectionnées et dont maints détails seront fondés sur la science la plus récente deviendront de moins en moins familières aux hommes chargés de les utiliser. Qu'une catastrophe, de nature politique ou autre, fasse rejeter comme un odieux fardeau le souci de la culture intellectuelle, et l'humanité deviendra pareille à ces espèces industrieuses figées qui, ayant atteint l'extrême limite de leur faculté de création et perdu la trace des voies suivies par leurs individualités initiatrices, ne savent plus qu'indéfiniment répéter les mêmes gestes et réédifier les mêmes ouvrages selon de rigides normes gardant pour elles tout leur secret.

*

Sans nous arrêter à ces décourageantes anticipations, encore extrêmement lointaines n'en doutons pas, abordons un sujet bien digne d'attention, savoir l'examen des conditions les plus favorables où grandit et mûrit le génie des hommes dont les conceptions originales, presque soudainement surgies, portent la révolution dans une science déjá constituée, comme le firent Descartes et Leibniz pour nous en tenir à des exemples lointains et capitaux, ou en tirent une nouvelle du néant, comme Pascal quand il créa le calcul des probabilités.

Les meilleures de ces conditions sont aisées à énoncer: le loisir assuré, l'entière liberté laissée à l'esprit d'errer à sa guise aussi longtemps qu'il n'aura pas été irrésistiblement agrippé par un objet.

La science est un fruit social et l'organisation de la société retentit profondément sur l'évolution de la science. Si la transformation de l'ordre actuel se poursuit dans le sens où elle paraît tendre, il est peu probable que le libéralisme de l'État excède l'octroi à un jeune savant de quelques années de loisirs complets, mais avec l'obligation morale d'orienter normalement ses pensées vers un ordre de recherches déterminé. Ces facilités accordées sont grandes. Elles ne sont peut-être pas suffisantes à l'âge où la personnalité doit quêter autour d'elle les éléments qui lui donneront son caractère.

Au temps déjà presque révolu où un homme pouvait vivre du corps social sans être tenu de rien lui restituer en échange, les conditions que j'ai dites étaient realisées pour quelques privilégiés. Le rendement du système, avouons-le, n'était pas considérable. Il produisait surtout beaucoup de riches oisifs qui n'ajoutaient rien par eux-mêmes ni aux idées ni aux mœurs. Mais quand il favorisait une nature exceptionnellement douée, il inscrivait à son actif un succès inestimable.

Suivons un instant Descartes et Leibniz dans la période de leur existence qui, débutant au terme de leur adolescence studieuse, s'arrête au seuil de leur principale découverte mathématique.

Descartes, dont le Discours de la Méthode va être célébré cette année dans son troisième centenaire, était un propriétaire assez considérable du Poitou. Après avoir achevé ses études de droit, il quitte sa province, surtout pour garder la libre disposition de ses loisirs, que les obligations mondaines attachées à la position de sa famille n'auraient pas manqué de troubler. Il s'expatrie, s'efforce selon son expression d'approcher des hommes de toute condition, s'engage comme volontaire sans solde, pour voir la guerre. Et après dix ans de pérégrinations mal connues, il trouve son refuge en Holande, où, dans le parfait isolement rêvé par lui, il s'abandonne à ses méditations.

Leibniz fut amené aux mathématiques par ses conversations avec les géomètres parisiens au cours d'un séjour qu'il fit chez nous. Il amusait beaucoup ses interlocuteurs par ses inductions hâtives et les raisonnements boîteux dont il les étayait. Le rationalisme de sa philosophie se contentait d'une logique trop accommodante. Mais Leibniz aprit vite à corriger les intempérances de sa raison. De plus modestes exemples nous ont été donnés, depuis, de mathématiciens venus eux aussi de la philosophie et demeurés longtemps sujets à de fâcheuses défaillances de rigueur logique. Mais il faut reconnaître ce qu'une forte culture philosophique inspire irrévocablement à l'esprit, savoir l'ambition de monter aux sources de la causalité et l'aversion des problèmes d'object restreint. Le mathématicien et généralement le vrai savant s'effarent de la témérité du philosophe. Mais le souci de ne marcher qu'à pas assurés maintient peut-être trop obstinément les yeux baissés vers le sol et empêche le regard de se porter au loin.

Avec le fermier-général Lavoisier, créateur de la Chimie moderne, nous avons là l'exemple de trois hommes dont la prodigieuse originalité scientifique a pris son essor dans une existence affranchie de tout souci matériel et dont la pensée n'a jamais cessé d'être entièrement libre de choisir son objet et même de n'en choisir aucun. Aprés l'acquisition, au cours de la jeunesse, de connaissances générales dont subsiste plus tard dans le souvenir uniquement la collection de ces faits repères sur lesquels nos jugements s'appuient et dont ils doivent toujours respecter la donnée, l'esprit de ces hommes vagabonde sans loi ni contrainte, et c'est plus tard qu'enrichi de disciplines mentales forgées à mille expériences diverses dont les plus fugitives ne sont pas les moins pénétrantes, il revient avec des yeux reposés et frais vers cette doctrine dont seuls les éléments fondamentaux, indestructibles, sont demeurés en lui.

La chronologie des publications ne saurait rien prouver touchant l'ordre de gestation intime des idées essentielles de l'œuvre. Leibniz, Descartes, peut-être plus encore que Pascal, n'ont pas cessé depuis l'éveil de leur raison, d'être des philosophes. Le jour où leur esprit, mûri par les réflexions, pour la première fois depuis l'adolescence, rencontre les mathématiques, il trouve en elles d'abord une captivante diversion, puis un dressage aux habitudes de correction logique. Dès lors l'esprit de géométrie pénètre de sa solidité et de sa vigueur leurs conceptions philosophiques, en même temps que le goût des spéculations étendues à de vastes objets les détournent des horizons bornés pour les diriger vers les sommets commandant de vastes panoramas.

*

Après nous être inquiétés des moyens de susciter l'éclosion de grandes créations scientifiques, parlons enfin de l'orientation souhaitable des mathématiques.

Le profane n'imagine pas la mathématique autrement qu'un assemblage de chaînes déductives formées de théorèmes successifs. Il ne soupçonne pas que chez nous aussi la question se pose de porter des jugements de valeur. Si une rigueur logique hors de contestation est indispensable pour qu'un ouvrage puisse revendiquer une place en mathématiques, cette condition, obligatoirement remplie par les œuvres relevant de cette discipline, ne leur confère pas à toutes un rang égal. La hiérarchie adoptée ne sera pas indépendante du mathématicien appelé à la définir. Même si les qualités inventives de l'auteur sont pareillement appréciées de tous ses confrères, ceux-ci différeront habituellement d'avis, concernant le degré d'intérêt qu'il convient de prêter au sujet traité.

Les mathématiques sont l'honneur de l'esprit humain, a dit Jacobi. Aussi les mathématiques, comme l'honneur, ne sont-elles jamais trop pures aux yeux de quelques-uns. Il n'est cependant pas opposé à un véritable esprit philosophique de souhaiter que les mathématiques, loin de former un organisme sans connexion avec l'ensemble des autres connaissances humaines, se développent en relation d'homogénéité tout au moins avec les sciences les plus voisines d'elles et lui faisant le plus d'emprunts.

Les séries trigonométriques, situées à la source de toutes les notions fondamentales de l'Analyse moderne, ont été imposées par la Physique aux géomètres, qui se sont d'abord débattus de toutes leurs forces pour repousser loin d'eux ce cadeau pourtant sans prix. Les fonctions harmoniques, les équations différentielles ou aux dérivées partielles ont été suggérées à l'Analyse par la Physique, la Mécanique ou la Géometrie. Une catégorie mathématique joue un rôle d'autant plus important dans une théorie et elle brille de propriétés d'autant plus remarquables qu'elle offre un caractère davantage interthéorique, quand elle se présente aussi dans une seconde doctrine mathématique, ou même interscientifique, si une autre science que la mathématique en impose la considération.

Aussi peut-on raisonnablement soutenir que les équations de la Physique et de la Mécanique sont nécessairement une source de problèmes mathématiques de très vaste intérêt.

On me répondra que la Physique, l'Astronomie ont utilisé de la façon la plus adéquate qu'on eût pu souhaiter certaines théories mathématiques conçues dans la voie la plus éloignée de toute visée d'application. Il est vrai, mais on ne peut porter un jugement aussi favorable sur toutes les parties des mathématiques même parmi les plus anciennes. En réalité, le mathématicien doit posséder un don de discernement lui permettant de pressentir si les faits qu'il met en évidence dans une étude d'objet défini, seront ou non rencontrées également dans d'autres parties des mathématiques. Chaque analyste doit porter à tout instant sur son ouvrage un jugement de valeur. Un sens spécial doit l'avertir s'il crée du formel ou s'il découvre du réel.

....

MOVIMENTO MATEMÁTICO

ALGUNS ASPECTOS ACTUAIS DA MATEMÁTICA NA FÍSICA

Conforme foi anunciado no n.º 24 desta revista, um grupo de colaboradores do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto, realizou, de 23 de Maio a 2 de Junho p. p., no anfiteatro de Matemática da Faculdade de Ciências de Lisboa, a convite da Sociedade Portuguesa de Matemática, uma série de oito lições subordinadas ao título geral «Alguns Aspectos Actuais da Matemática na Física».

Ao aceitarmos êsse convite, o nosso objectivo foi, por um lado, mostrar como se torna impossível abordar o estudo de certos problemas de actualidade da Mecânica Clássica e da Mecânica Quântica sem pôr em jôgo as mais especializadas e as mais abstractas aquisições da Matemática no domínio da Álgebra, da Topologia e da Teoria da Medida. E, por outro lado, demonstrar, através de um exemplo concreto, como nos sentimos obrigados, pela própria natureza dos problemas a investigar, a um trabalho de équipe em que cada qual utiliza ao máximo os seus conhecimentos especializados, no desejo de contribuir para uma interpretação geral e tão completa quanto possível.

O trabalho de équipe aparece assim como uma condição essencial para o estudo eficiente de qualquer questão de grande generalidade, e, ao mesmo tempo, mantém o investigador em contacto permanente com os resultados que vão sendo obtidos por outros investigadores, no mesmo ou em diferentes domínios, dando-lhe tôdas as possibilidades de alargar a sua cultura, de maneira a ter uma visão de conjunto dos problemas em estudo no Centro de trabalho a que pertence.

Subordinando-nos a estas directrizes, resolvemos aproveitar da experiência adquirida nos trabalhos dêste Centro de Estudos para abordar, na Mecânica Quântica, a interpretação da espectroscopia atómica em termos da teoria das representações dos grupos abstractos e contínuos e a questão da compatibilidade das grandezas físicas em termos da teoria da medida, enquanto que, na Mecânica clássica, foi o problema ergódico que principalmente nos preocupou.

Damos a seguir uma referência mais detalhada dos pontos fundamentais das lições:

O Problema Ergódico

Na exposição realizada procurámos pôr em relêvo a importância fundamental das técnicas de medida à Borel e à Lebesgue na redução da antiga hipótese ergódica de Boltzmann à transitividade métrica.

Nessa redução, obtida através dos trabalhos de v. Neumann e de Birkhof aparecem: uma noção nova — a de automorfismo ergódico ou mètricamente transitivo — e um problema a analizar: o da posição dêste tipo particular de automorfismos no conjunto das transformações que conservam a medida. Relativamente a êste problema, mostrámos como os métodos topológicos tentam resolvê-lo, graças à introdução, no grupo dos automorfismos que conservam a medida, duma topologia em relação à qual é denso em todo o espaço, o conjunto dos automorfismos ergódicos.

Ainda no domínio da Mecânica Clássica, no estudo crítico das proposições experimentais que a essa ciência interessam, expusemos a interpretação de v. Neumann que faz corresponder, no espaço das fases, ao sistema dessas proposições a Álgebra cociente dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue-módulo conjuntos de medida nula.

Teoria da Medida e Mecânica Quântica

Começámos por mostrar que as variedades lineares fechadas geradas pelos elementos de um sistema ortonormado completo de um Espaço de Hilbert constituem uma estrutura ortocomplementada e distributiva e fixámos depois a nossa atenção sôbre a posição relativa das estruturas associadas aos elementos próprios de duas grandezas físicas A, B e verificámos que, dentro de cada uma delas, a projecção sôbre uma variedade se comporta como uma funcional não-negativa e modular.

Nestas condições se definirmos medida exterior e medida interior de uma variedade de uma daquelas estruturas a partir da funcional-projecção das variedades da outra (interpretada como uma medida) obtém-se o seguinte teorema fundamental: a condição necessária e suficiente para que as duas grandezas A e B sejam compatíveis é que as variedades da estrutura associada a A sejam mensuráveis com as variedades da estrutura associada a B e inversamente.

Quere dizer: grandezas compatíveis são grandezas comensuráveis.

Álgebras e Mecânica Quântica

Depois de algumas generalidades sôbre a equação de Schrödinger e seus grupos de invariância, tratámos especialmente o caso dum espectro descontínuo, no qual cada valor próprio da energia determina um espaço linear finito de funções próprias. Mostrámos que as representações da Quântica são unitárias, e, portanto, irredutíveis ou completamente redutíveis. Falámos da importância dos conceitos de redutibilidade e irredutibilidade e desenvolvemos a teoria das representações dos grupos contínuos, especialmente do grupo das rotações. A aplicação da série de Clebsch-Gordan à construção atómica e aos espectros dos hidrogenoides, as regras de selecção e de intensidade, o esquema vectorial de Neumann-Wigner (spin), etc., foram também focados. Pròpriamente sôbre as representações das álgebras, seguimos o método de E. Noether, dado no *Mathematische Zeitschrift,* e falámos dos resultados de Frobenius sôbre as representações dos grupos finitos, que aparecem inseridos naquêle método. Incidentalmente, demos alguns teoremas recentes relativos aos anéis com condições de cadeia (no sentido de Dedekind).

Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto

NOTICIÁRIO

Academia das Ciências de Lisboa

Num dos primeiros dias de Julho realizou, na Academia das Ciências de Lisboa, o Professor da Faculdade de Ciências e da Faculdade de Ciências Económicas de Madrid, Dr. O. Fernandez Baños, uma conferência onde expôs os resultados a que chegou sôbre a elasticidade em econometria.

Faculdade das Ciências de Coimbra

Na Universidade de Coimbra realizaram-se durante o mês de Junho as provas de doutoramento em Ciências Físico-Químicas do assistente da Faculdade de Ciências, José Luís Rodrigues Martins.

A dissertação «Da influência das fôrças de «spin» nas reacções entre partículas nucleares — Contribuïção para o estudo da espectroscopia nuclear» foi discutida pelos professores Dr. A. Cyrillo Soares da Universidade de Lisboa e Dr. Mário Silva da Universidade de Coimbra. Dos pontos — Teoria das valências orientadas — e — Ondas electromagnéticas; sua propagação. Teorema de Poyting. Estudo do campo de irradiação do dipolo de Hertz — foram argüentes respectivamente os Professores Drs. Couceiro da Costa e Mário Silva, da Universidade de Coimbra.

Instituto Superior de Ciências Económicas e Financeiras

Nos dias 25 e 26 de Junho tiveram lugar nêste Instituto as provas de doutoramento em Ciências Económicas e Financeiras do assistente João Remy Freire. A dissertação «Estudos de Demografia Portuguesa — 1.º ensaio» foi discutida pelos Professores Bento Caraça e Francisco Leite Pinto. As teses foram discutidas pelos Professores C. M. Beirão da Veiga e A. Marques Guedes.

MATEMÁTICAS ELEMENTARES

SÔBRE INEQUAÇÕES FRACCIONÁRIAS DO 1.º GRAU

por Raúl Rato

Estas inequações têem sido tratadas de formas muito variadas nos compêndios de Álgebra elementar. Serrasqueiro (1883) não as considera em especial; resolvendo $\frac{x-1}{x+3}>\frac{4}{5}$ acha $x>17$, o que é incompleto. A. J. da Cunha (1883) não as considera. Albuquerque (1898) desembaraça de denominador, tomando o quadrado, sempre positivo. Dias Agudo (1938) resolve-as com as hipóteses usuais na resolução das inequações fraccionárias do 2.º grau. Sequeira Ribeiro (*s/d.* prog. de 1936) faz considerações muito complicadas.

Ora estas inequações têm uma resolução muito simples, se aplicarmos o mesmo raciocínio que nos dá os valores de x que tornam o trinómio do 2.º grau positivo ou negativo, no caso das raízes reais e desiguais. Com efeito tôda a inequação fraccionária do 1.º grau pode reduzir-se à forma $f(x)>0$, ou $f(x)<0$, dando-se a $f(x)$ a expressão:

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}\times\frac{x+b/a}{x+d/c}$$

Mostra esta expressão que $f(x)$ será de sinal contrário a a/c para valores de x compreendidos no intervalo $(-b/a\,,\ -d/c)$ e do mesmo sinal de a/c para valores não compreendidos no mesmo intervalo.

Alguns exemplos tirados dos autores referidos:

Serrasqueiro: $\frac{x-1}{x+3}>\frac{4}{5}$.

Façamos $f(x)>0$ $\frac{x-1}{x+3}-\frac{4}{5}>0$ ou $\frac{1}{5}\times\frac{x-17}{x+3}>0$ o que dá a solução: $x>17$ ou $x<-3$, isto é, fora do intervalo $(17\,,\ -3)$.

Albuquerque: $\frac{1}{4}-\frac{5}{8x}<1+\frac{1}{x}$, $\frac{1}{4}-\frac{5}{8x}-1-\frac{1}{x}<0$ ou $\frac{-6x-13}{8x}<0$. Solução $x>0$ ou $x<-13/6$.

Sequeira Ribeiro: $\frac{x-1}{x+1}<1$, $\frac{x-1}{x+1}-1<0$, $\frac{-2}{x+1}<0$ ou $x>-1$.

Idem: $\frac{3x^2-4x}{x^2+3}<3$, $\frac{3x^2-4x}{x^2+3}-3<0$ ou $\frac{-4x-9}{x^2+3}<0$, $x>-\frac{4}{9}$.

Dias Agudo: $\frac{x+1}{x-3}>0$ dá imediatamente $x<-1$ ou $x>3$. Se fôsse $\frac{x+1}{x-3}<0$, seria $3>x>-1$.

EXAMES DE APTIDÃO ÀS ESCOLAS SUPERIORES (1944)

I. S. A. — 2.ª prova escrita — 24 de Outubro de 1944
Ponto n.º 3.

Nota — É obrigatório resolver quatro questões, entre as quais a primeira.

2036 — Na equação $2x^2+(p^2+2)\,x+2p^2-4=0$ determine p com a condição de a diferença entre as raízes ser igual à unidade.

2037 — Numa propriedade existem alguns cavalos, um número exacto de juntas de bois e porcos num total de 34 cabeças. Sabe-se que o tríplo do número de porcos é igual à soma de 5 vezes o número de bois com 3 vezes o número de cavalos. Determine o número de bois, de cavalos e de porcos.

2038 — Um diedro de $105°\ 11',4$ intersécta uma esfera cujo centro está situado sôbre a sua aresta. O plano perpendicular à aresta do diedro e passando pelo centro da esfera contém dois pontos situados à distância de 6,4567 metros um do outro, que pertencem simultâneamente à superfície da esfera e às faces do diedro. Calcule o raio da esfera.

2039 — Determine os valores de x, compreendidos entre π e 2π radianos, que satisfaçam à condição $\operatorname{sen}\left(4x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-2x\right)$.

2040 — Determine o volume do sólido gerado pelo hexágono regular inscrito, quando roda em tôrno de uma diagonal que passa pelo centro, em função do do raio do círculo circunscrito.

2041 — Demonstre que se duas secantes se cortam no ponto de contacto de duas circunferências tangentes, as cordas que unem as suas extremidades são paralelas.

I. S. A. — I.ª prova escrita — 20 de Outubro de 1944 Ponto n.º 4.

Nota — E obrigatório resolver quatro questões, entre as quais a primeira.

2042 — Resolva a inequação $2-\frac{4}{6-x}<\frac{2x-1}{x+1}$.

2043 — São dados os números a e b. Determine em quantas unidades a difereuça entre o dôbro do 1.º e o 2.º excede o número que se obtém multiplicando pelo excesso pedido o 2.º deminuído de 7 unidades.

Determine os valores de a e de b para que o problema seja indeterminado.

2044 — Considere um triedro com 2 faces iguais, cortado à distância de 10,000 metros do vértice por um plano perpendicular à aresta a do diedro formado pelas faces iguais. Êste diedro mede 48° 27',2 e o seu plano mediador determina no lado da secção um ponto à distância de 26,917 metros da aresta a. Determine a área da porção de uma das faces iguais do triedro limitada pelo plano secante.

2045 — Exprima $\operatorname{cotg}\left(\frac{5}{2}\pi+x\right)$ em função de $\operatorname{sen} x$.

2046 — Determine o raio da base de um cone de altura dada a, cuja área lateral seja igual à área do círculo que tenha por raio a altura do cone.

2047 — Demonstre que, sendo $[ABC]$ um triângulo inscrito numa circunferência, unindo o centro O da circunferência com o meio D do arco $\widehat{BC}$ e tirando a corda $\overline{AD}$, o ângulo $A\widehat{D}O$ é metade da diferença dos ângulos $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$ do triângulo.

I. S. C. E. F. — Ponto n.º 2 — Outubro de 1944.

As respostas e as passagens essenciais das resoluções devem ser justificadas. Afirmações não justificadas consideram-se como não feitas.

Nota — São obrigatórios quatro pontos, entre os quais, o n.º 1.

2048 — Homotetia, semelhança e simetria. Definições e relações entre os três conceitos.

Aritmética

2049 — Dispor por ordem de grandeza crescente os números $a_1=1$, $a_2=1+\frac{1}{2}$, $a_3=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}$,

$$a_4=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}},\quad a_5=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{5}}}}$$

R: $a_1<a_3<a_5<a_4<a_2$.

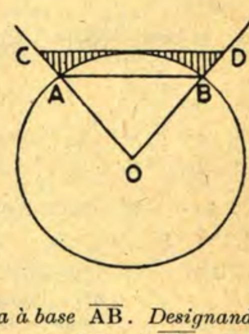
Álgebra

2050 — Determinar as raízes reais da equação $1-x+x^2-x^3+x^4=1$. Generalizar. R: *A equação é equivalente a* $(1+x^5)/(1+x)=1$ *ou* $1+x^5=1+x$ (*com* $x\neq-1$), *cujas soluções reais são* 0 *e* 1. *A generalização consiste em determinar as raízes reais da equação* $1-x+x'-x^3+\cdots+x^{2n-1}+x^{2n}=1$ *ou seja* $(1+x^{2n+1})/(1+x)=1$, (*com* $x\neq-1$).

As suas soluções reais são 0 *e* 1.

Geometria

2051 — Na circunferência da gravura junta conhece-se o raio r e o comprimento l da corda $\overline{AB}$. Tira-se a tangente CD paralela a AB; calcular a área (sombreada na figura) interior ao triângulo COD e exterior à circunferência.



R: *A área pedida será* $S=S_1-S_2$ *sendo* S_1 a área [COD] *e* S_2 *a área do sector* [AOB]. *Da semelhança dos triângulos* [COD] *e* [AOB] *têm-se* $\overline{CD}=l\,.\,r/h$ *sendo* $h=\sqrt{4r^2-l^2}/2$ *a altura do triângulo* [AOB] *relativa à base* $\overline{AB}$. *Designando por* α *o ângulo ao centro correspondente a* $\overline{AB}$, *será* $S=l\,.\,r^2/2h-r^2\,.\,\alpha/2$ ($\alpha=2$ arc sen $l/2r$).

Trigonometria

2052 — Verificar a identidade $\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x - (\cos^6 x - \operatorname{sen}^6 x) + \cos^2 x \cdot \operatorname{sen}^2 x \cdot (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = 0$ R : *Basta notar que*

$$\cos^8 x - \operatorname{sen}^8 x = (\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x)(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x) = (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)(\cos^4 x + \operatorname{sen}^4 x)$$

e efectuar as operações indicadas.

Cálculo Numérico

2053 - Calcular o valor que toma a expressão

$$X = \frac{x^3+y^3}{x^2-y^2} \cdot \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{\frac{x^2+y^2}{y}-x} \quad \text{para } x = \operatorname{cotg} 238^\circ 48'.$$

R : *Tendo em atenção que* $x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)$ *obtém-se, efectuando as operações,* $X=1/x=\operatorname{tg} 58^\circ 48'$ *donde* $\log X = 0{,}21780$ *ou* $X=1{,}651$.

I. S. C. E. F. — Ponto n. 4 — Julho de 1944

As respostas e as passagens essenciais das resoluções devem ser justificadas. Afirmações não justificadas consideram-se como não feitas.

Nota — São obrigatórios quatro pontos, entre os quais o n.º 1.

2054 — Circunferência. Propriedades mais importantes. Relações métricas. Medidas de ângulos inscritos e de ângulos formados por secantes.

Aritmética

2055 — Calcular a soma

$$S = 1+1+1/2+2+1/2^2+2^2+\cdots+1/2^n+2^n$$

e determinar o menor valor de n para o qual é $S > 100$. R : *Trata-se da soma dos têrmos de duas progressões geométricas:*

$$S = (1+1/2+1/2^2+\cdots+1/2^n) + (1+2+2^2+\cdots+2^n) = (2^{n+1}-1)/2^n + (2^{n+1}-1) = 1+2^{n+1}-1/2^n.$$

Fazendo sucessivamente $n=1,2,3,\cdots$ *obtém-se para* $n=6$

$$S = 129 - 1/64 > 100.$$

Álgebra

2056 — Dada a equação $x^2+ax+b=0$, de raízes α e β, determinar a equação do 2.º grau cujas raízes são $1/\alpha^2$ e $1/\beta^2$. R: *A equação será* $z^2 - Sx + P = 0$ *com* $S = 1/\alpha^2 + 1/\beta^2 = (\alpha^2+\beta^2)/\alpha^2\beta^2 = (a^2-2b)/b^2$ e $P = 1/\alpha^2\beta^2 = 1/b^2$.

Geometria

2057 — Verificar se são compatíveis os seguintes dados acêrca de um paralelipípedo rectângulo:

Soma das três arestas que concorrem num vértice: $S=12$;

Área total: $A=94$;

Diagonal do paralelipípedo: $d=\sqrt{50}$. R: *Sendo* x, y e z *as 3 dimensões do paralelipípedo rectângulo há que verificar a compatibilidade do sistema:*

$$S=x+y+z=12, \quad A=2(xy+xz+xz)=94, \quad d^2=x^2+y^2+z^2=50.$$

Com efeito, por ser $S^2=d^2+A$, *terá de ser* $12^2 = \sqrt{50}^2+94=144$ *o que confirma a compatibilidade dos dados.*

Trigonometria

2058 — Dado um triângulo rectângulo de ângulos A (recto) B e C, calcular, em função dos lados, $\cos(A+B-2C)$. R: $\cos(A+B-2C) = \cos(180^\circ-3C) = -\cos 3C = 3\operatorname{sen}^2 C \cdot \cos C - \cos^3 C = b(3c^2-b^2)/a^3$, *tendo em conta que* $c = a \operatorname{sen} C$ e $b = a\cos C$.

Cálculo numérico

2059 — De um cone circular recto conhece-se a área total $A=75{,}36$ metros quadrados e a altura $h=4$ metros. Calcular a área da base. R: *Sejam* R *o raio da base e* g *a geratriz do cone; de* $A=\pi R^2+\pi Rg$ *e de* $h^2=g^2-R^2$ *vem* $A-\pi R^2=\pi R\sqrt{h^2+R^2}$. *Elevando ao quadrado e simplificando obtém-se*

$$\pi R^2 = A^2/(\pi h^2+2A) = (75{,}36)^2/200{,}96 \quad (\pi=3{,}14).$$

Aplicando logaritmos obtém-se $\pi R^2 = 28{,}26 \text{ m}^2$.

Soluções dos n.ºs 2048 a 2059 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Ponto n.º 2 — 23 de Outubro de 1944.

2060 — Numa linha de circulação de um metropolitano com 66 quilómetros de perímetro, as estações estão situadas à distância de 3 quilómetros umas das outras. Os combóios circulam à velocidade de 80 quilómetros por hora e param durante 20 segundos em tôdas as estações. Supondo que a distância entre as automotoras de dois combóios consecutivos não pode nunca ser inferior a 2 quilómetros, determine o maior número de combóios que podem passar numa hora em cada estação e o número de combóios precisos para manter tal ritmo no serviço. R: *Como cada combóio percorre dois quilómetros em* 90^s *e demora na estação* 20^s, 110^s *depois de um combóio ter chegado a uma estação poderá passar outro, e por isso o número máximo de combóios que numa hora podem passar numa estação é de 32. Cada combóio leva a percorrer o circuito completo* $22 \times 155^s = 3410^s$, *pois leva de estação a estação com o tempo de estacionamento* 155^s. *Ora em* 3410^s *passam pela mesma estação 31 combóios que será o número necessário para manter o ritmo de serviço pedido.*

2061 — Mostre que se
$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2+2\,(x^2+y^2+z^2)\,(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx)^2}{(x+y+z)^4-(x^2+y^2+z^2)^2}=\frac{1}{2}$$
se tem também $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(x+y+z)^2}=\dfrac{1}{3}\cdot$ R: *A fracção dada pode escrever-se:*
$$\frac{(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)^2}{(2x^2+2y^2+2z^2+2xy+2yz+2zx)\,(2xy+2yz+2zx)}=$$
$$=\frac{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx}{4\,(xy+yz+zx)}=\frac{1}{2}$$
ou $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$ *donde é* $(x^2+y^2+z^2)^2=$ $=3\,(xy+yz+zx)$ *e portanto* $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}=\dfrac{1}{3}\cdot$

2062 — Num quadrilátero $ABCD$, os ângulos B e D são rectos, a diagonal AC mede d, o perímetro vale $2p$ e a área é S. Exprima em função dêstes dados os valores dos quatro lados. R: *Se* x, y, z, *e* t *forem os lados do quadrilátero, as equações que resolvem o problema são:*
$$\begin{cases} x+y+z+t=2p \\ xy+zt=2S \\ x^2+y^2=d^2 \\ z^2+t^2=d^2 \end{cases}$$
da 2.ª, 3.ª e 4.ª equações tira-se: $(x+y)^2+(z+t)^2=2d^2+4S$ *que com* $(x+y)+(z+t)=2p$ *permite determinar*
$$(1)\qquad x+y=p+\sqrt{d^2+2S-p^2}$$
e
$$z+t=p-\sqrt{d^2+2S-p^2}$$
De (1) *e* $x^2+y^2=d^2$ *tira-se, fazendo* $\Delta=d^2+2S-p^2$
$$x=\frac{p+\sqrt{\Delta}+\sqrt{d^2-2S-2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$
$$y=\frac{p+\sqrt{\Delta}-\sqrt{d^2-2S-2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$
e análogamente
$$z=\frac{p-\sqrt{\Delta}+\sqrt{d^2-2S+2p\sqrt{\Delta}}}{2}$$
$$t=\frac{p-\sqrt{\Delta}-\sqrt{d^2-2S+2p\sqrt{\Delta}}}{2}.$$

2063 — Uma esfera de 5 metros de raio é atravessada por um cilindro de revolução de 3 metros de raio e cujo eixo passa pelo centro da esfera. ¿Qual é a área total e qual é o volume do sólido em forma de anel recortado na esfera pelo cilindro? R: *Como o raio da esfera mede* 5m *e o raio da base do cilindro é de* 3m, *a altura do cilindro é de* $2\times 4\,\mathrm{m}=8\,\mathrm{m}$. *A área da zona esférica é então* $2\pi\,.\,5\,.\,8=80\pi\,\mathrm{m}^2$. *O volume do anel é dado por* $1/6\,\pi\,.\,8^3=512\,\pi/6$.

2064 — ¿Qual é a expressão geral de todos os ângulos que satisfazem à condição
$$\frac{1}{\mathrm{sen}^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}-\frac{1}{\cot^2 x}-\frac{1}{\sec^2 x}-\frac{1}{\mathrm{cosec}^2 x}=-3\,?$$
R: *A expressão dada pode escrever-se:* $\mathrm{cosec}^2 x-$ $-\mathrm{cotg}^2 x-(\mathrm{sen}^2 x+\cos^2 x)-\sec^2 x-(\sec^2 x-1)=-3$ *ou* $1-1-2\sec^2 x+1=-3$ *ou ainda* $\mathrm{sen}\, x=\pm\sqrt{2}/2$ *e portanto* $x=n\pi\pm\pi/4$.

2065 — O ângulo sob o qual um observador via determinada tôrre duplicou pelo facto dêle se ter aproximado 110 metros e triplicou quando êle se aproximou mais 50 metros. ¿Qual era a altura da tôrre? R: *Seja* α, 2α *e* 3α *os ângulos segundo os quais é vista a tôrre dos pontos situados às distâncias* $110+50+x$; $50+x$ *e* x. *É fácil ver que os ângulos sob os quais são vistos, do cimo da tôrre os segmentos de* 110m *e* 50m *são iguais a* α. *Dos triângulos que se podem considerar deduz-se que:*
$$(1)\qquad (160+x)\,\mathrm{tg}\,\alpha=h\,,$$
$$(2)\qquad (50+x)\,\mathrm{tg}\,2\alpha=h$$
e
$$(3)\qquad 110:\mathrm{sen}\,3\alpha=50:\mathrm{sen}\,\alpha\,.$$
De (3) *tendo em conta que* $\mathrm{sen}\,3\alpha=3\,\mathrm{sen}\,\alpha-4\,\mathrm{sen}^3\alpha$ *tira-se que* $15\,\mathrm{sen}\,\alpha-20\,\mathrm{sen}^3\alpha=11\,\mathrm{sen}\,\alpha$ *e portanto* $4\,\mathrm{sen}\,\alpha=20\,\mathrm{sen}^3\alpha$ *e* $\mathrm{sen}^2\alpha=1/5$ *ou* $\mathrm{sen}\,\alpha=+\sqrt{5}/5$ *logo* $\cos\alpha=+2\sqrt{5}/5$, $\mathrm{tg}\,\alpha=1/2$ *e* $\mathrm{tg}\,2\alpha=4/3$, *valores que substituídos em* (1) *e* (2) *dão as equaçõs* $200+$ $+4x=3h$ *e* $160+x=2h$ *e finalmente* $h=88\,\mathrm{m}$.

Soluções dos n.os 2060 a 2065 de J. da Silva Paulo

MATEMÁTICAS SUPERIORES

PONTOS DE EXAMES DE FREQÜÊNCIA E FINAIS

ÁLGEBRA SUPERIOR — MATEMÁTICAS GERAIS

F. C. C.—Álgebra Superior—**Exame final—9 de Junho de 1944** — 2.º ponto.

2066 — É dado o losango de diagonais d e D. Mostre que o rectângulo de area máxima inscrito no losango tem por lados metade do valor das diagonais. R: *Representando por* 2x *e* 2y *os lados do rectângulo paralelos às diagonais menor e maior do losango, e notando que há entre êsses elementos a relação* $\dfrac{D/2-y}{x}=\dfrac{D}{d}$ *ou seja* $y=D/2-Dx/d$ *vem para valor da área* $A(x)=2xD\,(1/2-x/d)=Dx\,(d-2x)/d$. *Extrememos a função* $f(x)=d\,.\,A(x)/D=x\cdot(d-2x)$. *Tem-se:*

$f'(x)=d-2x-2x=0$ *ou* $4x=d \rightarrow x=d/4$ *como* $f''(x)=-4<0$, *a função é maxima. Portanto, um dos lados do rectângulo é:* $2x=d/4+d/4=d/2$ *e o outro é* $y=D/2-D/d\cdot d/4=D/4$ *ou* $2y=D/2$.

2067 — Qual é a condição a que devem satisfazer h e k para que a equação $x^3+hx+k=0$ tenha uma raiz igual à soma dos inversos das outras duas? R: *A relação dada é* a) $r_1=1/r_2+1/r_3$ *e, além dessa, conhecem-se as relações:* b) $r_1+r_2+r_3=0$; c) $r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3=h$; d) $r_1r_2r_3=-k$. *Das relações* a) *e* d) *tem-se* $(1/r_2+1/r_3)\cdot r_2\cdot r_3=-k$ *ou seja* $r_2+r_3=-k$. *De* b) *obtém-se* $r_1=k$ *e portanto* $r_2r_3=-1$ *e* $r_2+r_3=k$. *Substituindo em* c), *vem a condição pedida* $r_1\cdot(r_2+r_3)+r_2r_3=h$ *ou* $-k^2-1=h$ *ou ainda* $k^2+h+1=0$.

2068 — É dada a equação $xy+xz+yz-2x-y-3z+1=0$. Diga que quádrica representa, determine as coordenadas do centro e refira-a aos eixos. R: *Para determinar a natureza da quádrica, calculem-se as raízes da equação em* S

$$\Delta(S)=\begin{vmatrix}-S & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -S & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & -S\end{vmatrix}=-S^3+1/8+1/8+3S/4=0$$

As raízes desta equação são $S_1=1$, $S_2=-1/2$ *(dupla). Para referir a equação aos eixos, determina-se* $k=\delta/\Delta$,

onde
$$\delta=\begin{vmatrix}0 & 1/2 & 1/2 & -1\\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0 & -3/2\\ -1 & -1/2 & -3/2 & 1\end{vmatrix}=-1/4$$

e
$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & 0 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{vmatrix}=1/8.$$

Portanto $k=-2$. *A equação referida aos eixos é:* $x^2-1/2\,.\,(y^2+z^2)=2$ *ou* $2x^2-(y^2+z^2)=4$ *que representa um hiperbolóide de uma fôlha de revolução.*

F. C. C. — Álgebra Superior — **Exame final — Outubro de 1944.**

2069 — Calcular $\lim\limits_{x\to\infty}[(a^{m/x}+a^{n/x})/2]^x$. R: $\sqrt{a^{m+n}}$.

2070 — Prove que, sendo as raízes da equação de coeficientes reais $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0$ tôdas reais e positivas, os coeficientes da equação são alternadamente positivos e negativos a partir de $a_1<0$. R: *Sabe-se, pelo teorema de Descartes, que nenhuma equação de coeficientes reais tem mais raízes positivas do que variações e que o excesso, quando o há, é sempre par. Para que a equação dada, de coeficientes reais e de grau* n, *tenha* n *raízes reais é necessário que os seus coeficientes apresentem, pelo menos,* n *variações; tendo a equação* n+1 *coeficientes (porque é do grau* n*), o número de variações é exactamente* n, *e como o primeiro termo é positivo, será necessàriamente* $a_1<0,\ a_2>0,\cdots$ q. c. d.

2071 — Escreva a equação do lugar geométrico dos pontos do espaço donde um segmento de comprimento k é visto segundo um ângulo constante θ. Verifique que no caso de ser $\theta=90^\circ$, o lugar procurado é uma quádrica; diga de que quádrica se trata e refira-a aos eixos. R: *Tomando para origem do sistema de eixos ortogonais, uma das extremidades do segmento, e para eixo oz a recta que contém êsse segmento, obtém-se para equação do lugar procurado* $m^2[x^2+y^2+(z-k)^2]\cdot[x^2+y^2+z^2]=[x^2+y^2+z(z-k)]^2$ *onde* $m=\cos\theta$. *No caso de ser* $\theta=90^\circ$, *o lugar procurado é a esfera* $x^2+y^2+z^2-kz=0$, *de centro no ponto* $(0,0,k/2)$ *e raio* $k/2$; *a sua equação referida aos eixos é:* $x^2+y^2+z^2=k^2/4$.

Soluções dos n.^{os} **2066 a 2071 de L. Mendonça de Albuquerque.**

I. S. C. E. F. — 1.ª cadeira — **Exame final. — Julho de 1944.**

2072 — Calcular $\sqrt[m]{(xi)^m+i\,(-xi)^m}$, m inteiro e positivo; $x>0$ real; $i^2=-1$. R: *Tem-se* $\sqrt[m]{(xi)^m+i\,(-xi)^m}=\sqrt[m]{(xi)^m}\cdot\sqrt[m]{1+(-1)^m i}$. *E por ser* $(x>0)$ $\sqrt[m]{(xi)^m}=xi\,r_m(k)$, *onde* $r_m(k)$ *representa as raízes de índice* m *da unidade, e* $\sqrt[m]{1+(-1)^m i}=$

$$=\sqrt[2m]{2}\left[\cos\frac{(-1)^m\pi}{4m}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{(-1)^m\pi}{4m}\right]r_m(k),\quad \text{vem}$$

$$\sqrt[m]{(xi)^m+i\,(-xi)^m}=$$
$$=\sqrt[2m]{2}\,xi\left[\cos\frac{(-1)^m\pi}{4m}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{(-1)^m\pi}{4m}\right]r_m^2(k)\,.$$

2073 — É dada a função $y(x)$ assim definida no intervalo $(-1,+1)$: $-1\le x<0 \rightarrow y(x)=x$
$0\le x\le 1 \rightarrow y(x)=x^2$.
Representá-la geomètricamente, bem como à sua derivada $y'(x)$. ¿É aplicável a $y'(x)$ o teorema sôbre as descontinuidades das funções derivadas? e o teorema de Darboux? Razões. R: *A função é contínua em todo o intervalo* $(-1,+1)$ *por o ser nos intervalos abertos* $(-1,0)$ *e* $(0,1)$ *e no ponto zero* $\rightarrow y(0-0)=y(0+0)=y(0)=0$. *No intervalo* $(-1,0)$, *aberto à direita, trata-se do segmento de recta que une os pontos de coordenadas* $(-1,-1)$ *e* $(0,0)$; *no intervalo* $(0,+1)$ *trata-se de um arco de parábola. A derivada existe naquêles intervalos parciais mas não existe no ponto*

zero, por o $\lim_{h=0} [f(0+h)-f(0)]/h$ *não ser independente da forma como* h *tende para zero. No intervalo aberto à direita* $(-1,0)$ *a sua imagem é o segmento de recta que une os pontos* $(-1,1)$ *e* $(0,1)$; *no intervalo* $(0,+1)$, *trata-se do segmento de recta que une a origem ao ponto* $(1,2)$.

2074 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=x^x, x\geq 0$. As ordenadas dos pontos de estacionaridade, se existirem, serão calculadas, pelo método dos desenvolvimentos em série, com duas casas decimais exactas. R: *A função existe no intervalo* $(0,+\infty)$, *tomando o valor* 1 *para* $x=0$. *Quando* $x\to\infty$, $y\to\infty$. *Não tem assíntotas. É* $y'(x)=x^x(\log x+1)$ *e* $y''(x)=x^x[(\log x+1)^2+1/x]$ *Para* $y'(x)=0$ *é* $\log x+1=0\to x=1/e$, *sendo* $y''(1/e)>0$ *e* $y(1/e)=e^{-1/e}$. *A função tem portanto um mínimo no ponto* $(1/e, e^{-1/e})$. *Como para* $x>0$ *é* $y''(x)>0$, *a curva de equação* $y=x^x$ *tem, no intervalo* $(0,+\infty)$, *a concavidade voltada para os* yy *positivos.*

Sendo $y(1/e)=e^{-1/e}=1-\frac{1}{e}+\frac{1}{2!e^2}-\frac{1}{3!e^3}+\cdots$, *bastará tomar os quatro primeiros têrmos para que o êrro sistemático cometido seja inferior a* $1/2.000$, *visto ser* $1/4!\,e^4<1/2.00$. *E para que o êrro de cálculo seja inferior a* $1/2.000$ *bastará que cada um dos três últimos têrmos tomados seja calculado com um êrro inferior a* $1/10.000$. *E assim se tem* $y(1/e)\simeq 1-0{,}3679+0{,}0677-0{,}0083=0{,}6815$. *Com a aproximação desejada ter-se-á* $y(1/e)\simeq 0{,}68$.

Soluções dos n.os 2072 a 2074 de A. da Costa Miranda.

I. S. C. E. F. — 1.ª Cadeira — Exame final — Época de Dezembro — Milicianos — **1943-44.**

2075 — Estudar e representar geomètricamente a função $y=\frac{1}{1+2e^{-(1-x)}}$. R: *Função contínua definida no intervalo aberto* $(-\infty,+\infty)$ *e cujo contradomínio é o intervalo aberto* $(0,+\infty)$. *Para* $x\to-\infty$, $y\to 1$ *e para* $x\to\infty$, $y\to 0$. *A sua ordenada na origem é* $e/(2+e)$. *Do exame de* $y'=\frac{-2e^{x-1}}{(1+2e^{x-1})}$ *e de* $y''=\frac{2e^{x-1}(2e^{x-1}-1)}{(1+2e^{x-1})^3}$, *conclue-se que a curva é monotónica decrescente e tem a concavidade voltada no sentido negativo do eixo das ordenadas, no intervalo* $(-\infty, 1-\log 2)$ *e em sentido opôsto no intervalo* $(1-\log 2,+\infty)$. *O ponto* $(1-\log 2, 1/2)$ *é um ponto de inflexão.*

2076 — Sendo $y=f(x)$, calcular $\frac{d(\log y)}{d(\log x)}$.

R: $\frac{d(\log y)}{d(\log x)}=\frac{1/y\cdot dy}{1/x\cdot dx}=\frac{x}{y}\frac{dy}{dx}$.

2077 — Determinar um polinómio inteiro $P(x)$ que satisfaça às condições:

$$P(-5)=-156,\quad P(-3)=-40,\quad P(-1)=-4,$$
$$P(1)=0,\qquad P(3)=20,\qquad P(5)=104.$$

R: *Construindo a tabela de diferenças, com os valores dados, obtém-se* $\Delta P(-5)=116$, $\Delta^2 P(-5)=-80$, $\Delta^3 P(-5)=48$, $\Delta^4 P(-5)=\Delta^5 P(-5)=0$. *A interpoladora de Gregory-Newton dará* $f(-5+2x)=-156+116x-40x(x-1)+8x(x-1)(x-2)$ *ou* $f(z)=z^3-z^2+z-1$ *que é o polinómio procurado.*

Soluções dos n.os 2075 a 2077 de O. Morbey Rodrigues.

I. S. T. — Matemáticas Gerais — Exame final — Dezembro de 1944.

2078 — O rendimento de um transformador estático de indução é dado pela fórmula:

$\rho=\frac{V_2\cdot I_2}{V_2 I_2+A+B\cdot I_2^2}$, em que: V_2 é a tensão secundária (pràticamente constante), I_2 é a intensidade secundária (variável), A é a perda no ferro (constante), e BI_2^2 é a perda no cobre (B constante). Mostrar que o rendimento é máximo quando a perda no ferro é igual à perda no cobre. R: *Para resolver o problema, basta provar que:* 1.° $A=BI_2^2$ *é raiz da primeira derivada da expressão do rendimento;* 2.° *A primeira derivada que não se anula para* $A=BI_2^2$ *é de ordem par. O valor numérico dessa derivada para* $A=BI_2^2$ *é negativo.*

1.°) $\rho'=\frac{V_2(A-B\cdot I_2^2)}{(V_2 I_2+A+BI_2^2)^2}$, $\rho'=0\to V_2(A-BI_2^2)=0$, *e portanto:* $A=BI_2^2$.

2.°) *Sendo* $\rho'=\frac{N}{D}$ *é* $\rho''=\frac{N'D-ND'}{D^2}$.

Como D *é positivo*, D^2 *também é positivo e* $A=BI_2^2$ *anula* $N\cdot$ *para provar que* $\rho''<0$ *para* $A=BI_2^2$, *basta provar que* $N'<0$.

$$N'=-2B\cdot V_2\cdot I_2 \text{ e } N'(A=BI_2^2)=-\frac{2A}{I_2}\cdot V_2<0, \text{ c. q. p.}$$

2079 — Estudar a função $y=tg\,x+8\,\text{sen}\,x$ para $0\leqq x\leqq 2\pi$. R: 1.°) *Periodicidade: A função y é periódica de período* 2π: $tg(x+2\pi)+8\,\text{sen}(x+2\pi)=tg\,x+8\,\text{sen}\,x=y$. 2.°) *Pontos de descontinuïdade: Para* $x=\pi/2$ *e* $x=3\pi/2$ *vem* $y=\infty$.

$$\lim_{x=\pi/2-0} y=+\infty;\qquad \lim_{x=\pi/2+0} y=-\infty;$$
$$\lim_{x=3\pi/2-0} y=+\infty;\qquad \lim_{x=3\pi/2+0} y=-\infty$$

3.°) *Pontos de encontro com o eixo dos XX:*

$$tg\,x+8\,\text{sen}\,x=0;\qquad \frac{\text{sen}\,x\cdot(1+8\cos x)}{\cos x}=0;$$

$\operatorname{sen} x\,(1+8\cos x)=0\,;\quad \operatorname{sen} x=0\,;\quad x=0\,;\quad x=\pi\,;$

$\cos x=-1/8=-0{,}125\,;\quad x=97^\circ\,10'\,;\quad x=262^\circ\,50'\,.$

4.º) *Ponto de encontro com o eixo dos YY:*

$$x=0\,,\quad y=0\,.$$

5.º) *Divisão do intervalo* $(0\,,2\pi)$ *em intervalos parciais, nos quais a função é sempre crescente ou sempre decrescente:*

$$y'=\sec^2 x+8\cos x\,;\quad \frac{1}{\cos^2 x}+8\cos x=0\,;$$

$$\frac{1+8\cos^3 x}{\cos^2 x}=0\,;\quad \cos x=-1/2\,;\quad x_1=2\pi/3 \ \text{ e } \ x_2=4\pi/3\,.$$

$y'>0$ *para* $0<x<2\pi/3$ *e* $4\pi/3<x<2\pi$ *y crescente.*
$y'<0$ *para* $2\pi/3<x<4\pi/3$ *y decrescente.*

6.º) *Máximos e mínimos:*

$$y'=0\,,\quad x_1=2\pi/3 \quad \text{e} \quad x_2=4\pi/3$$

$$y''=2\,.\sec^2 x\,.\operatorname{tg} x-8\operatorname{sen} x=2\cdot\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}-8\,.\operatorname{sen} x$$

$$f''\left(\frac{2}{3}\pi\right)=2\cdot\frac{\sqrt{3}/2}{-1/8}-8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}<0 \quad \textit{Máximo}$$

$$f''\left(\frac{4}{3}\pi\right)=2\cdot\frac{-\sqrt{3}/2}{-1/8}-8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=$$
$$=8\,.\sqrt{3}+4\sqrt{3}>0 \qquad \textit{Mínimo.}$$

A função tem um máximo para $x=2\pi/3$ *e um mínimo para* $x=4\pi/3$.

$$f(2\pi/3)=-\sqrt{3}+8\,.\sqrt{3}/2=3\,.\sqrt{3} \quad \textit{Máximo}$$

$$f(4\pi/3)=\sqrt{3}-4\sqrt{3}=-3\sqrt{3} \qquad \textit{Mínimo}$$

7.º) *Pontos de inflexão:*

$$y''=2\,.\sec^2 x\,.\operatorname{tg} x-8\operatorname{sen} x=0\,;$$

$$\frac{\operatorname{sen} x\,.\,(1-4\cos^3 x)}{\cos^4 x}=0\,;\quad \operatorname{sen} x=0\,;\quad x_1=0\,;\ \text{ e } \ x_2=\pi$$

$$1-4\,.\cos^3 x=0\,;\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}=0{,}629\,;$$

$$x_3\simeq 51^\circ\,;\quad x_4\simeq 309^\circ\,.$$

$$y'''=2\,.\sec^4 x+2\operatorname{tg} x\,.\,2\sec^2 x\operatorname{tg} x-8\,.\cos x$$
$$=2\,.\sec^4 x+4\sec^2 x\,.\operatorname{tg}^2 x-8\cos x\,;$$

$$f'''(0)=2-8=-6\neq 0\,;\quad f'''(\pi)=2+8=10\neq 0\,;$$

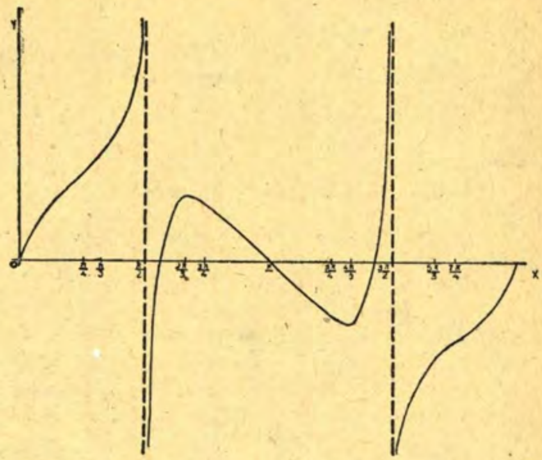
$$f'''\left(\operatorname{arc}\,\cos\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)\neq 0\,.$$

Pontos de inflexão:

$$x=0\,,\quad y=0\,;\quad x=\pi\,,\quad y=0\,;$$

$$x=51^\circ\,,\quad y=7{,}5\,;\quad x=309^\circ\,,\quad y=-7{,}5\,.$$

Representação gráfica:



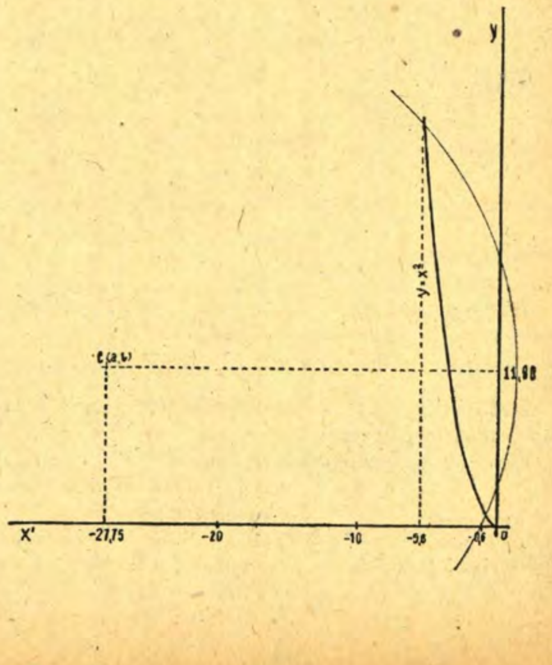
2080 — Determinar, com êrro inferior a 0,1, as raízes reais da equação $x^4-22{,}6\,x^2+55{,}5\,x+40=0$.
R: *Utilizaremos um método gráfico. As raízes reais da equação dada, serão as abscissas dos pontos de intersecção de uma parábola com uma circunferência cujas equações vamos estabelecer: fazendo* $y=x^2$, *vem*

$$y^2-22{,}6\,y+55{,}5\,x+40=0\,;\quad x^2-y=0\,;$$

somando membro a membro, teremos:

$$\begin{cases} x^2+y^2-23{,}6\,y+55{,}5\,x+40=0\\ y=x^2\,. \end{cases}$$

A primeira equação representa uma circunferência e a segunda uma parábola.



Calculemos as coordenadas do centro e o raio da circunferência.

Coordenadas do centro:

$$C\,(a\,,b)\,;\quad a=-55{,}5/2=-27{,}75\,;$$

$$b=+23{,}6/2=+11{,}80\,;\quad C\,(-27{,}75\,,+11{,}80)\,.$$

Raio:

$$R^2=27{,}75^2+11{,}80^2-40=29{,}48\,.$$

Construídas as curvas, obtemos para raízes reais da equação:

$$x_1=-5{,}6 \quad e \quad x_2=-0{,}6\,.$$

2081 — A recta r passa por O e por $A\,(2\,,3\,,4)$; a recta s passa por $B\,(2\,,0\,,0)$ e por $C\,(0\,,3\,,4)$: verificar que r e s são coplanas e determinar o ângulo do seu plano com OZ. (eixos rectangulares)

R: $r)\ \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}\,,\qquad s)\ \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{4}\,.$

Condição de coplanaridade:

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

Equação do plano definido por r *e* s.

vector da recta r: $\mathbf{u}=2I+3J+4K$

vector da recta s: $\mathbf{v}=-2I+3J+4K$

vector do plano $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}=\begin{vmatrix} I & J & K \\ 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-16J+12K$

Como o plano passa pela origem $D=0$.

Equação do plano pedido:

$$16\,y-12\,z=0 \qquad ou \qquad \pi)\ 4y-3z=0\,.$$

Equações do eixo OZ *escritas sob a forma normal:*

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}\,.$$

Ângulo de $\overline{OZ}$ *com* π:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{-3}{\sqrt{16+9}}=-\frac{3}{5}\,,\qquad \varphi=\operatorname{ang\,sen}\,(3/5)\,.$$

Soluções dos n.os 2078 a 2081 de Jorge Cândido da Silva.

GEOMETRIA DESCRITIVA

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final, 20-6-1945** — 1.ª chamada.

2082 — Definida, em projecções cotadas, uma superfície cónica por $[d]_{\odot}$ —•— ν_0 e $V_{(4)}$ (V' —•— $[d']$), construa um plano π, passando por $n_{(4)}$ dada $\left(\text{com } n' \begin{cases} \dot{-}\ V' \\ \text{cortando } [d'] \end{cases}\right)$ e produzindo secção parabólica na superfície.

Se, mantendo a cota de n, fizermos rodar n' em tôrno dum seu ponto P', existe alguma superfície envolvente das posições do plano π do enunciado? Caso afirmativo, caracterize essa superfície R: π *deve ser* // *a um plano tangente* θ *com horisontais* // n. *Basta construir* h^θ *tangente a* [d] *e paralelo a* n. *Teremos:*

$$\theta\equiv V, h^\theta \ e \ \pi \begin{cases} \text{—•— } n \\ //\ \theta\,. \end{cases}$$

Há 2 soluções para cada direcção de n'. *A sup. envolvente do enunciado é uma sup. cónica homotética da dada, e tendo o vértice em* $P_{(4)}$.

2083 — Considere 3 rectas concorrentes, a, b e c, nas seguintes condições: a e b de nivel; $b'\equiv c'$.

Suponha um parabolóide hiperbólico $[\pi]$, do qual: b é um diâmetro, a e c são assíntotas da secção feita por $\alpha\equiv a\,,c$; X (dado) é ponto de contacto dum plano tangente $\beta//\alpha$ (dado) e d (dada, com $d'//b'$) é uma geratriz. Determine o vértice dêsse parabolóide.

Questionário:

a) O conhecimento das assíntotas a e c implica o conhecimento das direcções de algumas rectas da superfície? Porquê? Tal conhecimento, aliado ao da direcção do eixo do parabolóide, arrasta o dos planos directores? Porquê? b) Trace as geratrizes da superfície situadas em β. c) Que circunstância caracteriza as geratrizes que definem o plano tangente no vértice? Sendo recto o parabolóide, que mais se pode afirmar acêrca dessas geratrizes? R: a) *Implica o das geratrizes da sup. que são* //s *a* a *e* c *respectivamente, porque as assíntotas duma secção são as intersecções do plano secante com os pl. assintóticos das geratrizes que dão os pontos impróprios daquela secção. Arrasta, porque cada uma daquelas geratrizes é paralela a um dos pl. directores e o eixo é paralelo aos 2 planos directores; os pl. directores são, assim:* ν_0 *e* $\rho \begin{cases} \text{—•— } c \\ \perp \nu_0 \end{cases}$ *(o paraboloide é isósceles).* b) X *é, necessàriamente, o ponto* b . β *e as geratrizes situadas em* β *são as rectas* m *e* n *que passam por* X *e são paralelas a* a *e* c *respectivamente;* c) *São perpendiculares à intersecção dos planos directores, cada uma delas paralela a um pl. director; sendo recto o paraboloide, tais geratrizes são ortogonais.*

Solução: *A geratriz* d *pertence ao mesmo sistema que* n; *é, pois, complana com* m *e não complana com* n. *Construídas 2 geratrizes* m_1 *e* m_2 *de nível, temos*

$m'_1 . m'_2 \equiv V'$; *a proj. vertical* V'' *é obtida por intersecção da vertical de* V' *com a geratriz de nível* m_3 *cuja projecção horizontal* m'_3 *passa por* V' *e é perpendicular a* b'.

2084 — Dum parabolóide isósceles, conhece-se: o vértice $V(3,3)$; uma das geratrizes que passam em $V(g \perp \varphi_0)$ e sabe-se que: planos de rampa produzem secções parabólicas; e o plano tangente θ num ponto $P \multimap g\ (P \equiv|\equiv V)$ faz 45° com ν_0. Determine: a) o eixo, e os traços da superfície em ν_0 e φ_0. b) um plano tangente β paralelo a α dado $(\alpha \equiv h^\alpha, v^\alpha, \nparallel LT)$. c) o centro da secção feita pelo plano α.

Questionário:

1) Conhecer as geratrizes que se cruzam no vértice equivale a conhecer as orientações dos planos directores? Justifique a resposta. 2) Trace a 2.ª geratriz situada no plano tangente θ. 3) Qual a circunstância, referida no enunciado, que faz o conhecimento da direcção dos diâmetros do parabolóide? Porquê? 4) Dão algum elemento importante da secção (α) as rectas pelas quais vai definir o plano β? Justifique a resposta. R: 1) *Sim, porque a normal ao plano dessas geratrizes dá a direcção do eixo, e esta direcção combinada com cada uma daquelas rectas, define um pl. director; no caso presente, os pl. directores são:* ν_0 *e* φ_0;

2) *É a recta de frente* f *do plano* θ, *conduzida por* P;

3) *É o facto de saber que planos* // LT *produzem secções parabólicas, porque só planos* // *aos diâmetros produzem secções dêste género;* 4) *Dão as direcções assintóticas da secção* (α) *pois elas são as geratrizes da superfície situadas em* β *e, portanto, paralelas a* α.

Solução: a) *O eixo é a paralela a* LT *conduzida por* V; $h^{[\pi]}$ *fica definido por* V' *e por* H'; $v^{[h]}$ *fica definido por* V'' *e por* $M \equiv LT . h^{[\pi]}$ b) V' *e* V'' *são pontos de divergência, numa e noutra projecção, das geratrizes de nível e frente respectivamente; as geratrizes de* β *constroem-se, pois, imediatamente; e o seu ponto comum* X *é o ponto de contacto de* β; c) *A paralela a* LT *conduzida por* X *é o diâmetro conjugado com a orientação* (α); *o seu traço em* α *é o centro da secção* (α).

2085 — Dados: um elipsóide $[\varepsilon]$ de revolução, de eixo vertical (afastamento 4 cm, raio do equador — 2 cm) e um cilindro de revolução de eixo de frente (inclinado a 45° sôbre ν_0) e raio 2 cm, nas seguintes condições: na intersecção das 2 superfícies verifica-se um caso de beijamento simples, e a projecção vertical da intersecção é uma cónica. Determine: a) as orientações de planos que dão, nas 2 superfícies, secções homotéticas, e uma das assíntotas da projecção vertical da intersecção. b) A linha dos pontos duplos aparentes na projecção horizontal. c) Os pontos duplos nessa projecção, se existirem. R: *As 2 condições impostas, pelo enunciado, à intersecção, obrigam à existência de um plano principal comum de frente e de um plano tangente comum, projectante vertical (fazendo* 45° *com* ν_0*).*

a) *As orientações pedidas determinam-se recorrendo a superfícies homotéticas das dadas e circunscritas a uma mesma esfera. Uma das assíntotas da proj. vertical também se constroe imediatamente.*

b) *A linha dos pontos duplos aparentes pedida é a intersecção do plano do equador do elipsoide com o plano projectante vertical do eixo do cilindro.*

Nota: **Duração da prova — 4 horas livres.**
Resposta obrigatória — e 2082 2085 e uma das outras duas.
Dispensa-se o relatório em qualquer problema. Facultativa a justificação de qualquer dos passos da construção relativa a 2085.

F. C. L. — Geometria Descritiva — **Exame final, 23-6-1945** — 2.ª chamada.

2086 — Considere um hiperbolóide de revolução, cuja gola ($R = 2$ cm) exista em ν_4 e no qual exista uma geratriz g_d perpendicular a um dado plano π $(\widehat{\pi\nu_0} = 45°)$ Dada uma recta $r // g_d$, determine o ponto P (próprio) de intersecção de r com a superfície. Como procuraria uma recta $s \multimap P$ tal que o plano $\alpha \equiv r, s$ produzisse, na superfície, uma secção hiperbólica de assíntotas perpendiculares.

2087 — Um parabolóide hiperbólico é definido pelo plano director ν_0 e directrizes a e b paralelas a $\beta_{2,4}$ Determine um plano π, passando por um dado ponto P, com uma dada direcção l de traço horizontal e produzindo, na superfície, uma secção hipérbólica equilátera. Construa uma das assíntotas da secção.

Questionário:

a) O conhecimento dos planos directores dum parabolóide $[\varepsilon]$ implica o conhecimento das direcções assintóticas das secções feitas por planos duma mesma orientação nos infinitos parabolóides com os mesmos planos directores que $[\varepsilon]$. Como justifica a afirmação? b) Como poderia determinar o centro da secção feita num parabolóide $[\varepsilon]$ por um plano α, se conhecesse o diâmetro de $[\varepsilon]$ conjugado com a orientação a que pertence α? c) Se escolhesse novas directrizes a_1 e b_1 também paralelas a $\beta_{2,4}$ em substituïção de a e b, mantendo ν_0 como um dos planos directores, haveria alguma alteração relativamente ao ângulo das assíntotas da secção $[\pi]$? Porquê? d) Relativamente à direcção l dada para h^π, em que caso não tem solução o problema proposto? Porquê?

2088 — Dum hiperbolóide empenado conhecem-se duas directrizes $d_1 \perp \nu_0$ e $d_2 \perp \varphi_0$, e sabe-se que um dado plano $\rho \perp \varphi_0$ determina uma secção hiperbólica da qual se conhece uma das assíntotas $m//d_2$ e o ângulo k^0 das 2 assíntotas. Construa uma 3.ª directriz $d_3//LT$ de modo que o hiperbolóide definido por d_1, d_2 e d_3 satisfaça às condições do enunciado. Centro da secção (P).

Nota: **Dispensa-se, aqui, a marcação rigorosa do ângulo de k^0 das assíntotas, desde que o aluno diga, na altura própria, em que essa construção intervém no problema, como faria tal construção.**

Questionário:

a) Sendo a secção hiperbólica, quantas geratrizes há, na superfície, paralelas ao plano secante? Porquê? Conhece algum ponto da projecção horizontal de alguma delas? Qual? Porquê? Como poderia aproveitá-lo para, nas condições do enunciado, construir a 2.ª direcção assintótica? b) Existe alguma superfície envolvente dos planos que intervêm na determinação das assíntotas das secções planas dum hiperbolóide? Como se designa tal superfície? Em que caso se pode afirmar ser tal superfície de revolução? c) Se o plano ρ fôsse de perfil, poderia escolher-se k arbitràriamente em face dos restantes elementos do enunciado? Justifique a resposta.

2089 — Considere um hiperbolóide de revolução de eixo $e \perp \nu_0$ e uma superficie cónica, de vértice V pertencente à gola do hiperbolóide e afastamento igual ao do centro C do hiperbolóide, e de directriz na directriz (em ν_0) do cone assintótico daquela superfície. a) Existe algum plano de simetria ortogonal comum às 2 superfícies? Qual? Alguma orientação de planos de sec. hom? Qual? b) Determine uma das assíntotas da projecção vertical da intersecção das duas superfícies. c) V é um ponto de intersecção das 2 superfícies. Diga tudo quanto sabe dêsse ponto relativamente à intersecção e indique, justificando, as suas tangentes.

Enunciados e soluções dos n.^{os} 2082 a 2089 de Humberto Meneses.

CÁLCULO INFINITESIMAL — ANÁLISE SUPERIOR

F. C. L. — I.º Exame de frequência — 1945

2090 — Calcule a derivada $\dfrac{du}{dx}$ da função u definida pela equação $u^2+x^2+y^2+z^2=c^2$ em que z e y são as funções de x definidas por $\log(xy)+y/x=a^2$ e $\log(z/x)+zx=b^2$.

2091 — Ache a equação transformada de

$$(x+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

mediante as relações $u=x^2-y^2-2xy$ e $v=y$.

F. C. L. — 2.º Exame de frequência — 1945.

2092 — Calcule $\displaystyle\int \frac{x-1}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

2093 — Ache a evoluta da parábola $y=x^2/2$, e faça a sua representação geométrica.

F. C. P. — Cálculo Infinitesimal — Exame final — Julho, 1944.

2094 — Determinar o plano osculador da linha $x=u^u$, $y=\cos \pi u/2$, $z=\operatorname{arc\,tg}\sqrt{u}$ no ponto correspondente a $u=1$. R: $\pi X+6Y+8\pi Z=\pi+2\pi^2$.

2095 — Integrar a equação $y'-\dfrac{y}{2x}=\dfrac{1}{y\sqrt{x^2-1}}$. R: *Fazendo* $y^2=z$ *vem a equação linear* $z'-\dfrac{z}{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x^2-1}}$ *que integrada dá* $z=C_1x+2x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$. *Logo* $y^2=C_1x+2x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x^2-1}$.

2096 — Calcular o volume limitado pela superfície gerada pela rotação da linha $x^2+(y-1)^2=1$ em tôrno do eixo dos yy, por meio de um integral duplo e depois por um integral simples. R:

a) *A equação da superfície gerada é* $z^2+(y-1)^2+x^2=1$.

Logo $V=\displaystyle\iint_D 2\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}\,dx\,dy$, *sendo* D *limitado por* $x^2+(y-1)^2=1$. *Fazendo a mudança de variáveis* $x=\rho\cos\varphi$, $y-1=\rho\operatorname{sen}\varphi$ *vem*

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1 2\rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho=4\pi/3.$$

b) $$V=\pi\int_0^2 x^2\,dy=\pi\int_0^2 \{1-(y-1)^2\}\,dy=4\pi/3.$$

2097 — Determinar a equação cartesiana de uma linha em que $R=1+s^2$, sendo R o raio de curvatura e s o comprimento do arco. Tomar para eixo dos xx a tangente na origem dos arcos. R: *Temos*

$$R=\frac{ds}{d\alpha}=1+s^2 \quad \textit{que integrada dá} \quad s=\operatorname{tg}\alpha \quad (\alpha_0=s_0=0).$$

$$\begin{cases} dx=ds\cos\alpha=\dfrac{d\alpha}{\cos\alpha} \\ dy=ds\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\,d\alpha}{\cos^2\alpha}. \end{cases} \quad \textit{Fazendo} \quad \alpha=\frac{\pi}{2}-\beta \quad \textit{vem}$$

$$\begin{cases} dx = -\dfrac{d\beta}{\operatorname{sen}\beta} \\ dy = -\dfrac{\cos\beta\, d\beta}{\operatorname{sen}^2\beta} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\log \operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} + C_1 \\ y = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\beta} + C_2 . \end{cases}$$

Atendendo às condições iniciais vem $x = -\log \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ *e* $y = \frac{1}{\operatorname{sen}\beta} - 1$.

Eliminando β *temos* $y+1 = \frac{1}{2}\,|\,e^x + e^{-x}\,|$.

Soluções dos n.os 2094 a 2097 de Jayme Rios de Sousa

I. S. T. — Cálculo — 1.º Exame de freqüência — 1944.

2098 — Determinar os máximos e mínimos da função

$$f(x,y) = \int_x^{xy} x\sqrt{1-x^2}\,dx .$$

2099 — Verificar, para as funções $f_1 = ax^2 + 2b\,xy$, $f_2 = x + 2y$ e $f_3 = 3x + 2a\,y$ se é possível determinar a e b de modo tal que, das três fnnções, só uma seja independente.

2100 — Estudar a convergência do integral

$$\int_0^\infty e^{-u^3 \operatorname{sen}^2 \sqrt{u}}\, du .$$

I. S. T. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 1944 — 2.ª chamada.

2101 — Integrar a equação $yy' = \frac{2}{x^3} + \frac{3y^2}{x^2}$.

2102 — Determinar as assíntotas da curva $ax^3 + x^3y - ay^3 = 0$.

2103 — Calcular o integral $\iint \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2+1)^2}$ extendido a todo o plano.

I. S. T. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 1944 — 1.ª chamada — (exame teórico).

2104 — Comparação dos métodos de Cauchy e Lograngе-Charpit para a integração das equações de primeira ordem, não lineares, às derivadas parciais.

2105 — Quando é que o pfaffiano $\sum_{i=1}^{n} X_i\,dx_i$, $X_i = X_i\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, admite um factor integrante? Porquê?

I. S. T. — Cálculo — 2.º Exame de frequência — 1944 2.ª chamada — (exame teórico).

2106 — Curvas notáveis das superfícies.

2107 — Integração da equação diferencial total.

F. C. P. — Análise Superior — 1.º Exame de freqüência — 28 de Fevereiro de 1945.

2108 — O plano tangente no ponto π de uma superfície corta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B.

Determinar a equação de derivadas parciais das superfícies tais que $\overline{OA}\,.\,\overline{OB} = 1$.

Integrar a equação obtida e do integral completo deduzir a superfície integral que passa pela linha $xy = 1$, $z = 1$. R: *Como* $\overline{OA} = (xp+yq-z)/p$ *e* $\overline{OB} = (xp+yq-z)/q$, *a equação de derivadas parciais das superfícies pedidas é*

$$\frac{(xp+yq-z)^2}{pq} = 1\,, \quad ou \quad z = xp + yq - \sqrt{pq}\,.$$

Esta equação (de Clairaut) admite para integral completo $z = c_1 x + c_2 y - \sqrt{c_1 c_2}$.

A superfície integral que passa pela linha dada é $z = 2\sqrt{xy} - 1$.

2109 — Determinar uma função analítica $f = \varphi + i\psi$ da variável z, sabendo que $\varphi = x - \frac{x}{x^2+y^2}$ e que $f(1) = 0$. R: *Como* $\Delta\varphi = 0$, *o problema é possível. Tira-se:*

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 1 - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Logo $d\psi = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dx + \left(1 - \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\right) dy$.

Portanto $\psi = \frac{y}{x^2+y^2} + y + c_1$.

Será então

$$f(z) = \left(x - \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\left(\frac{y}{x^2+y^2} + y + c_1\right).$$

Como $f(1) = 0$, $c_1 = 0$. *Exprimindo* $f(z)$ *em função da variável* z, *vem* $f(z) = z - 1/z$.

2110 — Calcular $\int_S \frac{e^{z-z^2}}{z^2(z-1)}\,dz$ em que S é uma circunferência com o centro na origem e raio $R = 2$. R: *Pelo teorema dos resíduos:*

$$\int_S \frac{e^{z-z^2}}{z^2(z-1)}\,dz = 2\,i\pi\,(R_0 + R_1)\,,$$

onde R_0 *e* R_1 *são os resíduos correspondentes aos polos* 0 *e* 1.

Como $R_0 = -2$ *e* $R_1 = 1$, *o integral pedido é igual a* $-2\,i\pi$.

Soluções dos n.os 2108 a 2110 de Laureano Barros.

MECÂNICA RACIONAL

I. S. T. — Mecânica Racional — **1.º exame, 2-2-944.**

2111 — Integrar a equação às derivadas parciais $z(rt-s^2)+pqs=0$.

2112 — Desenvolver a função $f(x)=x(\pi-x)/8$ em série do seno, no intervalo $0\leq x\leq\pi$.

2113 — Averiguar que a equação integral

$$f(x)=\varphi(x)-\lambda\int_a^b k(x,y)\,\varphi(y)\,dy,$$

se fôr $k(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ e $\int_a^b f_1(x)\cdot f_2(x)\,dx=\mathrm{A}$, admite a solução

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda f_1(x)}{1-\mathrm{A}\lambda}\int_a^b f(y)\,f_2(y)\,dy.$$

2114 — Determinar as curvas de estacionaridade do integral $I=\int_{x_0}^{x_1}(x-x_0)^n\sqrt{1+y'^2}\,dx$.

BOLETIM BIBLIOGRÁFICO

Nesta secção, além de extractos de críticas aparecidas em revistas estrangeiras, serão publicadas críticas de livros e outras publicações de matemática de que os Autores ou Editores enviarem dois exemplares à Redacção

46 — NEVILLE, Eric Harold — **Jacobian Elliptic Functions** — Cambridge — 1944.

Oferta do «British Council» por intermédio do Instituto Britânico em Portugal.

O intento dêste livro, no dizer do autor, é restabelecer, sob um novo aspecto, à custa de *estruturas* fundamentais de definição, a aparelhagem algoritmica das clássicas funções elípticas de Jacobi, que o emprêgo das funções *theta* como elementos iniciais, embora artificiosos, da teoria, quási por completo banira dos modernos tratados. E, como as principais razões dêsse banimento se apoiavam nas dificuldades trazidas pela inversão do integral de Legendre, no caso da variável complexa, é à remoção dessas dificuldades que directamente visa a elegante construção dos novos elementos elípticos do autor, permitindo restaurar, em moldes acessíveis, a fertilíssima teoria clássica. E não se recuperam apenas os benefícios dessa fertilidade que tem, sobretudo, como razão de ser, a possibilidade de cálculo daquêles integrais com as quais as funções jacobianas estão tradicionalmente associadas, possibilidade que resulta, como se sabe, das relações que as ligam com as suas derivadas. A teoria exposta tem ainda o merito de elucidar mais fortemente do que a teoria elementar weierstrassiana da função $P(z)$ as relações que implicitamente ligam a dupla periodicidade da função elíptica às propriedades do integral que é a sua inversa. Como se consegue êste objectivo? O autor associa com uma arbitrária função weierstrassiana um conjunto simétrico de funções duplamente periódicas, tendo em cada paralelogramo dos períodos da função inicial, dois polos simples. Êsse conjunto converte-se num sistema jacobiano pela especialização dum dos parâmetros; e essa especialização, que é fundamental na teoria, importa, para o sistema obtido, a dupla periodicidade, sem impôr aos parâmetros a condição de serem reais. Seguidamente, demonstrações simples dos teoremas de adição e das transformações de Jacobi e Landen substituem as demonstrações algébricas exigidas pelo integral de inversão.

A *estrutura* é a configuração dos pontos congruentes (em que a função toma o mesmo valor); e, embora ela seja sempre formada (para uma função duplamente periódica) pelos pontos de intersecção de duas famílias de rectas paralelas equidistantes, no plano da variável complexa, essas famílias não são fundamentais: porque não são únicas e porque apenas têem interêsse os pontos congruentes em que se cruzam. Das estruturas, das células de congruência e do conceito geral de função elíptica se ocupa pormenorizadamente o autor na introdução do livro, na qual se inclui áinda a teoria das funções weierstrassianas, formulada a partir do conceito de estrutura. E logo no capítulo primeiro são introduzidos os elementos *primitivos* com as seguintes notações:

$$(1)\qquad \begin{cases} fjz=[P(z)-e_f]^{1/2}\\ gjz=[P(z)-e_g]^{1/2}\\ hjz=[P(z)-e_h]^{1/2}, \end{cases}$$

sendo $P(z)$ a função de Weierstrass e e_f, e_g, e_h os respectivos parâmetros (e_1, e_2, e_3) (ou sejam os valores de $P(z)$ nos pontos semi-períodos). As funções (1) são duplamente periódicas, e constroem-se, à sua custa, as restantes funções *elementares* (ao todo *doze*) definidas pelos símbolos

$$(2)\quad \begin{cases} fj\,(z-\omega_f) & fj\,(z-\omega_g) & fj\,(z-\omega_h) \\ gj\,(z-\omega_f) & gj\,(z-\omega_g) & gj\,(z-\omega_h) \\ hj\,(z-\omega_f) & hj\,(z-\omega_g) & hj\,(z-\omega_h)\,. \end{cases}$$

Dum modo geral, representando por ω_j um símbolo alternativo da origem, tôdas as funções elementares se podem escrever sob a forma pqz, sendo pqz a função que tem um *zero* em ω_p e um polo em ω_q $\left[\begin{matrix} p \\ q \end{matrix}\right\} = j\,,f\,,g\,,h \left\}\right]$.

Assim, visto que $fj\,(z-\omega_f)$ tem um polo em ω_f e zeros em $\omega_j\,,\omega_g\,,\omega_h\,,$ será $fj\,(z-\omega_f)=jfz$.

Esta notação é duma grande comodidade e compatível com a das funções primitivas.

Estas funções elementares são estudadas nos capítulos II e III; e os respectivos teoremas de adição no capítulo IV, iniciando-se no capítulo V o estudo do problema da inversão, que se prolonga nos capítulos seguintes, VI, VII, VIII e IX.

É só no capítulo X que se introduzem as funções de Jacobi, à custa das funções elementares, utilizando-se, sem esfôrço, todo o seu algoritmo no estabelecimento daquelas propriedades das funções jacobianas cuja dedução, pelos processos clássicos, tornava ingrata e fastidiosa a sua estruturação.

Depois duma breve exposição, no capítulo XVI, da teoria das funções *theta*, aborda o autor, no último capítulo, a teoria das funções jacobianas no campo real.

Um belo livro! Didáctico e original!

A. de Mira Fernandes

47 — MONTEIRO, A. A. e PAULO, J. SILVA. — **Aritmética Racional.** — Livraria Avelar Machado, 1945, 182 págs.

Todos los Profesores de enseñanza media reconocen que la introducción de la Aritmética racional constituye el punto más espinoso de un plan verdaderamente didáctico. Dos camiños se presentan para abordar tal problema pedagógico de la enseñanza de la Aritmética racional en el Bachillerato: el primero, consiste en simplificar el estudio de tal disciplina facilitándole con una amplia concesión a la intuición, introduciendo como postulados muchas propiedades casi evidentes de difícil demonstración y reduciéndolo a las propiedades más necesarias para pasar al estudio del Algebra. La segunda solución, más radical, se reduce a transportar la Aritmética racional al último curso del Bachillerato, cuando el desarrollo intelectual es mayor y el estudio puede ser más proficuo.

Este segundo criterio es el adoptado en su notabilísimo libro de Aritmética racional por los autores Profs. A. Monteiro y J. Silva Paulo, el primero Prof. universitario y el segundo de Liceo [1].

No han olvidado los autores la seria dificultad que supone para el alumno de Bachillerato el paso de la enseñanza intuitiva a la racional, y la gran desorientación que produce en ellos (si no se cuida extraordinariamente de la bondad de los métodos), al estudiar por segunda vez propiedades y teoremas que conocen y manejan hace tiempo. Por ello los autores han procurado y conseguido hacer un libro de lectura sencilla y sumamente atrayente, con multitud de ejemplos curiosos, notas históricas, etc.

En diez capítulos se exponen la teoría de números enteros y la de números racionales desde un punto de vista moderno (influido por las recientes teorías modernas: Algebra, Topología general, teoría de estructuras, etc.); pero en forma tan agradable y fácil que qualquier estudiante de los últimos cursos de bachillerato puede, sin ayuda especial de Profesor, realizar el estudio de este texto. A tal facilidad contribuye la multitud de bellos ejercicios y problemitas con que aparecen ilustrados los capítulos.

Sin proponérsolo, los autores han hecho una obra que tiene también un gran interés para el estudioso en general, porque le introduce de manera elemental y profunda en métodos peculiares del pensamiento matemático moderno, sin necesidad de una preparación técnica especial. Nos parece altamente recomendable la lectura de esta Aritmética racional para todo alumno de Bachillerato que, al terminar, piense dedicarse a estudiar Matemáticas.

Com nuestra calurosa felicitación a los autores terminamos expresándoles nuestro vivo deseo de que aparezca en plazo breve un segundo tomo dedicado a los capítulos de la Aritmética racionl que no han sido tratados en éste.

El libro está dedicado a M. Zaluar y H. Ribeiro, cuya destacada labor en la Matemática portuguesa es bien conocida.

Sixto Rios

ÍNDICE — Cap. 0. Aritmética Racional — Cap. I. Igualdade — Cap. II. Adição e multiplicação — Cap. III. Subtracção e divisão — Cap. IV. Ordem — Cap. V. Indução finita — Cap. VI. Representação dos Enteiros — Cap. VII. Divisibilidade — Cap. VIII. Restos — Cap. IX. Frações.

Esta crítica é também publicada em «Revista Matemática Hispano Americana».

[1] Quizá no es superfluo señalar este libro como un ejemplo de la importância de las aportaciones realizadas por los Profesores de Universidad para la renovación de los métodos y contenido de la enseñanza media.

48 — AREAL, Américo — **Álgebra Prática** (Exercícios), 6.º ano. Editora Educação Nacional, Pôrto.

São os livros desta natureza, exercícios de revisão e preparação, bastante úteis quer a alunos quer a mestres, desde que à escolha e ordenação dos exercícios tenha presidido um bom critério pedagógico. O livro do sr. Areal contém 359 exercícios ordenados de acôrdo com o programa do 6.º ano, alguns dos quais têm saído em exames liceais. É mais um livro de exercícios que tende a fornecer ao aluno matéria de preparação para um exame escrito feito nos moldes das antigas provas.

J. da Silva Paulo

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

REVISTAS E PUBLICAÇÕES EXCLUSIVAMENTE DE MATEMÁTICA

NACIONAIS

Publicações do Centro de Estudos Matemáticos do Pôrto:

N.º 9 *Sur une certaine classe de polynomes à coefficients complexes* — 1944 — por J. Gaspar Teixeira.

N.º 12 *Sôbre uma Construção Algébrica da Noção de Integral* - 1945 — por Ruy Luís Gomes.

N.º 13 *Sôbre a Construção Algébrica da Medida à Borel* — 1945 — L. Neves Real.

N.º 14 *Sôbre os Anéis Semi-primários* — 1945 — por A. Almeida Costa.

N.º 15 *As Funcionais Semi-contínuas e a Propriedade de Darboux* — 1945 — A. Pereira Gomes.

N.º 16 *Sôbre a Noção do Espaço compacto* — 1945 — A. Pereira Gomes.

Publicações da Junta de Investigação Matemática — Cadernos de Análise Geral:

N.º 13 «*Geometria das Distâncias*» — 1 — *Generalidades — Álgebra Vectorial* — por A. de Mira Fernandes.

ESTRANGEIRAS

Argentina

Boletin Matemático — (Buenos Aires) — Revista Argentina de Matemática — Ano XVII, n.os 8, 9 e 10. Ano XVIII, n.os 1 e 2.

Mathematicae Notae — (Rosário) — Boletin del Instituto de Matemática — Facultad de Ciências Matemáticas, etc. de la Universidad Nacional del Litoral — Ano IV, 1944.

Revista de la Unión Matemática Argentina — (Buenos Aires) — Volume X, n.os 3 4. — 1945.

Cuba

Revista de la Sociedad Cubana de Ciençias Físicas y Matemáticas — (Habana) — Vol. I, n.º 6 — 1944.

Espanha

Matemática Elemental — (Madrid) — Revista publicada por el Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española — 4.ª série. Tomo V, n.os 1 e 2 — 1945.

Estados Unidos da América do Norte

Scripta Mathematica — (New-York) — A quarterly journal devoted to the Philosophy, History, and Expository Treatment of Mathematics. Vol. X, n.os 1-4 — 1944.

Inglaterra

The Journal of the London Mathematical Society — Vol. 19, Part. 2, n.º 74 — April, 1944.

The Mathematical Gazette — (London) — Vol. XXIX n.os 283 e 284 — 1945.

A Treatise on the Theory of Bessel Functions — G. N. Watson — 2.d edition — 1944 — Cambridge (Oferta do British Council).

OUTRAS PUBLICAÇÕES

Afinidades — Revista de Cultura Luso-Francesa n.º 12 — Junho de 1945.

Euclides — (Madrid) — Revista mensual de Ciências Exactas, Físicas, Químicas, Naturales y sus Aplicaciones. Tomo V, n.º 50, 51 e 52, Abril a Junho de 1945.

Portugaliae Acta Biologica — Vol. I, n.º 1 Lisboa, 1944.

Scientia Revista dos Alunos da Faculdade de Ciências de Lisboa, n.º 15, 1945.

Técnica Revista de Engenharia dos Alunos do I. S. T. n.os 155 e 156, Abril e Maio, 1945.

Estudos de Demografia Portuguesa — Dissertação para o doutoramento em Ciências Económicas e Financeiras — por João Remy T. Freire.

Da influência das fôrças de «spin» nas reacções entre partículas nucleares — Contribuïção para o estudo da espectroscopia nuclear — Dissertação para doutoramento na Faculdade de Ciências da Univerversidade de Coimbra — por José L. Rodrigues Martins Coimbra, 1944.

Statistics — por L. H. C. Tippett — The Home University Library — Oxford — 1943 (oferta do British Council).

Prontuário de língua portuguesa — por F. Xavier Roberto e Luís de Sousa — Lisboa, 1945.